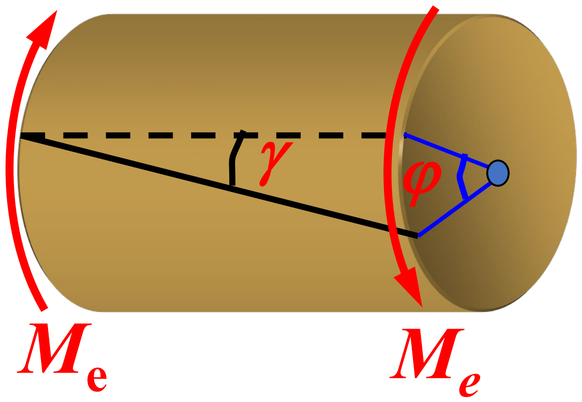
材料力学（乙）

Mechanics of Materials

重要概念的回顾与强化

扭转的受力特点：杆件受到大小相等、方向相反的一对外力偶矩作用。



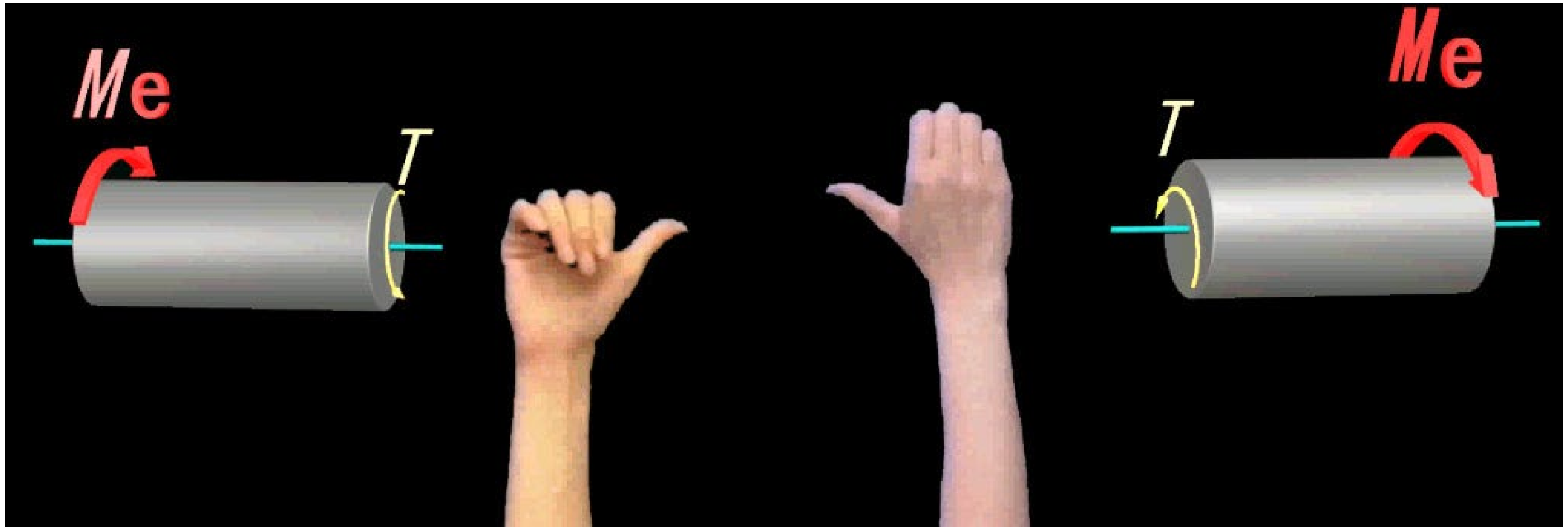
扭转的变形特点：杆件的各横截面发生绕轴线的相对转动。

外力偶矩的计算

$$M_e = 9549\frac{P}{n}\ \mathrm{N\cdot m}$$

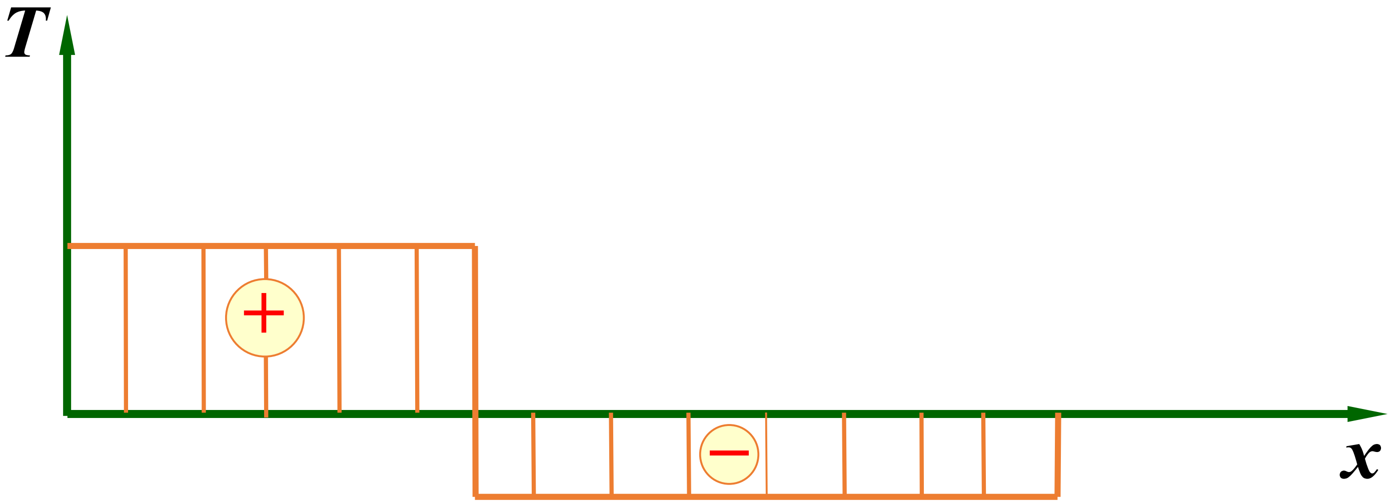
重要概念的回顾与强化

扭矩：确定外力偶矩 M_e 后，采用截面法确定横截面上的扭矩 T（Torque）



右手螺旋法则

扭矩图



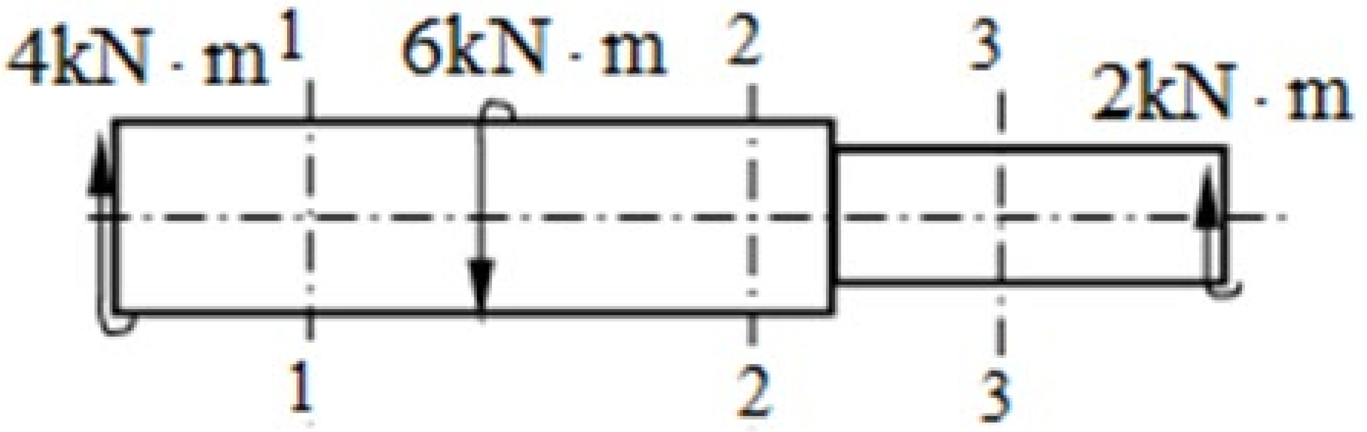
测试题： 图示变截面圆轴，1-1、2-2、3-3截面中，扭矩值最大的为（ ）。

A. 1-1截面

B. 2-2截面

C. 3-3截面

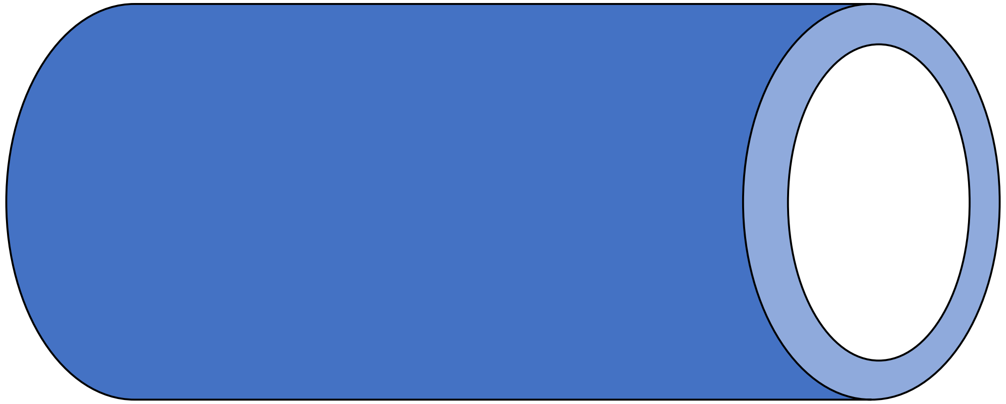
D. 无法确定

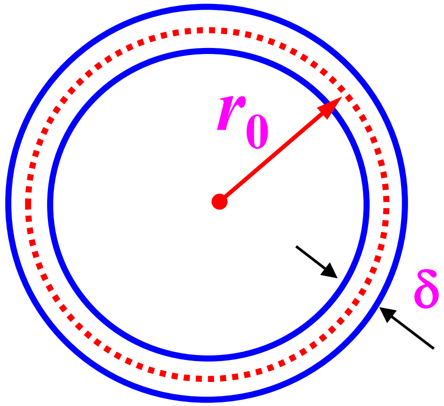


§3.3 纯剪切

薄壁圆筒扭转

等厚度的圆筒,平均半径为 r_0, 壁厚为 δ





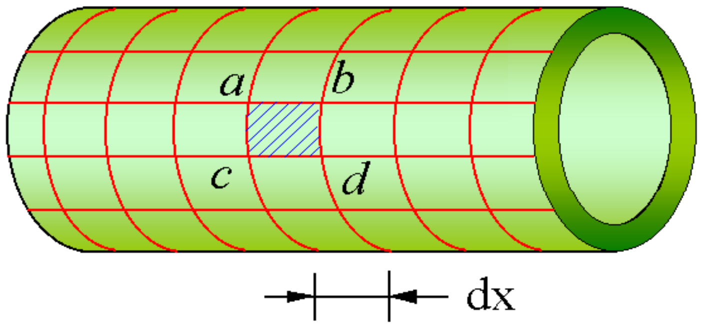
薄壁圆筒 $\delta \le r_0/10$

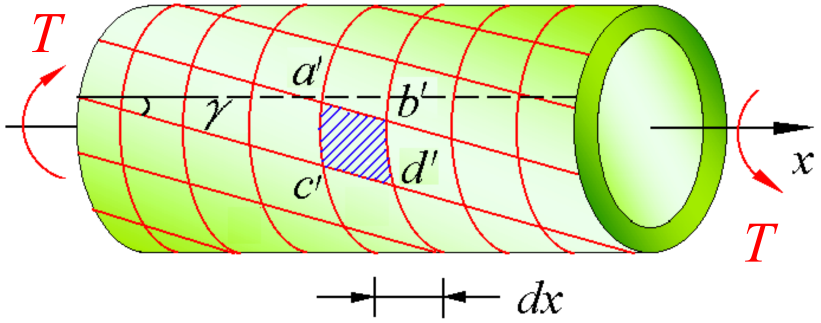
§3.3 纯剪切

薄壁圆筒扭转

示意图：将薄壁圆筒表面用纵向平行线和周线划分；

两端施以大小相等方向相反一对力偶矩。





变形特点：

① 圆筒表面的周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线作了相对转动；

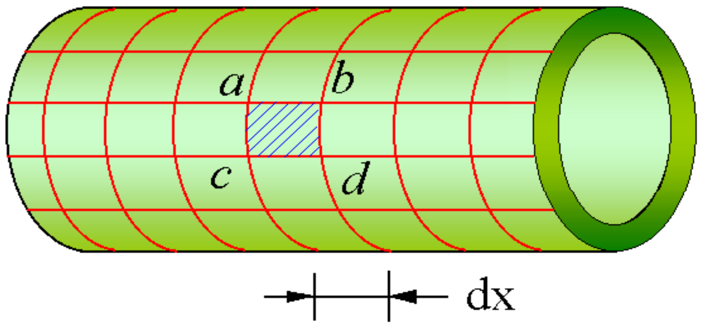
② 各纵向线均倾斜了同一微小角度 γ；

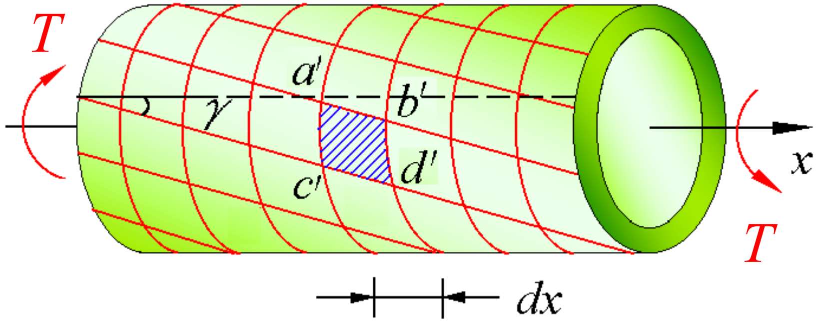
③ 所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。

