中文图书分类号：O212.7
密　　　　　级：公开
UDC：519.2
学　校　代　码：10005

论　文　题　目：部分函数型线性空间自回归模型的设定检验

论　文　作　者：孙瑾

学　　　　　科：统计学

指　导　教　师：杜江　副教授

论文提交日期：2022 年 6 月

UDC : 519.2　　　　　　　　　　　　　　　　学校代码 : 10005
中文图书分类号 : O212.7　　　　　　　　　　学　　号 : S201906106
密　　级 : 公开

北京工业大学理学硕士学位论文

题　　目：部分函数型线性空间自回归模型的设定检验

英文题目：SPECIFICATION TEST FOR PARTIALLY FUNCTIONAL LINEAR SPATIAL AUTOREGRESSIVE MODEL

论 文 作 者：孙瑾
学 科 专 业：统计学
研 究 方 向：应用统计
申 请 学 位：理学硕士
指 导 老 师：杜江副教授
所 在 单 位：理学部

答 辩 日 期：2022 年 6 月
授予学位单位：北京工业大学

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京工业大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签 名:________________

日 期: 年 月 日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解北京工业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

签 名:____________ 日 期: 年 月 日

导 师 签 名:____________ 日 期: 年 月 日

摘 要

函数型线性模型是进行函数型数据分析的常见模型，但在实际应用中，数据通常与区域的空间信息相关，此时传统的函数型线性模型已不再适用，而函数型线性空间自回归模型则适用于处理空间数据和函数型数据。模型的设定检验是数据分析的重要环节之一，若被错误设定，那么得到的结果将具有很大偏差，甚至带来不可估计的影响。大数据时代，数据类型越来越复杂，模型被设定错误的可能性也越来越大。因此，对函数型线性空间自回归模型的设定检验问题进行研究是十分有必要的。

依据参数的广义矩估计形式得到残差的估计，将其与协变量的线性投影相结合生成经验过程并建立检验统计量，实现部分函数型线性空间自回归模型的设定检验。所提检验方法可有效避免参数的主观选择问题，具有广泛的适用性。首先，在一定假设条件之下，证明出检验统计量在原假设和备择假设下的渐近分布为高斯过程，表明其能够以通常的参数收敛速度区分原假设和Pitman局部备择假设，并进一步给出统计量的相合性。其次，使用bootstrap方法近似检验统计量的分布，给出计算检验统计量临界值的方法，并对临界值近似计算方法的合理性给出理论证明。然后，构造不同的数据生成过程，通过Monte Carlo模拟研究统计量的有限样本性质。结果表明，在原假设下，检验统计量的经验水平趋近于给定的经验水平；在备择假设下，检验统计量的功效随着样本量的增大而增大，随着偏离原假设程度的增强而逐渐增大，并快速趋近于1。最后，对西班牙气象数据进行实例分析，说明本文所提方法的实用性。

关键词： 部分函数型线性空间自回归；随机投影；设定检验；残差经验过程

Abstract

A typical model for dealing with functional data is the functional linear model. However, data is frequently linked to spatial information in practical applications. The traditional functional linear model is no longer applicable in this case, whereas the functional linear spatial autoregressive model can handle both spatial and functional data at the same time. The specification test of model is one of the important aspects of data analysis. If the model is set wrong, it will result in errors and even have unquantifiable consequences. As data types get increasingly complicated in the era of big data, the chances of models going incorrect increase. Therefore, it is essential to investigate the problem of the specification test for functional linear spatial autoregressive models.

According to the generalized method of moments, the estimation of residual error is obtained, which is combined with the linear projection of covariates to generate the residual empirical process and establish the test statistic, allowing the specification test for partially functional linear spatial autoregressive models to be performed. The proposed test method may successfully prevent subjective parameter selection and has a wide range of applications. First, under certain regularity conditions, the asymptotic distributions of the test statistic under the null and the alternative hypothesis are shown to be Gaussian processes, which shows that it can detect Pitman local alternatives converging to the null hypothesis at the usual parameter rate, and further gives the consistence of the test statistic. Second, we apply the bootstrap method to approximate the distribution of the test statistic, after which we provide an approximate calculation method for the test statistic's critical value, whose reasonableness is theoretically shown. Furthermore, different data generation processes are constructed and the finite sample properties of the statistic are investigated by Monte Carlo simulations. It is shown that, under the null hypothesis, the test statistic's nominal level tends to the given nominal level. Under the alternative hypothesis, the test statistic's power grows as the sample size grows, quickly approaching 1. Finally, an example analysis of the Spanish Meteorological data is presented to illustrate the practicality of the proposed method.

Keywords: Partially functional linear spatial autoregressive, Random projection, Specification test, Residual empirical process

符 号 表

A_{ij}	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,j) 个元素
$\xrightarrow{p}$	依概率收敛
$\xrightarrow{L}$	依分布收敛
$\xi_n = o_p(1)$	ξ_n 依概率收敛到 0
$\xi_n = O(1)$	ξ_n 有界
$\\|\cdot\\|$	$Euclidean$范数
$\\|\boldsymbol{a}\\|$	$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}>^{1/2}$
tr($\boldsymbol{A}$)	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\boldsymbol{A}^T$	向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$I(\cdot)$	示性函数
$\boldsymbol{\ell}_m$	长度为 m 的单位向量
$\bigotimes$	Kronecker 乘积

目 录

第1章 绪 论

1.1 研究背景及意义

大数据时代，对数据的需求度逐渐上升，故人们收集数据时观测的次数愈加频繁，导致采集到数据的密度越来越高。在互联网技术水平和科技方法的快速发展之下，高密度离散数据逐渐成为了人们分析的主要数据对象，此类数据往往表现出某种函数形式，故称其为函数型数据。为了最大程度地捕捉信息，通常将函数型数据看成是连续曲线的高频次离散观测，通过非参数方法将其拟合成光滑曲线，这便是函数型数据分析的常用方法。函数型数据与常见的数据类型相比，其维度较高，可以看成是无穷维的，通常以曲线或者曲面的形式出现，处理难度较大。对函数型数据进行统计推断研究需要在尽量不损失样本所蕴含的重要信息的前提下，简化高维数据的处理难度。至今为止，已有大量学者对函数型数据进行研究，并且该数据在经济学、生物医学等领域十分普遍。类比于传统的线性模型，在函数型数据分析的理论中，常考虑的同样也是线性模型，其一般形式如下：

$$Y = \int_{\mathcal{S}} X(t)\gamma(t)dt + \varepsilon,$$

其中Y是标量响应变量，$X(t)$为函数型解释变量，是Hilbert空间$L^2(\mathcal{S})$中的一个函数，$\gamma(t)$是需要估计的函数型参数，ε是误差项。

在计量经济学、气象监测等领域，数据往往具有一定的空间相关性。例如，一个地区的经济水平会受到相邻地区经济水平的影响，通常情况下两地区距离越近，影响则会相对越大。对于此类具有空间依赖性的数据，各单元之间已不再相互独立，也就是说传统的线性回归模型已不再适用。空间自回归模型则是分析空间数据的常用模型之一，该模型不仅可以保留协变量与响应变量之间的线性关系，还可以充分考虑变量间的空间特性，将空间距离的影响纳入到响应变量的预测中。一直以来，空间自回归模型受到诸多国内外学者的关注，具有较为完善的理论基础，并且应用广泛。

在很多实际应用研究中，所涉及的变量通常与区域的空间信息相关，例如新型冠状病毒的分布、交通运输记录等。对于此类复杂数据，单纯地使用函数型模型或者空间自回归模型都不能很好地解释和拟合数据。因此，所建立的模型需要依据这些特殊的数据而有所改变，并进一步对其相关理论性质进行研究以便为实际应用提供理论指导。由此可见，对函数型线性空间自回归模型进行研究是很有必要的。对此类模型的研究不仅扩展了原有的函数型线性模型、空间自回归模型等模型理论，而且可以用来解决众多实际数据分析问题。由于函数型数据是高维数据，具有一定复杂性，若再考虑数据间的空间结构，处理难度较大，故此类模型仍存在许多问题需要进一步解决完善。

当模型建立完成后，在进行深入的统计推断之前仍需要关注所建立的模型是否真的适用，即模型的设定检验问题。只有当模型被正确设定后，基于此模型进行的一切统计推断才具有实际的意义。假若模型被错误设定，那么不仅耗费一定的金钱和时间，更重要的是会提供不正确的决策，这将产生不可估量的风险和后

果。在如今的大数据时代，数据的数量和维度不断增加，数据的形式也越来越复杂多样，模型被错误设定的可能性也越来越高。因此，研究模型的模型检验问题至关重要。

1.2 国内外研究状况

1.2.1 函数型模型估计的发展

函数型数据最早由统计学家 Ramsay[1] 提出，广泛存在于医学、气象学、神经科学等众多领域，因此获得了不少学者的关注。Cardot、Ferraty 和 Sarda[2] 使用 B 样条估计方法研究了函数型线性模型在响应变量为标量情形下的估计方法，并给出了估计收敛速度的上限；Cai 和 Hall[3] 则侧重于研究参数估计和响应变量预测的收敛速度；Hall 和 Horowitz[4] 基于函数主成分分析 (Functional Principal Components Analysis, FPCA) 方法和谱分解方法研究函数型参数的估计问题，研究表明在一定条件下，基于 FPCA 方法得到的估计的收敛速度是最优的；另外，Zhou、Peng 和 Chen[5] 对函数型斜率参数提出了一种新的估计方法，并研究了斜率参数的收敛速度；Li 和 Hsing[6] 在函数型数据基于有误差的离散点观测的假设下，使用带惩罚的最小二乘方法估计函数型斜率参数，并与主成分回归方法进行比较；Carmbes、Kneip 和 Sarda[7] 对惩罚进行轻微修改给出了斜率参数的光滑样条估计，研究发现预测误差的收敛速度依赖于斜率函数的光滑度和预测变量的结构；Benatia、Carrasco 和 Florens[8] 基于 L2 惩罚的正则化方法研究了响应变量为函数型变量情形下的参数估计问题，同时考虑了协变量具有内生性的情况；Lee 和 Park[9] 通过对传统的最小二乘准则添加惩罚对稀疏函数型线性回归模型进行研究，使用变量选择方法对函数型参数进行估计。

随着理论的不断完善和发展，人们不再拘泥于传统的函数型线性模型，着眼于研究各类各样的函数型模型以解决复杂的实际问题，至此，各类函数型模型的相关研究越来越受到重视。Müller 和 Stadtmuller[10] 考虑了广义函数型线性模型，并证明了估计的渐近正态性；Shin[11] 根据协方差算子和主成分方法对部分函数型线性回归模型进行研究，推导出估计的渐近分布为正态分布，并验证了其在有限样本下的表现；针对本文所考虑的能够用来同时处理空间数据和函数型数据的模型，Pineda-Rios、Giraldo 和 Porcu[12] 以及 Tang 和 Jin[13] 分别给出参数估计方法，并讨论了方法的渐近性质；Huang 等人[14] 基于 FPCA 给出参数估计方法，仿真实验表明该估计方法在数据不存在空间相关性时跟 FPCA 方法的效果一样好，当存在空间相关性时，该方法更优；Hu 等人[15] 基于工具变量使用两阶段最小二乘估计 (Two-Stage Least Squares Estimation, TSLS) 对参数进行估计，并证明其渐近分布；对于函数型半参数模型，Tang 和 Bian[16] 结合 FPCA 方法和 B 样条方法实现参数的估计，研究了该方法的渐近分布，并给出了预测的均方误差的收敛速度；而 Liu 和 Bai[17] 则在此基础之上又在高维数据情形下考虑了空间自回归部分，结合广义矩估计 (Generalized Method of Moments, GMM) 给出大样本性质；同时，Matsui[18] 则考虑了变系数在该模型下的应用，重点研究变量选择问题，拓宽了函数型模型的研究角度。

