数字逻辑

第二章 布尔代数

北京理工大学

计算机学院

黄永刚

一. 二值逻辑

- 1. 定义
- 2. 真值表

一. 定义

- 描述二值变量以及对其施加的逻辑运算
  - 变量取值为0或1
  - 基本逻辑运算
    - 与（AND） $X \cdot Y$, XY
    - 或（OR） $X+Y$
    - 非（NOT） $\overline{X}$
- 二值逻辑类似于二进制运算
  - 与和乘
  - 或和加
- 不同
  - 逻辑变量只能是1或0，而算术变量可任意

2. 真值表

- 变量组合和结果的表形式

AND		
X	Y	$Z = X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
X	Y	$Z = X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

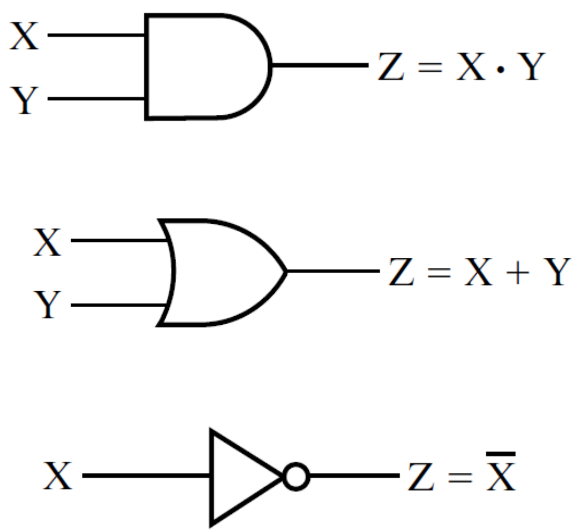
NOT	
X	$Z = \overline{X}$
0	1
1	0

二. 逻辑门

- 1. 定义
- 2. 定时图
- 3. 延时
- 4. 其他门

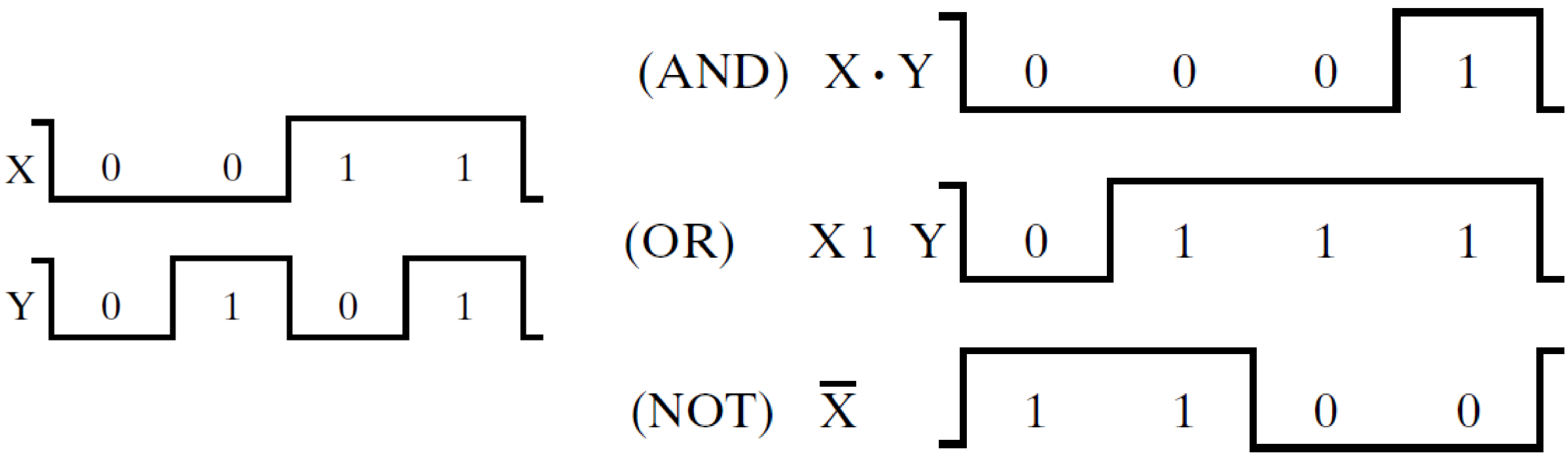
1. 定义

- 处理一个或多个输入，产生一个输出信号电子电路
  - 实现基本逻辑运算
  - 与门
  - 或门
  - 非门或反相器



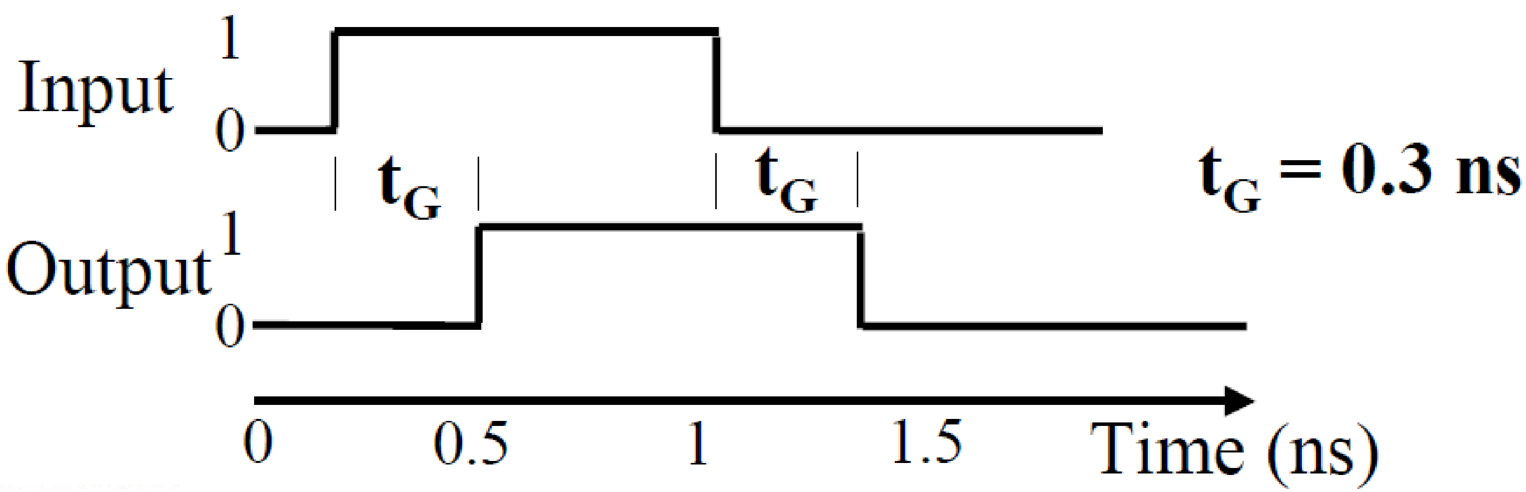
2. 定时图

- **定时图**
  - x: 时间
  - y: 电平



3. 延时

- 输入变化引起输出变化所需时间
- 用t_G表示



4. 其他门

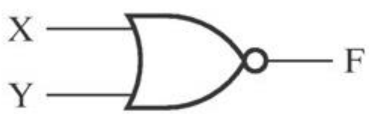
NAND

$$F = \overline{X \cdot Y}$$

X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

常用

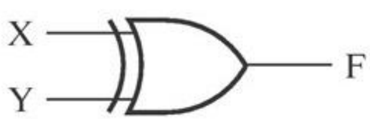
NOR



$$F = \overline{X + Y}$$

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

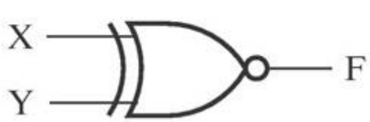
Exclusive-OR
(XOR)



$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y = X \oplus Y$$

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exclusive-NOR
(XNOR)



$$F = XY + \overline{X}\,\overline{Y} = \overline{X \oplus Y}$$

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

三. 布尔代数

- 1. 定义
- 2. 恒等式
- 3. 代数运算
- 4. 反函数

1. 定义

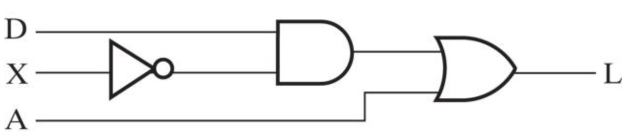
- 布尔代数是处理二进制变量和逻辑运算的代数方法
- 布尔表达式是由二进制变量、常量0和1、逻辑运算符和括号组成的代数运算式

$$D\overline{X} + A$$

- 布尔函数是一个布尔等式，由函数变量、等号和布尔表达式组成

$$L(D, X, A) = D\overline{X} + A$$

- 布尔函数可以用真值表来表示
- 布尔函数可以转换为逻辑电路图



- 三者等价
- 真值表唯一，布尔函数和逻辑电路图不唯一

2. 恒等式

- 对偶原则
  - 0和1对偶
  - 与和或对偶

1. $X+0=X$
2. $X\cdot 1=X$
3. $X+1=1$
4. $X\cdot 0=0$
5. $X+X=X$
6. $X\cdot X=X$
7. $X+\overline{X}=1$
8. $X\cdot\overline{X}=0$
9. $\overline{\overline{X}}=X$

2. 恒等式

- 对偶原则
  - 0和1对偶
  - 与和或对偶

交换律

结合律

10. $X+Y=Y+X$

11. $XY=YX$

12. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$

13. $(XY)Z=X(YZ)$

14. $X(Y+Z)=XY+XZ$

15. $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

16. $\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$

17. $\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$

分配律

德摩根定理

2. 恒等式

- 德摩根定理验证：真值表
- 德摩根定理可以扩展到三变量或者多变量

$$\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X}_1\overline{X}_2\ldots\overline{X}_n$$

$$\overline{X_1X_2\ldots X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_n$$

3. 代数运算

- 利用代数性质对布尔函数化简，可简化电路
  - 1~3和4~6对偶
  - 1 称为吸收律

$$\mathbf{1.}\quad X + XY = X\cdot 1 + XY = X(1+Y) = X\cdot 1 = X$$