思考：每一个现象意味着什么？

§3.3 纯剪切

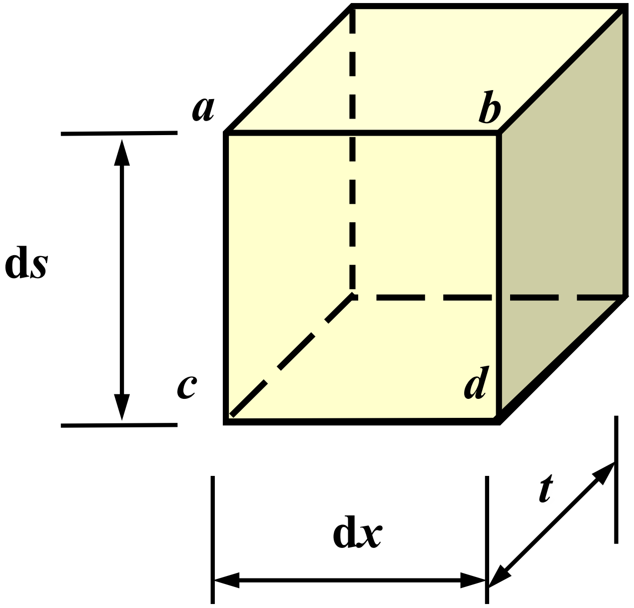
1、薄壁圆筒扭转时的切应力





根据实验结果和分析，可以得到以下结论：

1. 圆筒横截面没有正应力，只有切应力；

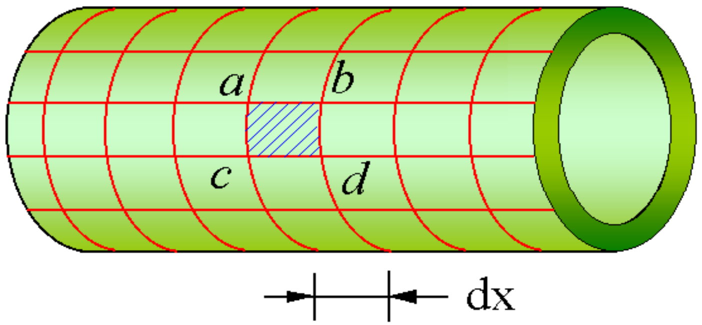


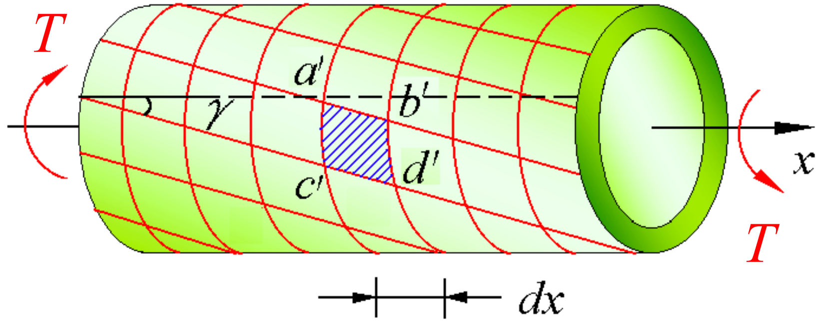
纯剪应力状态

扭转现象：简单应力状态

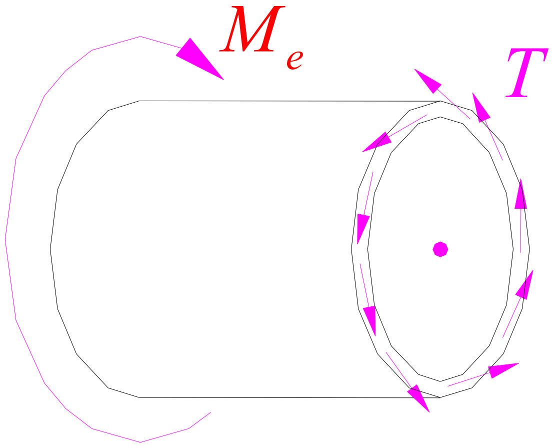
§3.3 纯剪切

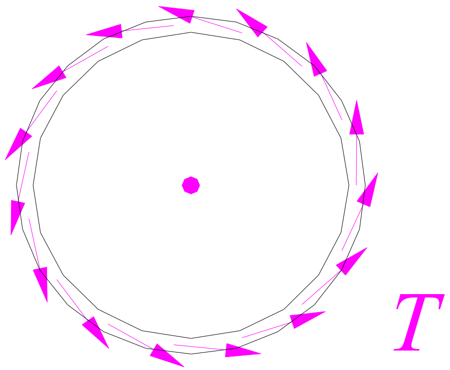
1、薄壁圆筒扭转时的切应力

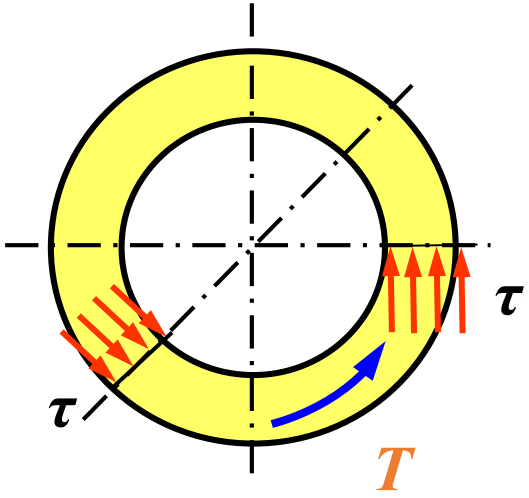




- 沿周向各点的切应力数值相等，方向垂直于半径（与周线相切）
- 薄壁筒扭转：横截面上切应力均匀分布



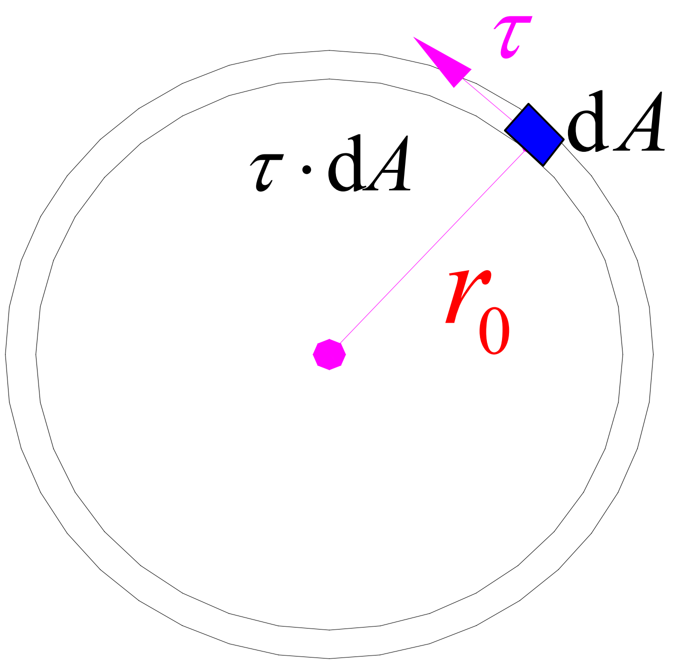




§3.3 纯剪切

1、薄壁圆筒扭转时的切应力

薄壁筒扭转时横截面切应力计算公式



$$\int_{环} r_0 \cdot \tau \cdot \mathrm{d}A = T$$

$$r_0 \cdot \tau \int_{环} \mathrm{d}A = T$$

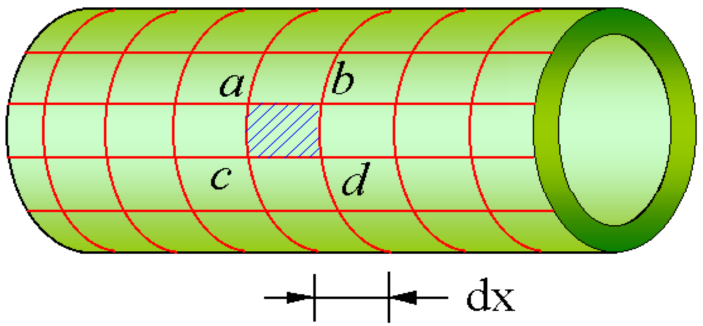
$$r_0 \cdot \tau \cdot 2\pi r_0 \delta = T$$

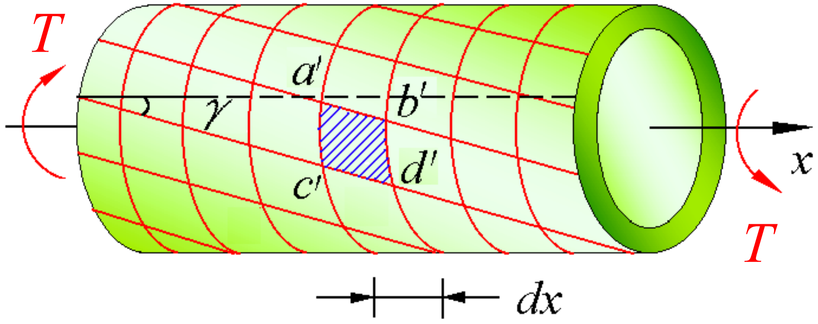