1.2.2 空间自回归模型的发展

空间自回归模型旨在处理数据间的空间相关性，最早由 Cliff 和 Ord[19] 提出，该模型可充分考虑变量间的空间特性，关于其估计方法的研究已有较为成熟的结果。Kelejian 和 Prucha[20] 讨论了该模型的扰动项也具有自回归形式时模型的参数估计问题，提出广义两阶段最小二乘估计 (Generalized Two-Stage Least Squares Estimation, GTSLS)，并对其理论性质进行研究；后来 Kelejian 和 Prucha[21] 于 1999 年进一步提出 GMM 方法并证明了估计的大样本性质，该方法计算简单有效且不需要考虑样本量的大小；Lee[22] 提出拟极大似然估计 (Quasi-Maximum Likelihood Estimation, QMLE)，研究发现该估计的收敛速度依赖于空间权重矩阵的选择；Lee[23] 通过在混合空间自回归模型的广义矩估计框架中引入附加矩函数，对 TSLS 方法进行了改进，所得到的 GMM 估计相对于 TSLS 方法是有效的；Lin 和 Lee[24] 针对异方差扰动项，在特定的矩条件下得到稳健的 GMM 估计，并且根据相合的协方差矩阵证明出所提估计方法是渐近有效的；Badinger 和 Egger[25] 在扰动项也含有自回归形式的情况下，研究了高维面板数据的误差分量模型，给出了参数的 GMM 估计和 GTSLS 估计；Lee 和 Yu[26] 使用外生变量和预测变量构造出最佳的一次和二次矩条件，研究表明，该 GMM 方法有效地避免了极大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)方法的计算困难问题；Qu 和 Lee[27] 成功地解决了空间权重矩阵的内生性问题；Gupta 和 Robinson[28] 在模型的阶数和自变量的个数随样本量的增大而缓慢趋近于无穷的情况下，对模型中参数的估计方法进行了研究；Gupta[29] 研究了含有随机外生空间权重矩阵的空间自回归模型的估计方法，并使用仿真模拟实验检验了估计在不同情形下的表现；Xie、Cao 和 Du[30] 考虑了空间自回归模型的变量选择问题；Sun 等人[31] 将空间自回归模型扩展到半参数空间动态模型中，并将其应用到实际数据分析中；Du 等人[32] 使用 GMM 方法研究了部分线性可加空间自回归模型的参数估计问题，并推导出渐近分布。

1.2.3 模型检验方法的发展

在处理实际问题时，模型是否被正确设定也是一个十分重要的问题。只有在模型被正确设定时，基于此进行的一切统计推断结果才具有实际意义，因此，模型的设定检验问题一直以来备受学者关注。Escanciano[33] 提出基于投影的残差显著经验过程，以此得到参数回归模型的拟合优度检验，并进一步研究了该检验统计量的渐近零分布；Ma 等人[34] 针对部分线性单指标模型，提出综合条件矩检验的一种变型方法，有效地实现了降维；对于部分线性测量误差模型，Zhang 等人[35] 对该模型进行了设定检验研究，给出了详细的理论结果；而 Sun、Ye 和 Sun[36] 则考虑了该模型在部分变量带有测量误差情形下的设定检验问题，并给出其理论结果；关于空间自回归模型的假设检验问题，Su 和 Qu[37] 给出了相应的理论研究和实际应用分析；并且，Li 和 Mei[38] 着重考虑了该模型中的非参数部分是否包含多项式关系，提出统计检验方法，并进一步验证了所提方法的理论性质；Whang 和 Andrews[39] 为半参数部分线性回归、删失回归等参数和半参数模型的检验问题提供了基础框架；Horowitz 和 Hardle[40] 考虑了半参数备择假设下，参数模型响应变量条件期望的检验方法，并进行了统计推断；Chen、Hardle 和 Li[41] 针对参数时间序列回归模型建

立自适应经验似然检验方法，该检验方法是通过最大化经验似然统计量的光滑带宽参数得到的；Hsiao、Li 和 Racine[42]针对同时包含离散和连续协变量的回归模型建立基于核的检验方法，并给出大样本性质；闫晓红[43]主要从非参数角度系统全面地阐述了模型检验的方法；Su 和 Lu[44]对于动态面板数据模型中的线性部分提出一种相合的检验方法，并研究了相关的渐近分布和理论性质；Lin、Li 和 Sun[45]针对固定效应面板数据模型中的函数型回归模型建立相合的检验统计量，研究了其在原假设下的渐近分布，并通过 bootstrap 方法研究有限样本性质；Sun、Ye 和 Sun[46]基于投影方法构建检验统计量，克服了维数祸根的灾难，且该方法不依赖于带宽、核函数等参数的选择，并通过 bootstrap 方法计算统计量的临界值；Guo 等人[47]基于经验过程对带有不可忽视的因变量缺失型广义线性模型构建检验统计量，证明了统计量的理论性质；Wang 和 Wang[48]在部分线性模型中基于 k 近邻估计方法建立相合的检验统计量。

由于函数型数据自身的复杂度较高，被错误设定的可能性较大，各类函数型线性模型的模型检验问题逐渐受到国内外广大科研人员的关注。当模型的响应变量为标量时，Garcia-Portugues 等人[49]提出拟合优度检验方法，并使用 bootstrap 方法研究统计量的有限样本性质；后来，Cuesta-Albertos 等人[50]根据投影过程中的连续泛函建立检验统计量，且投影前后检验统计量的显著性不变；当模型的响应变量也为函数型变量时，Chen 等人[51]提出基于残差显著经验过程的拟合优度检验，推导出其弱收敛性；对于一般的函数型线性模型，Yi、Li 和 Tang[52]基于函数型主成分的次序统计量对该模型提出 F 检验，证明出所提方法比一般的高维模型具有更快的收敛速度；Xu 和 Cui[53]也对该模型的假设检验问题进行了讨论，研究表明所提出的检验统计量的渐近零分布完全由再生核和协变量的协方差算子决定；对于更复杂的函数型模型，也有不少学者对其进行了研究，Jiang、Huang 和 Fan[54]探讨了该模型中非函数型协变量的检验问题，提出经验对数似然比检验方法；Yu、Du 和 Zhang[55]则考虑了分位数回归与函数型数据同时存在时，模型中有限维协变量的检验问题，提出基于秩得分的检验方法。

1.3 主要内容及结构

本文在参数的广义矩估计的基础之上，重点研究部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题。首先，对于特殊的函数型数据，使用 FPCA 方法对其进行简单处理，将无穷维的数据转化为有限个项的线性组合。进一步，通过矩条件构造目标函数，借助广义矩估计方法得到参数的估计值。其次，根据投影方法和残差经验过程构造检验统计量，研究本文所提检验方法在不同假设检验下的大样本性质。最后，使用 bootstrap 方法逼近检验统计量分布的临近值，研究检验统计量在不同样本量大小、空间相关程度、同方差和异方差下的有限样本性质，并通过具体的实际数据说明本文所提检验方法的有效性。论文的具体研究内容和各章的安排如下：

第 1 章主要介绍了函数型数据和空间数据的相关背景，对国内外目前已有的关于本文所涉及的模型的估计和检验方法进行了描述，基于此说明本文选题的重要性，最后给出本文的逻辑框架。

第 2 章主要介绍了后续模型设定检验所需的一些基础知识。首先对函数型数据进行解释说明，其次，详细给出了处理该数据的降维方法的推导过程，然后简单介绍本文所研究的模型，并进一步推导出原假设下的模型估计。

第 3 章重点研究了部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题。首先，基于投影和残差经验过程构造检验统计量，讨论和研究所提检验方法的理论性质，其次，给出计算本文所提方法临界值的算法，并证明了使用该方法逼近统计量零分布的合理性。

第 4 章通过设置不同的数据生成过程，基于仿真实验从不同角度全方位地模拟研究统计量的有限样本性质，并基于西班牙气象数据进行分析，验证所提方法的实用性。

第 2 章　基础知识介绍

2.1　函数型数据

随着技术的发展，高密度离散数据越来越成为人们收集到的主要数据类型，此类数据通常表现为某种函数形式，被称为函数型数据。近年来，函数型数据逐渐成为热门数据类型，普遍存在于各个领域，相关研究也越来越多。

不失一般性，本文主要考虑将函数型数据拟合成定义在可分 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 中的光滑函数的情况，其中，$L^2[0,1]$ 表示对于该空间内的任一可测函数 $X_i(t)$ 都有 $\int_0^1 X_i^2(t)dt < \infty$ 成立。定义该空间内的距离度量为由内积生成的范数度量，具体表示为

$$< X_i, X_j >= \int_0^1 X_i(t)X_j(t)dt, \tag{2–1}$$

并且有 $< X_i, X_i >= \int_0^1 X_i^2(t)dt = ||X_i||^2$。为了便于函数型数据的研究，定义协方差函数为

$$K(s,t) = Cov(X(s), X(t)) = E[(X(s) - \mu(s))\,(X(t) - \mu(t))], \tag{2–2}$$

其中，$\mu(t)$ 为均值函数，不失一般性可假设均值函数为 0。样本协方差函数为

$$\hat{K}(s,t) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i(s)X_i(t)。 \tag{2–3}$$

基于协方差函数的定义，根据 Mercer 定理，可对协方差函数 $K(s,t)$ 进行谱分解，具体形式如下：

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \phi_j(s)\phi_j(t), \tag{2–4}$$

其中，λ_j 为协方差函数的特征值，满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$，$\phi_j(s),\ j = 1, 2, \cdots, \infty$ 为协方差函数的特征函数。

在对函数型数据进行统计推断分析之前，需要考虑采用什么方法将高密度的离散观测拟合成光滑曲线。常见的方法有基拟合方法，选取一组合适的基函数对函数型数据进行线性表达，本文所使用的的函数型主成分分析方法便是此类基拟合的方法。由于函数型数据是无穷维的，因此也需要考虑降维，选择有限个基实现无穷维的表达。

2.2　函数型主成分分析

函数型主成分分析是处理函数型数据的常用方法之一，它是多元统计分析中主成分分析方法的一种推广。与传统主成分分析方法的原理相似，旨在找到投影方向 $\beta(t)$，使得 $X(t),\ t \in [0,1]$ 在 $\beta(t)$ 方向上的投影 ξ_i^* 的方差达到最大。对于投影 ξ_i^* 有 $\xi_i^* = \int_0^1 X_i(t)\beta(t)dt,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，并且 ξ_i^* 即为主成分的得分。故主成分的求解问题转化为如下优化问题：

$$\max_{\beta}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^*)^2 = \max_{\beta}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 X_i(t)\beta(t)dt\right)^2,$$

并且该优化问题的约束条件为 $||\beta||^2 = \int_0^1 \beta(t)\beta(t)dt = 1$。

由于协方差函数为 $\hat{K}(s,t) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i(s)X_i(t)$，则投影方向 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 满足特征方程 $\int_0^1 \hat{K}(s,t)\boldsymbol{\beta}(t)dt = \lambda\boldsymbol{\beta}(s)$。此时，主成分的求解问题转化为协方差算子的特征分析问题。

根据 2.1 小节的介绍可知，协方差函数的谱分解为 $K(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\phi_j(s)\phi_j(t)$，其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$，$\phi_j(s)$ 构成 $L^2([0,1])$ 的一组正交基。在对实际问题进行分析时，总体 $X(t)$ 是未知的，故需要依据观测样本得到真实未知值的估计值。设 $\{X_i(t)\}_{i=1}^n$ 表示来自总体 $X(t) \in L^2([0,1])$ 的 n 个独立样本，则根据样本协方差函数 $\hat{K}(s,t)$ 的谱分解可得到

$$\hat{K}(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j\hat{\phi}_j(s)\hat{\phi}_j(t),$$