$$\mathbf{2.}\quad XY + X\overline{Y} = X(Y+\overline{Y}) = X\cdot 1 = X$$

$$\mathbf{3.}\quad X + \overline{X}Y = (X+\overline{X})(X+Y) = 1\cdot(X+Y) = X+Y$$

$$\mathbf{4.}\quad X(X+Y) = X\cdot X + X\cdot Y = X + XY = X(1+Y) = X\cdot 1 = X$$

$$\mathbf{5.}\quad (X+Y)(X+\overline{Y}) = X + Y\overline{Y} = X + 0 = X$$

$$\mathbf{6.}\quad X(\overline{X}+Y) = X\overline{X} + XY = 0 + XY = XY$$

3. 代数运算

一致性定理

$$
\begin{aligned}
XY + \overline{X}Z + YZ &= XY + \overline{X}Z + YZ(X + \overline{X}) \\
&= XY + \overline{X}Z + XYZ + \overline{X}YZ \\
&= XY + XYZ + \overline{X}Z + \overline{X}YZ \\
&= XY(1 + Z) + \overline{X}Z(1 + Y) \\
&= XY + \overline{X}Z
\end{aligned}
$$

对偶式

$$
(X + Y)(\overline{X} + Z)(Y + Z) = (X + Y)(\overline{X} + Z)
$$

4. 反函数

- **F的反函数：** 真值表中将F值1和0互换
- **函数取反方法1：** 德摩根定理

$$
\begin{aligned}
\overline{F_1} &= \overline{\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z} = \overline{(\overline{X}Y\overline{Z})}\cdot\overline{(\overline{X}\,\overline{Y}Z)} \\
&= (X + \overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{F_2} &= \overline{X(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)} = \overline{X} + \overline{(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)} \\
&= \overline{X} + (\overline{\overline{Y}\,\overline{Z}}\cdot\overline{YZ}) \\
&= \overline{X} + (Y + Z)(\overline{Y} + \overline{Z})
\end{aligned}
$$

- 函数取反方法2：对偶式+变量取反

$$F_1 = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z = (\overline{X}Y\overline{Z}) + (\overline{X}\,\overline{Y}Z)$$

- 对偶式

$$(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

- 变量取反

$$(X + \overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z}) = \overline{F}_1$$

四. 标准形式

- 1. 最小项和最大项
- 2. 最小项之和和最大项之积
- 3. 积之和和和之积

1. 最小项和最大项

- 所有变量以原变量或反变量按序出现，这样的乘积项叫做最小项
- n个变量，共有2^n个不同的最小项
- 对应变量的1个组合，对该变量组合最小项为1
- 变量组合对应的二进制值为最小项序号

X	Y	Z	Product Term	Symbol	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\bar{X}\bar{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\bar{X}Y\bar{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\bar{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\bar{Y}\bar{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\bar{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\bar{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

1. 最小项和最大项

- 所有变量以原变量或反变量按序出现，这样的求和项叫做最大项
- n个变量，共有2^n个不同的最大项
- 对应变量的1个组合，对该变量组合最大项为0
- 变量组合对应的二进制值为最大项序号

X	Y	Z	Sum Term	Symbol	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

1. 最小项和最大项

X	Y	Z	Product Term	Symbol
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6
1	1	1	XYZ	m_7