$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta} = \frac{M_{\mathrm{e}}}{2\pi r_0^2 \delta}$$

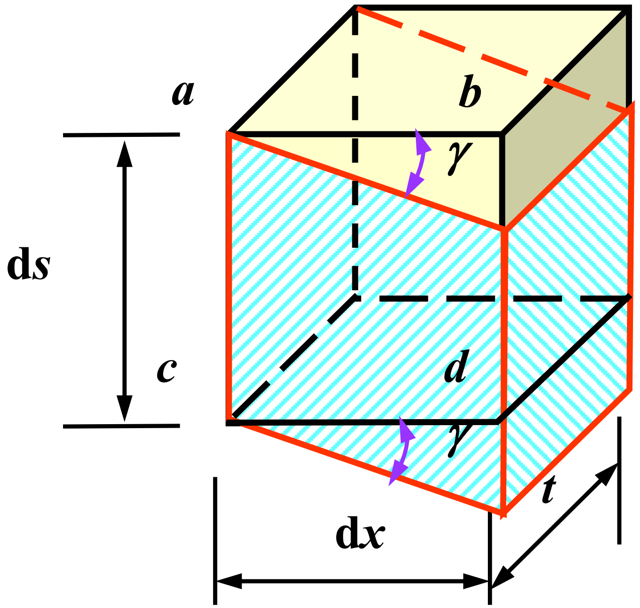
与精确的理论解相比，当$\delta \le r_0/10$时，上式的误差不超过4.52%。

薄壁圆筒扭转是静定问题

2、切应力互等定理







思考：周向的纵截面切应力？

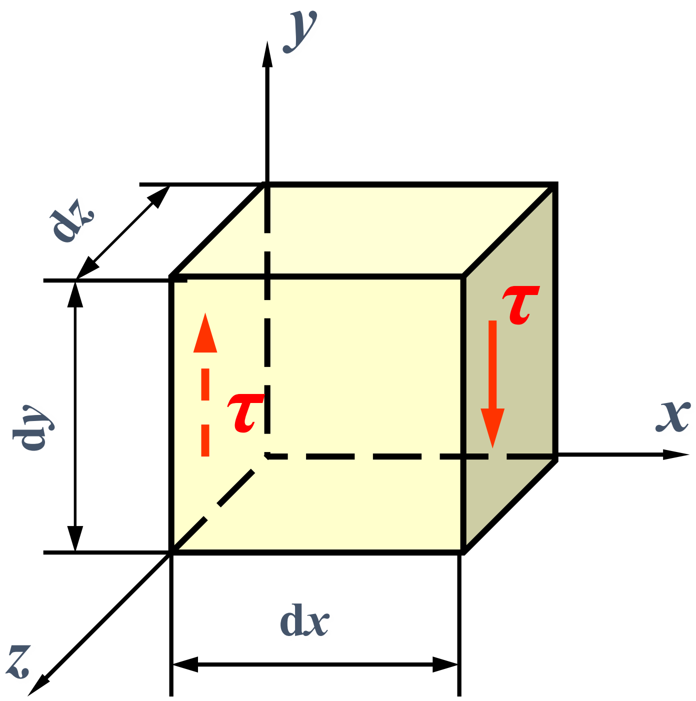
2、切应力互等定理

任一单元体，若右面（杆的横截面）上有切应力，其方向与y轴平行。

则由平衡方程

$$\sum F_y = 0$$

左面也有切应力



两侧内力$\tau dydz$ 大小相等，方向相反，组成一个力偶。

其矩为$(\tau dydz)dx$

2、切应力互等定理

要满足平衡方程

$$\sum M_z = 0 \quad \sum F_x = 0$$

单元体的上、下两平面上需要有大小相等，指向相反的一对内力。它们组成力偶，其矩为

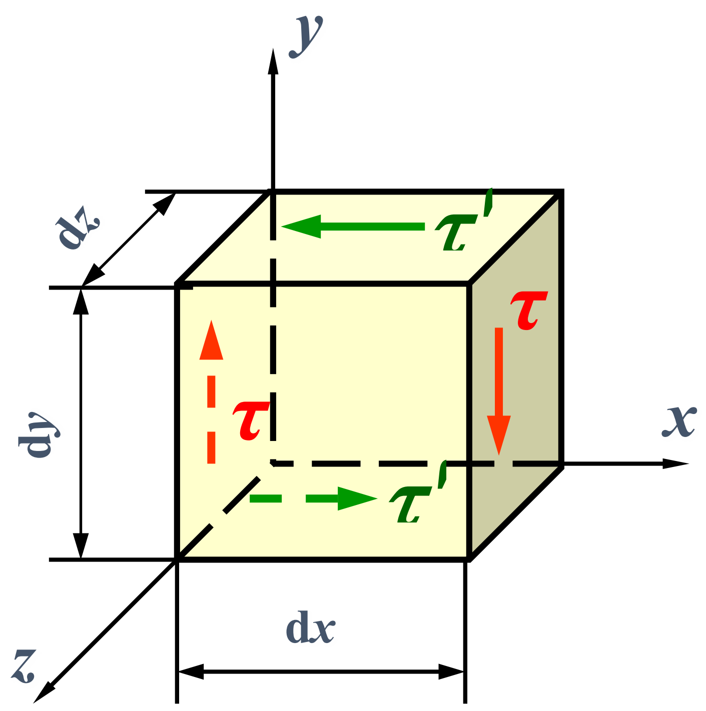
$$(\tau' dxdz)dy$$

此力偶矩与前一力偶矩

$$(\tau dydz)dx$$

数量相等而转向相反，从而可得

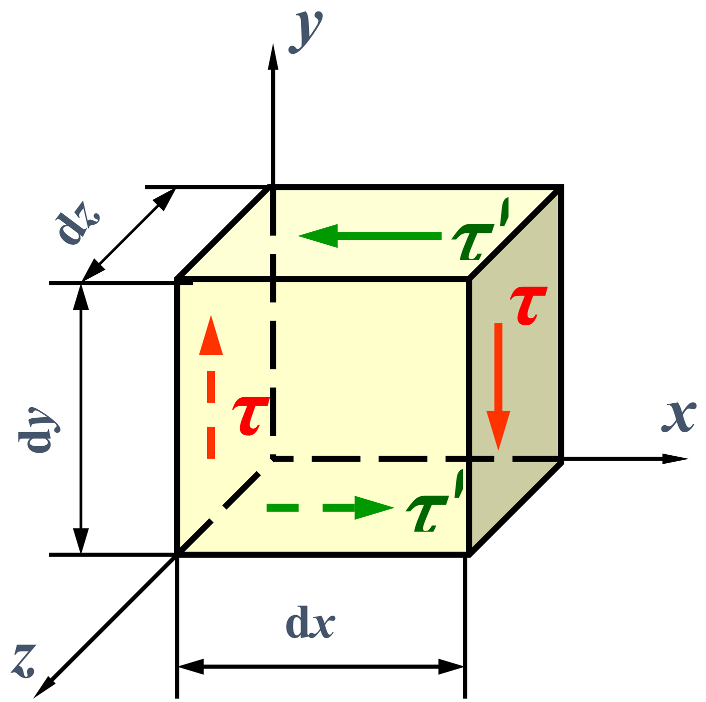
$$\tau' = \tau$$



2、切应力互等定理

$$\boxed{\tau' = \tau}$$

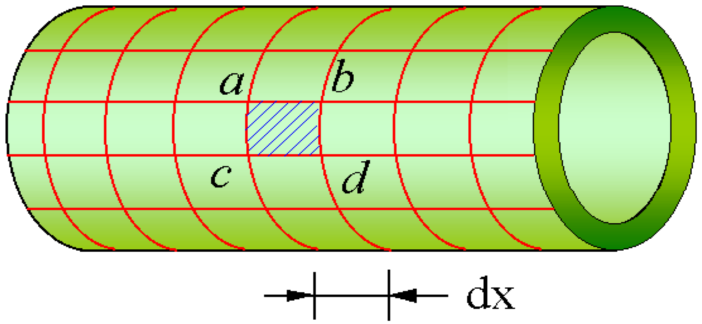
- 在相互垂直的两个平面上，切应力**必然成对存在**，且数值相等；
- 两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。

