问题 5：连续时间超前控制器的离散化

给定连续时间超前控制器：

$$C(s) = \frac{as+1}{s+1}$$

(a) 使用 Tustin 近似（双线性变换）求离散等效 $C(z)$（10%）

Tustin 近似公式：

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

假设采样时间 T 未给出，通常可以保留 T 或假设 $T = 1$（题目未说明，这里保留 T）。

将 s 替换为 Tustin 变换：

$$C(z) = \frac{a\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)+1}{\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{2a}{T}(z-1)+(z+1)}{\frac{2}{T}(z-1)+(z+1)} \cdot \frac{z+1}{z+1}$$

$$= \frac{\left(\frac{2a}{T}+1\right)z+\left(-\frac{2a}{T}+1\right)}{\left(\frac{2}{T}+1\right)z+\left(-\frac{2}{T}+1\right)}$$

$$= \frac{(2a+T)z+(-2a+T)}{(2+T)z+(-2+T)}$$

最终结果：

$$C(z) = \frac{(2a+T)z+(T-2a)}{(2+T)z+(T-2)}$$

(b) 使用阶跃不变法求离散等效 $C(z)$（5%）

阶跃不变法步骤：

1. 计算 $C(s)$ 的阶跃响应：

$$\frac{C(s)}{s} = \frac{as+1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

   部分分式分解：

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{as+1}{s+1} = 1$$

$$B = \lim_{s\to -1} \frac{as+1}{s} = -a+1$$

   因此：

$$\frac{C(s)}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1-a}{s+1}$$

   阶跃响应：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C(s)}{s}\right] = 1 + (1-a)e^{-t}$$

2. 对阶跃响应采样（$t = nT$）：

$$y(nT) = 1 + (1-a)e^{-nT}$$

3. 取 z 变换：

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + (1-a)\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1} + \frac{1-a}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

4. 计算 $C(z)$：

$$C(z) = (1 - z^{-1}) Y(z)$$

$$= (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} + \frac{1-a}{1 - e^{-T} z^{-1}} \right)$$

$$= 1 + (1-a) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

$$= \frac{(1 - e^{-T} z^{-1}) + (1-a)(1 - z^{-1})}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - e^{-T} z^{-1} + 1 - a - z^{-1} + a z^{-1}}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

$$= \frac{2 - a - (e^{-T} + 1 - a) z^{-1}}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

转换为 z 的正幂形式：

$$C(z) = \frac{(2-a)z - (e^{-T} + 1 - a)}{z - e^{-T}}$$

最终结果：

$$C(z) = \frac{(2-a)z - (e^{-T} + 1 - a)}{z - e^{-T}}$$

问题 6：s 平面区域到 z 平面的映射（$T = 0.1\,\mathrm{sec}$）

(a) 矩形区域 $\sigma \in [-5, -20], \omega \in [-6, 6]$ 的 z 平面映射（10%）

映射关系：

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

对于 $T = 0.1$：

$$z = e^{0.1\sigma} e^{j0.1\omega}$$

边界分析：

1. $\sigma = -5$：

$$|z| = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

   $\omega \in [-6, 6]$：

$$\angle z \in [-0.6, 0.6]\,\text{rad} \approx [-34.38^\circ, 34.38^\circ]$$

2. $\sigma = -20$：

$$|z| = e^{-2} \approx 0.1353$$

   $\omega \in [-6, 6]$：

$$\angle z \in [-0.6, 0.6]\,\text{rad}$$

MATLAB 代码示例：

```
T = 0.1;
sigma = linspace(-5, -20, 100);
omega = linspace(-6, 6, 100);
[sigma_grid, omega_grid] = meshgrid(sigma, omega);
z = exp(T * (sigma_grid + 1i * omega_grid));
plot(real(z(:)), imag(z(:)), '.');
axis equal;
xlabel('Re(z)'); ylabel('Im(z)');
title('z-plane mapping of rectangular region');
```

结果描述：

- z 平面中对应区域为扇形，幅度范围 $|z| \in [e^{-2}, e^{-0.5}]$，角度范围 $\angle z \in [-0.6, 0.6]$ 弧度。

(b) 扇形区域 $\zeta \in [0.5, 0.9], \omega_n \in [0, 20]$ 的 z 平面映射（10%）

极坐标表示：

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

对于 $\zeta \in [0.5, 0.9]$ 和 $\omega_n \in [0, 20]$：

- $\sigma = -\zeta\omega_n \in [-18, 0]$（因为 $\omega_n \leq 20$）
- $\omega = \pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \in [-20, 20]$

映射到 z 平面：

$$z = e^{sT} = e^{-\zeta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}}$$

对于 $T = 0.1$：

- 幅度 $|z| = e^{-0.1\zeta\omega_n} \in [e^{-1.8}, 1]$
- 角度 $\angle z = \pm 0.1\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \in [-2, 2]$ 弧度（因为 $\omega_n \leq 20$）

MATLAB 代码示例：

```
T = 0.1;
zeta = linspace(0.5, 0.9, 100);
omega_n = linspace(0, 20, 100);
[zeta_grid, omega_n_grid] = meshgrid(zeta, omega_n);
sigma = -zeta_grid .* omega_n_grid;
omega = omega_n_grid .* sqrt(1 - zeta_grid.^2);
z1 = exp(T * (sigma + 1i * omega));
z2 = exp(T * (sigma - 1i * omega));
plot(real(z1(:)), imag(z1(:)), '.', real(z2(:)), imag(z2(:)), '.');
axis equal;
xlabel('Re(z)'); ylabel('Im(z)');
title('z-plane mapping of pizza-slice region');
```

结果描述：

- z 平面中对应区域为从原点向外发散的扇形，幅度 $|z| \in [e^{-1.8}, 1]$，角度随 ω_n 和 ζ 变化。

最终答案

问题 5：

(a) Tustin 近似：

$$C(z) = \frac{(2a+T)z + (T-2a)}{(2+T)z + (T-2)}$$

(b) 阶跃不变法：

$$C(z) = \frac{(2-a)z - (e^{-T} + 1 - a)}{z - e^{-T}}$$

问题 6：

(a) 矩形区域映射到 z 平面为扇形，$|z| \in [e^{-2}, e^{-0.5}]$，$\angle z \in [-0.6, 0.6]$ 弧度。
(b) 扇形区域映射到 z 平面为从原点发散的扇形，$|z| \in [e^{-1.8}, 1]$，角度范围 $\angle z \in [-2, 2]$ 弧度。