X	Y	Z	Sum Term	Symbol
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7

$$m_i = \overline{M}_i,\ \ M_i = \overline{m}_i$$

2. 最小项之和和最大项之积

- 最小项之和
  - 由真值表中所有函数取值为1的最小项之和

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

  - 缩写 $F(X,Y,Z) = \Sigma m(0,2,5,7)$

- 最大项之积
  - 由真值表中所有函数取值为0的最大项之积
  - 也可反函数最小项之和取反得到

$$F = \overline{m_1 + m_3 + m_4 + m_6} = \overline{m_1}\cdot\overline{m_3}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_6}$$

$$= M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \text{ (since } \overline{m_j} = M_j\text{)}$$

$$= (X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+\overline{Z})(\overline{X}+Y+Z)(\overline{X}+\overline{Y}+Z)$$

  - 缩写 $F(X,Y,Z) = \Pi M(1,3,4,6)$

2. 最小项之和和最大项之积

- 好处
  - 容易进行比较
  - 和真值表对应

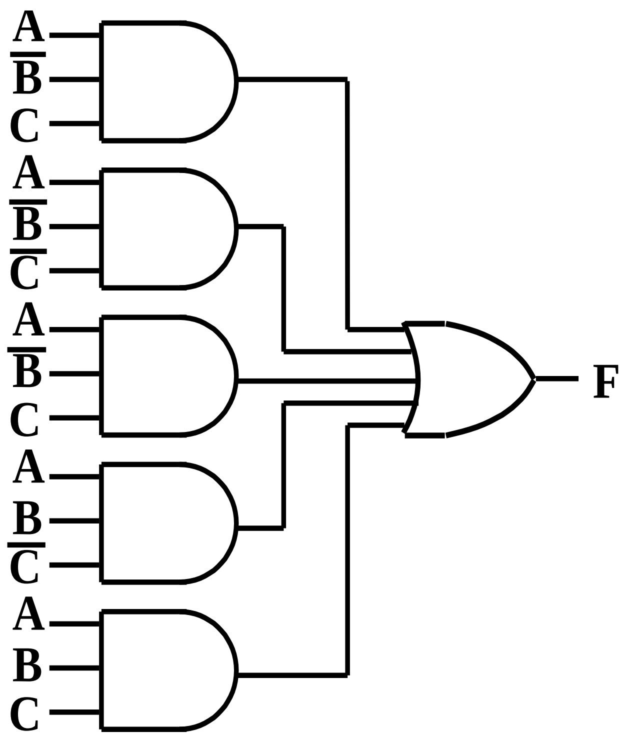
$$F(X,Y,Z) = \Sigma m(0,2,5,7)$$

$$F(X,Y,Z) = \Pi M(1,3,4,6)$$

3. 积之和和和之积

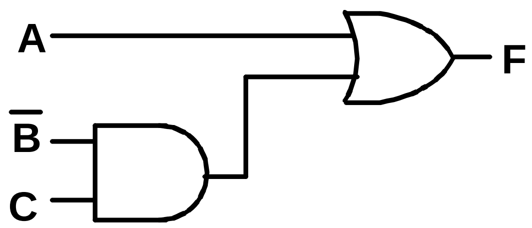
最小项之和

$$F(A,B,C)=\Sigma m(1,4,5,6,7)$$



3. 积之和和和之积

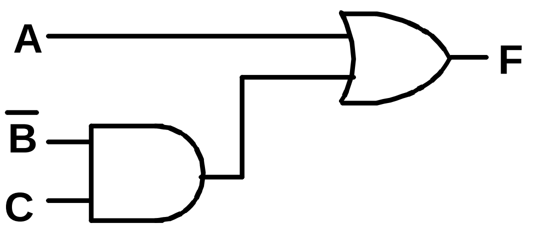
- 化简
  - $F=A+\overline{B}C$



- 积之和
  - 简化了的积之和
  - 每项最多包含所有变量
- 同样
- 和之积
  - 简化了的和之积
  - 每项最多包含所有变量

3. 积之和和和之积

- 积之和
  - 先与门后或门
- 和之积
  - 先或门后与门
- 均为两级电路
- 可看出
  - 不同的标准形公式复杂度不同
  - 对应不同的电路实现
- 如何得到最简单的电路实现？



五. 卡诺图

- 1. 成本标准
- 2. 卡诺图
- 3. 卡诺图化简

1. 成本标准

- 成本标准：衡量电路的复杂度，优化目标
- 文字成本(L)：逻辑图对应的表达式中文字个数

L=5 $F = AB + C(D + E)$

L=6 $= AB + CD + CE$

- 门输入成本(G)：逻辑图中门的输入端个数，不算非门

G=10 $F = ABCD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

G=12 $H = (\overline{A} + B)(\overline{B} + C)(\overline{C} + D)(\overline{D} + A)$

- 带非门的门输入成本(GN)：门的输入端个数，算非门

GN=14 $F = ABCD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

GN=16 $H = (\overline{A} + B)(\overline{B} + C)(\overline{C} + D)(\overline{D} + A)$

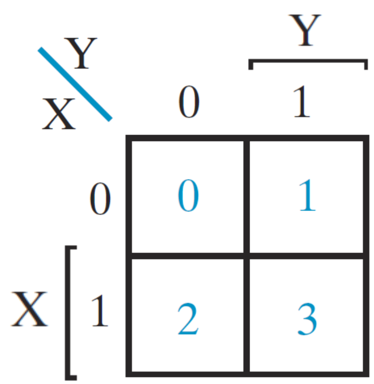
注：同一个输入，其非门算一次（共享）

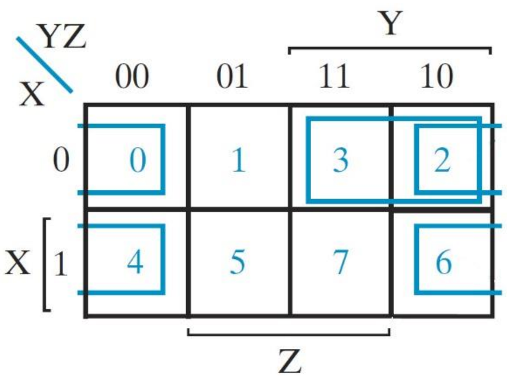
1. 成本标准

- 例
- $F=ABC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
- L=6， G=8， GN=10
- $F=(A+\overline{C})(B+\overline{C})(\overline{A}+B)$
- L=6 ， G=9， GN=11

