

1. 对于如下系统 $y_k = 0.5y_{k-1} + 0.5y_{k-2} + 0.25u_{k-1}$

(a) 求解冲击传递函数

(b) 给出零状态阶跃输入时的输出 z 变换, 理论求解 DC 增益与终值

(c) 在 MATLAB 中, 输出阶跃响应并对比 DC 增益与终值的理论值

(a) 对两边进行 z 变换, 假设 0 初始条件

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) + 0.25z^{-1}U(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2})Y(z) = 0.25z^{-1}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}} = \frac{0.25z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

(b) 阶跃输入的 z 变换为

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\text{则 } Y(z) = \frac{0.25z}{z^2 - 0.5z - 0.5} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$z=1$ 时, ~~分母为零~~, $\frac{Y(1)}{U(1)} = \frac{0.25}{0}$ DC 增益不存在, 系统不稳定

终值定理

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.25z^2}{z^2 - 0.5z - 0.5} = \frac{0.25}{0}$$

终值不存在, 系统不稳定

2.

信号 $f(t) = 10 \sin(4\pi t) + \sin(48\pi t) + 5 \sin(89\pi t)$ 的采样频率是 5Hz

(a) 求解采样后的频率

(b) 利用课件2中的采样折线图进行解释

(a) 原信号频率 $f_1 = 2\text{Hz}$ $f_2 = 24\text{Hz}$ $f_3 = 44.5\text{Hz}$ $f_s = 5\text{Hz}$

采样定理, 采样后的频率为 $f_{\text{alias}} = |f - n f_s|$

$n \in \mathbb{Z}$, 使得 $f_{\text{alias}} \in [0, f_s/2]$

$f'_1 = 2\text{Hz}$ $f'_2 = 1\text{Hz}$ $f'_3 = 0.5\text{Hz}$

(b)

原始频率高于 Nyquist 频率的部分会被折叠到 $[0, 2.5\text{Hz}]$ 区间

3. 系统特征方程

$$0.02s^3 + 0.3s^2 + s + k = 0$$

$$s^3 \quad 0.02 \quad 0$$

$$s^2 \quad 0.3 \quad k$$

$$s^1 \quad \frac{0.3 - 0.02k}{0.3}$$

$$s^0 \quad k$$

$$\frac{0.3 - 0.02k}{0.3} > 0 \Rightarrow 0 < k < 15$$

$$k > 0$$

4. 连续系统

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-0.4s}$$

采样时间 $T = 1 \text{ sec}$ 延迟 $= 0.4 \text{ sec}$

ZOH 增广传递函数

$$z = e^{Ts} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1}) z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$y_{k+1} = y_k + 0.4 u_{k+1} + 0.6 u_k$$

前 \downarrow 秒 后 \downarrow 秒

$$z \left\{ \frac{e^{-0.4s}}{s^2} \right\} = \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} e^{-0.4/T}$$

z 变换

$$G_{ZOH}(z) = \frac{T z e^{-0.4/T}}{(1 - z^{-1})} = \frac{T e^{-0.4/T}}{z - 1}$$

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + 0.4 z^{-2} U(z) + 0.6 z^{-1} U(z)$$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{e^{-0.4}}{z - 1}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{0.4 z^{-2} + 0.6 z^{-1}} = \frac{0.4 z^{-2} + 0.6 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{0.4 + 0.6 z}{z(z - 1)}$$

$$\therefore G_{ZOH}(z) = \frac{0.4 + 0.6 z}{z(z - 1)}$$