

二级倒立摆系统建模与控制仿真实验

刘侃

1 引言

1.1 研究背景和意义

倒立摆系统作为控制理论领域的经典研究对象，因其固有的不稳定性和非线性特性，长期以来被视为检验各种控制算法有效性的理想平台。二级倒立摆在单级基础上增加了系统的自由度，使得控制问题更加复杂，也更接近工程实际中的许多控制场景，如机器人平衡控制、航天器姿态调整等。随着现代控制理论的发展，对这类系统的精确建模和有效控制提出了更高要求，需要探索更先进的控制策略来应对系统耦合性强、参数敏感等挑战。

本研究以二级倒立摆为对象，通过建立精确的动力学模型并设计合适的控制算法，不仅有助于深入理解多自由度系统的控制特性，更能为实际工程中的类似控制问题提供参考。从理论角度看，该研究可以验证不同控制方法在复杂系统中的适用性；从应用价值看，研究成果可推广至工业自动化、智能机器人等领域。同时，作为控制理论教学的典型案例，该研究还能帮助学生直观理解抽象的控制概念，培养解决实际工程问题的能力。通过仿真实验分析系统的稳定性和鲁棒性，将为更复杂控制系统的设计积累宝贵经验。

1.2 设计目标

本实验旨在通过建立二级倒立摆系统的动力学模型，设计合适的控制器实现系统的稳定控制，并验证其动态性能与鲁棒性。具体而言，需要完成以下核心任务：首先，基于牛顿力学或拉格朗日方程推导系统的非线性动力学模型，并在平衡点附近进行线性化处理，得到适用于控制器设计的状态空间表达式；其次，分别设计 PID 控制器和 LQR 控制器，通过调节参数使系统能够在初始扰动或外部干扰下快速恢复平衡，同时确保小车能够准确跟踪给定的位置指令；最后，通过数值仿真对比两种控制策略的性能，分析其在响应速度、稳态误差、抗干扰能力等方面的优劣，并评估系统对参数不确定性的鲁棒性。实验的最终目标是探索不同控制方法在复杂非线性系统中的适用性，为后续实际控制器的实现提供理论依据。

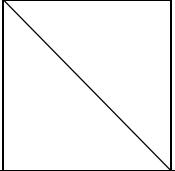
2 系统描述与参数

二级倒立摆系统由小车、摆杆和导轨组成，是一种典型的非线性不稳定系统，常用于验证控制算法的有效性。小车可在水平导轨上自由移动，摆杆通过转轴连接至小车顶部，形成二级倒立摆结构。系统的控制目标是通过调节施加在小车上的力，使摆杆在垂直倒立位置保持稳定，同时控制小车的位置。

在动力学分析中，需考虑小车的平移运动与摆杆的旋转运动之间的耦合作用。通过受力分析，可建立系统的非线性动力学方程，并进一步在平衡点附近线性化，为控制器设计提供基础模型。

系统的主要参数如下表所示。

名称	变量	数值	单位
小车质量	M	1	kg
摆杆质量	m	0.1	kg
小车摩擦系数	b	0.1	$N/m \cdot sec$
摆杆转动轴心到杆质心的长度	l	0.2	m
加在小车上的力	F		N
小车位置	x		m
摆杆与垂直向上方向的夹角	ϕ		rad