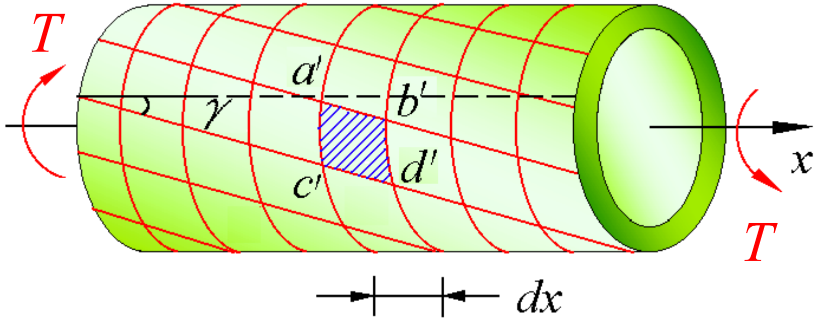


纯剪切单元体：

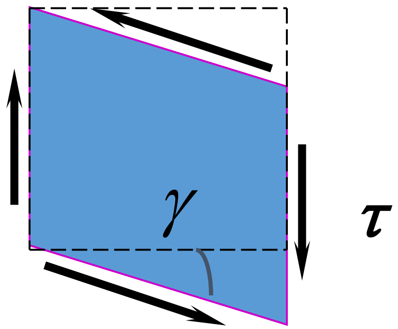
单元体平面上只有切应力而无正应力。

3、切应变、剪切胡克定律



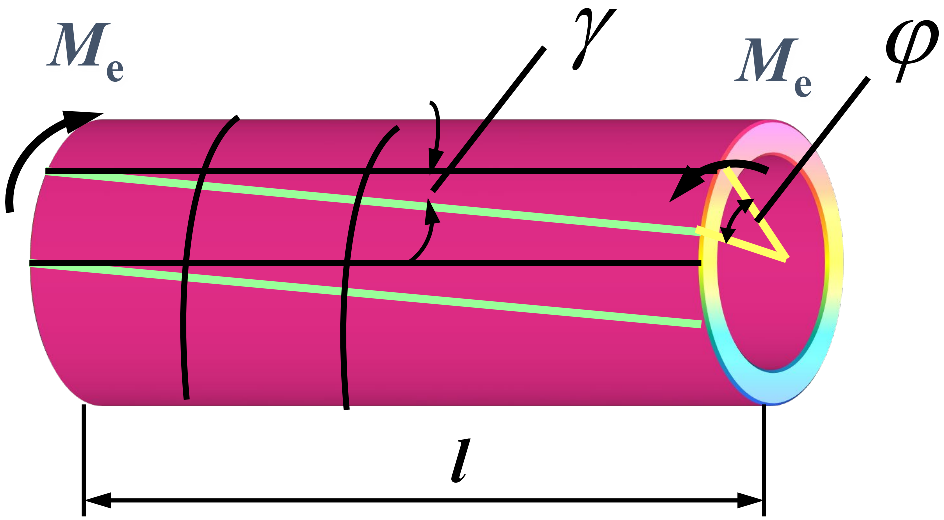


在切应力的作用下，单元体的直角将发生微小的改变，这个改变量 γ 称为**切应变**。



3、切应变、剪切胡克定律

几何关系



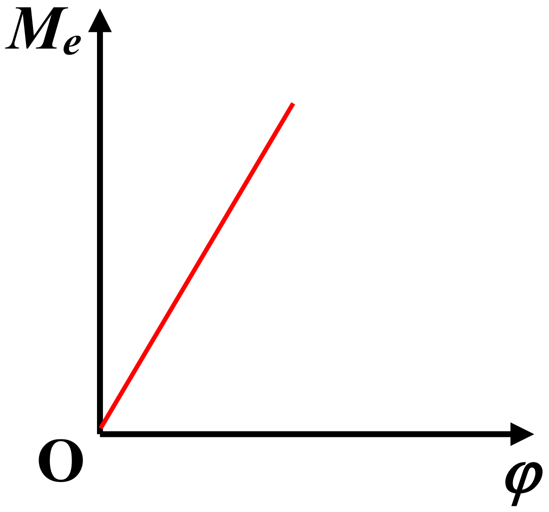
$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

r 为薄壁圆筒的外半径。

3、切应变、剪切胡克定律

薄壁圆筒的扭转试验发现，当外力偶M_e在某一范围内时， M_e与φ成正比。

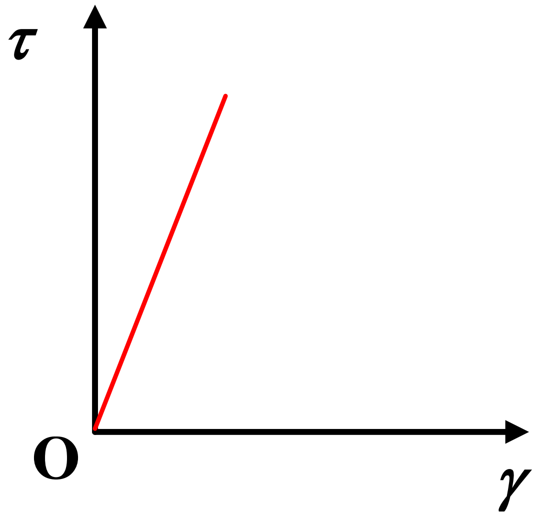
$$M_e \propto \varphi$$



$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta} = \frac{M_e}{2\pi r_0^2 \delta}$$

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

$$\tau \propto \gamma$$



3、切应变、剪切胡克定律

当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应力 τ 与切应变 γ 成正比，这个关系称为剪切胡克定律。