其中，特征值的估计 $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq 0$，对于特征函数的估计有 $\int_0^1 \hat{\phi}_j^2(t)dt = 1$ 成立，且对任意的 $j \neq k$，有 $\int_0^1 \hat{\phi}_j(t)\hat{\phi}_k(t)dt = 0$。此时，特征函数的估计 $\hat{\phi}_j$ 即为使得投影方差达到最大的方向。此时主成分得分记为

$$\hat{\xi}_i^* = \int_0^1 X_i(t)\hat{\phi}_j(t)dt =< X_i, \hat{\phi}_j > 。\tag{2–5}$$

根据 Karhunen-Loeve 定理可知，函数型数据可用主成分得分和特征函数的线性组合表示，即

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\phi_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} < X(t), \phi_j(t) > \phi_j(t)。\tag{2–6}$$

若选取前 m 个主成分，那么有

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{m} < X_i, \hat{\phi}_j > \hat{\phi}_j(t),\tag{2–7}$$

其中，m 的具体取值可由累计方差贡献率来决定，也可以通过交叉验证等方法来确定。

2.3 部分函数型线性空间自回归模型介绍

本节将介绍部分函数型线性空间自回归模型，该模型的一般形式如下：

$$y_i = \rho\sum_{j=1}^{n} w_{ij}y_j + m(Z_i, X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\tag{2–8}$$

其中，n 表示样本量，y_i 是响应变量，ρ 为一个标量参数，表示滞后系数，介于 -1 到 1 之间，ρ 越接近于 0，相关性越弱，反之越强。$(w_{ij})_{n\times n}$ 代表空间权重矩阵，其元素表示相应位置之间距离的大小。ε_i 是均值为 0，有限方差为 σ_0^2 的独立同分布随机误差。$Z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{iq})^T$ 为 $q \times 1$ 维的样本观测，$\{X_i(t) : t \in [0,1]\}$ 是定义

在 $L^2([0,1])$ 上的二阶随机过程。

该模型的具体形式为：

$$Y_i=\rho\sum_{j=1}^{n}w_{ij}Y_j+Z_i^T\beta+\int_0^1 X_i(t)\gamma(t)dt+\boldsymbol{\varepsilon}_i。 \tag{2–9}$$

记

$$\boldsymbol{Y}_n=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}，\boldsymbol{Z}_n=\begin{pmatrix}Z_1^{\mathrm{T}}\\Z_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\Z_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}，\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\int_0^1 X_1(t)\gamma(t)dt\\\int_0^1 X_2(t)\gamma(t)dt\\\vdots\\\int_0^1 X_n(t)\gamma(t)dt\end{pmatrix}，\quad\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_n\end{pmatrix}，$$

则模型 (2-9) 可表示为:

$$\boldsymbol{Y}_n=\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_n。 \tag{2–10}$$

本文着重考虑 (2-9) 式的模型检验问题。

2.4　模型估计

接下来介绍原假设下模型的参数估计方法。由于拟极大似然估计计算难度较大，故本文参照 Hu 等人[15]的估计方法，处理完函数型数据部分后使用广义矩估计方法对参数进行估计。

根据 2.2 小节中的介绍，利用 FPCA 方法将无穷维的函数型数据转化为有限个项组成的线性组合形式，即有 $X_i\approx\sum_{j=1}^{m}<X_i,\hat{\phi}_j>\hat{\phi}_j$ 成立。对函数型参数 $\gamma(t)$ 同样进行基展开，即有 $\boldsymbol{\gamma}(t)\approx\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\hat{\phi}_k(t)$ 成立。此时 $\int_0^1 X_i(t)\gamma(t)dt\approx\sum_{j=1}^{m}\gamma_j<X_i,\hat{\phi}_j>$，则模型 (2-9) 可表示为

$$Y_i\approx\rho\sum_{j=1}^{n}w_{ij}Y_j+Z_i^T\beta+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j<X_i,\hat{\phi}_j>+\varepsilon_i。 \tag{2–11}$$

方便起见我们令$<\boldsymbol{X}_n,\hat{\phi}_j>=(\int_0^1\hat{\phi}_j(t)X_1(t)dt,\int_0^1\hat{\phi}_j(t)X_2(t)dt,\ldots,\int_0^1\hat{\phi}_j(t)X_n(t)dt)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Pi}=(<\boldsymbol{X}_n,\hat{\phi}_1>,\ldots,<\boldsymbol{X}_n,\hat{\phi}_m>)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)^{\mathrm{T}}$，则模型 (2-11) 的矩阵表示形式为

$$\boldsymbol{Y}_n\approx\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\varepsilon}_n。 \tag{2–12}$$

模型 (2-10) 可表示为：

$$\boldsymbol{Y}_n=\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n， \tag{2–13}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}$ 是误差项。此时 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\hat{\gamma}_1,\ldots,\hat{\gamma}_m)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi})^{-1}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Y}_n-\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}\right)。 \tag{2–14}$$

记 $\boldsymbol{Q}_n=(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n,\boldsymbol{Z}_n)$，$\boldsymbol{\theta}=(\rho,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W}_n$，则

$$\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n=\boldsymbol{W}_n\left(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W}_n\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)=\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)。$$

由于

$$E\left(\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\neq 0，$$

所以

$$E\left((\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \neq 0。$$

为解决内生性问题，对 $\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n$ 构造工具变量 $\boldsymbol{H}$，使得 $E\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right) = 0$ 成立。工具变量的具体构造方法类似于 Zhang 和 Shen[56]。若令其相应的样本矩为 $\boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n$，记 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_n &\approx \boldsymbol{Y}_n - \rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha} \\
&= \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{Y}_n - \rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Y}_n - \rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}\right)。
\end{aligned}$$

此时，有 $\boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Y}_n - \rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta}\right)$，故可以得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的广义矩估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{g}_n^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{\theta}),$$

其中 $\boldsymbol{T}_n$ 为权重矩阵。对上式关于 $\boldsymbol{\theta}$ 求偏导，计算整理可得：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 &= (\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_n \\
&= (\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\
&= \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n \\
&\quad + (\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n。
\end{aligned}$$

我们选取 $\boldsymbol{T}_n = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}$，则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ 的有效估计为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_n。\tag{2–15}$$

将 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入等式 (2-14) 得到

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi})^{-1}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)。\tag{2–16}$$

2.5 本章小结

本章主要介绍了后续模型设定检验所需要的基础知识。首先详细介绍了函数型数据和函数型主成分分析方法，该方法通过特征值和特征函数有效地将复杂的函数型线性形式转化为一般的线性组合形式。然后给出部分函数型线性空间自回归模型的一般形式。最后说明原假设下的参数估计问题，得到参数的广义矩估计，并基于此进行模型的设定检验研究。

第 3 章　模型检验

3.1　构造检验统计量

本文研究的模型的一般形式已在第 2 章中给出，具体为

$$\boldsymbol{Y}_n=\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+m(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)+\boldsymbol{\varepsilon}_n。\tag{3–1}$$

本小节着重研究部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题，所考虑的原假设和备择假设分别为：

$\boldsymbol{H}_0:\boldsymbol{P}\left(m\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right)=\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}_0+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\gamma_0(t)dt\right)=1$, 对某 $\boldsymbol{\beta}_0\in\boldsymbol{R}^q$ 和 $\gamma_0(t)\in L^2([0,1])$，

$\boldsymbol{H}_1:\boldsymbol{P}\left(m\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right)=\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt\right)<1$, 对所有的 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{R}^q$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(t)\in L^2([0,1])$。

当 $\boldsymbol{H}_0$ 成立时，模型的具体表达式为

$$\boldsymbol{Y}_n=\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}_0+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\gamma_0(t)dt+\boldsymbol{\varepsilon}_n。\tag{3–2}$$

根据 2.4 小节提出的参数估计方法，可以得到 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的估计为

$$\hat{\varepsilon}_n=\boldsymbol{Y}_n-\hat{\rho}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}。$$

记 $\boldsymbol{U}_n=(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$ 是观测矩阵，并令 $\boldsymbol{U}_n=(\boldsymbol{U}_{n1},\boldsymbol{U}_{n2},\ldots,\boldsymbol{U}_{nn})^T$，变量 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})$。当原假设 $\boldsymbol{H}_0$ 成立时，有如下表达式成立：

$$\boldsymbol{Y}_n=\rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n+\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}_0+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\gamma_0(t)dt+m(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)-\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}_0-\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\gamma_0(t)dt+\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

若记 $\boldsymbol{\varepsilon}=m\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right)-\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}_0-\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\gamma_0(t)dt+\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则有 $E\left(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{U}\right)=0$ 成立。根据 Escanciano[33]，有 $E\left(\boldsymbol{\varepsilon}H\left(\boldsymbol{U},u\right)\right)=0$ 对所有的 $u\in R$ 成立，这里的 $H\left(\boldsymbol{U},u\right)$ 是某一权重函数。我们选择示性函数作为权重函数，则对任意的投影方向 $\boldsymbol{h}$ 有表达式 $E\left(\boldsymbol{\varepsilon}I\left(<\boldsymbol{U},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right)\right)=0$ 成立，其中 $\boldsymbol{h}\in L^2[0,1]$ 且有 $\|\boldsymbol{h}\|=1$。对于投影方向 $\boldsymbol{h}$，若记 $\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2)^T$，其中 $\boldsymbol{h}_1$ 为向量，$\boldsymbol{h}_2$ 为一个函数或过程，则 $<\boldsymbol{U},\boldsymbol{h}>=<\boldsymbol{Z},\boldsymbol{h}_1>+<\boldsymbol{X},\boldsymbol{h}_2>=\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{h}_1+\int_0^1\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{h}_2(t)dt$。

构造残差经验过程：

$$C\bar{R}_n(u)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{\varepsilon}_iI\left(<\boldsymbol{U}_{ni},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right),$$

故 Cramér-von Mises 检验统计量的表达式如下：

$$C\bar{T}_n=\int\left(C\bar{R}_n(u)\right)^2dF_n(u),$$

其中，$F_n(u)$ 是 $\{<\boldsymbol{U}_{n1},\boldsymbol{h}>,<\boldsymbol{U}_{n2},\boldsymbol{h}>,\ldots,<\boldsymbol{U}_{nn},\boldsymbol{h}>\}$ 的经验分布函数。由于参数是未知的，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 无法直接得到，用其估计值 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ 代替 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$，此时，残差经验过程 $C\hat{R}_n(u)$ 的表达式为

$$C\hat{R}_n(u)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_iI\left(<\boldsymbol{U}_{ni},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right),$$

检验统计量 CT_n 的表达式为

$$CT_n=\int\left(C\hat{R}_n(u)\right)^2dF_n(u)。$$

后续基于 CT_n 计算出检验的 p 值对该假设检验问题进行判断。

3.2 假设条件

模型估计和检验所需要的基本假设条件如下，在这之前给出以下记号：

$$\boldsymbol{I}_n(u)=\left(I\left(<\boldsymbol{U}_{n1},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right),I\left(<\boldsymbol{U}_{n2},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right),\ldots,I\left(<\boldsymbol{U}_{nn},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right)\right)^T,$$

$$\boldsymbol{V}(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。$$

假设 3.1 矩阵 $\boldsymbol{W}_n$ 和 $(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W}_n)^{-1}$ 行和与列和绝对值一致有界。