摆杆与垂直向下 方向的夹角（考 虑到摆杆初始位 置为竖直向下）	θ		rad
--	----------	---	-----

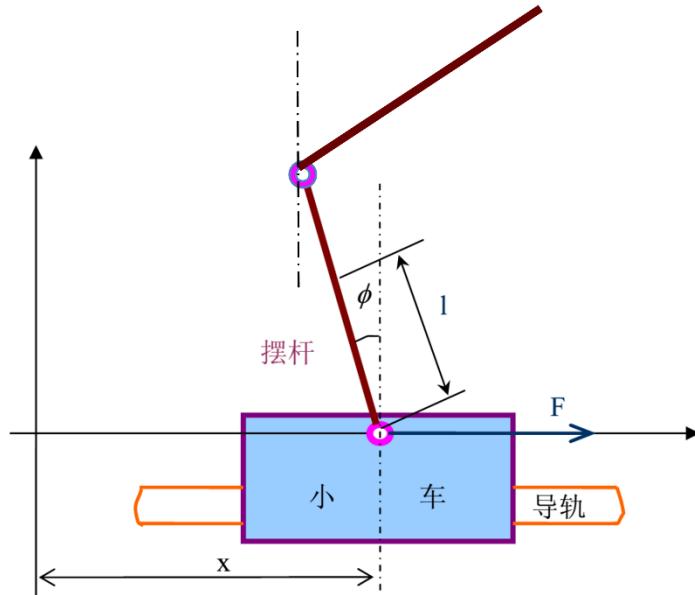


图 1 倒立摆系统示意图

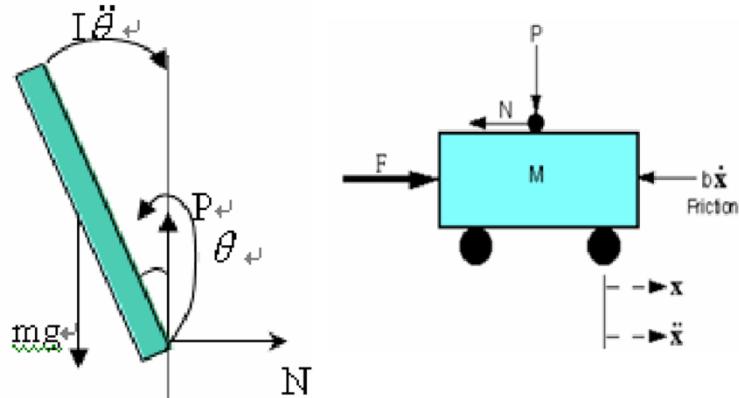


图 2 小车及摆杆受力分析

3 动力学建模

3.1 假设条件

在建立二级倒立摆系统的动力学模型时，首先假设摆杆为刚性连杆且不发生形变，忽略摆杆与小车连接处的摩擦以及空气阻力对系统的影响，同时假设导轨无限长。此外，认为所有传感器和执行机构的动态响应速度足够快，其延迟可忽略不计，且系统的输入力 F 能够瞬时作用于小车而无滞后。控制器的设计基于线性化后的模型，假设系统在平衡点附近的小范围内工作，此时非线性因素可被线性近似所替代。这些假设在保证模型合理性的同时，能够有效降低建模复杂度，便于后续控制器的设计与分析。

3.2 受力分析与模型推导

根据拉格朗日方程进行了二阶倒立摆的数学模型的建立。小车的动能

$$T_0 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

下摆与上摆的动能为转动动能与平动动能之和，分别记为 T_1, T_2 ，其中 x 的正方向向右，角度的正方向

为逆时针, v_1, v_2 为下摆与上摆的质心速度。则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} &= (-l\dot{\phi} \cos \phi + \dot{x})\hat{i} + (-l\dot{\phi} \sin \phi)\hat{j} \\ \overrightarrow{v_2} &= (l\dot{\theta} \cos \theta - 2l\dot{\phi} \cos \phi + \dot{x})\hat{i} + (l\dot{\theta} \sin \theta - 2l\dot{\phi} \sin \phi)\hat{j} \\ T_1 &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2l\dot{\phi}\dot{x} \cos \phi + l^2\dot{\phi}^2) \\ T_2 &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - 4l\dot{\phi}\dot{x} \cos \phi - 4l^2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\phi - \theta))\end{aligned}$$

系统总动能

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

系统总势能

$$V = mg(3l \cos \phi - l \cos \theta)$$

拉格朗日量

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(M + 2m)\ddot{x}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{8}{3}ml^2\dot{\phi}^2 + ml(\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - 3\dot{\phi}\dot{x} \cos \phi - 2l\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\phi - \theta)) - mg(3l \cos \phi \\ &\quad - l \cos \theta)\end{aligned}$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

解得

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{3(3 \cos \phi \ddot{x} - 2l\dot{\phi}^2 \sin(\phi - \theta) + 3g \sin \phi) - \frac{9}{2} \cos(\phi - \theta) [\cos \theta \ddot{x} + 2l\dot{\theta}^2 \sin(\phi - \theta) + g \sin \theta]}{16l - 9l \cos^2(\phi - \theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{-\frac{9}{2} \cos(\phi - \theta) [3 \cos \phi \ddot{x} - 2l\dot{\phi}^2 \sin(\phi - \theta) + 3g \sin \phi] + 12[\cos \theta \ddot{x} + 2l\dot{\theta}^2 \sin(\phi - \theta) + g \sin \theta]}{16l - 9l \cos^2(\phi - \theta)} \\ \ddot{x} = \frac{F - b\dot{x} - ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta - 3\ddot{\phi} \cos \phi + 3\dot{\phi} \sin \phi)}{M + 2m} \end{cases}$$