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$

G：剪切弹性模量（GPa），又叫切变模量

钢材的剪切弹性模量约为$G = 80\ \text{GPa}$

3、切应变、剪切胡克定律

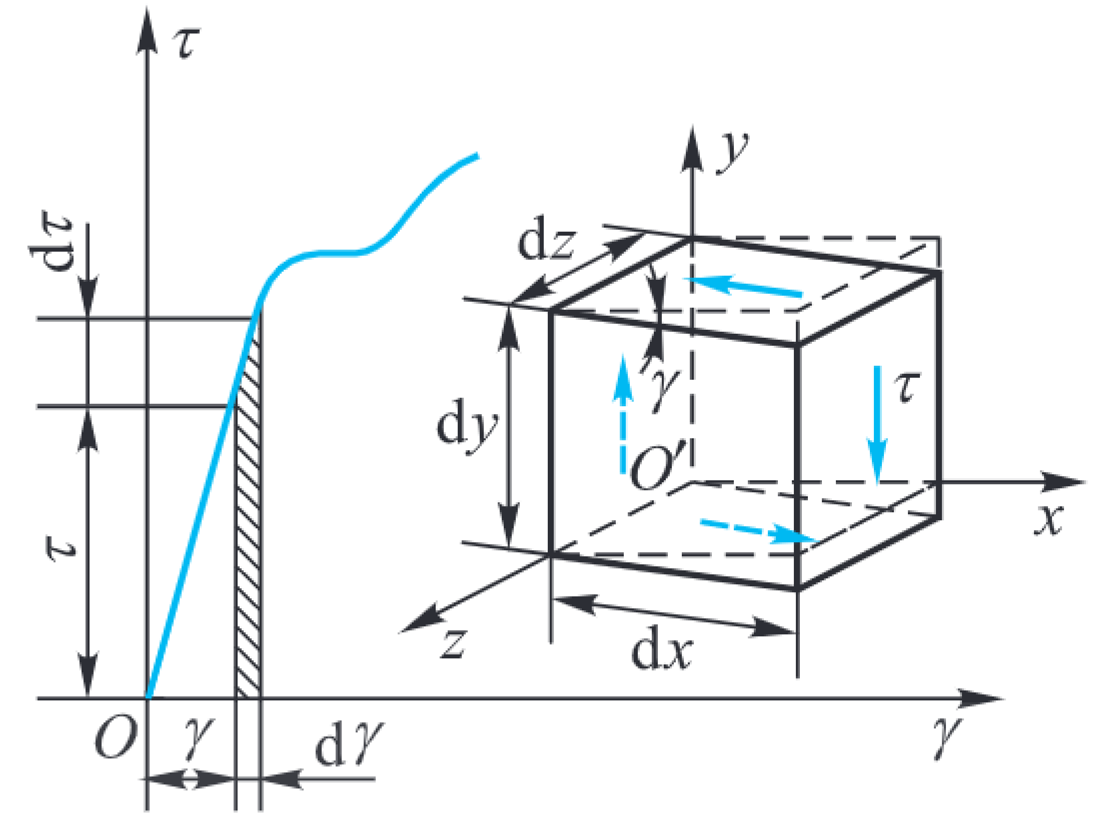
对于各项同性材料，

弹性模量E，剪切弹性模量G，泊松比μ

三个弹性常数之间的关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

4、剪切应变能与应变能密度



剪力： $F_s = \tau \mathrm{d}y\mathrm{d}z$

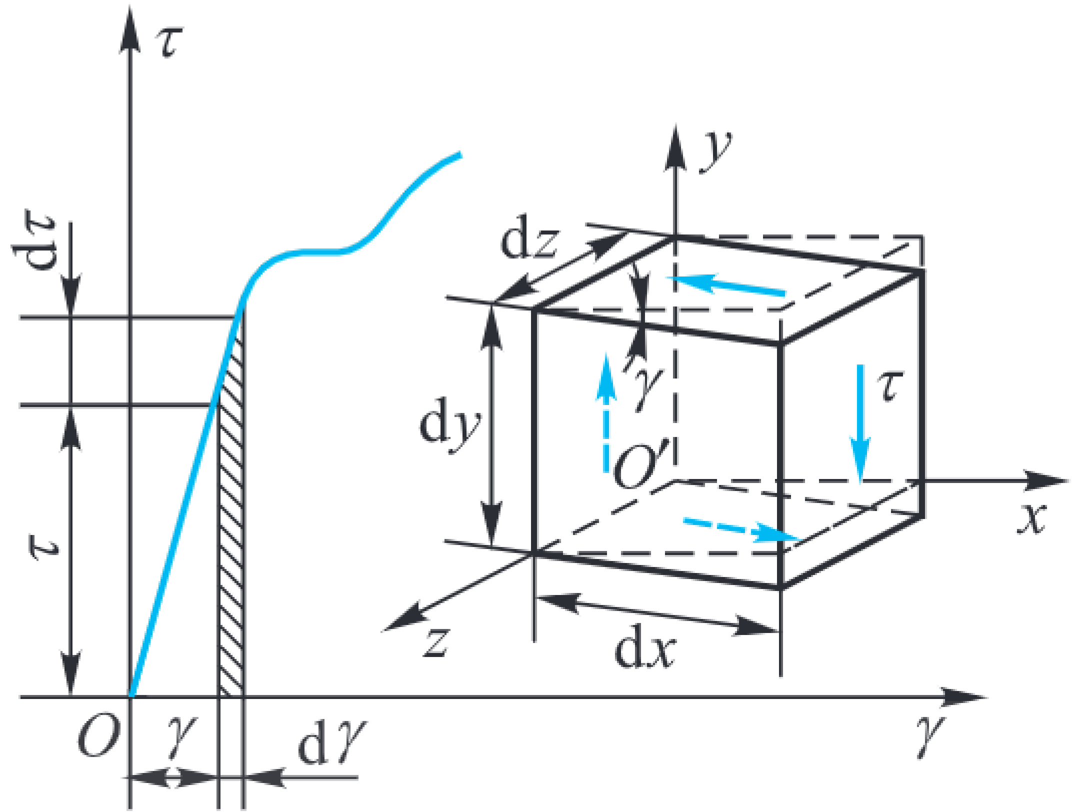
错动距离增量：$\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}x$

剪力做功： $F_s \bullet \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}x$

剪力做的总功：

$$dW = \int_0^{\gamma_1} \tau \mathrm{d}y\mathrm{d}z \bullet \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}x$$

4、剪切应变能与应变能密度

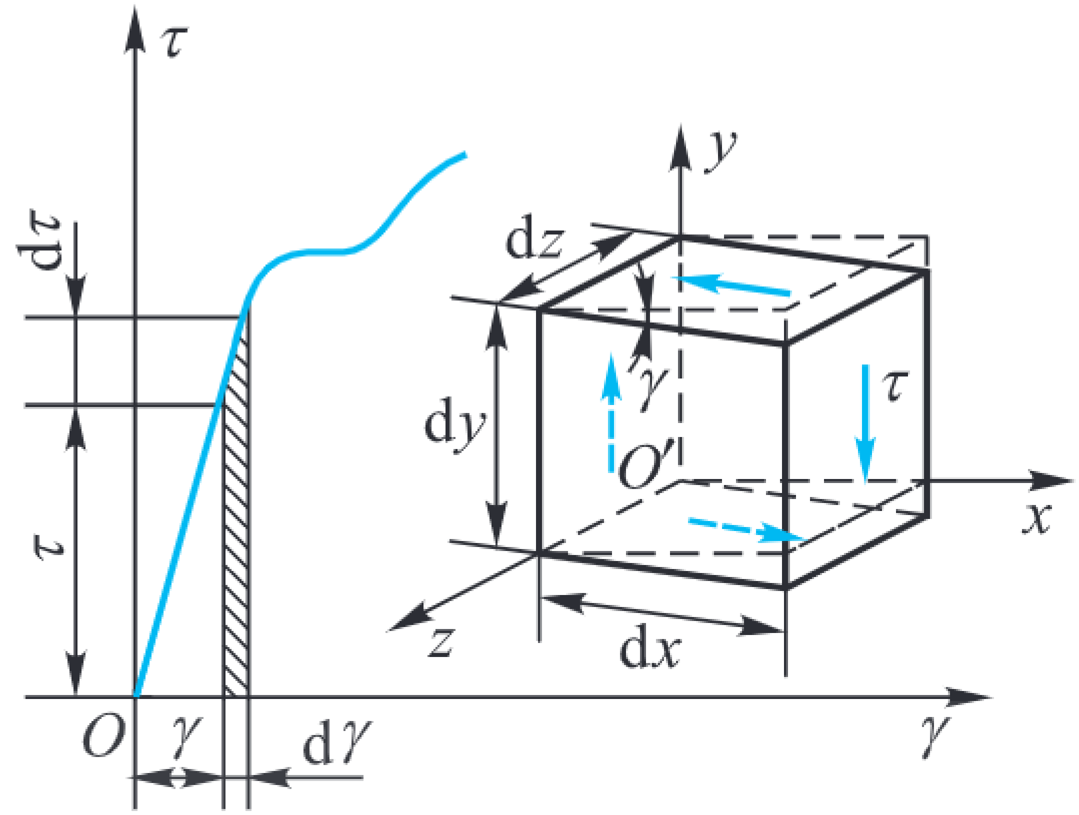


应变能：

$$dV_{\varepsilon}=dW=\int_0^{\gamma_1}\tau dydz\cdot d\gamma dx$$

$$=\left(\int_0^{\gamma_1}\tau d\gamma\right)dV$$

4、剪切应变能与应变能密度



应变能密度：

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}V_\varepsilon}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\gamma_1} \tau \mathrm{d}\gamma$$

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{\tau^2}{2G}$$

4、剪切应变能与应变能密度

类比正应力引起的应变能

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$$

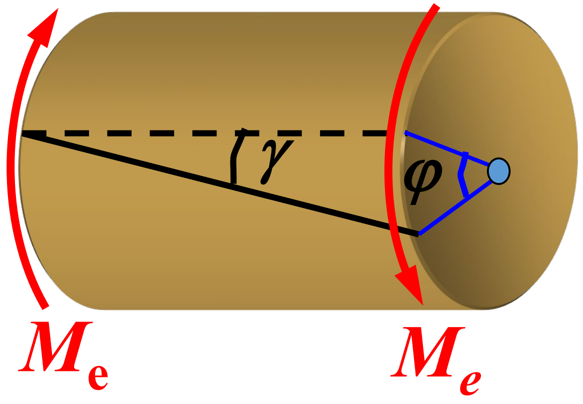
$$\tau = G\gamma$$

$$v_{\gamma} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

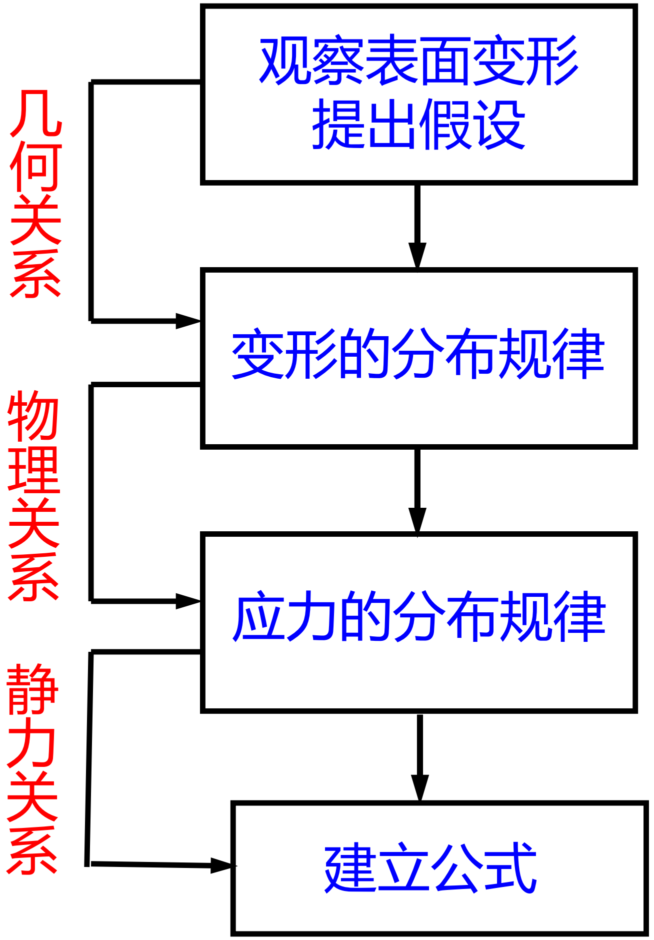
$$v_{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