注 1: 矩阵 $\boldsymbol{W}_n$ 的绝对值一致有界条件对空间自相关程度进行一定的约束，矩阵 $(\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W}_n)^{-1}$ 的一致有界条件是后续理论性质研究的基础条件。

假设 3.2 $\boldsymbol{I}_n-\rho\boldsymbol{W}_n$ 是非奇异的，矩阵 $\boldsymbol{Z}_n$ 元素一致有界且列满秩。

注 2: 此条件可得到响应变量 $\boldsymbol{Y}_n$ 的显性表达式。

假设 3.3

注 3: 假设 3.3 是统计推断研究中对工具变量的基本要求，其详细的构造方法可参考 Du 等[32]。

假设 3.4 *(1)* 记 $\boldsymbol{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\right)$，$\boldsymbol{A}$ 存在。
(2) 记 $\boldsymbol{B}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)$，$\boldsymbol{B}$ 存在且满秩。
(3) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}$ 的特征值依概率有界。

注 4: 对于 (1) 式，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\\ &=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\\ &=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}。\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{n}E\left(\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\right)=0,$$

且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}E\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1})^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\right)\\ =&\frac{\sigma^2}{n^2}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\\ =&\frac{\sigma^2}{n^2}O(n)\\ =&O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o_p(1),$$

所以

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}=o_p(1),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}+o_p(1)。$$

综上，$\boldsymbol{A}$ 存在。

对于 (2) 式，由于 $\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ 的阶数是 $O(1)$，所以 $\boldsymbol{B}$ 存在且满秩。

对于 (3) 式，由于实对称矩阵存在最大和最小特征值，所以该假设条件合理。

假设 3.5 存在常数 $a>1$ 和 $b>a/2+1$ 使得 $\lambda_j-\lambda_{j+1}\geq Cj^{-a-1}$ 和 $|\gamma_j|\leq Cj^{-b}$ 对任意的 $j\geq 1$ 成立。

注 5: 假设 3.5 是函数型线性模型的基础假设。

假设 3.6 对于截断参数 m 有 $m\sim O(n^{\frac{1}{a+2b}})$，且当 $m\to\infty$ 时有 $nm^{-2b}\to 0$ 成立。

注 6: 假设 3.6 给出了检验所需要的收敛速度，是后续理论性质证明的重要条件。

假设 3.7 $\boldsymbol{V}(u)$ 是有界向量。

注 7: 对 $\boldsymbol{V}(u)$ 进行如下计算：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(u)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_n\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{e}_n\right)^T\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，有

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n^T\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\leqslant\frac{1}{n}||\boldsymbol{e}_n||\,||\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||。$$

由于

$$||\boldsymbol{e}_n||^2=nm^{-2b+1},$$

且

$$||\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||\leqslant||\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{I}_n(u)||=O(\sqrt{n}),$$

故

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n^T\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\leqslant\frac{1}{n}\sqrt{n}m^{\frac{-2b+1}{2}}O(\sqrt{n})=O(n^{-\frac{2b-1}{2(a+2b)}})=o_p(1)。$$

故 $\boldsymbol{V}(u)$ 有界。

假设 3.8 记 $\boldsymbol{\Upsilon}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\right)\neq 0$，$D(\cdot,\cdot)$ 是可测函数。

假设 3.9 记 $\boldsymbol{\varsigma}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\left(D^T(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)\neq 0$，$D(\cdot,\cdot)$ 是可测函数。

注 8: 假设 3.8 和假设 3.9 是 3.3 小节中证明备择假设下参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的渐近性质和统计量渐近分布所需要的额外条件。

3.3 检验统计量的渐近性质

本小节重点研究残差经验过程 $C\hat{R}_n(u)$ 和检验统计量 CT_n 在原假设和多种备择假设下的渐近分布，给出部分函数型线性空间自回归模型设定检验的理论依据。

定理 3.1 在假设条件 3.1-3.7 和原假设 $\boldsymbol{H}_0$ 下，有

$$C\hat{R}_n(u)\xrightarrow{L}CR(u),$$

其中 $CR(u)$ 是一个中心化高斯过程，其协方差函数为：

$$\lim_{n\to\infty}E\left(J(\boldsymbol{Y}_n,\rho,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{X}_n,u_1)J^T(\boldsymbol{Y}_n,\rho,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{X}_n,u_2)\right),$$

其中

$$J(\boldsymbol{Y}_n,\rho,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{X}_n,u)=\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

并且有

$$CT_n\xrightarrow{L}\int(CR(u))^2\,dF(u),$$

这里 $F(u)$ 是给定 $\boldsymbol{h}$ 时，$\{<\boldsymbol{U}_{n1},\boldsymbol{h}>,<\boldsymbol{U}_{n2},\boldsymbol{h}>,\ldots,<\boldsymbol{U}_{nn},\boldsymbol{h}>\}$ 的条件分布。

定理 3.1 给出了检验统计量在 $\boldsymbol{H}_0$ 下的极限分布，该定理表明可以很好地控制犯第一类错误的概率。

为进一步说明检验统计量的良好性质，考虑 Pitman 局部备择假设模型：

$$\boldsymbol{H}_1':m(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)=\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt+n^{-\frac{1}{2}}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n),\tag{3–3}$$

其中，$D(\cdot,\cdot)$ 是可测函数。若令 $\mathcal{F}=\{\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt\,|\,\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{R}^q,\boldsymbol{\gamma}(t)\in L^2([0,1])\}$ 为一个函数族，则对任意的自然数 n，对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 G，可测函数 $D(\cdot,\cdot)$ 满足 $\inf\limits_{G\in\mathcal{F}}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}||D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)-G(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)||^2>0$。即 Pitman 局部备择假设 $\boldsymbol{H}_1'$ 表明，找不到 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 使得 $D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$ 能够表示成 $\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\int_0^1\boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt$ 这样的形式，也就是说 $E(\boldsymbol{\varepsilon}_n|\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\neq 0$。

定理 3.2 在假设条件 3.1-3.9 和 Pitman 局部备择假设 $\boldsymbol{H}_1'$ 下，有：

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+o_p(1)。$$

基于参数在 $\boldsymbol{H}_1'$ 下的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，接下来我们给出 $C\hat{R}_n(u)$ 和 CT_n 在 $\boldsymbol{H}_1'$ 下的极限分布。

定理 3.3 在假设条件 3.1-3.9 和 Pitman 局部备择假设 $\boldsymbol{H}_1'$ 下，有：

$$C\hat{R}_n(u)\xrightarrow{L}CR(u)+\boldsymbol{\Omega},$$

其中偏移项 $\boldsymbol{\Omega}=-\boldsymbol{V}^T(u)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Upsilon}+\boldsymbol{\varsigma}$，$CR(u)$ 的具体形式见定理 3.1。

并且有

$$CT_n \xrightarrow{L} \int (CR(u)+\boldsymbol{\Omega})^2 dF(u),$$

其中，$F(u)$ 是给定 $\boldsymbol{h}$ 时，$\{<\boldsymbol{U}_{n1},\boldsymbol{h}>,<\boldsymbol{U}_{n2},\boldsymbol{h}>,\ldots,<\boldsymbol{U}_{nn},\boldsymbol{h}>\}$ 的条件分布。

定理 3.3 给出了检验统计量在 $\boldsymbol{H}_1'$ 下的极限分布，表明本文方法能够以通常的参数收敛速度区分原假设和 Pitman 局部备择假设。

进一步考虑全局备择假设模型：

$$\boldsymbol{H}_1: m(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)=\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt+a_nD(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n), \tag{3–4}$$

其中 a_n 满足 $\sqrt{n}a_n\to\infty$。

定理 3.4 在假设条件 3.1-3.9 和全局备择假设 $\boldsymbol{H}_1$ 下，有：

$$C\hat{R}_n(u)\to\infty,\qquad CT_n\to\infty。$$

定理 3.4 结合定理 3.1 表明所提的检验统计量具有相合性。综上，本文所提出的检验统计量具有较好的理论性质。

3.4　检验统计量临界值的计算

在进行模型的设定检验时，通常需要基于检验统计量的渐近分布进行检验统计量临近值的计算，进而对假设检验做出判断。根据 3.3 小节中的相关定理可知，检验统计量的分布结构较为复杂，其临界值不易直接计算得到。并且，当样本容量较小时，用统计量的极限分布近似统计量的真实分布的误差较大，会出现失真的情况。因此我们采用 bootstrap 方法来计算临界值，通过 bootstrap 抽样方法让 bootstrap 样本近似替代原始样本，并基于此计算检验统计量 CT_n 的渐近分布。类似于 Sun 等[46]，详细步骤如下：

1. 在原假设下依据参数的广义矩估计得到残差的估计 $\hat{\varepsilon}_n=\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，通过构造的检验统计量表达式计算 CT_n 的值。

2. 生成一系列均值为 0，方差为 1 的独立同分布随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$。令 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n^*=(\hat{\varepsilon}_{n1}\xi_1,\hat{\varepsilon}_{n2}\xi_2,\ldots,\hat{\varepsilon}_{nn}\xi_n)^T$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n^*=\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{Y}_n$ 的 bootstrap 表示为：$\boldsymbol{Y}_n^*=(\boldsymbol{I}_n-\hat{\rho}\boldsymbol{W}_n)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}+\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)$，得到样本 $(\boldsymbol{Y}_n^*,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$。

3. 基于样本 $(\boldsymbol{Y}_n^*,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$ 依据广义矩估计方法给出参数的估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$，$\hat{\rho}^*$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$，进而得到 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^*=\boldsymbol{Y}_n^*-\hat{\rho}^*\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n^*-\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}^*-\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*$，并计算检验统计量 CT_n^* 的值。

4. 将步骤 2-3 重复 Br 次，得到检验统计量的具体数值 $CT_i{}^*, i=1,2,\ldots,Br$，此时检验的 p 值为：$p=Br^{-1}\sum\limits_{i=1}^{Br}I(CT_i{}^*\geqslant CT_n)$。

接下给出使用 bootstrap 样本逼近检验统计量零分布进而得到统计量临近值的合理性说明。

定理 3.5 在假设 3.1-3.9 下，基于样本 $(\boldsymbol{Y}_n,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$ 和 bootstrap 样本 $(\boldsymbol{Y}_n^*,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)$，有如下表达式成立：

$$\sup_{\iota\in R}\left|P\left(CT_n^*\leqslant\iota\right)-P\left(CT_n\leqslant\iota\right)\right|=o_p(1),$$

其中 CT_n 的具体形式见 3.1 小节。

定理 3.5 表明，无论原假设是否成立，用 bootstrap 方法逼近统计量 CT_n 的真实分布是合理的。

3.5 定理的证明

定理 3.1 的证明：

证明：在原假设 H_0 下，参数的估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PY}_n,$$

和

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PY}_n。$$

根据 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的具体形式，可进行如下计算：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PY}_n \\
&= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P} \\
&\quad \left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Pi\alpha} + \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \\
&= \boldsymbol{\theta} + \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{Pe}_n \\
&\quad + \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P\varepsilon}_n \\
&= \boldsymbol{\theta} + L_1 + L_2,
\end{aligned}$$

其中

$$L_1 = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{Pe}_n$$

和

$$L_2 = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P\varepsilon}_n。$$

根据假设 3.4 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{PQ}_n\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{PH}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1} \\
&= \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1} + o_p(1)
\end{aligned}$$

存在且有界。

由于

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{PH}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{Pe}_n &= \frac{1}{n^2}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{PHH}^T\boldsymbol{Pe}_n \\
&\leqslant \frac{1}{n^2}\lambda_{max}\left(\boldsymbol{PHH}^T\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{e}_n \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}nm^{-2b+1}\right) \\
&= O\left(\frac{m^{-2b+1}}{n}\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{a+4b-1}{a+2b}}\right),
\end{aligned}$$