以上就是二阶倒立摆系统的精确模型, 将其在工作点位置附近 ($x = 0, \phi = 0, \theta = \pi$) 进行泰勒级数展开, 从而线性化, 得

$$\begin{cases} (M + 2m)\ddot{x} - 3ml\ddot{\phi} - ml\ddot{\theta} = -b\dot{x} + F \\ -3\ddot{x} + \frac{16}{3}l\ddot{\phi} + 2l\ddot{\theta} = 3g\phi \\ -\ddot{x} + 2l\ddot{\phi} + \frac{4}{3}l\ddot{\theta} = -g\theta \end{cases}$$

设系统的状态变量 $X = \begin{pmatrix} x \\ \phi \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, 控制矢量 $u = F$

得到动力学模型矩阵表达式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M+2m & -3ml \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \frac{16}{3}l \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2l \end{pmatrix} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 3g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\text{设输出矢量 } Y = \begin{pmatrix} x \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}$$

由动力学模型矩阵表达形式进行矩阵变换得到状态空间方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{27m}{14M+4m}g & \frac{3m}{14M+4m}g & -\frac{7b}{7M+2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36M+45m}{28M+8m}g & \frac{18M+9m}{28M+8m}g & -\frac{9b}{14M+4m} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-54M-27m}{28M+8m}g & \frac{-48M-15m}{28M+8m}g & \frac{3b}{14M+4m} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{0} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{7M+2m} \\ \frac{9}{14Ml+4lm} \\ -\frac{3}{14Ml+4lm} \end{pmatrix} u \\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X \end{array} \right.$$

将 $M = 1kg, m = 0.1kg, b = 0.1N/m \cdot sec, l = 0.2m$ 代入得

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2943}{1600} & \frac{327}{1600} & -\frac{7}{72} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8829}{128} & \frac{20601}{640} & -\frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{61803}{640} & -\frac{10791}{128} & \frac{5}{48} & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{35}{36} \\ \frac{25}{8} \\ -\frac{25}{24} \end{pmatrix} u \\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X \end{array} \right.$$

3.3 离散化模型

剪切频率 $\omega_c = 0.845rad/s$

取采样周期 $T_s = 0.1s$, 使用零阶保持法离散化

得到离散状态空间方程

$$\begin{cases} X(k+1) = A(T)X(k) + B(T)u(k) \\ Y(k+1) = CX(k+1) \end{cases}$$

$$A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.0096 & 0.0012 & 0.0995 & 0.0003 & -0.000037 \\ 0 & 1.352 & 0.1590 & -0.0016 & 0.1116 & 0.0053 \\ 0 & -0.477 & 0.5947 & 0.0006 & -0.0160 & 0.0863 \\ 0 & 0.2011 & 0.0273 & 0.9902 & 0.0096 & 0.0012 \\ 0 & 7.1829 & 3.144 & -0.0342 & 1.3519 & 0.1590 \\ 0 & -9.432 & -7.788 & 0.0139 & -0.4770 & 0.5947 \end{pmatrix}$$

$$B(T) = \begin{pmatrix} 0.0049 \\ 0.0163 \\ -0.0061 \\ 0.0977 \\ 0.3417 \\ -0.1392 \end{pmatrix}$$

4 系统分析

4.1 系统稳定性分析

根据上述分析得到的系统矩阵，计算出系统开环特征方程的特征根为

$$\lambda = [0, 6.6959, -6.7091, -0.0833, -0.0003 + 7.7621i, -0.0003 - 7.7621i]^T$$

图 3 为系统开环特征根的分布，有特征根在右半平面，因此系统开环不稳定。从物理意义层面，倒立摆摆杆呈竖直向上倒立状态时，是系统的不稳定平衡点，与开环不稳定性形成对应。