2. 卡诺图

- 卡诺图：方格组成的集合
  - 每个方格代表1个最小项
  - 真值表的变形
  - 布尔函数的图形表示
- 简化布尔函数的工具：尽量降低电路成本

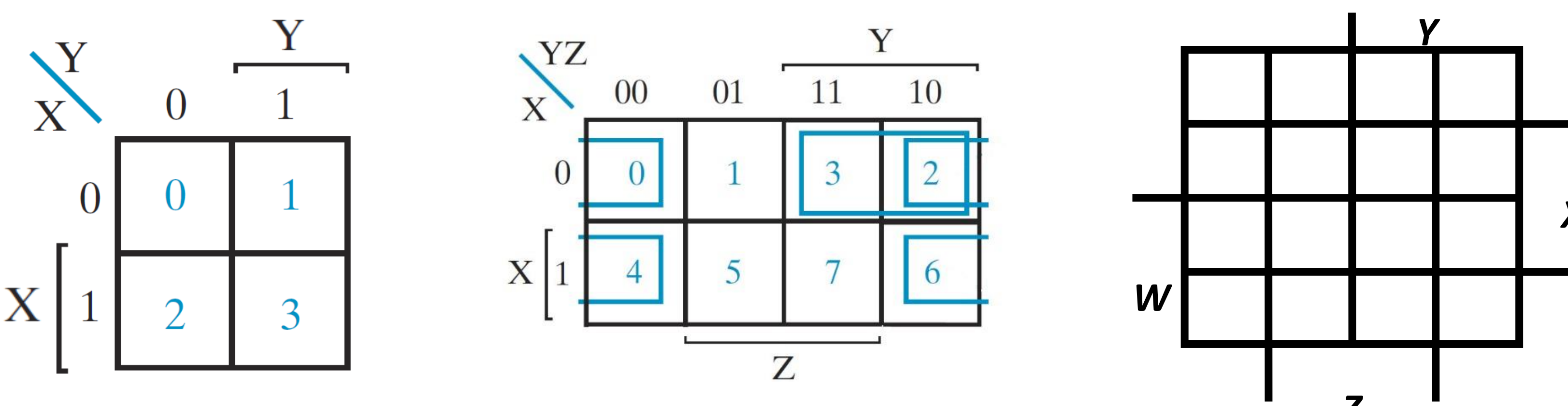




2. 卡诺图

卡诺图构造

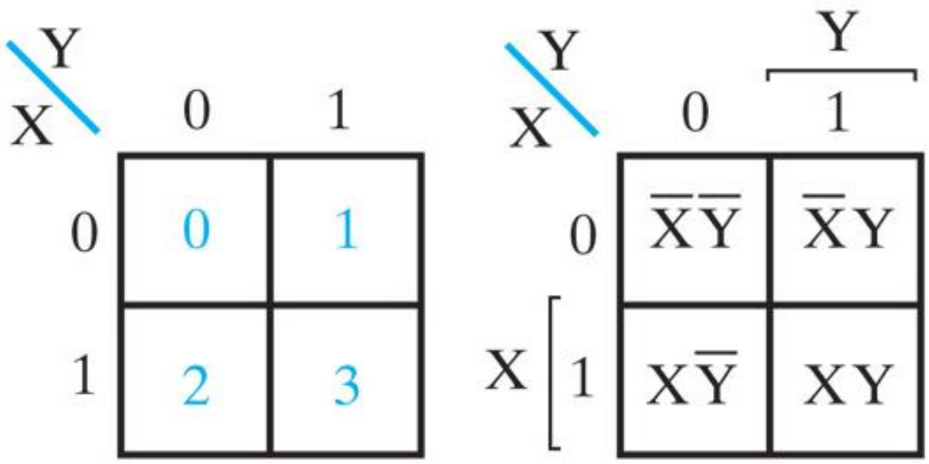
- 1. 方格数量等于最小项数量
- 2.1 行变量和列变量位于左上方，每一行/列标记变量的二进制组合m_i
- 2.2 或变量取值为1的行/列用方括号括起，在变量旁边标1个变量
- 3. 相邻项只有一个变量值不同（格雷码）