因此，有 $L_1 = O_p\left(n^{-\frac{a+4b-1}{2(a+2b)}}\right)$。对 L_2 进行类似处理，得到

$$L_2 = \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P\varepsilon}_n + o_p(1)。$$

综上

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) &= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+\sqrt{n}O_p\left(n^{-\frac{a+4b-1}{2(a+2b)}}\right)\\
&= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+O_p\left(n^{-\frac{2b-1}{2(a+2b)}}\right)\\
&= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+o_p(1),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n &= \boldsymbol{Y}_n-\hat{\rho}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\\
&= \boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\left(\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\
&= \left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\right)\left(\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\
&= \left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\right)\left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\
&= \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})+\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n。\end{aligned}$$

由于 $\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)=O_p(1)$，于是有

$$\begin{aligned}C\hat{R}_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i I\left(<\boldsymbol{U}_{ni},\boldsymbol{h}>\leqslant u\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^T\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})+\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)+\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)+\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3,\end{aligned}$$

其中

$$\Pi_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$

$$\Pi_2=\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$

和

$$\Pi_3=\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。$$

对于 Π_1，

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= \frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)$$

$$=III_1+III_2,$$

其中

$$III_1=\frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$

$$III_2=\frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。$$

对于 III_1，有

$$\begin{aligned}III_1&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\left(\boldsymbol{V}(u)+o\left(1\right)\right)\\&=-\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+o_p\left(1\right)。\end{aligned}$$

对于 III_2，由于

$$E\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)=E\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)=0,$$

且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}E\left(||\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||^2\right)\\&=\frac{1}{n^2}E\left(trace\left(\boldsymbol{I}_n^T\left(u\right)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)\right)\\&\leqslant\sigma^2\frac{1}{n^2}E\left(trace\left(\boldsymbol{I}_n^T\left(u\right)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)\right)\\&=\sigma^2\frac{1}{n^2}O\left(n\right)\\&=O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o_p\left(1\right)。$$

因此，

$$\begin{aligned}III_2&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=O_p\left(1\right)o_p\left(1\right)\\&=o_p\left(1\right),\end{aligned}$$

整理可得

$$\Pi_1=-\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+o_p(1)。$$

对于 Π_2，由于

$$||\boldsymbol{e}_n||^2=nm^{-2b+1},$$

$$||\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||\leqslant||\boldsymbol{I}_n(u)||=\sqrt{n},$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}||\boldsymbol{e}_n||\,||\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}m^{\frac{-2b+1}{2}}\sqrt{n}\\ &= \left(nm^{-2b+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= o_p(1)。\end{aligned}$$

因此我们得出：

$$\Pi_2 = o_p\left(1\right)。$$

综上所述，

$$\begin{aligned}C\hat{R}_n\left(u\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) - \boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p\left(1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p\left(1\right)\\ &= J\left(\boldsymbol{Y}_n, \rho, \boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}_n, u\right) + o_p\left(1\right),\end{aligned}$$

故

$$C\hat{R}_n(u) \xrightarrow{L} CR(u),$$

其中 $CR(u)$ 是中心化高斯过程，协方差函数为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} E\left(J(\boldsymbol{Y}_n, \rho, \boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}_n, u_1)J^T(\boldsymbol{Y}_n, \rho, \boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}_n, u_2)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u_1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{V}^T(u_1)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\\ &\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u_2)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{V}^T(u_2)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\Bigg)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Bigg(\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{I}_n^T(u_1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u_2)\right)\\ &\quad -\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{I}_n^T(u_1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{V}(u_2)\right)\\ &\quad -\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{V}^T(u_1)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u_2)\right)\\ &\quad +\frac{1}{n}E\left(\boldsymbol{V}^T(u_1)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{V}(u_2)\right)\Bigg)\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\Bigg(\boldsymbol{I}_n^T(u_1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u_2) - \boldsymbol{I}_n^T(u_1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{V}(u_2)\\ &\quad -\boldsymbol{V}^T(u_1)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u_2) + \boldsymbol{V}^T(u_1)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{V}(u_2)\Bigg)。\end{aligned}$$

因为积分算子是连续的，根据抽样空间上的连续映射定理有：

$$CT_n \xrightarrow{L} \int \left(CR(u)\right)^2 dF(u)。$$

定理 3.2 的证明：

证明：在局部备择假设 $\boldsymbol{H}_1'$ 成立时，有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_n \\ &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P} \\ &\quad \left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_n+n^{-\frac{1}{2}}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \\ &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P} \\ &\quad \left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{e}_n+n^{-\frac{1}{2}}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)+\boldsymbol{\varepsilon}_n\right) \\ &= \boldsymbol{\theta}+M_1+M_2+M_3,\end{aligned}$$

其中

$$M_1 = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n,$$

$$M_2 = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right),$$

$$M_3 = \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n。$$

根据假设 3.8 和定理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}M_1 &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n \\ &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n \\ &= O_p\left(\frac{m^{\frac{-2b+1}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\ &= O_p\left(n^{-\frac{a+4b-1}{2(a+2b)}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1} \\ &\quad \frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right) \\ &= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Upsilon}+o_p(1),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}M_3 &= \left(\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+o_p(1)。\end{aligned}$$

综上，

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\sqrt{n}n^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Upsilon}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n+\sqrt{n}O_p\left(n^{-\frac{a+4b-1}{2(a+2b)}}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1}\sqrt{n}n^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Upsilon} + \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n + O_p\left(n^{-\frac{2b-1}{2(a+2b)}}\right)$$
$$= \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} + \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{AB}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p(1)。$$

定理 3.3 的证明：

证明：基于局部备择假设 $\boldsymbol{H}_1'$ 和定理 3.2，可得

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n &= \boldsymbol{Y}_n - \hat{\rho}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \\
&= \boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\left(\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\right)\left(\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{e}_n + n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{Q}_n\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&= \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n,
\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}
C\hat{R}_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i I\left(<\boldsymbol{U}_{ni}, \boldsymbol{h}>\leqslant u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_n\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right)\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4,
\end{aligned}$$

其中

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$
$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$
$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}n^{-\frac{1}{2}}D^T\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right)\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$

和

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。$$

对于 ψ_1，有

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta} + n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\right)^T \\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3,
\end{aligned}$$

其中

$$\tau_1=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u),$$

$$\tau_2=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}n^{-\frac{1}{2}}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)$$

和

$$\tau_3=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。$$

根据定理 3.1 和定理 3.2 的证明，有

$$\begin{aligned}\tau_1&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\eta}\right)\right)^T\\ \boldsymbol{Z}_n^T\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\left(\boldsymbol{V}(u)+o(1)\right),\\ \tau_3&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)=o_p(1)。\end{aligned}$$

对于 τ_2，由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}||\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right)\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||^2\\&=O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(n\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=o(1),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}n^{-\frac{1}{2}}D\left(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n\right)\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)=o_p(1),$$

故

$$\begin{aligned}\tau_2&=\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}n^{-\frac{1}{2}}D(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\right)^T\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=o_p(1)。\end{aligned}$$

因此我们有

$$\psi_1=-\boldsymbol{V}^T(u)\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)+o_p(1)。$$

根据定理 3.1 的证明过程，我们知道 $\psi_2=o_p(1)$。

基于假设 3.9，我们可知

$$\begin{aligned}\psi_3&=\frac{1}{\sqrt{n}}n^{-\frac{1}{2}}D^T(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\frac{1}{n}D^T(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{X}_n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\&=\boldsymbol{\varsigma}+o(1),\end{aligned}$$

因此，可以得出

$$
\begin{aligned}
C\hat{R}_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) - \boldsymbol{V}^T(u)\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) + \boldsymbol{\varsigma} + o_p(1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{V}^T(u)\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) + \boldsymbol{\varsigma} + o_p(1)。
\end{aligned}
$$

由于

$$
\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} + \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n + o_p(1),
$$

故

$$
\begin{aligned}
C\hat{R}_n(u) = &\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\
&- \boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} + \boldsymbol{\varsigma} + o_p(1) \\
= &J(\boldsymbol{Y}_n, \rho, \boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}_n, u) + \boldsymbol{\Omega} + o_p(1)。
\end{aligned}
$$

进而有

$$
C\hat{R}_n(u) \xrightarrow{L} CR(u) + \boldsymbol{\Omega},
$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} + \boldsymbol{\varsigma}$，$CR(u)$ 的具体形式跟定理 3.1 中的定义相同。

因为积分算子是连续的，根据抽样空间上的连续映射定理，有

$$
CT_n \xrightarrow{L} \int \left(CR(u) + \boldsymbol{\Omega}\right)^2 dF(u)。
$$

定理 3.4 的证明：

证明：为了给出统计量在 $\boldsymbol{H}_1$ 下的渐近性质，首先令

$$
\boldsymbol{\omega}(a,u) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}a_nD\left(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n\right)\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)。
$$

根据定理 3.3 的证明过程可得到：

$$
\begin{aligned}
C\hat{R}_n(u) = &\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}a_nD(\boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{X}_n)\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&+ \sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&+ \sqrt{n}\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\left(\boldsymbol{V}(u) + o(1)\right) + \sqrt{n}a_n\boldsymbol{\varsigma} + \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) + o_p(1) \\
= &\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) - \left(\boldsymbol{V}(u) + \boldsymbol{\omega}(a,u)\right)^T\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) \\
&\ni \\
= &\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \left(\boldsymbol{V}(u) + \boldsymbol{\omega}(a,u)\right)^T\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) \\
&- \sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) + \sqrt{n}a_n\boldsymbol{\varsigma} + o_p(1)。
\end{aligned}
$$

由于 $\sqrt{n}a_n\boldsymbol{\varsigma}\to\infty$，则 $\sqrt{n}a_n\boldsymbol{\varsigma}\to\infty$。故有

$$
C\hat{R}_n(u)\to\infty \quad 和 \quad CT_n\to\infty。
$$

定理 3.5 的证明：

证明：由于

$$\boldsymbol{Y}_n^* = \hat{\rho}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n^* + \boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^*，$$

记 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \left(\hat{\rho}^*, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*T}\right)^T$，$\boldsymbol{Q}_n^* = (\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n^*, \boldsymbol{Z}_n)$，$\boldsymbol{H}^*$ 为工具变量，则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 在 bootstrap 样本下的估计为

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}^* &= \left(\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_n^* \\
&= \left(\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P} \\
&\quad \left(\boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^*，
\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 在 bootstrap 样本下的估计为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = \left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\left(\boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)。$$

进而有

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*\right)^{-1} \\
&\quad \frac{1}{n}\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^*\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{H}^*\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^* \\
&= \left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^* + o_p(1)，
\end{aligned}$$

故得到 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 在 bootstrap 样本下的估计：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^* &= \boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* \\
&= \boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\left(\boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right) \\
&= \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Pi}\left(\boldsymbol{\Pi}^T\boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Pi}^T\right)\left(\boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Y}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right) \\
&= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^* - \boldsymbol{Q}_n^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right) \\
&= \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^*。
\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{S}_n(\hat{\rho}) = \boldsymbol{I}_n - \hat{\rho}\boldsymbol{W}_n$，则 $C\hat{R}_n(u)$ 在 bootstrap 样本下可表示为

$$\begin{aligned}
C\hat{R}_n^*(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^*\boldsymbol{I}(<\boldsymbol{U}_{ni}, \boldsymbol{h}> \leqslant u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{*T}\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_n^*(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*)\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T\boldsymbol{I}_n(u) \\
&= VII_1 + VII_2，
\end{aligned}$$

$$VII_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T\boldsymbol{Q}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)$$