§3.4 圆轴扭转时的应力

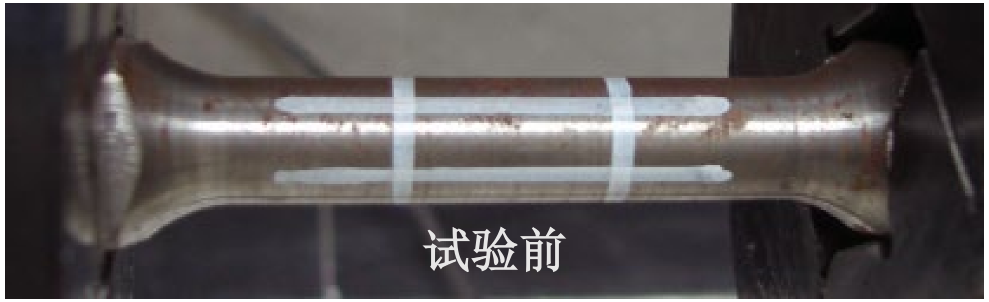
圆轴横截面切应力（超静定问题）



从三方面考虑
- 几何关系
- 物理关系
- 静力关系



§3.4 圆轴扭转时的应力



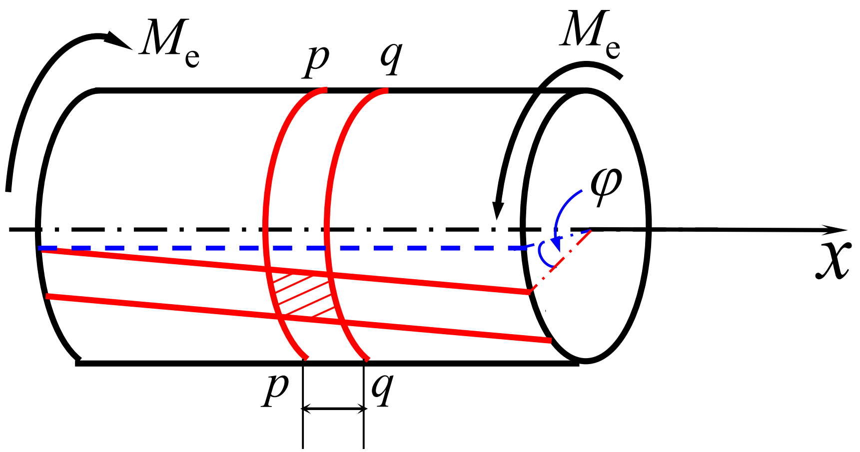
实验观察：

（1） 圆周线的形状、大小，及圆周线之间的距离没有改变

（2） 纵向线均倾斜了同一角度γ

§3.4 圆轴扭转时的应力

1、几何关系

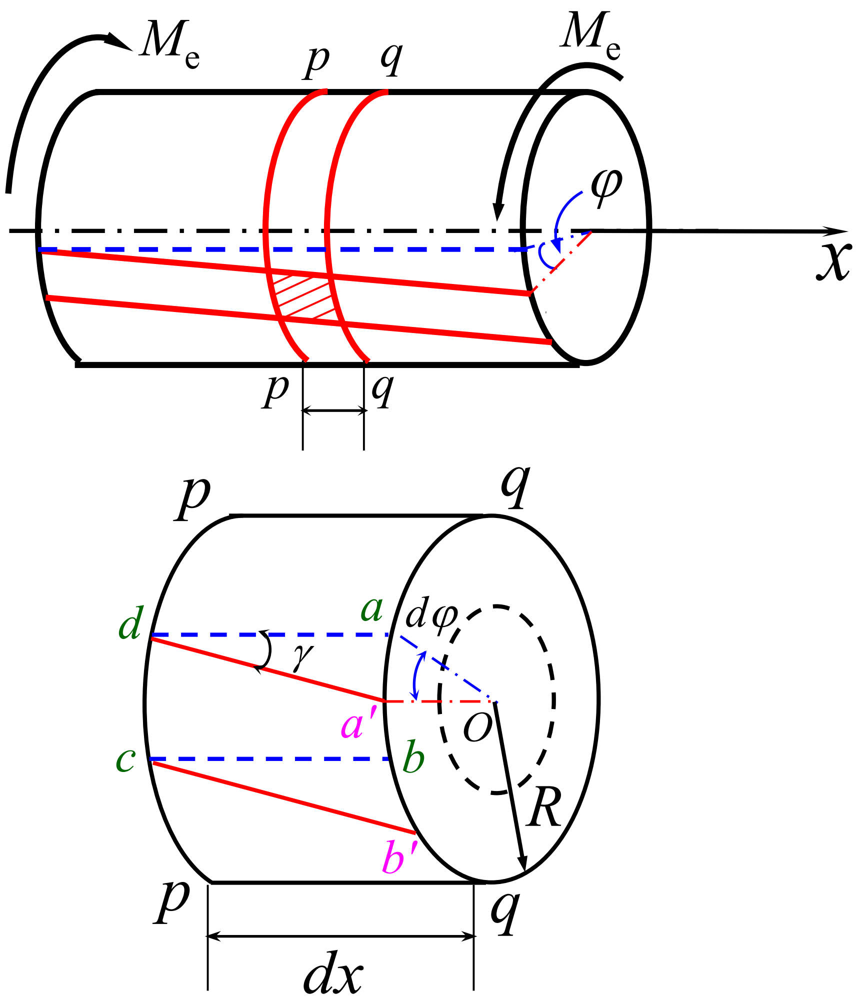


φ：扭转角（rad）

平面假设:

圆轴扭转变形前原为平面的横截面，变形后仍保持为平面，形状和大小不变，半径仍保持为直线；且相邻两截面间的距离不变。

1、几何关系



φ：扭转角（rad）

$d\varphi$：dx微段两截面的相对扭转角

外表面边缘上a点的错动距离

$$aa' = Rd\varphi = \gamma dx$$

外表面边缘上a点的切应变

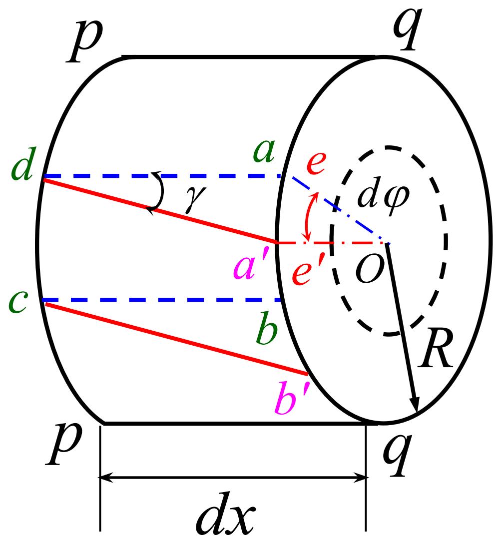
$$\gamma = R\frac{d\varphi}{dx}$$

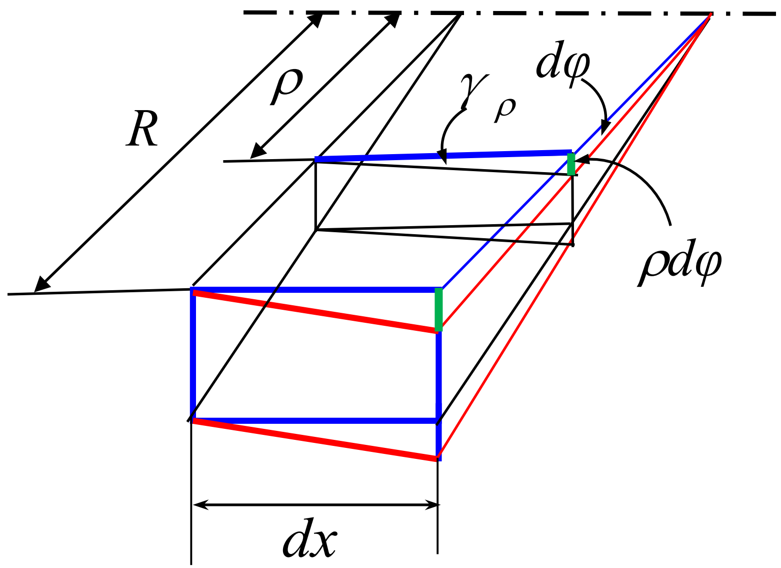
γ发生在垂直于半径的平面内

变形协调方程

§3.4 圆轴扭转时的应力

1、几何关系





距圆心为ρ的圆周上e点的错动距离： $ee' = \rho d\varphi = \gamma_\rho dx$

距圆心为ρ处的切应变： $\gamma_\rho = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$

γ_ρ 也发生在垂直于半径的平面内

2、物理关系

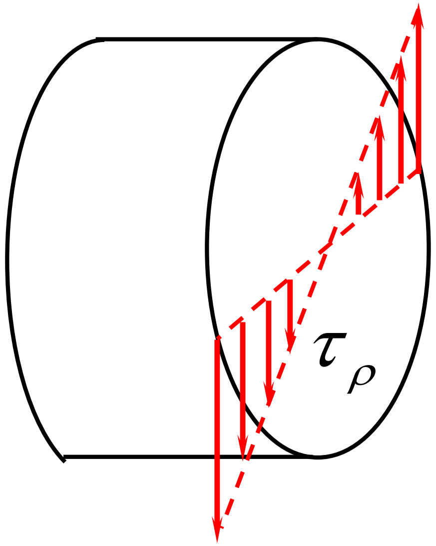
根据剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$