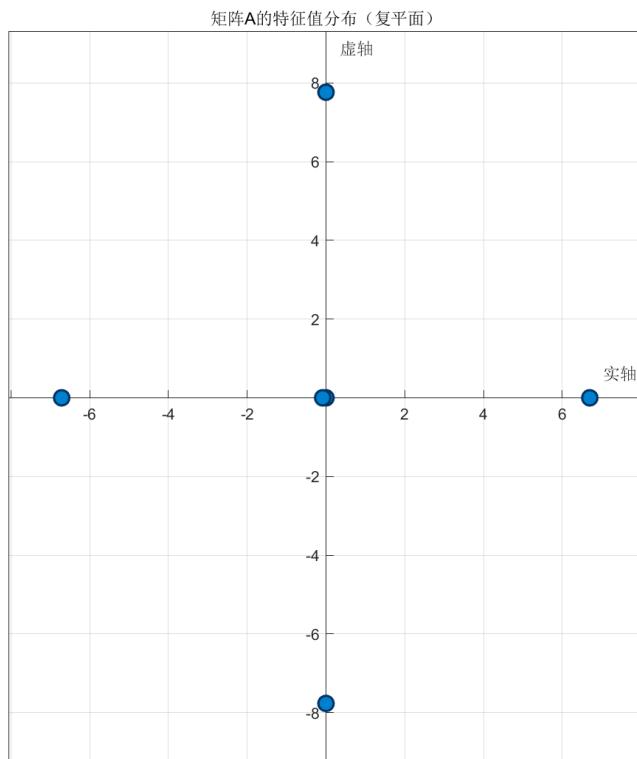


图 3 系统开环特征根分布

4.2 能控性与能观性

能控性判别矩阵

$$Q_c = (B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B) = \begin{pmatrix} 0 & 0.972 & -0.095 & 5.544 & -1.077 & 291.2 \\ 0 & 3.125 & -0.304 & 182.1 & -19.43 & 5670 \\ 0 & -1.041 & 0.101 & -214.0 & 21.38 & 458.0 \\ 0.972 & -0.095 & 5.544 & -1.077 & 291.2 & -59.7 \\ 3.125 & -0.304 & 182.1 & -19.43 & 5670 & -743.0 \\ -1.041 & 0.101 & -214.0 & 21.38 & 458.0 & 104.2 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(Q_c) = 6$ ，因此此系统是能控的。

能观性判别矩阵

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.839 & 0.204 & -0.097 & 0 & 0 \\ 0 & 68.98 & 32.2 & -0.313 & 0 & 0 \\ 0 & -96.6 & -84.3 & 0.104 & 0 & 0 \\ 0 & -0.179 & -0.020 & 0.009 & 1.839 & 0.204 \\ 0 & -0.575 & -0.064 & 0.030 & 69.98 & 32.2 \\ 0 & 0.192 & 0.021 & -0.010 & -96.6 & -84.3 \\ 0 & 107.2 & 41.98 & -0.554 & -0.179 & -0.020 \\ 0 & 1649 & -493.4 & -18.205 & -0.575 & -0.064 \\ 0 & 1480 & 3999 & 21.396 & 0.192 & 0.021 \\ 0 & -11.44 & -4.20 & 0.108 & 107.2 & 41.98 \\ 0 & -66.97 & -16.8 & 1.943 & 1649 & -493.4 \\ 0 & 50.52 & 8.75 & -2.14 & 1480 & 3999 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(Q_o) = 6$, 因此此系统是能观的。

5 控制器设计

5.1 PID 控制器设计

PID 控制器（Proportion Integration Differentiation）是工业控制领域应用最广泛的控制器之一，其结构简单、参数物理意义明确，能够有效解决大多数线性系统的控制问题。PID 控制器系统结构如图 4 所示。

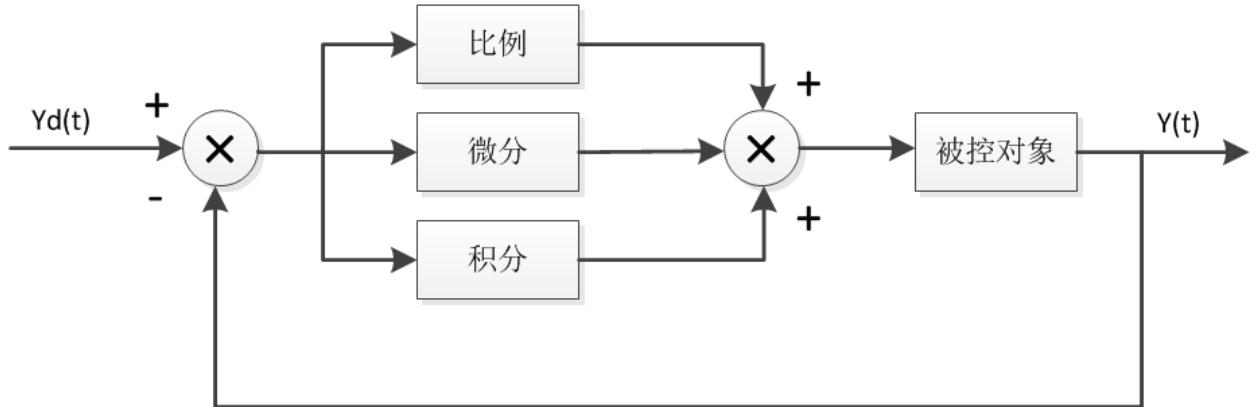


图 4 PID 控制器结构框图

PID 控制器通过比例（P）、积分（I）和微分（D）三个环节的组合作用来消除系统误差，连续 PID 控制律可表示为

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{d}{dt} e(t)$$

其中， $e(t)$ 为系统误差（设定值与实际输出之差）， K_P 为比例增益， K_I 为积分增益， K_D 为微分增益。采用 Tustin 变换进行离散化处理得