2. 卡诺图

二变量卡诺图

- 变量顺序
- 最小项序号排序

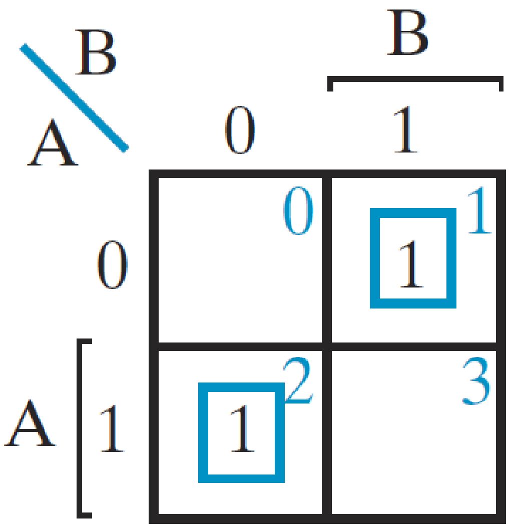


2. 卡诺图

二变量卡诺图

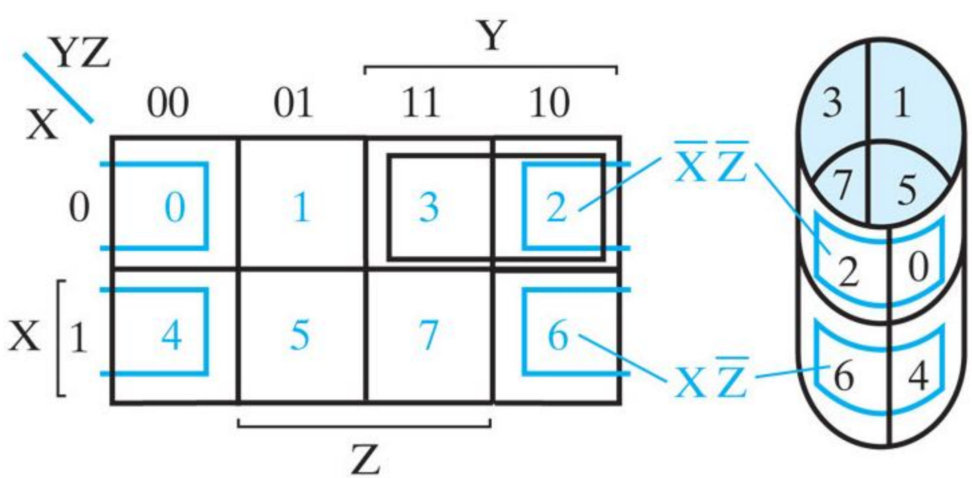
- 卡诺图是真值表的变形
- 卡诺图只标出1

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



2. 卡诺图

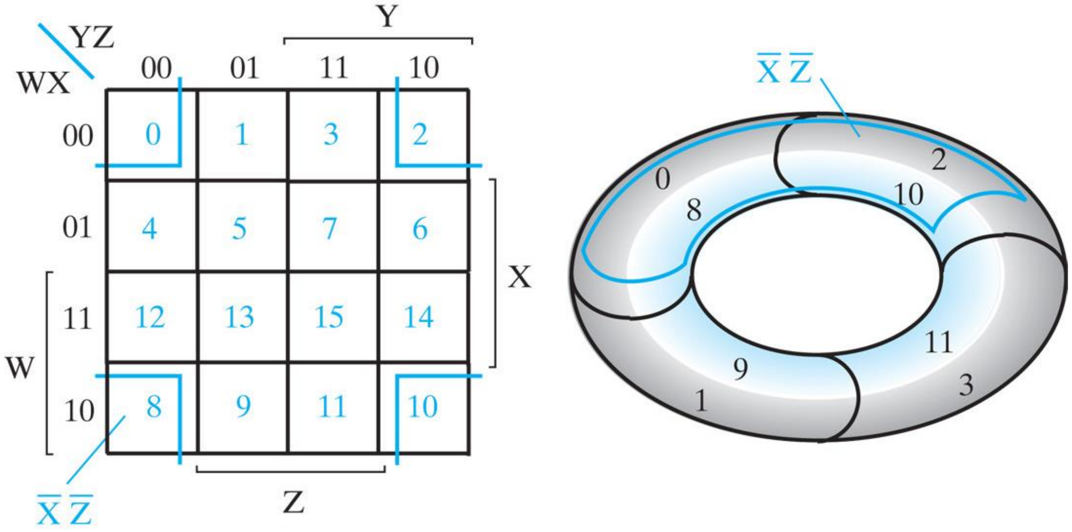
- 三变量卡诺图
  - 变量顺序
  - 最小项序号排序
  - 最小项相邻关系



2. 卡诺图

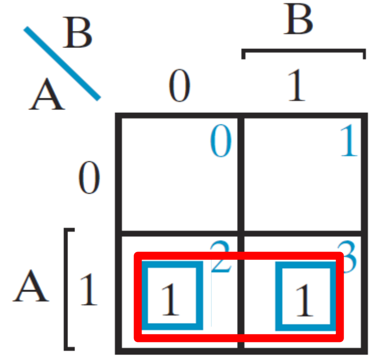
四变量卡诺图

- 变量顺序
- 最小项序号排序
- 最小项相邻关系



3. 卡诺图化简

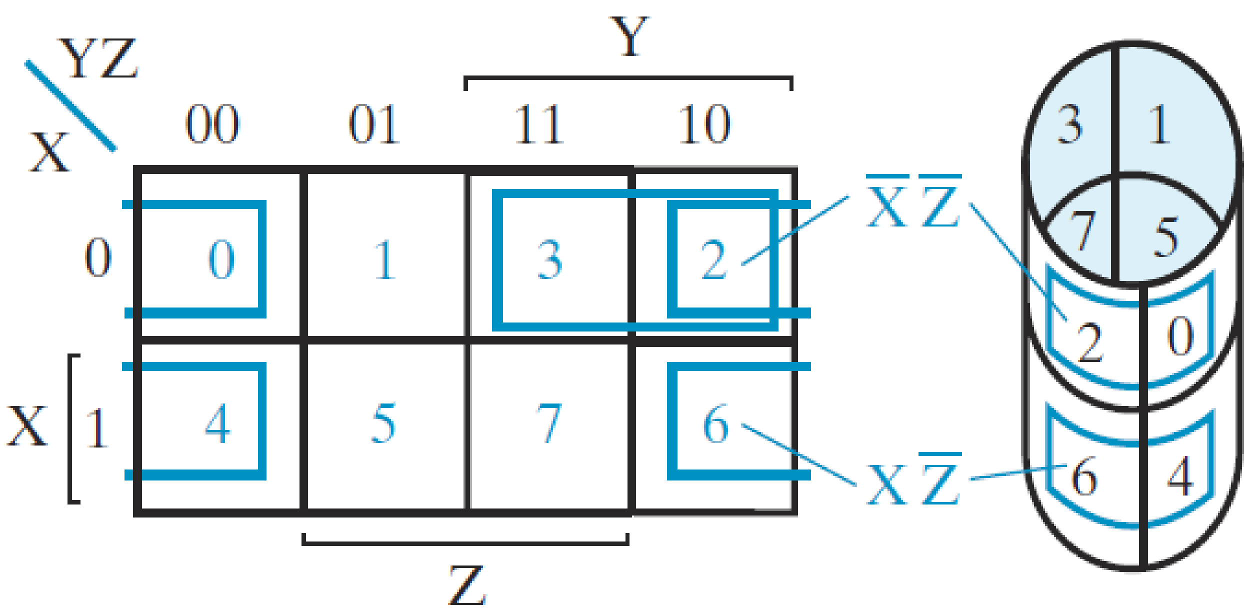
- 相邻方格：二进制表示中只有一个变量值不同
- 基于定理： $AB + A\bar{B} = A$



- 通过矩形（含2^n方格）可减少乘积项变量个数
- 若矩形贯通变量的01，则该变量被消去
- 2个方格减少1个变量 $(\bar{X}Y)Z + (\bar{X}Y)\bar{Z} = \bar{X}Y$
- 4个方格减少2个变量
- 8个方格减少3个变量
- 16个方格减少4个变量