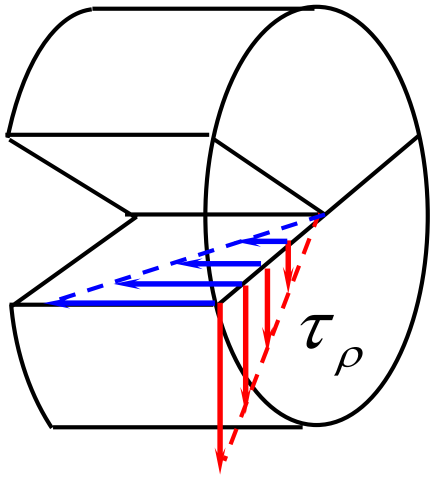
距圆心为ρ处的切应力 $\tau_\rho = G\gamma_\rho$

$$\boxed{\tau_\rho \propto \rho}$$

横截面上同一圆周上任意点的切应力τ_ρ均相同，且与该点到圆心的距离ρ成正比。

τ_ρ垂直于半径



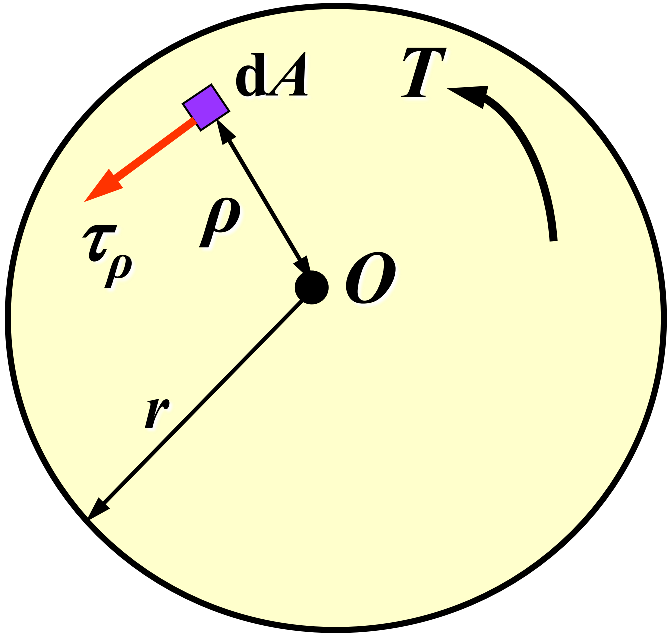


3、静力关系

内力系力矩等于扭矩

$$\int_A \rho\tau_\rho dA = T \qquad \int_A \rho\cdot G\cdot\rho\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot dA = T$$

$$G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA = T$$



定义 $\boxed{\int_A \rho^2 dA = I_\mathrm{p}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{T}{GI_\mathrm{p}}$

代入物理关系 $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\dfrac{d\varphi}{dx}$

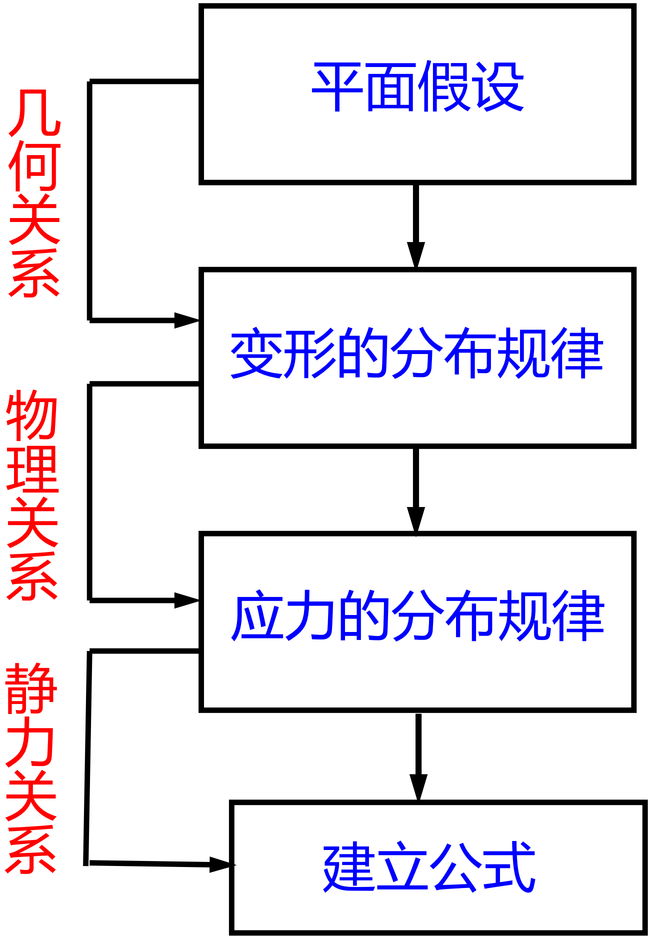
$$\boxed{\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_\mathrm{p}}}$$

T：横截面上的扭矩；

ρ：求应力的点到圆心的距离

I_p：为横截面对圆心的极惯性矩。

§3.4 圆轴扭转时的应力



$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

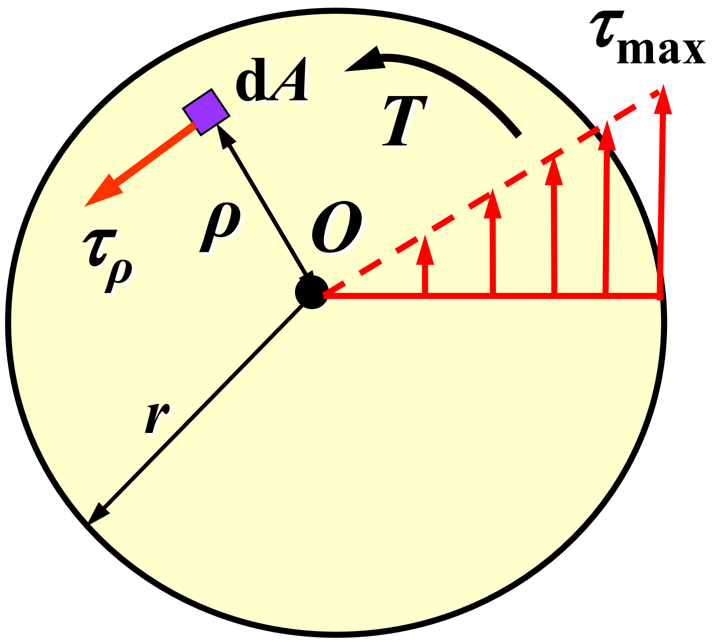
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}$$

$$\boxed{\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_{\mathrm{p}}}}$$

3、静力关系

τ_{max}的计算

$$\tau_{max}=\frac{T\rho_{max}}{I_p}=\frac{T}{\dfrac{I_p}{\rho_{max}}}$$



在圆截面边缘上，有最大切应力

$$\boxed{W_t=\frac{I_p}{\rho_{max}}}$$

W_t称作抗扭截面系数，单位为mm^{3}或m^3。

3、静力关系

极惯性矩和抗扭截面系数的计算

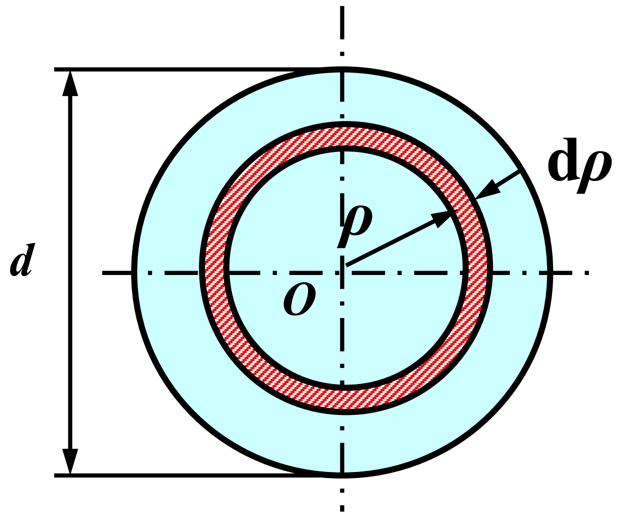
$$I_p = \int_A \rho^2 dA \qquad W_t = \frac{I_p}{\rho_{max}}$$

（1）实心圆截面

$$dA = 2\pi\rho(d\rho)$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4/32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



3、静力关系

极惯性矩和抗扭截面系数的计算

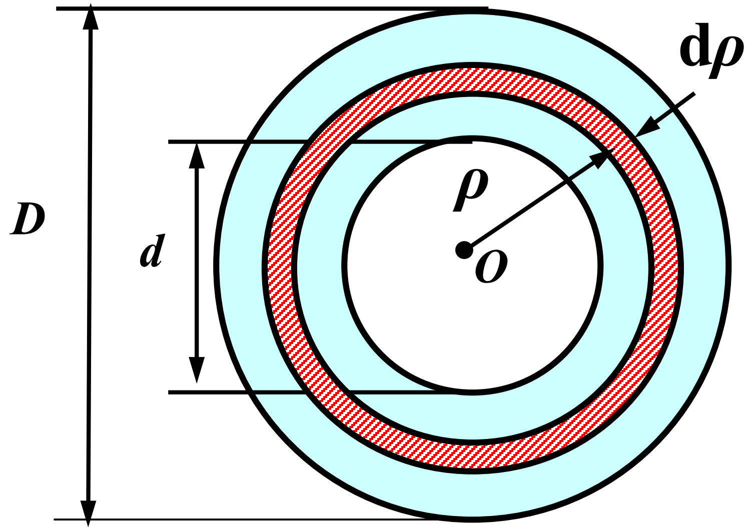
$$I_p = \int_A \rho^2 dA \qquad W_t = \frac{I_p}{\rho_{max}}$$

（2）空心圆截面

$$I_p = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{32}$$

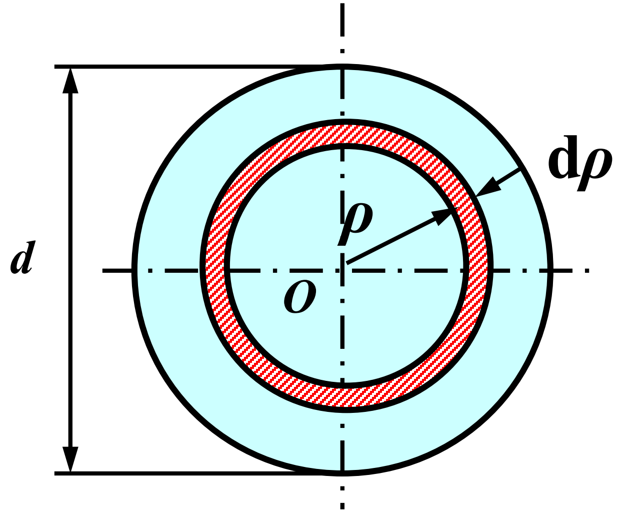
其中 $\alpha = \dfrac{d}{D}$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$