和

$$VII_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{*T} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u)。$$

对于 VII_1 有

$$\begin{aligned}
VII_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \boldsymbol{Q}_n^{*T} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{n}\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \left(\boldsymbol{Z}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)\right)^T \\ \boldsymbol{Z}_n^T \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u) \\
&= \frac{1}{n}\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \left(\boldsymbol{Z}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right)^T \\ \boldsymbol{Z}_n^T \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u) \\
&= VIII_1 + VIII_2,
\end{aligned}$$

其中

$$VIII_1 = \frac{1}{n}\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \left(\boldsymbol{Z}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right)^T \\ \boldsymbol{Z}_n^T \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u)$$

和

$$VIII_2 = \frac{1}{n}\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u)。$$

记

$$\hat{\boldsymbol{V}}(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho}) \left(\boldsymbol{Z}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right)^T \\ \boldsymbol{Z}_n^T \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{I}_n(u),$$

由于 $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} = o_p(1)$，$\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\eta}$ 中元素的阶为 $o_p(1)$，则有

$$\hat{\boldsymbol{V}}(u) \xrightarrow{p} \boldsymbol{V}(u)。$$

由于

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = \boldsymbol{Y}_n - \hat{\rho}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{\alpha}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{Y}_n - \rho\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\eta},$$

且可以推出

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n = o_p(1),$$

故

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi} = o_p(1)。$$

因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_n^* = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维的随机向量，且各元素之间相互独立，均值为 0，方差为 σ^2。由于

$$E\left(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{W}_n \boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right) = E\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right) = 0,$$

且

$$\frac{1}{n^2}E\left(||\boldsymbol{\varepsilon}_n^{*T}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\right)^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)||^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} E\left(trace\left(\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\boldsymbol{\varepsilon}_n^{*T}\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)\right)\\
&\le \sigma^2\frac{1}{n^2} E\left(trace\left(\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\right)^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\right)\right)\\
&= \sigma^2\frac{1}{n^2} O(n)\\
&= O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

故

$$
\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o_p(1)。
$$

又

$$
\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = O_p(1),
$$

故

$$
\begin{aligned}
VIII_2 &= \frac{1}{n}\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*\right)^T\begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right)^T \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u)\\
&= O_p(1)o_p(1)\\
&= o_p(1)。
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
VII_1 &= -\hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_p(1)\\
&= -\boldsymbol{V}^T(u)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_p(1)。
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_n^* &= (\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{Y}_n^*, \boldsymbol{Z}_n)\\
&= \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\left(\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^*\right), \boldsymbol{Z}_n\right)\\
&= \left(\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{S}_n^{-1}(\hat{\rho})\left(\boldsymbol{Z}_n\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi}\right), \boldsymbol{Z}_n\right),
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{Q}_n^* \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}_n$。类似地有 $\boldsymbol{H}^* \xrightarrow{p} \boldsymbol{H}$。

令

$$
\begin{aligned}
J^*\left(\boldsymbol{Y}_n^*, \hat{\rho}, \boldsymbol{Z}_n, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{X}_n, u\right) = &-\hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi}\\
&+ \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi}。
\end{aligned}
$$

综上所述，

$$
\begin{aligned}
C\hat{R}_n^*(u) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon}_n^{*T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n(u) - \hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + o_p(1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi} + o_p(1)\\
&= J^*\left(\boldsymbol{Y}_n^*, \hat{\rho}, \boldsymbol{Z}_n, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{X}_n, u\right) + o_p(1)。
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&J^*\left(\boldsymbol{Y}_n^*, \hat{\rho}, \boldsymbol{Z}_n, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{X}_n, u\right) - J\left(\boldsymbol{Y}_n, \rho, \boldsymbol{Z}_n, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}_n, u\right)\boldsymbol{\xi}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\hat{\varepsilon}_n\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}\\
=&\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{I}_n^T(u)\boldsymbol{P}(\hat{\varepsilon}_n-\varepsilon_n)\boldsymbol{\xi}-\hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}(\hat{\varepsilon}_n-\varepsilon_n)\boldsymbol{\xi}\\
&+\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{V}^T(u)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P}\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}\\
&-\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\boldsymbol{V}}^T(u)\left(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^{*T}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^*)^{-1}\boldsymbol{H}^{*T}\boldsymbol{P}\varepsilon_n\boldsymbol{\xi},
\end{aligned}
$$

且随机变量序列 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{Z}_n$ 和 $\boldsymbol{X}_n$ 独立，并且均值为0，方差为1。类似于 Chen 等[51]中的定理3的证明，可以得到

$$
J^*\left(\boldsymbol{Y}_n^*,\hat{\rho},\boldsymbol{Z}_n,\hat{\boldsymbol{\beta}},\boldsymbol{X}_n,u\right)-J\left(\boldsymbol{Y}_n,\rho,\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{X}_n,u\right)\boldsymbol{\xi}=o_p(1),
$$

故 $C\hat{R}_n^*(u)\xrightarrow{L}CR(u)$。

根据连续映射定理可知 CT_n^* 和 CT_n 有相同的分布，故定理3.5得证。

3.6　本章小结

本章主要研究了部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题。依据参数估计基于投影和残差经验过程构造检验统计量，并讨论研究了所提方法的大样本性质，给出检验统计量的相合性。为了更好地计算检验统计量的临界值，在3.4小节中使用bootstrap样本替代原始样本实现临界值的计算，并给出理论依据。最后，在3.5小节中给出所有定理的证明过程。

第 4 章 数值模拟与实例分析

4.1 数值模拟

本节采用 Monte Carlo 模拟方法来研究所提模型检验方法的有限样本性质。

对于空间权重矩阵的选取，依据 Case[57] 选取空间权重矩阵为 $\boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{I}_R \bigotimes \boldsymbol{B}_m$，其中 $\boldsymbol{B}_m = (\boldsymbol{\ell}_m \boldsymbol{\ell}_m^T - \boldsymbol{I}_m)/(m-1)$，$R$ 是空间区域的个数，m 是每个区域中的个体个数。不同的空间区域是互不相关的，但同一个空间区域内的不同个体是相互影响的，且影响程度相同。样本量 n 为 $n = R \times m$。

在构造的数据生成模型 DGP1 至 DGP6 中，分别考虑同方差和异方差两种情况，每种情况下分别讨论不同的空间相关程度 $\rho_0 = 0.25, 0.5, 0.75$，漂移项 d 以及显著性水平 $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$，以此来验证所提检验统计量的表现效果。其中 DGP1、DGP2 为原假设模型，DGP3、DGP4 为备择假设模型，DGP5、DGP6 两种假设模型都包含，其中 d 表示偏离原假设的程度。Monte Carlo 模拟的次数为 1000，每次模拟过程中 bootstrap 重复的次数为 500，每次 Monte Carlo 模拟的结果表示犯第一类错误的概率或者检验统计量的功效。具体的 DGP (Data Generate Process) 如下：

DGP1 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + \boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

DGP2 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + \boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

DGP3 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + 2\left(\boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \boldsymbol{z}_{n3} + \boldsymbol{z}_{n4} + \boldsymbol{z}_{n5}\right) + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt$
$+0.8\left(cos\left(0.6\pi \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt\right) + sin\left(\sum_{j=1}^5 \boldsymbol{z}_{nj}\right)\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

DGP4 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + \boldsymbol{z}_{n1} + 2\boldsymbol{z}_{n2} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt$
$+0.25\left(\boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \exp\left(\int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt\right)\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

DGP5 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + \boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt$
$+d\ \exp\left(\frac{1}{5}\sum_{j=1}^2 \boldsymbol{z}_{nj}\boldsymbol{x}_{nj} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

DGP6 : $\boldsymbol{Y}_n = \rho \boldsymbol{W}_n \boldsymbol{Y}_n + 2\boldsymbol{z}_{n1} + \boldsymbol{z}_{n2} + \boldsymbol{z}_{n3} + \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt$
$+d\ \exp(\frac{1}{12}\sum_{j=1}^3 \boldsymbol{z}_{nj}^2 - \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t)\boldsymbol{\gamma}(t)dt) + \boldsymbol{\varepsilon}_n$。

对于解释变量 $\boldsymbol{Z}_n$ 有两种生成方式：

(1)在 DGP1、DGP3、DGP4、DGP5 中，$\boldsymbol{Z}_n$ 服从多元正态分布;

(2)在 DGP2、DGP6 中，$\boldsymbol{Z}_n$ 服从均匀分布。

函数型数据部分类似于 Shin[11]，在 DGP1 - DGP5 中，设置函数型参数的取值为 $\gamma(t) = \sqrt{2}sin(\pi t/2) + 3\sqrt{2}sin(3\pi t/2)$，$X_i(t) = \sum_{j=1}^{100}\gamma_j\phi_j(t)$，其中 γ_j 为均值为 0，方差为 $\lambda_j = ((j-0.5)\pi)^{-2}$ 的独立同分布正态随机变量，且 $\phi_j(t) = \sqrt{2}sin((j-0.5)\pi t)$。在 DGP6 中，函数型参数变为 $\gamma(t) = sin(\pi t/2) + \frac{1}{2}sin(3\pi t/2) + \frac{1}{4}sin(5\pi t/2)$，$\lambda_j$ 和 $\phi_j(t)$ 的取值保持不变。

对于误差项，分别有同方差和异方差两种生成方式：

(1) ε_{ni} 服从正态分布；

(2) $\varepsilon_{ni} = \sqrt{2}(1 + x_{n1})\bar{\varepsilon}_{ni}$，其中 $\bar{\varepsilon}_{ni}$ 服从正态分布。

从表 4-1 和表 4-2 中可以看到，在原假设下，无论经验水平 α 设置的值为多少，检验统计量的经验水平都接近于 α，异方差情况下同样如此，表明所提检验统计量可以很好地控制犯第一类错误的概率。

从表4-3和表4-4中可以看到，在不同的备择假设下，随着样本量的增大，检验的功效越来越大且趋于1，该结果在异方差情况下也成立。

从表4-5和表4-6中可以看到，随着偏移量d的增大，检验统计量的功效逐渐变大并趋于1。上述模拟结果表明本文所提方法的有效性。

表4-1 DGP1 模拟结果

Tab. 4-1 Simulation results for DGP1

ρ	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
0.25	5	30	0.011	0.051	0.108	0.012	0.053	0.109
		40	0.015	0.049	0.101	0.009	0.051	0.100
		50	0.011	0.042	0.087	0.008	0.042	0.094
	8	30	0.012	0.057	0.114	0.013	0.053	0.116
		40	0.011	0.055	0.104	0.012	0.053	0.103
		50	0.014	0.048	0.100	0.012	0.047	0.105
0.5	5	30	0.011	0.051	0.107	0.012	0.053	0.110
		40	0.016	0.048	0.099	0.009	0.051	0.099
		50	0.014	0.044	0.103	0.008	0.042	0.094
	8	30	0.011	0.048	0.108	0.013	0.050	0.115
		40	0.007	0.049	0.092	0.012	0.053	0.103
		50	0.015	0.058	0.106	0.011	0.046	0.104
0.75	5	30	0.010	0.051	0.108	0.011	0.057	0.107
		40	0.014	0.048	0.099	0.011	0.053	0.109
		50	0.009	0.043	0.087	0.011	0.066	0.113
	8	30	0.011	0.047	0.108	0.014	0.053	0.100
		40	0.007	0.047	0.092	0.015	0.053	0.112
		50	0.010	0.046	0.100	0.017	0.062	0.114