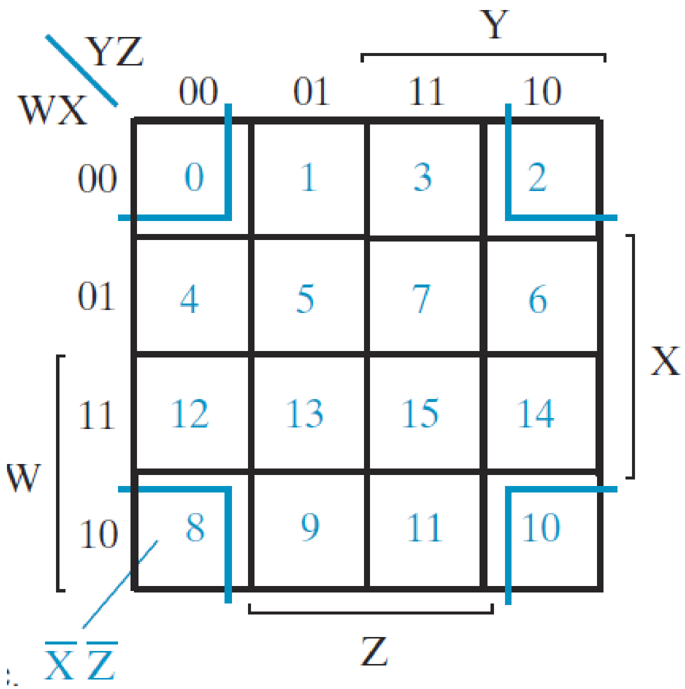
三变量卡诺图化简

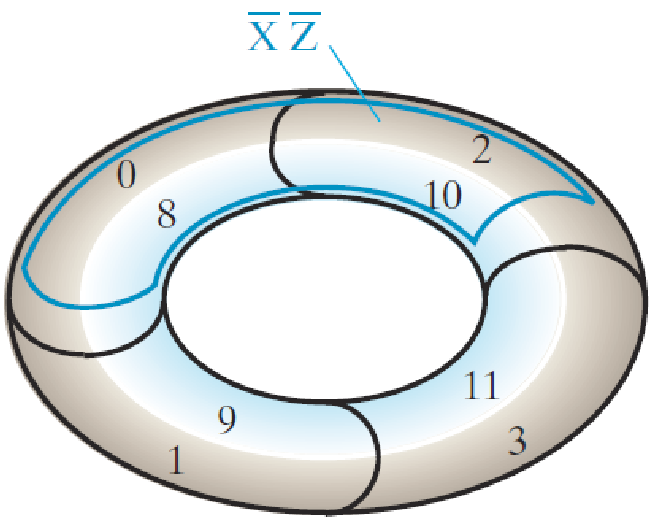
- 若矩形仅贯通变量的0或1，则该变量保留
- 若矩形贯通变量的01，则该变量消去



四变量卡诺图化简

- 若矩形仅贯通变量的0或1，则该变量保留
- 若矩形贯通变量的01，则该变量消去





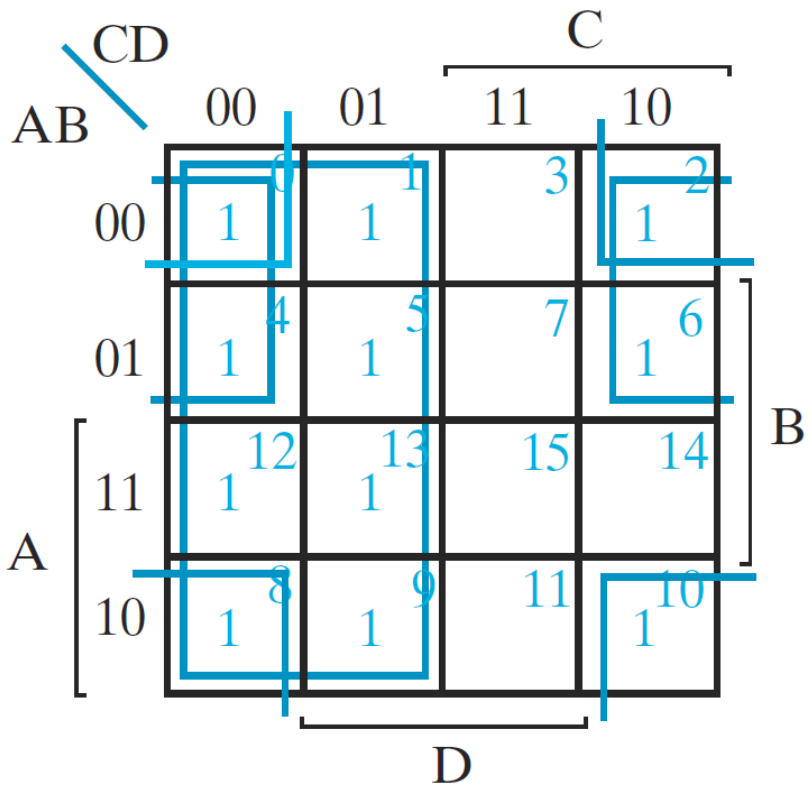
注意是矩形

AD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

- 例子 $F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,2,4,5,6,8,9,10,12,13)$
- 矩形画法不唯一
- 答案可能很多个？如何得到成本较优的？



$$F = \overline{C} + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{D}$$

六. 系统化简

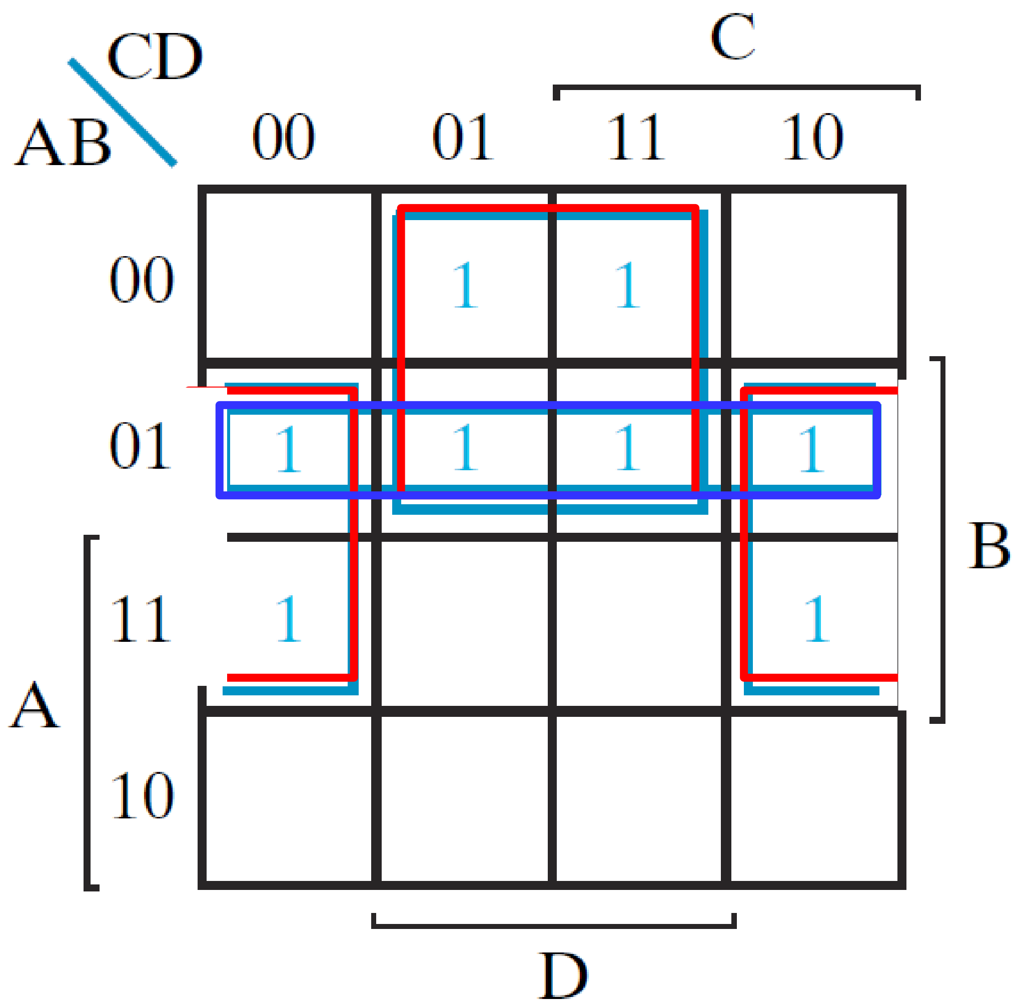
- 1. 蕴含项
- 2. 系统化简
- 3. 和之积优化
- 4. 无关最小项

