

1. 对于如下系统  $y_k = 0.5y_{k-1} + 0.5y_{k-2} + 0.25u_{k-1}$
- 求解冲击传递函数
  - 给出零状态阶跃输入时的输出  $\bar{Y}(z)$ ，理论求解 DC 增益与终值
  - 在 MATLAB 中，输出阶跃响应并对比 DC 增益与终值的理论值

(a) 对两边进行 Z 变换，假设 0 初始条件

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) + 0.25z^{-1}U(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}) Y(z) = 0.25z^{-1}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.25z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}} = \frac{0.25z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

(b) 阶跃输入的 Z 变换为

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\text{则 } Y(z) = \frac{0.25z}{z^2 - 0.5z - 0.5} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$z=1$  时，~~分子分母~~， $\frac{Y(1)}{U(1)} = \frac{0.25}{0}$  DC 增益不存在，系统不稳定

终值定理

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \frac{0.25z^2}{z^2 - 0.5z - 0.5} = \frac{0.25}{0}$$

终值不存在，系统不稳定

2.

信号  $f(t) = 10 \sin(4\pi t) + \sin(48\pi t) + 5 \sin(89\pi t)$  的采样频率是 5Hz

(a) 求解采样后的频率

(b) 利用课件 2 中的采样折线图进行解释

(a) 原信号频率  $f_1 = 2\text{Hz}$   $f_2 = 24\text{Hz}$   $f_3 = 44.5\text{Hz}$   $f_s = 5\text{Hz}$

采样定理，采样后的频率为  $f_{\text{alias}} = |f - n f_s|$

$n \in \mathbb{Z}$ , 使得  $f_{\text{alias}} \in [0, f_s/2]$

$f'_1 = 2\text{Hz}$   $f'_2 = 1\text{Hz}$   $f'_3 = 0.5\text{Hz}$

(b)

原始频率高于 Nyquist 频率的部分会被折叠到  $[0, 2.5\text{Hz}]$  区间

### 3. (2) 系统特征方程

$$0.02s^3 + 0.3s^2 + s + k = 0$$

$$s^3 - 0.02 \approx 1$$

$$s^2 - R^2 \approx K$$

$$s^1 - \frac{0.3 - 0.02K}{0.3} \approx K$$

$$s^0 - K$$

$$\frac{0.3 - 0.02K}{0.3} > 0 \Rightarrow 0 < K < 15$$

$$K > 0$$

### 4. 连续系统

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-0.4s}$$

采样时间  $T = 1 \text{ sec}$  延迟  $= 0.4 \text{ sec}$

ZOH 增广传递函数

$$z = e^{Ts} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$y_{k+1} = y_k + 0.4 u_{k-1} + 0.6 u_k$$

$$Z\left\{\frac{e^{-0.4s}}{s^2}\right\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} e^{-0.4/T}$$

已变换

前  $\downarrow$  移 后  $\downarrow$  移

$$G_{ZOH}(z) = \frac{Tz^{-1} e^{-0.4/T}}{(1 - z^{-1})} = \frac{T e^{-0.4/T}}{z - 1} \quad Y(z) = \frac{1}{z-1} Y(z) + 0.4 z^{-2} U(z) + 0.6 z^{-1} U(z)$$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{e^{-0.4}}{z - 1}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{0.4 z^{-2} + 0.6 z^{-1}}$$

$$\therefore G_{ZOH}(z) = \frac{0.4 + 0.6z}{z(z-1)}$$

$$= \frac{0.4 + 0.6z}{z(z-1)}$$