$$\begin{aligned} u(k) &= K_P \cdot e(k) + K_I \cdot \frac{Tz + 1}{2z - 1} \cdot e(k) + K_D \cdot \frac{z - 1}{Tz} \cdot e(k) \\ &= \left(K_P - \frac{K_I T}{2} \right) \cdot e(k) + (K_I T) \sum_{j=0}^k e(j) + \frac{K_D}{T} \cdot [e(k) - e(k - 1)] \end{aligned}$$

$$= K_{P(\text{Digital})} \cdot e(k) + K_{I(\text{Digital})} \cdot \sum_{j=0}^k e(j) + K_{D(\text{Digital})} \cdot [e(k) - e(k-1)]$$

其中

$$\begin{cases} K_{P(\text{Digital})} = K_P - \frac{K_I T}{2} \\ K_{I(\text{Digital})} = K_I T \\ K_{D(\text{Digital})} = \frac{K_D}{T} \end{cases}$$

对于二级倒立摆系统，需要分别设计角度环和位置环等 PID 控制器，并将它们的输入控制叠加。采用粒子群优化算法优化 PID 参数。然而，由于系统耦合性强、参数敏感，PID 控制器并不能保持系统稳定。

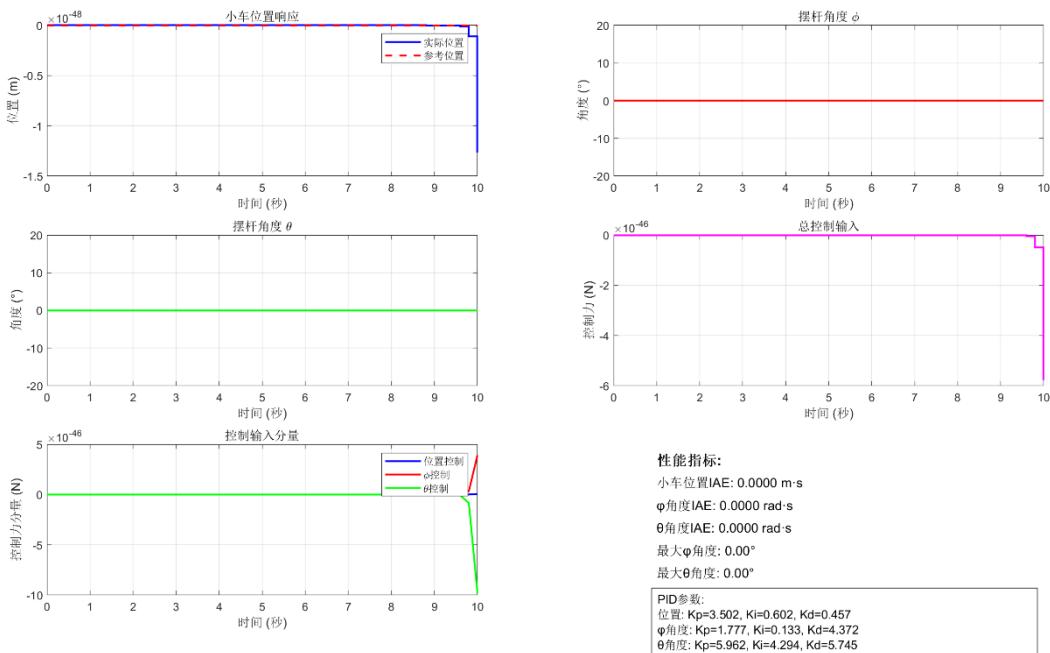


图 5 PID 控制器下的系统微扰动响应

因此，考虑采用其他更加先进的控制器。

5.2 LQR 控制器设计

LQR (Linear Quadratic Regulator) 是典型的多输入多输出控制器，其综合考虑了系统状态的性能要求和控制能量的要求，被广泛应用于线性系统中，LQR 控制器系统结构如图 6 所示。

