**第一周作业**

## 第1章习题1

**计算球体积要使相对误差限为1%，问度量半径R时允许的相对误差限是多少？**

**解：**

**球的半径为R，则球体积为。因此球体积的误差限为**

**所以球体积的相对误差限为**

**有**

**故度量半径R时允许的相对误差限是0.0033。**

**第1章习题2**

**考虑正弦函数sin(x)的求值，特别是自变量x发生扰动h时函数值的误差。**

**（1）估计sin(x)的绝对误差和相对误差。**

**（2）估计条件数**

**（3）自变量x为何值时，这个问题高度敏感。**

**解：**

**由于sin(x+h)-sin(x)≈ (sin’(x)) (x+h-x)= h cos(x)**

**扰动h产生的绝对误差为h cos(x)。**

**相对误差**

**条件数**

**可见当x=kπ，k!=0的时候，条件数会变得很大。**

## 第1章习题4

**设，按递推公式**

**计算到。若取（5位有效数字），计算将有多大误差？**

**解：**

**由递推公式，得**

**由于有，则**

**因此**

**所以，计算的误差限为**

**第1章习题7**

**计算，取，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？**

**解：**

**避免误差危害的四项基本原则是：①要避免中间结果出现上溢或下溢；②要避免大数“吃掉”小数；③要避免符号相同的两近似数相减；④注意简化步骤，减少运算次数。**

**第二个和第四个明显违背原则②，结果不好。**

**第三个和第一个比，除法运算次数相同，但乘法运算次数是后者的一半，根据原则④，得到的结果相对最好。**

**第1章习题9(a)**

**证明在规范化浮点数系统中，上溢值OFL为**

**解：**

**用等比数列求和，即可得到所求。**

**第二周作业**

**第1章习题8**

**考虑f(x,y)=x-y，用|x|+|y|度量输入值(x,y)的大小，并假定|x|+|y|≈1，x-y=є，再考虑x，y分别产生扰动的时候，证明条件数cond(f) ≈1/ є。**

**将这个结论与减法的敏感性以及抵消现象联系起来，说明了什么？**

**解：**

**针对x扰动，条件数**

**同理可得到对y的扰动下的条件数。**

**加减法运算本身对扰动并不敏感，但是如果参加运算的数据发生抵消现象（结果接近零）的时候，条件数也会变得很大。**

**这也验证了数值计算中应该避免的第二个原则：应该避免两个近似数相减。第2章习题1(1)**

**为求方程在附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。，迭代公式。**

**选择一个合适的区间使该迭代公式收敛，使用利普希兹方法证明迭代法的收敛，然后求出具有四位有效数字的近似解。**

**解：**

**不妨设区间为，，则**

**的值域为，即对，有；**

**同时**

**所以利普希兹系数L=0.66，该迭代公式收敛。计算过程略。**

**第2章习题2**

**给定函数，设对一切，存在且，证明对于范围内的任意定数，迭代过程均收敛于的根。**

**证明：**

**依题意，所以为单调递增函数。所以只存在唯一的根，同时存在，使得。**

**根据迭代公式，设迭代函数为 则。**

**由于，同时，故**

**而，即**

**所以**

**因此，迭代过程收敛于。**

**第2章习题3**

**牛顿公式**

**证明对一切且序列递减。**

**证明：**

**由递推关系易知，与同号。而**

**所以**

**于是，对，由平均不等式**

**另外**

**所以，序列是递减的。**

**第2章习题4**

**应用牛顿法于方程，导出求立方根的迭代公式，并讨论其收敛性。**

**解：**

**设，则，所以，求立方根的Newton迭代公式为**

**令**

**则,**

**因为，即**

**所以，该求立方根的Newton迭代公式至少局部二阶收敛。**

**如果采用p阶收敛判据的话**

**于是有**

**和上面的结论相同，至少是局部二阶收敛。**

**注意：当a=0时，需要特别考虑。当a=0时有**

**所以此时为一阶局部收敛。**

**第2章习题6**

**牛顿法中设x\*为f(x)=0的单根，且f’(x\*)!=0。迭代公式，求证**

**略**

**第三周作业**

**第2章习题5**

**证明迭代公式**

**是计算的三阶方法。假定初值充分靠近根，求**

**解：**

**设，且**

**则**

**故**

**所以，该迭代公式是计算的三阶方法。**

**对作Taylor展开如下**

**故**

**所以**

**第二章第9题**

**用下列方法求在附近的根。根的准确值，要求计算结果有4位准确的有效数字。**

**（1）用牛顿法**

**（2）用割线法，取**

**解：**

**（1）**

****

**（2）**

****

**第3章习题1**

**计算的行范数，列范数，2-范数。