表 4-2 DGP2 模拟结果

Tab. 4-2 Simulation results for DGP2

ρ	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
0.25	5	30	0.024	0.069	0.123	0.025	0.071	0.125
		40	0.010	0.052	0.109	0.011	0.051	0.110
		50	0.016	0.057	0.117	0.016	0.055	0.117
	8	30	0.012	0.054	0.098	0.012	0.057	0.092
		40	0.017	0.057	0.110	0.018	0.057	0.111
		50	0.014	0.061	0.112	0.014	0.065	0.114
0.5	5	30	0.024	0.070	0.123	0.011	0.068	0.110
		40	0.011	0.051	0.108	0.009	0.050	0.095
		50	0.017	0.055	0.115	0.014	0.062	0.107
	8	30	0.011	0.053	0.098	0.011	0.055	0.096
		40	0.017	0.057	0.108	0.008	0.046	0.100
		50	0.014	0.064	0.111	0.012	0.040	0.084
0.75	5	30	0.024	0.068	0.122	0.020	0.068	0.128
		40	0.013	0.050	0.107	0.010	0.050	0.107
		50	0.016	0.054	0.116	0.015	0.054	0.112
	8	30	0.007	0.055	0.099	0.013	0.056	0.091
		40	0.012	0.046	0.092	0.018	0.056	0.109
		50	0.011	0.047	0.082	0.014	0.064	0.113

表 4-3 DGP3 模拟结果

Tab. 4-3 Simulation results for DGP3

ρ	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
0.25	5	30	0.507	0.630	0.685	0.388	0.527	0.600
		40	0.554	0.662	0.737	0.448	0.586	0.646
		50	0.590	0.702	0.763	0.471	0.602	0.663
	8	30	0.606	0.710	0.771	0.494	0.623	0.695
		40	0.641	0.745	0.800	0.550	0.649	0.711
		50	0.684	0.788	0.840	0.591	0.701	0.767
0.5	5	30	0.491	0.633	0.691	0.390	0.533	0.595
		40	0.554	0.662	0.728	0.445	0.561	0.639
		50	0.597	0.711	0.771	0.482	0.619	0.678
	8	30	0.586	0.693	0.760	0.466	0.608	0.679
		40	0.626	0.730	0.788	0.521	0.633	0.695
		50	0.694	0.787	0.848	0.588	0.699	0.767
0.75	5	30	0.506	0.627	0.684	0.388	0.524	0.599
		40	0.553	0.663	0.736	0.446	0.584	0.645
		50	0.591	0.703	0.761	0.470	0.604	0.663
	8	30	0.604	0.714	0.768	0.493	0.621	0.695
		40	0.633	0.736	0.804	0.550	0.648	0.710
		50	0.680	0.781	0.828	0.591	0.700	0.767

表 4-4 DGP4 模拟结果

Tab. 4-4 Simulation results for DGP4

ρ	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
0.25	5	30	0.821	0.873	0.889	0.792	0.854	0.874
		40	0.846	0.892	0.915	0.829	0.876	0.900
		50	0.871	0.912	0.921	0.852	0.894	0.920
	8	30	0.828	0.898	0.921	0.807	0.877	0.909
		40	0.877	0.922	0.940	0.866	0.918	0.934
		50	0.867	0.921	0.934	0.859	0.916	0.933
0.5	5	30	0.817	0.879	0.908	0.793	0.869	0.899
		40	0.826	0.888	0.910	0.807	0.866	0.899
		50	0.827	0.884	0.907	0.823	0.871	0.897
	8	30	0.837	0.912	0.935	0.820	0.904	0.930
		40	0.860	0.908	0.928	0.843	0.901	0.921
		50	0.874	0.918	0.926	0.860	0.913	0.922
0.75	5	30	0.815	0.872	0.890	0.786	0.852	0.874
		40	0.840	0.891	0.914	0.820	0.875	0.898
		50	0.868	0.909	0.920	0.848	0.894	0.919
	8	30	0.826	0.897	0.921	0.798	0.876	0.907
		40	0.875	0.922	0.939	0.864	0.918	0.932
		50	0.866	0.919	0.934	0.855	0.915	0.934

表 4-5 DGP5 模拟结果

Tab. 4-5 Simulation results for DGP5

d	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
0	5	30	0.012	0.049	0.115	0.009	0.037	0.081
		40	0.014	0.060	0.113	0.014	0.052	0.111
		50	0.005	0.044	0.098	0.019	0.057	0.118
	8	30	0.014	0.051	0.099	0.011	0.049	0.099
		40	0.009	0.052	0.095	0.013	0.052	0.104
		50	0.011	0.056	0.102	0.014	0.052	0.104
0.01	5	30	0.207	0.392	0.502	0.104	0.243	0.348
		40	0.349	0.549	0.646	0.174	0.334	0.438
		50	0.400	0.594	0.671	0.223	0.398	0.494
	8	30	0.387	0.587	0.707	0.187	0.375	0.501
		40	0.505	0.676	0.749	0.283	0.471	0.582
		50	0.600	0.765	0.819	0.386	0.550	0.652
0.03	5	30	0.935	0.981	0.998	0.795	0.913	0.945
		40	0.975	0.994	0.998	0.880	0.954	0.980
		50	0.988	0.998	0.998	0.912	0.959	0.979
	8	30	0.983	0.995	0.997	0.906	0.961	0.978
		40	0.990	0.997	0.998	0.941	0.972	0.981
		50	0.991	0.999	1.000	0.952	0.978	0.989

表 4-6 DGP6 模拟结果

Tab. 4-6 Simulation results for DGP6

d	m	R	同方差			异方差		
			$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
0	5	30	0.01	0.048	0.114	0.013	0.057	0.113
		40	0.016	0.074	0.127	0.010	0.047	0.110
		50	0.011	0.05	0.095	0.018	0.062	0.104
	8	30	0.011	0.048	0.1	0.015	0.056	0.105
		40	0.012	0.055	0.112	0.016	0.063	0.113
		50	0.02	0.067	0.115	0.018	0.060	0.115
0.25	5	30	0.229	0.451	0.560	0.119	0.267	0.396
		40	0.353	0.588	0.697	0.150	0.363	0.476
		50	0.467	0.699	0.809	0.201	0.404	0.527
	8	30	0.364	0.607	0.708	0.196	0.394	0.512
		40	0.547	0.757	0.853	0.285	0.488	0.602
		50	0.641	0.832	0.892	0.353	0.613	0.717
0.5	5	30	0.707	0.881	0.938	0.417	0.672	0.775
		40	0.883	0.945	0.973	0.591	0.809	0.896
		50	0.944	0.991	0.995	0.728	0.875	0.926
	8	30	0.875	0.965	0.985	0.652	0.836	0.903
		40	0.963	0.992	0.998	0.837	0.946	0.974
		50	0.988	0.997	0.997	0.917	0.973	0.991
0.75	5	30	0.886	0.966	0.982	0.743	0.910	0.951
		40	0.966	0.994	0.995	0.880	0.966	0.984
		50	0.988	0.995	1.000	0.955	0.987	0.993
	8	30	0.980	0.996	0.998	0.916	0.976	0.987
		40	0.991	0.999	1.000	0.978	0.998	1.000
		50	0.999	1.000	1.000	0.996	1.000	1.000

4.2 实例分析

为了更好地说明本文所提的模型检验方法在实际数据分析中具有一定的实用性，本小节考虑将所提方法应用到西班牙气象数据中。该数据集包含1980年至2009年期间73个西班牙气象站的气象监测数据，主要变量为每个气象站的地理位置信息，以及每日的气温、降水和风速数据，其中地理位置信息包括所属省份、经度、纬度等变量。类似于Febrero-Bande等[58]，将1980年至2009年期间的平均气温曲线看作解释变量，该函数型变量温度 $X_n(t)$ 包含了所有气象站每天的气温值，如下图所示：

从图4-1中可以看出有7条曲线明显地聚集在一起且与大部分曲线存在较大偏差，同时存在1条曲线同样偏差较大，为了做出更加准确的判断，将其视为异常值并删去这8条曲线数据。考虑响应变量 Y 为1980年至2009期间每年的晴天天数，由于响应变量中含有14个缺失值，也进行删除处理。这样一来，我们的实际数据分析中包含51个观测数据。选取变量经度 Z_1，纬度 Z_2 构造如下模型：

$$Y = \rho \boldsymbol{W}_n Y + Z_1\beta_1 + Z_2\beta_2 + \int_0^{365} X(t)\gamma(t)dt + V。$$

对于上述模型，其空间权重矩阵的构造类似于Sun等[31]，具体表达式如下：

$$W_{ij} = exp(-||s_i - s_j||)/\sum_{l\neq i}(-||s_i - s_l||),$$

其中，s_i 表示第 i 个气象站的地理位置，该地理位置由经度纬度组成，具体表达式为 $s_i = (Log_i, Lat_i)$，$||\cdot||$ 表示欧几里得距离。依据本文所提出的检验方法，计算得到检验的p值为0.96，因此不能拒绝部分函数型线性空间自回归模型的设定。

4.3 本章小结

本章主要依据上章推导出的理论性质进行了大量的实验模拟和具体例子分析。在数值模拟部分，基于构造的数据生成过程，分别从空间自相关程度、样本量大小、经验水平、偏离程度以及空间结构多样性等角度出发进行模拟研究，模拟结果表明，基于给定的经验水平，本文所提出的检验方法表现较好，且适用于误差项为异方差的情形。在实例分析中选取西班牙气象数据进行实证分析，计算结果表明接受部分函数型线性空间自回归模型的设定，体现了所提检验方法的实用性。

结 论

函数型线性模型是进行函数型数据分析的常见模型，但在实际应用中，函数型数据通常与区域的空间信息相关，此时传统的函数型线性模型已不再适用。而函数型线性空间自回归模型因其既能处理复杂的函数型数据，又能够处理数据的空间相关性，从而引发了众多学者的研究兴趣。模型检验是数据分析的重要环节之一，如果模型被错误设定，那么基于此进行的一切统计推断将不具有意义，并且得到的结果会有很大偏差，甚至带来不可估计的影响。大数据时代，数据类型越来越复杂，模型被设定错误的可能性也越来越大。因此，研究函数型线性空间自回归模型的模型检验问题至关重要。基于目前已有的研究，空间自回归模型的设定检验问题已有一定的理论基础，但是关于函数型空间自回归模型设定检验问题的研究却寥寥无几。故本文考虑将函数型数据和空间数据相结合，研究部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题。

依据参数的广义矩估计形式得到残差的估计，将其与协变量的线性投影相结合生成经验过程并建立检验统计量，实现部分函数型线性空间自回归模型的设定检验。所提检验方法可以避免不必要的参数的主观选择问题，具有广泛的适用性。首先，在一定假设条件之下，证明了本文所提检验方法的极限分布，并表明其能够以通常的参数收敛速度区分原假设和Pitman局部备择假设，进一步给出统计量的相合性。在有限样本量的情形下，本文通过bootstrap方法近似统计量的分布，模拟结果表明，无论是在原假设还是备择假设成立时，本文方法均具有较好的经验水平或功效。与此同时，模拟结果还表明，本文方法在异方差情况下也有不错的表现。最后，使用西班牙气象数据进行实例分析，实验结果表明接受部分函数型线性空间自回归模型的设定。综上，本文所提的检验方法具有较好的理论性质和一定的实用性。

本文的创新点和进一步可以研究的内容有：

(1) 本文首次将基于投影的检验方法应用到部分函数型线性空间自回归模型上，有效地避免了参数的选择问题，并且完善了复杂函数型数据和空间数据的统计推断问题；

(2) 可将本文提出的检验方法应用到其他函数型数据和空间数据模型中，具有较强的灵活性；

(3) 本文考虑的是部分函数型线性空间自回归模型的设定检验问题，未来可考虑本文所提方法在函数型半参数空间自回归模型等半参数模型中的表现，也可以考虑在不同权重函数下本文方法的表现情况。

参 考 文 献

[1] Ramsay J O. When the data are functions[J]. Psychometrika, 1982, 47(4): 379-396.

