



4. 下列微分方程中属于可分离变量的微分方程是

A. $\frac{dy}{dx} = e^{xy}$

B. $(x - xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$

C. $y \frac{dy}{dx} + y - x = 0$

D. $x \frac{dy}{dx} + y = e^x$

5. 设无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 则在下列数值中 p 的取值为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

6. 点 $P(-3, 4, -5)$ 到 x 轴的距离为_____.

7. 已知 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ _____.

8. 设积分区域 $D: |x| + |y| \leq a$, 且二重积分 $\iint_D d\sigma = 8$, 则常数 $a =$ _____.

9. 微分方程 $y'' - y = e^{3x}$ 的特解 $y^* =$ _____.

10. 已知无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$, 则 $u_n =$ _____.

三、计算题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

11. 求过点 $B(4, 1, 2)$ 并且与平面 $2x + 3y - z - 5 = 0$ 平行的平面方程.

12. 已知函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求全微分 dz .

13. 求空间曲线 $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ 在对应于 $t = \frac{\pi}{3}$ 的点处的切线方程.

14. 求函数 $f(x, y, z) = x - y + x^2yz + 2z$ 在点 $P_0(-1, 1, 2)$ 处的梯度 $\text{grad} f(-1, 1, 2)$.

15. 计算二重积分 $\iint_D (x+y) d\sigma$, 其中积分区域 D 是由 $x=y, x=y+1, x=1$ 及 $x=2$ 所围成的.

16. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) dv$, 其中积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.



17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C \frac{1}{2x+6y+7} ds$, 其中 C 为从点 $A(0, -1)$ 到点 $B(-3, 0)$ 的直线段.
18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (x+1)dx + ydy$, 其中 C 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上从点 $A(1, 0)$ 到点 $B(-1, 0)$ 的一段弧.
19. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$ 的通解.
20. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的通解.
21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{3n+1})^n$ 的敛散性.
22. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x+1$, 求 $f(x)$ 傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中的系数 a_4 .

四、综合题(本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

23. 求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在约束条件 $x + y = \sqrt{2}$ 下的极值.
24. 证明曲线积分 $\int_C (e^y \cos x + 20e^x)dx + (e^y \sin x + 14\cos y)dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关.
25. 将函数 $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ 展开为 x 的幂级数.