**

**解：**

**的行范数的列范数为求的2-范数，先求的特征值**

**设的特征值为**

**解，得**

**所以，的2-范数。**

**第三章第2题**

**设，求证：**

**证明：**

****

****

**不妨设**

**则**

**对于任意，有**

**故**

**得证。**

## 第3章习题3

**设且非奇异，又设为上一向量范数，定义，试证明是上向量的一种范数。**

**证明：从范数的定义出发，证明正定性、齐次性、三角不等式和相容性。**

**第3章习题5**

**试证明：如果是正交阵，则**

**证明：根据矩阵条件数和2范数定义求证。**

**第3章习题4**

**设矩阵，其中，证明当时，有最小值。**

**证明：**

****

**故有**

**即，因此有当时，且为最小值。**

**第3章习题7**

**证明：**

**右上角元素 表示经过消去法一步后得到的矩阵元素，由Guass消去法的原理可知，对有**

**其中，由于是对称矩阵，有，其对角位置上的元素为，由于的任意性，可知是对称矩阵。**

## 第3章习题12

**分别采用高斯消去法和直接LU分解法对下述矩阵进行LU分解，写出矩阵L和U：**



**解：**

（1）

（2）

**第3章习题13**



（1）

（2）

## 第3章习题14

**设𝑨,𝑩,𝑪均为𝑛×𝑛矩阵，且𝑩、𝑪非奇异，𝒃是𝑛维向量，要计算𝒙 = 𝑩-1 (2𝑨+𝑰)(𝑪-1+𝑨)𝒃,**

**请给出一个合理、高效率的算法流程.**

**解：**

**显然应该从右至左，先计算向量和矩阵的乘法，避免矩阵之间的乘法。遇到求逆的时候，应该使用部分主元的LU分解法。**

***y1=C-1b+Ab***

***y2=(2A+I)y1=2（A y1）+ y1***

***x=B-1y2***

***注意y2的运算中数乘2可以提出来，减少一部分数乘运算。*答案不止一种，只要避免数乘矩阵，矩阵乘矩阵，并且没有多余的（超过两次）求逆运算，就算正确的解决方法。**

**解2：由于求矩阵的逆需要较多计算，因此应该尽量避免求逆运算，故首先将求逆运算转化为一下步骤：**

**（1）计算,原式转化为：**

**（2）计算**

**（3）设解得**

**（4）计算**

**（5）计算**

**（6）求解方程**

**（7）计算得到**

**第3章习题17**

**下述矩阵能否分解为（其中为单位下三角阵，为上三角阵）？若能分解，那么分解是否唯一？**

## 解答：

**一个非奇异矩阵能够分解为的充分必要条件是，的各阶顺序主子式的秩与的的前列的秩相同。**

**如果矩阵能够分解为，那么存在唯一的分解的充要条件是，的各阶顺序主子式大于0。**

**对于矩阵，的秩是1，但前两列的秩是2，所以矩阵不能分解为。**

**对于矩阵，满足上述第一个条件，可以分解为，但，所以分解不唯一，例如**

**第3章习题8**

**设是对称正定矩阵，经过高斯消去法一步后，约化为**

**其中。证明：的对角元素；对称正定。解：因为是正定矩阵，故对任意有**

**不妨取，可以得到。**

**同理，取，其中1的位置是，则可以得到。**

**所以的对角元素。**

**关于对称前面有证明，然后需要证明是正定的。**

**第一步Gauss消去法的作用相当于，其中**

**显然是非奇异阵，即对对任意有。**

**因此 即**

**故正定，且对称。而**

**同时，所以正定。因此，是对称正定矩阵。过程略，不可以省略选主元。**

## 第3章习题15

**计算矩阵**

**的Cholesky分解**

**解：**

**过程略，应该采用直接Cholesky分解（平方根法），而不是LDLT，然后再计算。**

16、**用追赶法解三对角方程组，其中**

****

**解：对三对角矩阵进行LU分解得**

****

**即有**

**因解算得，又因解算得.**

**18、设矩阵严格对角占优，试证明：**

**（1）对矩阵做部分主元高斯消去时，不需要交换行，即假设经过步消去后矩阵变为，则**

****

**（2）矩阵非奇异。**

**证明：**

**因矩阵严格对角占优，即且至少有一个不等式严格成立，当因时，因**

**又因由此得到**

****

**综上，得到**

**故经过一次消去后仍为按列严格占优，**

**综上可得：**

**(2)考虑严格对角占优，即，**

**则线性方程组有非零解，设，则，由假设，即**

**与假设矛盾，因此矩阵A非奇异。**

**第四章第1题**

**试证明的充要条件是对任意向量都有**

**解：**

**（1）充分条件：**

**若有，则，故有，又因**

**故可得，即有**

**（2）必要条件**

**若有对任意均成立，不妨取，其中第项为1，其余为0，有**

**，同理有，当取1,2,3，…,n时即有**

**，故有**

**2、设有方程组，其中为实对称正定矩阵，试证明当时迭代法收敛**

**解：因A为实对称正定矩阵，，不妨设，又因，即**

**进而得到**

**又因，也是对称矩阵，不妨设，即有，又因**

**为非奇异矩阵，综上所述，可知原式收敛。**