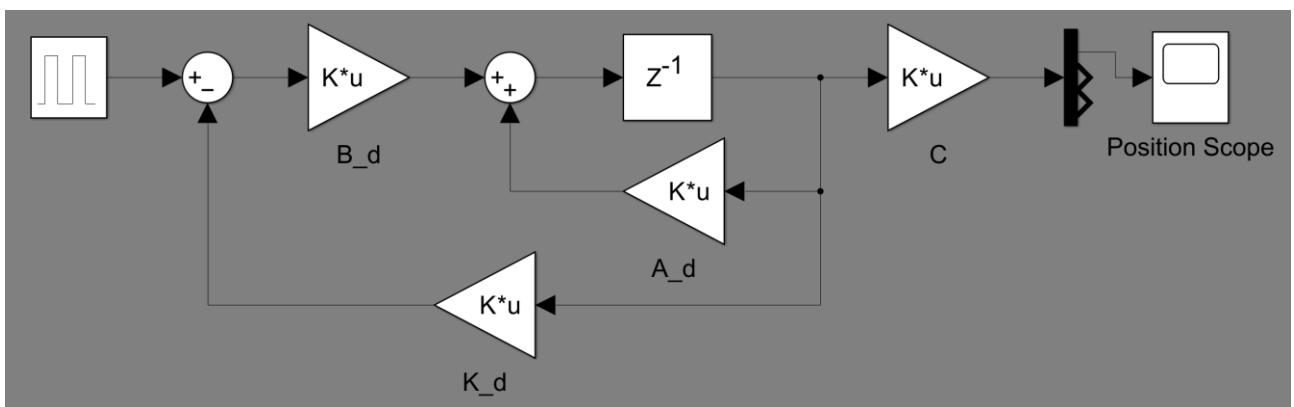


图 6 LQR 控制器结构框图

线性二次型调节器用于最小化与控制输入和相关的成本损失函数的最优控制。损失函数通常由 Q 矩阵

和 R 矩阵组成，即状态加权矩阵和控制代价矩阵。对于可线性化的系统，LQR 控制器的目标就是利用反馈调节使这两个矩阵的和 J 最小，其中系统的性能二次型指标 J 如下式

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t)Q(t)X(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

如果要求上式的最小值，需要构造 Hamilton 函数

$$H = -\frac{1}{2}[X^T(t)Q(t)X(t) + u^T(t)R(t)u(t)] + \lambda^T[AX(t) + Bu(t)]$$

在上式中： $X(t)$ 为系统的状态变量， Q 为正定（或半正定）对称矩阵； R 为正定对称矩阵， A 为倒立摆系统的系统矩阵， B 为倒立摆系统的控制矩阵。将上式对控制量 u 求导数并令其为 0 得

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru(t) + B^T\lambda(t) = 0$$

因此，使性能指标 J 取得最小值时，最优的控制信号为

$$u^*(t) = R^{-1}B^T\lambda(t)$$

其中， $\lambda(t) = P(t)X(t)$ ，其中 $P(t)$ 是 Riccati 微分方程的根

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^TP(t) + P(t)BR^{-1}B^TP(t) - Q$$

在上式中， $P(t)$ 是 $n \times n$ 的正定矩阵，时间 t 趋向于无穷时， $P(t)$ 趋向于常数矩阵，因此 $\dot{P}(t) = 0$ ，即有

$$-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q = 0$$

因此，当上式有解时，得出最优的状态反馈增益

$$K = R^{-1}B^TP(t)$$

因此，控制信号为

$$u(t) = -KX(t)$$

可将二级倒立摆系统状态空间方程转化为

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BK)X \\ y = CX \end{cases}$$

可以看出，二级倒立摆 LQR 控制器的性能指标 J 完全依赖于 Q 矩阵和 R 矩阵的值，这往往通过人工经验试凑法取值，一方面，这不仅具有一定的盲目性，而且耗费时间精力等大量人工试凑成本；另一方面，关于人工所取的 Q 和 R 矩阵值并不能使得性能指标 J 达到最优，所谓的“最优”具有一定的人为的主观性，并不是真正意义上的最优，因此，采用粒子群优化算法（PSO, Particle Swarm Optimization）优化 LQR 控制器的参数。

为避免 PSO 求解效率过低，将 R 矩阵固定为 $R = 0.1$ ，只对 Q 矩阵进行寻优。经过迭代后得到最优参数

$$Q = \begin{pmatrix} 981.00 & & & & & \\ & 299.94 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 42.244 \end{pmatrix}$$

通过 MATLAB 求得状态反馈系数矩阵 $K = (-14.75 \quad 78.21 \quad 25.88 \quad -11.14 \quad 8.784 \quad -0.7278)$ ，接入系统后得到增加 LQR 控制器后系统脉冲响应如图 7。

