

2015 级概率与数理统计试题 (A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 8 页, 八个大题, 满分 100 分; 最后一页空白纸为草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

附表:

$$F_{0.1}(1,2) = 8.53, F_{0.9}(1,2) = 0.0202, F_{0.9}(2,1) = 0.1173, F_{0.1}(2,1) = 49.5,$$

$$\sqrt{1.2275} = 1.1079, \sqrt{75.8} = 8.7063, \sqrt{168.6725} = 12.8974, \Phi(0.1723) = 0.5684,$$

$$\Phi(0.1155) = 0.5460, t_{0.05}(24) = 1.7109, t_{0.10}(24) = 1.3178, t_{0.05}(25) = 1.7081,$$

$$t_{0.10}(25) = 1.3163, \chi_{0.1}^2(24) = 33.196, \chi_{0.05}^2(24) = 36.415, \chi_{0.9}^2(24) = 15.659,$$

$$\chi_{0.95}^2(24) = 13.848, \Phi(1.645) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.35) = 0.9115,$$

$$\Phi(1.45) = 0.9265.$$

一、(12 分)

有三个口袋, 在甲袋中装有 6 只白球和 4 只红球; 乙袋中装有 12 只白球和 8 只红球; 丙袋中装有 6 只白球和 14 只红球. 随机地选取一个口袋并从中随机地取出一只球.

- (1) 求取出的球是白球的概率;
- (2) 若已知取出的球是白球, 求它是来自甲袋的概率.

二、(12 分)

1. 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{3}{10}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{10}, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

写出 X 的分布律.

2. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$. (1) 写出 X 的概率密度函数; (2) 求 $Y = \ln(X^{-2})$ 的概率密度函数.

三、(16 分)

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3e^{-(x+3y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 并判断 X 和 Y 是否相互独立 (说明理由);

(2) 求 $Z = X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$;

(3) 引入随机变量 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$, 求 U 的分布律.

四、(16 分)

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$, $x \in R$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 求 $E(X)$.

2. 已知随机变量 X 和 Y 都服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 且其相关系数为 ρ_{XY} ($0 < \rho < 1$), 令 $Z = aX + bY$, $W = aX - bY$, $a > 0, b > 0$ 为常数. (1) 求随机变量 Z 和 W 的相关系数 ρ_{ZW} ; (2) 当 a, b 取何值时, Z 和 W 不相关?

五、(8 分)

射手打靶得 10 分的概率为 0.5, 得 9 分的概率为 0.3, 得 8 分, 7 分和 6 分的概率分别为 0.1, 0.05 和 0.05, 若此射手进行 100 次独立射击, 至少可以得 930 分的概率是多少?

六、(8分)

设 X_1, X_2, \dots, X_9 为独立同分布的随机变量, 均服从 $N(0, \sigma^2)$.

(1) 求 $\frac{2(X_1 + X_2 - X_3)^2}{(X_4 - X_5 + X_6)^2 + (X_7 + X_8 + X_9)^2}$ 的分布.

(2) 求常数 c 的值, 使得 $P\left(\frac{(X_1 + X_2 - X_3)^2}{(X_4 - X_5 + X_6)^2 + (X_7 + X_8 + X_9)^2} < c\right) = 0.9$.

七、(12分)

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 θ 的矩估计量, 并判断该估计量是否是 θ 的无偏估计;

(2) 求参数 θ 的最大似然估计量.

八、(16分)

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu \in R, \sigma^2 > 0$ 均未知. 现作独立观察

25 次, 经计算得样本均值 \bar{X} 和样本标准差 S 的观测值为 $\bar{x} = 950, s = 100$.

(1) 在显著性水平 $\alpha = 0.1$ 下, 检验 $H_0: \mu = 1000; H_1: \mu \neq 1000$

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.1$ 下, 检验 $H_0: \sigma^2 \leq 96^2; H_1: \sigma^2 > 96^2$.

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 其中 $\mu \in R$ 未知. X_1, X_2, \dots, X_9 为来自总体 X

的样本, \bar{X} 为样本均值. 考虑假设检验问题 $H_0: \mu = 0; H_1: \mu \neq 0$, 拒绝域为

$W = \{3|\bar{X}| \geq 1.96\}$, 求检验犯第一类错误的概率和第二类错误的概率(如果得不到具

体数值, 可用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示).