1. 蕴含项

- 蕴含项
  - 是乘积项
  - 由1方格组成的矩形
- 主蕴含项
  - 是蕴含项
  - 由尽可能多的1方格组成的矩形
- 质主蕴含项
  - 是主蕴含项
  - 有至少1个1方格仅存在于该矩形

1. 蕴含项

例子



2. 系统化简

- 步骤

① 确定所有主蕴含项

② 对质主蕴含项进行逻辑和

③ 加上非质主蕴含项来覆盖未被包含的1

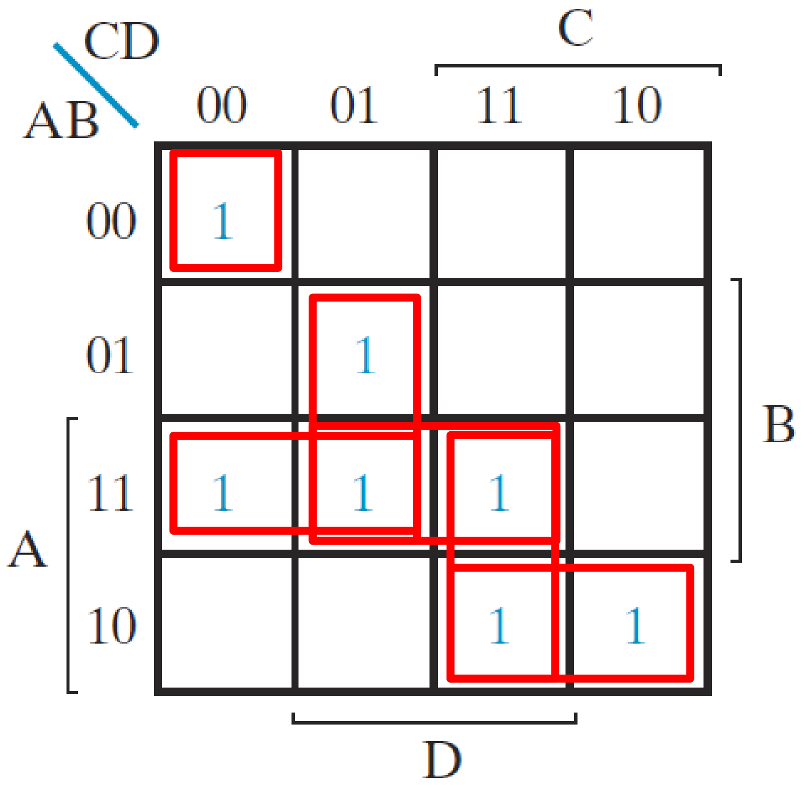
➢ 选择规则

a. 尽可能减少主蕴含项重叠

b. 选择主蕴含项至少覆盖一个未被包含的1

2. 系统化简

① 确定所有主蕴含项



$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$B\bar{C}D$

$AB\bar{C}$

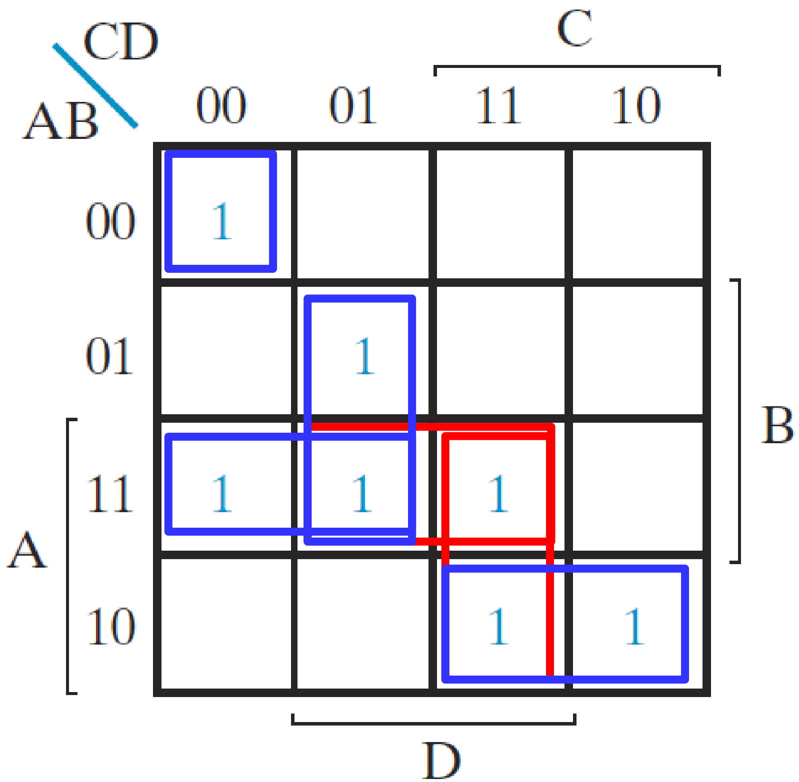
$A\bar{B}C$

ABD

ACD

2. 系统化简

② 对质主蕴含项进行逻辑和



$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$B\bar{C}D$

$AB\bar{C}$

$A\bar{B}C$

ABD

ACD

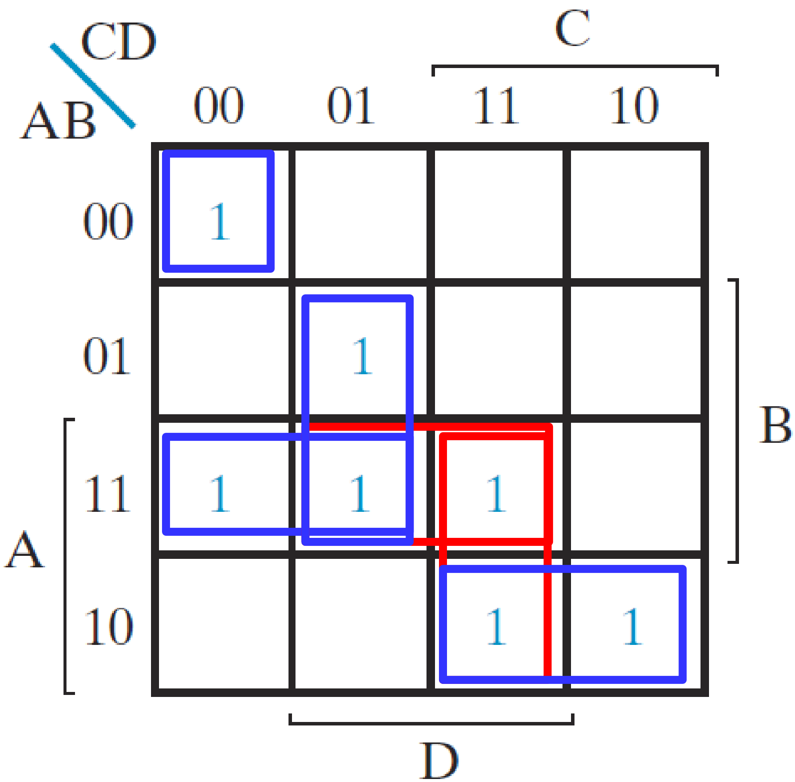
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+B\bar{C}D+AB\bar{C}+A\bar{B}C$

2. 系统化简

③ 加上非质主蕴含项来覆盖未被包含的1

a. 尽可能减少主蕴含项重叠

b. 选择主蕴含项至少覆盖一个未被包含的1