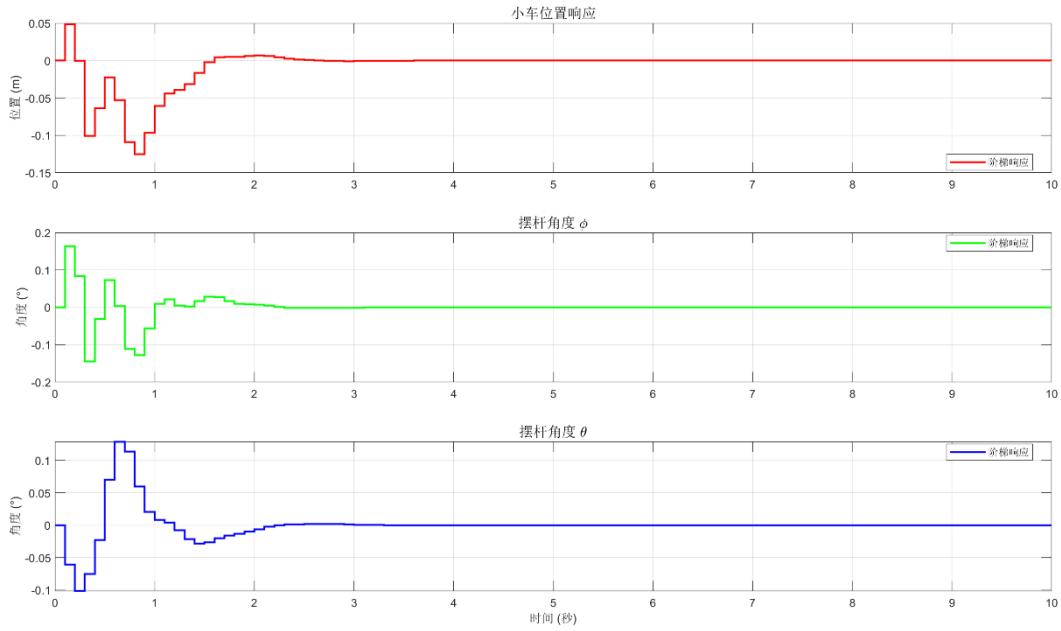


图 7 LQR 控制器下的系统脉冲响应

脉冲响应性能指标：

小车位置峰值：0.1254 m，摆杆角度 ϕ 峰值：0.1634 rad，摆杆角度 θ 峰值：0.1289 rad。

5.3 极点配置控制器设计

极点配置可以将闭环极点分配到期望的位置，以实现稳定性、适当的阻尼和良好的瞬态响应。系统结构与图 6 相同。

为兼顾响应速度与稳定性，设置连续时间系统的阻尼比 $\zeta = 0.71$ ，自然频率 $\omega = (3 \quad 5 \quad 9)$

即设置连续时间系统的期望极点为

p_c

$$= [-2.13 + 2.1126i \quad -2.13 - 2.1126i \quad -3.55 + 3.521i \quad -3.55 - 3.521i \quad -6.39 + 6.3378i \quad -6.39 - 6.3378i]$$

由于控制器是离散的，这些连续时间极点需使用指数映射转换为离散时间极点。

p_d

$$= [0.7902 + 0.1695i \quad 0.7902 - 0.1695i \quad 0.6582 + 0.2418i \quad 0.6582 - 0.2418i \quad 0.4253 + 0.3126i \quad 0.4253 - 0.3126i]$$

