课程编号：100172003

北京理工大学 2018-2019 学年第一学期

2017 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号____________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.83)=0.997$，$\Phi(1.04)=0.8508$，$\Phi(4.96)=1$，

$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，

$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$

一、填空题（12 分）

得分	

1. 已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，记 $P(A)=p$，则 $P(B)=$____________.

2. 一射手对同一目标独立重复地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手进行一次射击的命中率 $p=$____________.

3. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，已知 $P(X>a)=P(X<a)$，则 $a=$____________.

4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $P(X=0)=e^{-3}$，则 $\lambda=$____________.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(1,1)$，且 X,Y 相互独立，则 $P(X-Y\le 3)=$____________.

6. 设 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 2 的泊松分布，而且 X 与 Y 相互独立，则 $P(\max(X,Y)\neq 0)=$________，$P(\min(X,Y)\neq 0)=$________.

7. 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且都服从 $N(1,2)$，则 $E[(X-Y)^2]=$____________.

8. 掷一枚均匀的骰子 420 次，则得到的点数之和大于 1540 的概率近似为____________.

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 未知，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差, 则 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为________________________.

10. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，其中 $\mu\in R$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为来自总体 X 的样本，考虑假设检验问题 $H_0:\mu=0$; $H_1:\mu=1$，若检验的拒绝域由 $D=\{(X_1,\cdots,X_9):3|\overline{X}|\ge 1.96\}$ 确定，则该检验犯第一类错误的概率为__________，犯第二类错误的概率为____________.

二、（10 分）

得分	

口袋中有 1 个白球、1 个黑球。从中任取 1 个，若取出白球，则试验停止；若取出黑球，则把取出的黑球放回的同时，再加入 1 个黑球，如此下去，直到取出的是白球为止，试求下列事件的概率：

1. 取到第 n 次，试验没有结束；2. 取到第 n 次，试验恰好结束.

三、（10 分）

得分	

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $b(3, 0.5)$，$Y=(X-1)^2$，求 Y 的分布律.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) $P(X>2)$.

四、(16 分)

得分	

1. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\quad 0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求: (1) X 和 Y 的边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；(2) $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立而且同分布，其中随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=1-p,$$

其中 $0<p<1$. 再设随机变量

$$Z=\begin{cases}1 & X+Y\text{ 为偶数}\\ 0 & X+Y\text{ 为奇数}\end{cases}$$

(1) 求随机变量$(X,\ Z)$的联合分布律；(2)问 p 取什么值时，随机变量 X 与 Z 相互独立?

五、（18 分）

得分	

1. 设 X 服从均匀分布 $U(0, 2)$，令 $Y=|X-1|$. 求：

(1) $E(Y)$和 $D(Y)$；(2) $E(XY)$；(3) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

2. 设某种商品每周的需求量 $X\sim U(10, 30)$（单位：千克），经销商进货数量是[10,30]中的某个数。商店每销售 1 千克可获利 500 元，若供大于求，则剩余的每千克产品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时经调剂的每千克商品仅获利 300 元。问：为了使商店每周的平均利润最大，每周的进货量是多少千克？

六、（8分）

得分	

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ 是来自该总体的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试问：$\frac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 的分布是什么？并给出证明.

七、（12分）

得分	

设总体 X 在 $[\theta, 2\theta]$ 上服从均匀分布，$\theta>0$ 未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是相应的样本值，求：1. θ 的矩估计；2. θ 的最大似然估计.

八、（14 分）

得分	

1. 叙述自由度为 n 的 χ^2 分布上 α 分位点的定义.

2. 某种零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，按规定其方差不得超过 $\sigma_0^2=0.016$．现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度，得其样本方差为 0.025. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否推断这批零件合格?

2017 级概率与数理统计试题（A 卷）参考答案

一、1. $1-p$;　2. 2/3;　3. ln2;　4. 3;　5. 0.9772;　6. $1-e^{-3}, 1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$;　7. 4;　8. 0.0228;

9. $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$;　10. 0.05, 0.1492;

二、(1) $\dfrac{1}{n+1}$　(2) $\dfrac{1}{n(n+1)}$

三、1.

Y	0	1	4
P	3/8	1/2	1/8

2. (1) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　(2) e^{-2}

四、1. (1) $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1\\ 0, \quad \text{其他.}\end{cases}$　(2) $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{8}z^2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

2. (1) 随机变量 (X, Z) 的联合分布律为

$X \backslash Z$	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

(2) $p=\dfrac{1}{2}$.

五、1. (1) $E(Y)=\frac{1}{2}$. $D(Y)=1/12$.　(2) $E(XY)=\dfrac{1}{2}$　(3) $\rho_{XY}=0$　2. $a=\dfrac{70}{3}$

六、$\dfrac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n)$。

七、(1) θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}}{3}$.

(2) θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=x_{(n)}/2=\max\limits_{1\le i\le n} x_i/2$.

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=X_{(n)}/2=\max\limits_{1\le i\le n} X_i/2$.

八、1. 略

2. $H_0:\sigma^2\le 0.016$；　$H_1:\sigma^2>0.016$　　拒绝 $H_0:\sigma^2\le 0.016$