**补充内容（选学）：∃前束范式的存在定理及其证明**

**--选自 王宪钧编《数理逻辑引论》，1982，北京大学出版社**

**定理 谓词逻辑的任一公式A, 都可化成相应的∃前束范式, 并且A**

**是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。**

**说明：对普遍有效的公式，它与其∃前束范式是等值的。而一般的公式与其∃前束范式并不等值。自然仅当A是普遍有效的, 方使用∃前束范式。**

**定理的证明：**

**上述定理可叙述为：谓词逻辑的任一公式D都有一∃前束范式E，并且D和E可互推，亦即：D普遍有效是E普遍有效的充要条件。**

1. **必有一前束范式E1，且├ D ↔ E1。**
2. **如E1中有自由个体变项⊿1,⊿2,…,⊿m ，则可引用概括规则得**

**E2 = (⊿1)(⊿2)…(⊿m)E1，m≥0。**

**E2和E1可以互推，如E1中无自由个体变项，则E2即是E1。**

1. **如E2中只有命题变项而无谓词变项，即是说，E2为一命题演算的公式，则可引用定理**

**├ P ↔ (∃x)(F(x)∨¬F(x)∧P)**

**引入一个处于最前方的存在量词。**

1. **如E2为∃前束范式，则E2即为E。否则E2的形式为**

**(∃x1) (∃x2)…(∃xn)(∀y)A (x1,…, xn, y)，n≥0。**

**在这里，A (x1,…,xn, y)为一前束范式，其中只有x1,…,xn, y是自由个体变项。E2有两种可能：**

1. **全称量词“(∀y)”之前无存在量词，其后也无存在量词。**
2. **“(∀y)”后只有k – 1个全称量词出现于存在量词之前。**

**现在如果能够证明，在上述情形下，必然可以求得一前束范式E3，E3和E2可以互推，并且，如为情况（a），则E3的最前方为一存在量词，也就是说，E3是一个∃前束范式。如为情况（b），则E3中只有k – 1个全称量词出现于存在量词之前，也就是说，比E2少一个这样的全称量词。在情况（b）下，经过k次这样的转换，就可以得到一∃前束范式，因此存在定理得证。**

**为了求得E3，可先构造E\*如下。**

**(∃x1) (∃x2)…(∃xn){(∃y)[ A (x1,…,xn,y)∧¬S(x1,…,xn,y)]∨(∀z)S(x1,…,xn, z)}**

**其中S(…)是在A中不出现的谓词变项，z是在A中不出现的个体变项。现在需要证明：**

**（ⅰ）E2和E\*可以互推，**

**（ⅱ）从E\*可以得到所需要的E3，E\*和E3可以互推。**

1. **E2和E\*可以互推。根据定理**

**├(∀x)(F(x)→G(x))→ ((∀x)F(x)→(∀x)G(x))**

**可得**

**├(∀y)F(y)→(∃y)(F(y)∧¬G(y))∨(∀z)G(z)。**

**在上列公式中，以A (x1,…,xn,⊿)代F(⊿)，以S(x1,…,xn,⊿)代G(⊿)，可得**

**├(∀y)A(x1,…,xn,y)→(∃y)[(A(x1,…,xn,y)∧¬S(x1,…,xn, y))]∨(∀z)S(x1,…,xn, z)**

**根据概括规则及定理**

**├(∀x)(F(x)→G(x))→ ((∃x)F(x)→( ∃x)G(x))**

**可得**

**├(∃x1) (∃x2)…(∃xn)(∀y) A (x1,…,xn,y)**

**→ (∃x1)(∃x2)…(∃xn){(∃y) [A (x1,…,xn,y)**

**∧¬ S(x1,…,xn, y)]∨(∀z)S(x1,…,xn, z)}**

**以上即是├E2→E\*。可见从E2可以推出E\*。**

**现证从E\*可以推出E2。**

**在E\*中作代入，以A (x1,…,xn, ⊿)代S(x1,…,xn,⊿)**

**可得**

**(∃x1)(∃x2)…(∃xn){(∃y) [ (x1,…,xn,y)∧¬ S(x1,…,xn, y)]∨(∀z)S(x1,…,xn, z)}**

**消去其中的矛盾式则得**

**(∃x1) (∃x2)…(∃xn)(∀z) A (x1,…,xn,z)。**

**再用约束变项易名可得E2，即是**

**(∃x1) (∃x2)…(∃xn)(∀y) A (x1,…,xn,y)。**

**因此，E2和E\*可互推得证。**

1. **从E\*可以推出E3。E\*为**

**(∃x1)(∃x2)…(∃xn){(∃y) [A(x1,…,xn,y)∧¬ S(x1,…,xn, y)]∨(∀z)S(x1,…,xn, z)}**

**A (…)为一前束范式，其中只有k – 1个全称量词出现于存在量词之前，设A (…)为**

**Z1Z2…Zl A\*(x1,…,xn, y)，l≥k。**

**其中Z1,…,Zl皆为量词，且约束变项中无z。现将量词(∃y), Z1,…,Zl等依次前移使其辖域延伸至公式的末端，最后将(∀z)前移。这样前移的结果即为E3：**

**(∃x1)(∃x2)…(∃xn)(∃y) Z1Z2…Zl(∀z){[ A (x1,…,xn,y)**

**∧¬ S(x1,…,xn, y)]∨S(x1,…,xn, z)}。**

**由于Z1前的“(∀y)”已转换为一存在量词“(∃y)”，同时“(∀z)”已移至前束词末端，因此（a）如果E2中原无存在量词，E3的第一个量词即为存在量词，所以E3是一个∃前束范式，（b）如果E2中原有的k个全称量词出现于存在量词之前，在E3中只有k – 1个全称量词在某些存在量词之前，与E3相比较已减少一个。**

**E\*和E3是等值的，因此也是可以互推的。**

**至此，∃前束范式的存在定理得证。**