在采样时间 $T_s = 0.1$ s时计算其离散时间极点，如图 8 所示

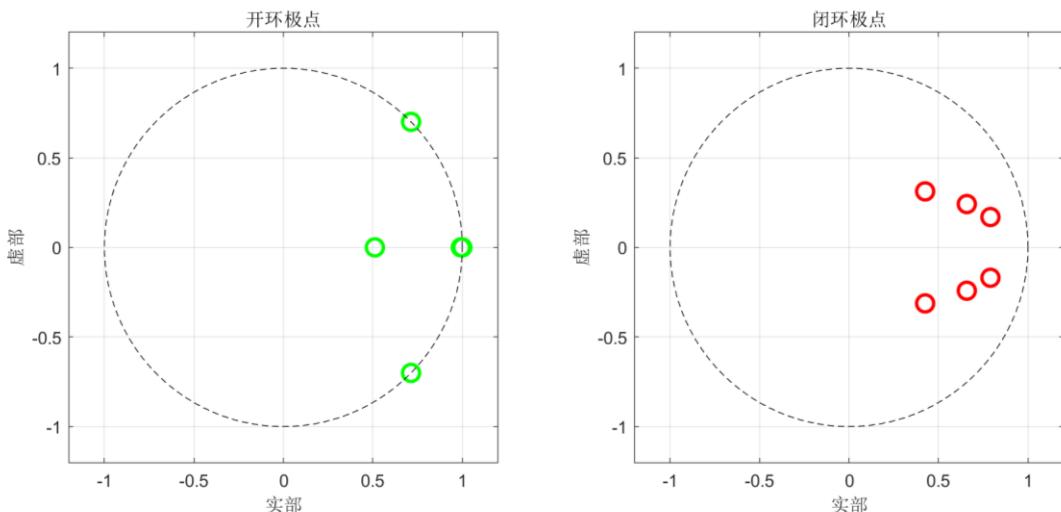


图 8 离散时间极点

对于离散时间模型

$$\begin{cases} X(k+1) = A(T)X(k) + B(T)u(k) \\ Y(k+1) = CX(k+1) \end{cases}$$

使用控制律

$$u(k) = -K_{pp}X(k)$$

则闭环系统变为

$$X(k+1) = (A(T) - B(T)K_{pp})X(k)$$

使用 MATLAB 的 `place(A(T), B(T), pd)` 函数计算得到

$$K_{pp} = [-2.4638 \quad 47.3941 \quad 23.6754 \quad -2.5277 \quad 5.9941 \quad 2.0376]$$

接入系统后得到增加反馈后系统脉冲响应如图。

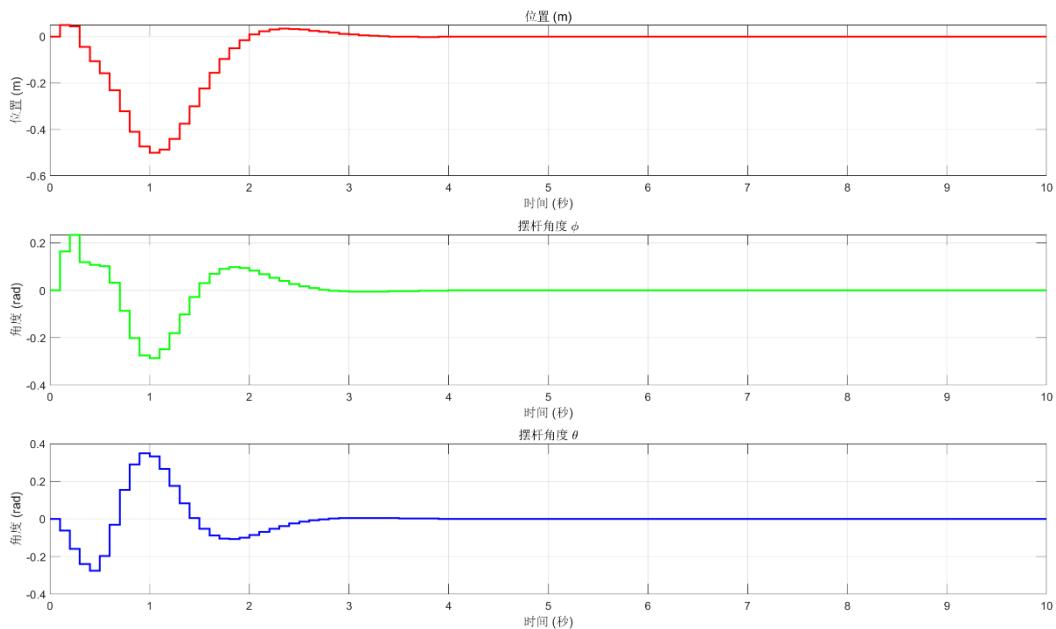


图 9 极点配置控制器下的系统脉冲响应

脉冲响应性能指标：

小车位置峰值：0.5000 m，摆杆角度 ϕ 峰值：0.2867 rad，摆杆角度 θ 峰值：0.3489 rad。

6 结论与未来工作

6.1 结论

本研究通过建立二级倒立摆系统的非线性动力学模型，并在平衡点附近进行线性化处理，成功设计了 PID、LQR 和极点配置三种控制器。仿真结果表明，传统 PID 控制器由于系统强耦合性和参数敏感性难以实现稳定控制，而基于优化算法的 LQR 控制器和极点配置控制器均能有效稳定系统，其中 LQR 控制器在响应速度、超调量和抗干扰能力方面表现更优，验证了现代控制理论在复杂非线性系统中的优越性。通过能控性与能观性分析，证实了系统状态的可控性与可观测性，为控制器设计提供了理论依据。该研究不仅深化了对多自由度系统控制特性的理解，也为实际工程中的平衡控制问题提供了可借鉴的方法论。

6.2 未来工作

后续研究可进一步探索自适应控制、模糊控制等智能算法在二级倒立摆系统中的应用，以提升控制器对参数不确定性和外部干扰的鲁棒性；同时，可考虑引入状态观测器解决实际系统中部分状态不可测的问题，并尝试将理论模型与实验平台结合，通过硬件在环仿真验证控制策略的实用性。此外，研究结果可扩展至更复杂的多级倒立摆或欠驱动机械系统，为机器人平衡控制、航空航天等领域的工程实践提供更广泛的理论支撑。