问题重述

我们有一个稳定的最小相位系统：

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z - 1}$$

并设计了一个单位反馈控制器：

$$C(z) = \frac{K}{z^n - 1} \cdot \frac{z - 1}{z - 0.5}$$

用于跟踪周期性参考输入信号（周期为 n 个样本，$n > 1$）。

(a) 假设稳定的极点/零点对消是精确的，推导闭环传递函数（5%）

(b) 已知在理想条件下，稳定性边界是 $0 < K < 2$，与 n 无关。但当模型不精确时，稳定性边界可能会变化（通常会缩小）。当实际被控对象为：

$$G(z) = \frac{z - 0.7}{z - 1}$$

且 $n = 1$ 时，求稳定的闭环系统的 K 的范围（10%）。

解答

(a) 推导闭环传递函数（精确对消时）

闭环传递函数 $T(z)$ 的公式为：

$$T(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

代入 $C(z)$ 和 $G(z)$：

$$C(z)G(z) = \left(\frac{K}{z^n - 1} \cdot \frac{z - 1}{z - 0.5}\right) \cdot \left(\frac{z - 0.5}{z - 1}\right) = \frac{K}{z^n - 1}$$

因为 $z - 0.5$ 和 $z - 1$ 被精确对消（假设对消是精确的）。

因此：

$$T(z) = \frac{\frac{K}{z^n-1}}{1+\frac{K}{z^n-1}} = \frac{K}{z^n-1+K}$$

所以闭环传递函数为：

$$T(z) = \frac{K}{z^n+K-1}$$

(b) 实际被控对象为 $G(z) = \frac{z-0.7}{z-1}$，且 $n=1$ 时的稳定性分析

此时控制器为：

$$C(z) = \frac{K}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z-0.5} = \frac{K}{z-0.5}$$

（因为 $n=1$，所以 $z^n - 1 = z - 1$）

开环传递函数为：

$$C(z)G(z) = \frac{K}{z-0.5} \cdot \frac{z-0.7}{z-1} = \frac{K(z-0.7)}{(z-0.5)(z-1)}$$

闭环传递函数为：

$$T(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{\frac{K(z-0.7)}{(z-0.5)(z-1)}}{1+\frac{K(z-0.7)}{(z-0.5)(z-1)}} = \frac{K(z-0.7)}{(z-0.5)(z-1)+K(z-0.7)}$$

展开分母：

$$(z-0.5)(z-1)+K(z-0.7) = z^2 - 1.5z + 0.5 + Kz - 0.7K$$

$$= z^2 + (-1.5+K)z + (0.5-0.7K)$$

因此闭环特征方程为：

$$z^2 + (K-1.5)z + (0.5-0.7K) = 0$$

对于离散系统，稳定性要求所有极点位于单位圆内（即 $|z| < 1$）。我们可以使用 Jury 稳定性判据或双线性变换后应用 Routh-Hurwitz 判据。这里直接使用 Jury 判据。

Jury 稳定性判据：

对于二阶系统 $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$，稳定性条件为：

1. $|a_2| < 1$
2. $a_2 - a_1 + 1 > 0$
3. $a_2 + a_1 + 1 > 0$

应用到我们的特征方程：

- $a_1 = K - 1.5$
- $a_2 = 0.5 - 0.7K$

条件 1：

$$|0.5 - 0.7K| < 1$$

$$-1 < 0.5 - 0.7K < 1$$

解左边：

$$0.5 - 0.7K > -1$$

$$-0.7K > -1.5$$

$$K < \frac{1.5}{0.7} \approx 2.142$$

解右边：

$$0.5 - 0.7K < 1$$

$$-0.7K < 0.5$$

$$K > -\frac{0.5}{0.7} \approx -0.714$$

因此条件 1 要求：

$$-0.714 < K < 2.142$$

条件 2：

$$a_2 - a_1 + 1 > 0$$

$$(0.5 - 0.7K) - (K - 1.5) + 1 > 0$$

$$0.5 - 0.7K - K + 1.5 + 1 > 0$$

$$3 - 1.7K > 0$$

$$K < \frac{3}{1.7} \approx 1.765$$

条件 3：

$$a_2 + a_1 + 1 > 0$$

$$(0.5 - 0.7K) + (K - 1.5) + 1 > 0$$

$$0.5 - 0.7K + K - 1.5 + 1 > 0$$

$$0 + 0.3K > 0$$

$$K > 0$$

综合所有条件：

1. $-0.714 < K < 2.142$
2. $K < 1.765$
3. $K > 0$

因此稳定的 K 范围为：

$$0 < K < 1.765$$

最终答案

(a) 闭环传递函数为：

$$T(z) = \frac{K}{z^n + K - 1}$$

(b) 当实际被控对象为 $G(z) = \frac{z-0.7}{z-1}$ 且 $n = 1$ 时，稳定的 K 范围为：

$$0 < K < \frac{30}{17} \approx 1.765$$