<u>清华大学本科生考试试题专用纸</u>

微积分III期终考试 A 卷　　　　　　2006 年 1　月 8 日

姓名________________ 学号________________ 班级_____________

## 一、填空题（每空题 3 分，共 39 分）

1．曲面 $x^2+y^2-z=1$ 在点 $(-1,-1,1)$ 的切平面方程是 $\underline{2x+2y+z+3=0}$.

2．设 $f$ 为连续可微函数，$f'(1)=2$. 令 $g(x,y,z)=f(x^2yz)$，则 $\nabla g(1,1,1)=\underline{(4,2,2)}$。

解：$g'_x(1,1,1)=4$，$g'_y(1,1,1)=2$，$g'_z(1,1,1)=2$. $\nabla g(1,1,1)=(4,2,2)$

3．设 $S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上的不与坐标轴相交的一片，则 $S$ 上的点 $(x,y,z)$ 的外侧单位法向量是 $\underline{\dfrac{(x,y,z)}{2}}$；如果 $S$ 的面积等于 $A$，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{z}=\frac{3}{2}S.$$

解：$\vec{v}=\frac{\vec{i}}{x}+\frac{\vec{j}}{y}+\frac{\vec{k}}{z}$，$\vec{n}=\frac{1}{2}(x,y,z)$. $\vec{v}\cdot\vec{n}=\frac{3}{2}$. 原积分 $\iint_S\frac{3}{2}\mathrm{d}S=\frac{3}{2}S$.

4．常微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解为 $\underline{y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)}$。

5．设常微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=\sin 2x$ 有三个线性无关解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 和 $y_3(x)$. 则微分方程 $y''+\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=0$ 的通解是 $\underline{C_1(y_1(x)-y_2(x))+C_2(y_1(x)-y_3(x))}$.

6．假设函数 $y(t)$ 满足方程 $y''+y'+y=1+\cos t$. 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{t}=\underline{0}$。

7．设空间光滑曲面 $S$ 的方程为 $z=f(x,y)$，$x^2+y^2\le 2$，上侧为正．其中函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数．则 $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$。

解：$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=2\pi$.

8．设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，则三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可以化成球坐标系下的累次积分 $\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho}$.

9．$D$是由曲线 $y=\ln x$、直线 $x=\mathrm{e}$，以及 $x$ 轴围成的平面区域，则 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ .

解：$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$.

10．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在柱面 $(x-2007)^2+(y+2008)^2=4$ 内部的面积等于 $\underline{4\sqrt{2}\pi}$。

11．设 $L$ 为曲线 $x^2+y^2=2x\,(y\geq 0)$，则 $\int_L\sqrt{2-x}\mathrm{d}l=\underline{\ 2\sqrt{2}\ }$。

解：

$$\int_L\sqrt{2-x}\mathrm{d}l=\int_0^2\sqrt{2-x}\sqrt{1+\frac{1+x^2-2x}{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2-x}\sqrt{\frac{1}{x(2-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_0^2=2\sqrt{2}$$

## 二、解答题

12．（8分）$\Omega$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=2$ 围成的空间区域．计算

$$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解．解法1：先一后二：

由对称性有

$\iiint_\Omega(2x-3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ............. 2分

$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\mathrm{d}z=\iint\limits_{r\leq 2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_r^2 z\mathrm{d}z$ ..... ................. 5分

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^2 z\mathrm{d}z=\pi\int_0^2 r(4-r^2)\mathrm{d}r$

$=\pi(2r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^2=4\pi$. .......................... 8分

解法2：先二后一：

$\iiint_\Omega(2x-3y2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ........... .. 2分

$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $D_z$ 是区域 $x^2+y^2\leq z^2$， .......................... 5分

$\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z^3\mathrm{d}z=4\pi$ .......................... 8分

13．（10分）设 $S$ 是抛物 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$0\leq z\leq 1$．在 $S$ 任意点一点 $(x,y,z)$ 的质量密度为 $\sqrt{1+x^2+y^2}$．求 $S$ 的质心.

解.

求质量：$M=\iint_S \mathrm{d}m=\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$ ................................. 1 分

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ ............ 3 分

. $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(1+r^2)r\mathrm{d}r=4\pi$ ...................................... 5 分

静力矩

有对称性知道 $J_x=J_y=0$. ........ 6 分

$J_z=\iint_S z\mathrm{d}m=\iint_S z\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$ ....... 7 分

$=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ................ 8 分

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2(1+r^2)r\mathrm{d}r=\dfrac{7}{3}\pi$ . ....... 9 分

质心的 $z$ 坐标 $\bar{z}=\dfrac{J_z}{M}=\dfrac{7}{12}$. ....... 1 0 分

有同学理解成三重积分。如果质量和静力矩写到下面的结果：

$\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{J_z}{M}$.

$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{1}\sqrt{1+r^2}dz$ ,

$J_z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{1}z\sqrt{1+r^2}dz$

则可以得 8 分。其后视具体情形而定.