$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+B\bar{C}D+AB\bar{C}+A\bar{B}C$$

$$+\begin{cases} ACD \\ ABD \end{cases}$$

3. 和之积优化

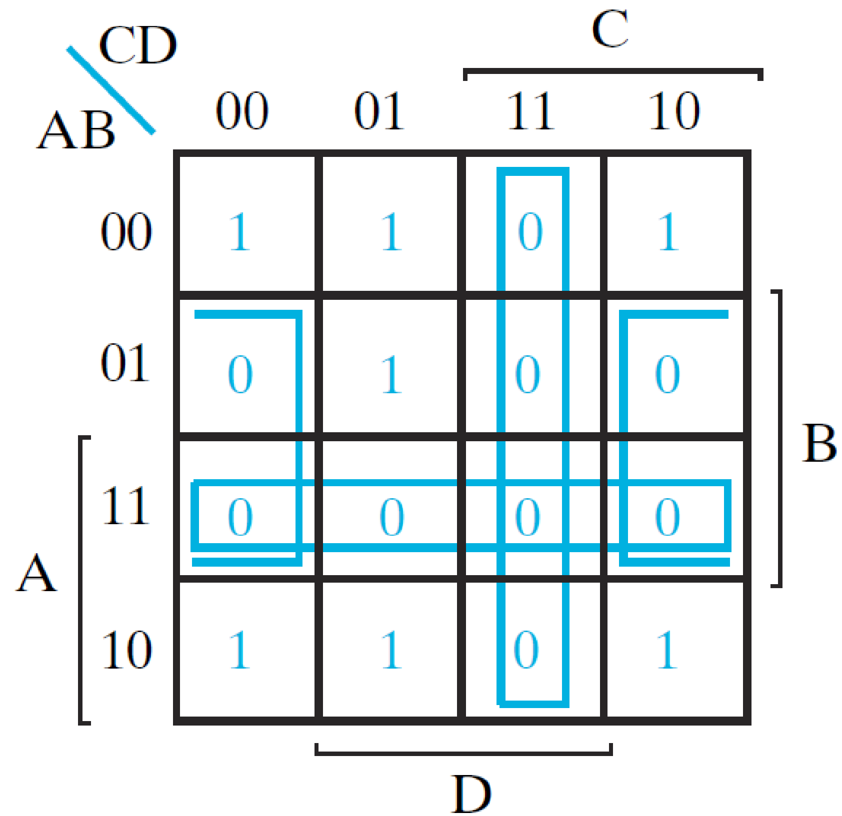
- 步骤

  ① 反函数的积之和：将标记为0的方格进行优化

  ② 将反函数取反：对偶式+变量取反

3. 和之积优化

① 反函数的积之和：将标记为0的方格进行优化



$$\overline{F}=AB+C\overline{D}+B\overline{D}$$

3. 和之积优化

② 将反函数取反：对偶式+变量取反

$$\overline{F} = AB + C\overline{D} + B\overline{D}$$

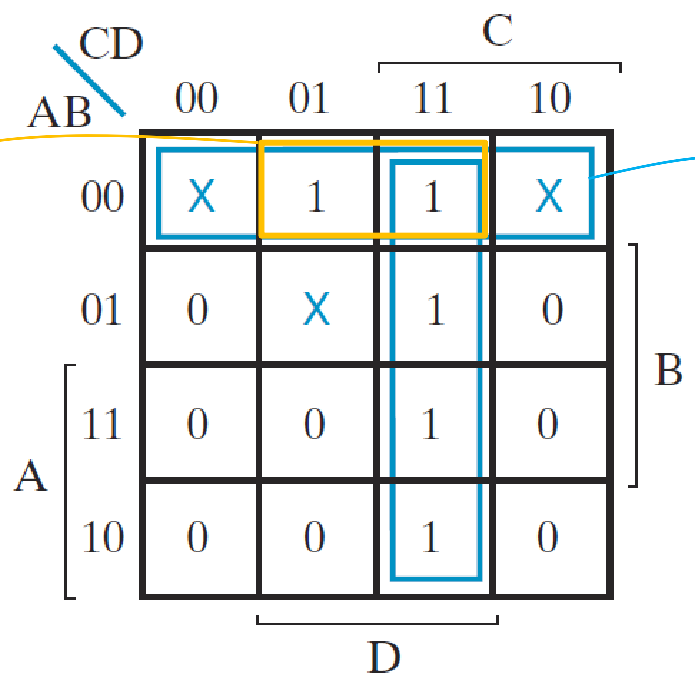
$$\Downarrow$$

$$F = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + D)(\overline{B} + D)$$

4. 无关最小项

- 函数对某些变量组合（最小项）取值不确定
  - 某些变量组合不会出现
  - 对某些变量组合的输出不关心
- 这类函数称为不完全确定函数
- 无关最小项：未指定函数值的最小项
- 在卡诺图中将无关最小项表示为 x
- x 有助于卡诺图化简
  - 1方格化简时，可包含使得主蕴含项最简单的 x
  - 0方格化简时，可包含使得主蕴含项最简单的 x

4. 无关最小项



$$F=CD+\bar{A}\bar{B}D$$

$$F=CD+\bar{A}\bar{B}$$