1. $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$, $\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______________.

2. 交换累次积分的次序 $\int_{-2}^{0}dx\int_{-1}^{x+1}f(x,y)dy+\int_{0}^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2-1}^{1}f(x,y)dy=$ ______________.

3. $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$, $\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}dxdy=$ ______________。

4. 曲线 $x+y=a,x+y=b,x-y=\alpha,x-y=\beta\quad(a<b,\alpha<\beta)$ 围成区域面积为________.

5. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=2$ 围成的空间区域，则三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 在球坐标系下的累次积分为______________________.

6. 设 Γ 是空间圆柱螺线段 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$，$0\le t\le 2\pi$，则空间第一型曲线积分 $\int\limits_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}dl=$ ______________.

7. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\iint\limits_S\left(x^2+2y^2+3z^2\right)dS=$ ______________.

8. 设 Γ^+ 是平面上起点为原点 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$ 的直线段，则平面第二型曲线积分 $\int\limits_{\Gamma^+}x^2ydx+y^3dy=$ ______________.

9. S^+ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则 $\iint\limits_{S^+}\frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2}=$ ______________.

10. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(xy,e^z\sin y,-yz)$，则 $div\mathbf{F}=$ ______________.

11. 微分方程 $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ 的通解为______________.

12. 使得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛的 p 的取值范围是__________.

13. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$的收敛域为________________________.

14. 函数$\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dt$在$x_0=0$点的幂级数展开为________________________________.

15. $f(x)=x^2$, $x\in[0,1)$，其形式 Fourier 级数为$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$，则$S(-1)=$_____.

二. 计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求曲面积分$\oiint_{S^+}\frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$其中$S^+$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

2. 已知L^+是第一象限中从点$(0,0)$沿上半圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿上半圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的有向曲线段，求曲线积分$\int_{L^+}e^ydx+(2xy+xe^y)dy$.

3. 将函数$f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$展开成余弦 Fourier 级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

4. 求$f(x)=\frac{x^2+5x+5}{(x+1)(x+2)^2}$在$x_0=0$点的幂级数展开，并求其收敛半径.

三. 证明题

1.（8 分）（I）证明 $\iint_{0\le x,y\le1}\frac{1}{1+xy}dxdy=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

（II）证明：$\iint_{0\le x,y\le1}\frac{1}{1+xy}dxdy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2.（7 分）设$D_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x^2+y^2\le1\right\}$，$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\varepsilon^2\le x^2+y^2\le1\right\}$，$\mathbf{n}^0$为$\partial D_\varepsilon$的单位外法向量，$u(x,y)$在$D_0$上具有二阶连续的偏导数并且满足$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=4$.

证明:（I） 对于任意的$\varepsilon\in(0,1)$，均有

$$\oint_{\partial D_\varepsilon}[\ln(x^2+y^2)\frac{\partial u(x,y)}{\partial\mathbf{n}^0}-u(x,y)\frac{\partial\ln(x^2+y^2)}{\partial\mathbf{n}^0}]dl=4\iint_{D_\varepsilon}\ln(x^2+y^2)dxdy$$

（II）如果$u(x,y)=4,(x,y)\in\partial D_0$，则有$u(0,0)=3$.