14．(10 分)如图，$L$ 是有向光滑曲线，起点为原点 $O$，终点为 $A(2,2)$．已知 $L$ 与线段 $\overrightarrow{OA}$ 围成的区域 $D$ 的面积等于 $A$． $f(t)$ 有连续导数．计算曲线积分

$$\int_L (y^2\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x-4x)\mathrm{d}y$$

解：根据格林公式得到

$$(\int_{\overrightarrow{OA}}-\int_L)[y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=$$
$$\iint_D[(2ye^x-4)-(2ye^x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2A. \text{......................5分}$$

于是

$\int_L [y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=\int_{\overrightarrow{OA}}[y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2xe^x-4x]\mathrm{d}y+2A$.........7分

对于后一个积分，取 $x$ 为参数．$y=x$，$0\le x\le 2$．

$\int_{\overrightarrow{OA}}[y^2e^x-2y]\mathrm{d}x+[2ye^x-4x]\mathrm{d}y=\int_0^2(x^2e^x+2xe^x-6x)\mathrm{d}x=(x^2e^x-3x^2)\Big|_0^2=4e^2-12$ . . 10 分

15． (8 分) 设 $L$ 为平面 $S$: $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分的边界，方向是 $A(1,0,0)\to B(0,1,0)\to C(0,0,1)\to A(1,0,0)$．空间有一个力场

$$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k}\,.$$

求单位质点 $P$ 在 $L$ 上某点出发，绕 $L$ 运动一周时，$\vec{F}$ 对于质点所做的功．

解：设 $S$ 上侧为正．由斯托克斯公式，单位质点 $P$ 在 $L$ 上某点出发，绕 $L$ 运动一周时，$\vec{F}$ 对于质点所做的功等于

$$\oint_L(y\vec{i}-2z\vec{j}+6x\vec{k})\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}l==\iint_S\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y&-2z&6x\end{vmatrix}\cdot\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S \qquad \text{.......3 分}$$

$$=-\frac{5}{\sqrt{3}}\iint_S\mathrm{d}S\text{.........................................................................6分.}$$

$$=-\frac{5}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\substack{0\le x\le1\\0\le y\le1-x}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{5}{2}\text{.........................................................8分}$$

16．(10 分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数且 $f(0)=f'(0)=1$．又设对于空间 $R^3$ 中的任意一张光滑的闭合曲面 $S$，都有 $\oiint_S f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，求 $f(x)$．

**解**：由题意，在任意一个由光滑简单封闭曲面围成的区域$\Omega$上，由高斯公式有

$$\begin{aligned}&\oiint_{\partial\Omega}f'(x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yf(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-2ze^x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}(f''(x)+f(x)-2e^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\end{aligned} \qquad \text{....... 4 分}$$

所以由$\Omega$的任意性有

$$f''(x)+f(x)-2e^x\equiv0 \qquad \text{........... 7 分}$$

即 $f(x)$ 满足常微分方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$．

齐次方程通解：$f=c_1\cos x+c_2\sin x$，非齐次方程特解 $y_*=e^x$．一般表达式

$f = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x$ .　　　　　　　　　　　　　　　　.... 10分

17.（12分）

① 设 $\delta$ 是任意一个正数，$L$ 是圆周 $x^2 + y^2 = \delta^2$（逆时针方向）. 计算积分

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

② 如果将 $L$ 换成不经过原点但环绕原点的光滑、简单的闭合曲线(逆时针方向). 计算上述积分.

③ 向量场 $\frac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $x>0$ 有没有势函数？简述理由.

④ 设 $L$ 为从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段，计算

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} .$$

解：

① 圆周参数方程：$x = \delta \cos t$ , $y = \delta \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\delta^2(\cos t + \sin t)\sin t + \delta^2(\sin t - \cos t)\cos t}{\delta^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = -2\pi$$　　　　　　......... 4分

② 在 $L$ 内部做圆周 $L_\delta : x^2 + y^2 = \delta^2$（逆时针方向）. 设 $D$ 为 $L$ 和 $L_\delta$ 包围的区域. 由格林公式得到

$$\left(\oint_L - \oint_{L_\delta}\right) \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

所以

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{L_\delta} \frac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi$$　　　　.......... 8分

③ 右半平面是单连通区域，并且 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2}$ . 所以在右半平面有势函数.

.... 10分

④ 求得向量场$\dfrac{(x+y)i-(x-y)j}{x^2+y^2}$的势函数为

$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}$. 于是

$\int_{\overrightarrow{AB}}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=u(B)-u(A)=\dfrac{3}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$. ......... 1 2分

18.（6分）设$\Omega$是圆域：$x^2+y^2<1$. $f(x,y)$在$\Omega$上有连续偏导数，且处处满足方程

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

求证$f(x,y)$在$\Omega$恒等于常数. 如果$\Omega$是不包含原点的圆域，举例说明上述结论未必正确.

解：按照下列三个要点给分.

要点 1：由条件推出$f(x,y)$沿径向$(x,y)$的方向导数恒等于零。

要点2：进而推出$f(x,y)$在过原点的任意直线上恒等于常数。

要点3：$f(x,y)$在原点连续，又推出在所有直线上都相等。