

绝密★启用前

2022 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

概率论与数理统计(二)

(课程代码 02197)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取一个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为
A. $\frac{9}{32}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{23}{32}$
2. 设 $f_1(x)$ 为区间 $[-1,2]$ 上的均匀分布的概率密度, $f_2(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0, \end{cases}$ (常数 $a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足
A. $3a + 2b = 6$ B. $2a + 3b = 6$ C. $a + b = 1$ D. $a + b = 2$
3. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 其概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, 则 $P\{X=Y\} =$
A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{3}, & -2 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 X 的数学期望 $E(X) =$
A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

5. 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 2; 4, 9; 0.5)$, 则 $D(X - 3Y + 2) =$
A. -21 B. 33 C. 67 D. 69
6. 设在每次试验中事件 A 发生的概率为 0.75, 且已知事件 A 在 n 次独立重复试验中出现的频率在 $0.74 \sim 0.76$ 之间的概率至少为 0.9, 则利用切比雪夫不等式可得试验次数 n 至少为
A. 17 B. 186 C. 1875 D. 18750
7. 设随机变量 X 服从自由度为 n 的 t 分布, 且 $n > 1$, 记 $Y = \frac{1}{X^2}$, 则 Y 的概率分布为
A. $F(n, 1)$ B. $F(1, n)$ C. $N(0, 1)$ D. $\chi^2(n)$
8. 设随机变量 X 服从区间 $(0, \theta)$ 上的均匀分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, \bar{X}, S^2 分别为样本均值和样本方差, 则未知参数 θ 的极大似然估计为
A. $2\bar{X}$ B. S^2 C. $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ D. $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$
9. 甲乙二人同时使用 t 检验法检验同一个假设 $H_0: \mu = \mu_0$, 甲的检验结果是拒绝 H_0 , 乙的检验结果是接受 H_0 , 则以下叙述中错误的是
A. 在检验中, 甲有可能犯第一类错误
B. 在检验中, 乙有可能犯第一类错误
C. 上面结果可能是各自选取的显著性水平不同而得出的
D. 上面结果可能是各自抽取的样本不同而得出的
10. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 都未知, X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 1$) 为来自总体 X 的样本, 记 \bar{X} 为样本均值, $Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 t 检验使用的统计量表达式为
A. $\frac{\bar{X}}{\sqrt{n(n-1)Q}}$ B. $\frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$ C. $\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}Q}$ D. $\frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n}$

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 15 小题, 每小题 2 分, 共 30 分。

11. 甲乙两人各投篮一次, 设 A 为甲投中, B 为乙投中, 则甲乙两人都投中可表示为_____.
12. 9 张电影票中有 4 张为头等座票, 随机发给先后到来的 9 个人, 第二个到的人拿到头等座票的概率为_____.
13. 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = 0.3$, $P(B|A) = 0.4$, $P(A|B) = 0.6$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.
14. 设 X 服从 $[2, 9]$ 上的均匀分布, 则 $P\{1 < X < 5\} =$ _____.
15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $(-\infty < x < +\infty)$, 则当 $x \geq 0$ 时, X 的分布函数 $F(x) =$ _____.
16. 某校体检表明学生的身高 X (单位: m) 服从正态分布, 学生平均身高为 1.70m, 若身高的标准差为 0.08m, 则 $P\{1.62 < X < 1.78\} =$ _____.
(附: $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\Phi(1) = 0.841$)
17. 设随机变量 X 与 Y 都服从区间 $[0, 4]$ 上的均匀分布, 且 $P\{X \leq 3, Y \leq 3\} = \frac{9}{16}$, 则 $P\{X > 3, Y > 3\} =$ _____.
18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 已知 X 服从参数为 1 的指数分布, $P\{Y = -1\} = \frac{3}{4}$, $P\{Y = 1\} = \frac{1}{4}$, 则 $P\{2X \leq Y + 3\} =$ _____.
19. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, Y 服从参数为 3 的指数分布, 则 $E(X - 3Y + 1) =$ _____.
20. 设 a 为区间 $(0, 1)$ 内的一个定点, 随机变量 X 服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 以 Y 表示 X 到 a 的距离, 若 $E(Y) = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.
21. 已知随机变量 $X \sim B\left(16, \frac{1}{2}\right)$, Y 服从参数为 4 的泊松分布, $D(X - Y) = 2$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

22. 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 是来自总体 X 的样本, 若 $P\{X = 0\} = 0.8$, $P\{X = 1\} = 0.2$, 则依据中心极限定理将概率 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 28\right\}$ 用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 近似表示为_____.
23. 设随机变量 X 的分布律为 $\frac{X}{P} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1-3\theta & \theta & 2\theta \end{matrix}$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本, \bar{X} 是样本均值, 则 θ 的矩估计为_____.
24. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的样本, 则 $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3$, $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 X_i$ 作为 μ 的估计量, 有效估计量是_____.
25. 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本, 考虑检验假设问题 $H_0: \mu = 2$, 若检验的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 2.6\}$, 则检验犯第一类错误的概率为_____. (附: $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\Phi(2.4) = 0.9918$)

三、计算题: 本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分。

26. 设某地区成年居民中肥胖者占 10%, 不胖不瘦者占 82%, 偏瘦者占 8%, 又知肥胖者患高血压病的概率为 20%, 不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%, 偏瘦者患高血压病的概率为 5%.
(1) 求该地区成年居民患高血压病的概率;
(2) 现知该地区某一成年居民患有高血压病, 求其是肥胖者的概率.
27. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \alpha x^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$
求: (1) 常数 α ; (2) $P\{X + Y > 1\}$.

四、综合题: 本大题共 2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分。

28. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 且 $Y = -2X + 1$,
求: (1) X 的分布函数 $F(x)$; (2) $P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}$; (3) Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

29. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	a	b

- (1) 当 a, b 为何值时, X 与 Y 不相关;
- (2) 当 X 与 Y 不相关时, 分别求关于 X, Y 的边缘分布律, 并判断 X 与 Y 是否相互独立?
- (3) 求 $X+Y$ 的分布律及 $P\{X+Y \leq 3\}$.

五、应用题: 本题 10 分。

30. 设某人群的体重 X (单位: kg) $\sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从该人群中随机抽取 9 个人, 其体

重分别为: 60, 63, 75, 75, 60, 60, 68, 68, 65.

求: (1) 样本均值 \bar{x} 及样本方差 s^2 ;

(2) 总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间. (附: $t_{0.025}(8)=2.306$)