[2] Cardot H, Ferraty F, Sarda P. Splines estimators for the functional linear model[J]. Statistica Sinica, 2003, 13(3): 571-591.

[3] Cai T T, Hall P. Prediction in functional linear regression[J]. The Annals of Statistics, 2006, 34(5): 2159-2179.

[4] Hall P, Horowitz J L. Methodology and convergence rates for functional linear regression[J]. The Annals of Statistics, 2007, 35(1): 70-91.

[5] Zhou J J, Peng Q Y, Chen Z. Polynomial spline estimation for partial functional linear regression models[J]. Comput Stat, 2016, 31: 1107-1129.

[6] Li Y, Hsing T. On rates of convergence in functional linear regression[J]. Jornal of Multivariate Analysis, 2007, 98(9): 1782-1804.

[7] Crambes C, Kneip A, Sarda P. Smoothing splines estimators for functional linear regression[J]. The Annals of Statistics, 2009, 37(1): 35-72.

[8] Benatia D, Carrasco M, Florens J P. Functional linear regression with functional response[J]. Journal of Econometrics, 2017, 201(2): 269-291.

[9] Lee E R, Park B U. Sparse estimation in functional linear regression[J]. Jornal of Multivariate Analysis, 2012, 105: 1-17.

[10] Müller H G, Stadtmuller U. Generalized functional linear models[J]. The Annals of Statistics, 2005, 33(2): 774-805.

[11] Shin H. Partial functional linear regression[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2009, 139(10): 3405-3418.

[12] Pineda-Rios W, Giraldo R, Porcu E. Functional SAR models: With application to spatial econometrics[J]. Spatial Statistics, 2019, 29: 145-159.

[13] Tang Q, Jin P. Estimation and variable selection for partial functional linear regression[J]. AStA Advances in Statistical Analysis, 2019, 103(4): 475-501.

[14] Huang T T, Saporta G, Wang H W, Wang S S. Spatial functional linear model and its estimation method[J]. arXiv preprint arXiv: 1811. 00314, 2018.

[15] Hu Y P, Wu S Y, Feng S Y, Jin J L. Estimation in partial functional linear spatial autoregressive model[J]. Mathematics, 2020, 8(10): 1680.

[16] Tang Q G, Bian M J. Estimation for functional linear semiparametric model[J]. Statistical Papers, 2021, 62(6): 2799-2823.

[17] Liu G S, Bai Y. Statistical inference in functional semiparametric spatial autoregressive model[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(10): 10890-10906.

[18] Matsui H. Sparse varying-coefficient functional linear model[J]. arXiv preprint arXiv: 2110. 12599, 2021.

[19] Cliff A D, Ord J K. Spatial processes: models and applications[M]. London: Pion, 1981.

[20] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances[J]. The Journal of Real Estate Finance and Economics, 1998, 17: 99-121.

[21] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model[J]. International Economic Review, 1999, 40(2): 509-533.

[22] Lee L F. Asymptotic distribution of quasi-maximum likelihood estimators for spatial autoregressive models[J]. Econometrica, 2004, 72: 1899-1925.

[23] Lee L F. GMM and 2SLS estimation of mixed regressive spatial autoregressive models[J]. Journal of Econometrics, 2007, 137: 489-514.

[24] Lin X, Lee L F. GMM estimation of spatial autoregressive models with unknown heteroskedasticity[J]. Journal of Econometrics, 2010, 157: 34-52.

[25] Badinger H, Egger P. Estimation and testing of higher-order spatial autoregressive panel data error component models[J]. Journal of Geographical System, 2013, 15: 453-489.

[26] Lee L F, Yu J H. Efficient GMM estimation of spatial dynamic panel data models with fixed effects[J]. Journal of Econometrics, 2014, 180: 174-197.

[27] Qu X, Lee L. Estimating a spatial autoregressive model with an endogenous spatial weight matrix[J]. Journal of Econometrics, 2015, 184(2): 209-232.

[28] Gupta A, Robinson P M. Inference on higher-order spatial autoregressive models with increasingly many parameters[J]. Journal of Econometrics, 2015, 186: 19-31.

[29] Gupta A. Estimation of spatial autoregressive with stochastic weight matrices[J]. Econometric Theory, 2018, 35: 417-463.

[30] Xie T F, Cao R Y, Du J. Variable selection for spatial autoregressive models with a diverging number of parameters[J]. Statistical Papers, 2020, 61: 1125-1145.

[31] Sun Y, Yan H J, Zhang W Y, Lu Z D. A semiparametric spatial dynamic model[J]. The Annals of Statistics, 2014, 42(2): 700-727.

[32] Du J, Sun X Q, Cao R Y, Zhang Z Z. Statistical inference for partially linear additive spatial autoregressive models[J]. Spatial Statistics, 2018, 25: 52-67.

[33] Escanciano J C. A consistent diagnostic test for regression models using projections[J]. Econometric Theory, 2006, 22: 1030-1051.

[34] Ma S J, Zhang J, Sun Z H, Liang H. Integrated conditional moment test for partially linear single index models incorporating dimension-reduction[J]. Electronic Journal of Statistics, 2014, 8: 523-542.

[35] Zhang J, Zhou Y, Lin B Q, Yu Y. Estimation and hypothesis test on partial linear models with additive distortion measurement errors[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2017, 112: 114-128.

[36] Sun Z H, Ye X, Sun L Q. Consistent test of error-in-variables partially linear model with auxiliary variables[J]. Jornal of Multivariate Analysis, 2015, 141: 118-131.

[37] Su L J, Qu X. Specification test for spatial autoregressive models[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2017, 35(4): 572-584.

[38] Li T Z, Mei C L. Testing a polynomial relationship of the non-parametric component in partially linear spatial autoregressive models[J]. Regional Science, 2013, 92(3): 633-649.

[39] Whang Y J, Andrews D W. Tests of specification for parametric and semiparametric models[J]. Journal of Econometrics, 1993, 57: 277-318.

[40] Horowitz J L, Hardle W. Testing a parametric model against a semiparametric altermative[J]. Econometric Theory, 1994, 10: 821-848.

[41] Chen S X, Hardle W, Li M. An empirical likelihood goodness-of-fit test for time series[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 2003, 65: 663-678.

[42] Hsiao C, Li Q, Racine J S. A consistent model specification test with mixed discrete and continuous data[J]. Journal of Econometrics, 2007, 140: 802-826.

[43] 闫晓红. 模型设定检验的非参数方法研究综述[J]. 统计与决策，2013，17：88-90.

[44] Su L J, Lu X. Nonparametric dynamic panel data models: kernel estimation and specification testing[J]. Journal of Econometrics, 2013, 176: 112-133.

[45] Lin Z J, Li Q, Sun Y G. A consistent nonparametric test of parametric regression functional form in fixed effects panel data models[J]. Journal of Econometrics, 2014, 178: 167-179.

[46] Sun Z, Ye X, Sun L. Consistent test for parametric models with right-censored data using projections[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2018, 118: 112-125.

[47] Guo X, Song L L, Fang Y, Zhu L X. Model checking for general linear regression with nonignorable missing response[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2019, 138: 1-12.

[48] Wang W, Wang Q. Consistent specification test for partially linear models with the k-nearest-neighbor method[J]. Economics Letters, 2019, 177: 89-93.

[49] Garcia-Portugues E, Gonzalez-Manteiga W, Febrero-Bande M. A goodness-of-fit test for the functional linear model with scalar response[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2014, 23(3): 761-778.

[50] Cuesta-Albertos J A, Garcia-Portugues E, Febrero-Bande M, Gonzalez-Manteiga W. Goodness-of-fit tests for the functional linear model based on randomly projected empirical processes[J]. The Annals of Statistics, 2019, 47(1): 439-467.

[51] Chen F F, Jiang Q, Feng Z H, Zhu L X. Model checks for functional linear regression models based on projected empirical processes[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2020, 144: 106897.

[52] Yi M H, Li Z X, Tang Y L. F-type testing in functional linear models[J]. Stat, 2022, 11(1).

[53] Xu J J, Cui W Q. A new RKHS-based global testing for functional linear model[J]. Statistics and Probability Letters, 2022, 182: 109277.

[54] Jiang Z Q, Huang Z S, Fan G L. Empirical likelihood for high-dimensional partially functional linear model[J]. Random Matrices: Theory and Applications, 2020, 9(4): 2050017.

[55] Yu P, Du J, Zhang Z Z. Testing linearity in partial functional linear quantile regression model based on regression rank scores[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2021, 50: 214-232.

[56] Zhang Y Q, Shen D M. Estimaiton of semi-parametric varying-coefficient spatial panel data models with random-effects[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2015, 159: 64-80.

[57] Case A C. Spatial patterns in household demand[J]. Econometrica, 1991, 59(4): 953-965.

[58] Febrero-Bande M, Galeano P, Gonzalez-Manteiga W. Estimaiton, imputation and prediction for the functional linear model with scalar response with responses missing at random[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2019, 131: 91-103.

致 谢

最后的学生时代即将结束，不论是平淡的日常科研生活，还是热闹繁华的北京景点，都深深地印在了心里。三年时光，对学术研究有了更加深入的了解，对生活的态度变得更加淡然释怀，对遇到的困难挫折不再害怕，而是直面问题，接受孤独，寻找解决方法。然而，这所有的历练和成长离不开导师和身边同学们的关怀，在此表达自己最真挚的谢意。

首先，由衷得感谢导师杜江老师。在学术研究方面，杜老师自研一以来就一直培养我的学术基础知识水平，挑选适合我的论文培养我的科研兴趣，并且会很耐心地帮我搜集附件证明材料以及实现程序，为我的研究方向打下了坚实的理论基础。在论文的写作过程中，不论何时遇到问题都可以到杜老师办公室进行讨论，解决不懂的知识点。杜老师对待学术的严谨态度一直激励着我，提醒着我不断前行，认真踏实地对待学习。在生活方面，杜老师常教导我保持平和的心态，遇到事情不要慌张，按照自己的节奏慢慢攻克难题。很荣幸三年的研究生生活是作为杜老师的学生度过的，再次忠心地感谢杜老师提供给我的指导。

其次，感谢张忠占老师、薛留根老师、程维虎老师、谢田法老师、吴密霞老师等统计学专业的所有老师，感谢各位任课老师的培养，让我对统计学知识有了更加全面的认识，拓宽了自己的思维方式。感谢辅导员裴少岩老师，在就业方面对我的关心和指导。

此外，还要感谢董佳丽师姐、汤杨冰师哥和王日师哥在学术和生活中对我的关照，你们的帮助犹如我科研道路上的加油站，助我前行。感谢张娜师姐、王伟师姐等实验室的师姐们，非常怀念那段一起的学习时光和娱乐时光。感谢同门甄磊同学帮助我优化程序。感谢赵景娇同学、徐向阳同学、刘爱迪同学、师弟师妹等各位朋友，在你们的陪伴下度过了快乐的研究生学习生涯。

最后，感谢爸爸、妈妈和哥哥，在你们的细致保护下，我可以选择自己所喜爱的一切，无忧无虑地追逐远方。很感恩你们所给予我的所有，未来我会扛起责任，换我来守护你们。

十余年的求学生涯，感谢自己的坚定，感谢那些艰苦的奋斗岁月。青春正好，大有可为；有所不为，方可大为。希望可以永远热爱，奔赴山海！