3、静力关系

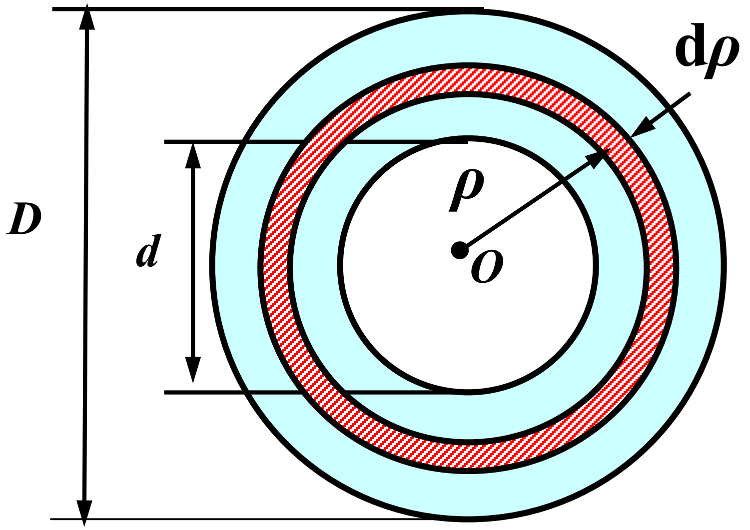
（1）实心圆截面



$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

（2）空心圆截面

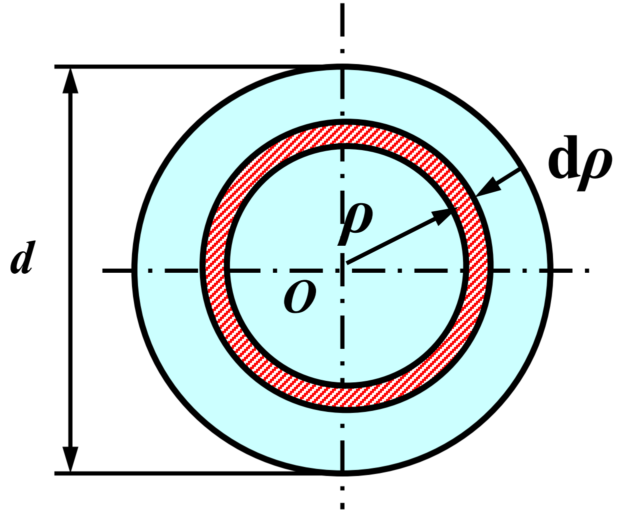


$$I_p = \frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32}$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

3、静力关系

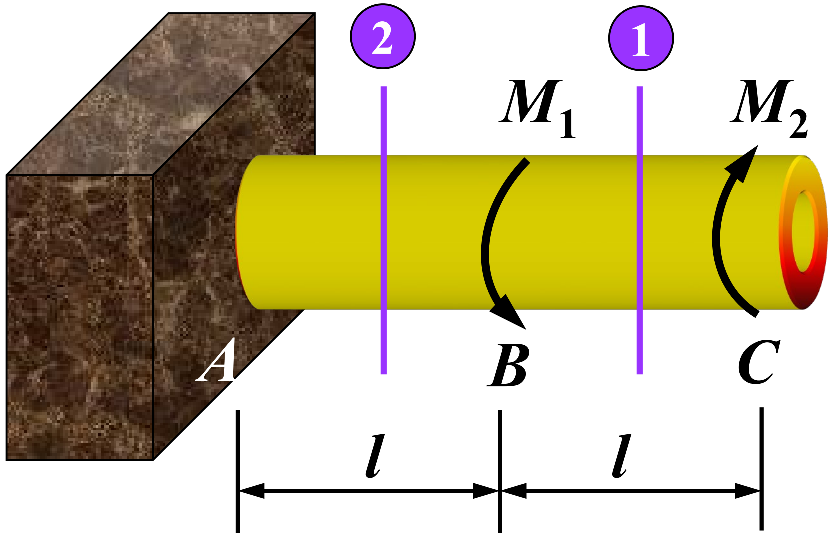
（1）实心圆截面极惯性矩



$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

iPad4 32G

例题3.2 图示空心圆轴外径 D = 100 mm，内径 d = 80 mm，M_1 = 6 kN·m，M_2 = 4 kN·m，材料的剪切弹性模量 G = 80 GPa。



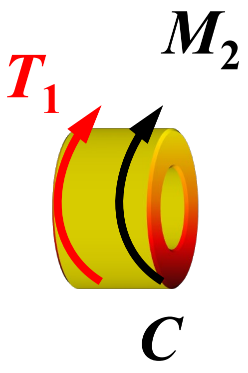
(1) 画轴的扭矩图；

(2) 求轴的最大切应力，并指出其位置。

解：(1) 画轴的扭矩图

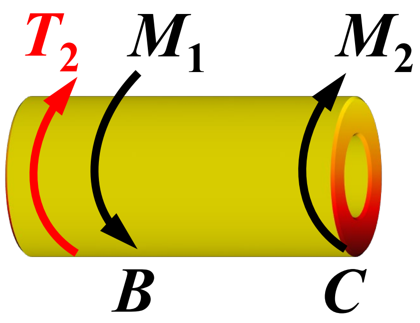
BC段 $T_1 + M_2 = 0$

T_1 = -4 kN·m （-）



AB段 $T_2 + M_2 - M_1 = 0$

T_2 =2 kN·m （+）

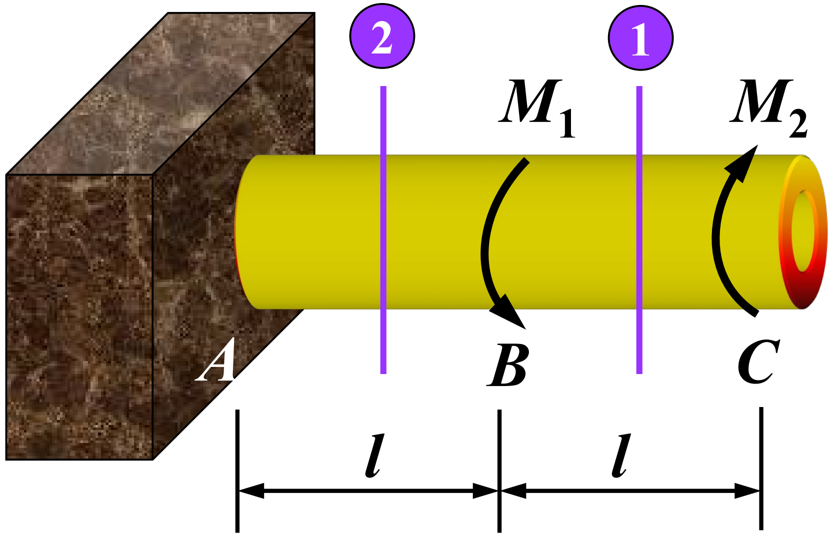


最大扭矩发生在BC段，T_{max} = 4 kN·m

例题3.2 图示空心圆轴外径D=100 mm，内径d=80 mm，M_1=6 kN·m，M_2=4 kN·m，材料的剪切弹性模量 G=80 GPa。

(1) 画轴的扭矩图；

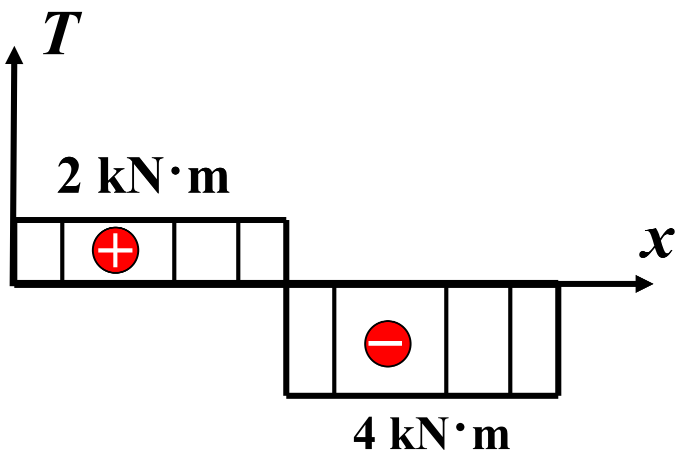
(2) 求轴的最大切应力，并指出其位置。



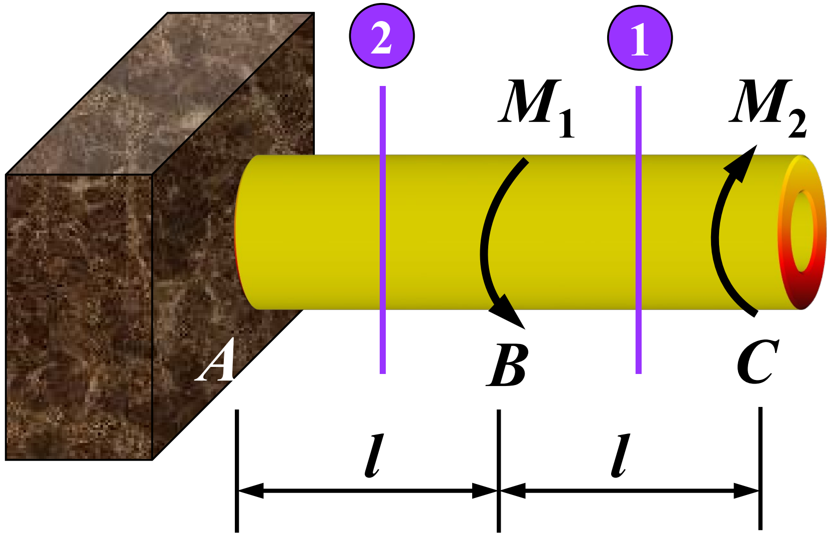
解：（1）画轴的扭矩图

BC段 T_1 = -4 kN·m （-）

AB段 T_2 =2 kN·m （+）



例题3.2 图示空心圆轴外径$D = 100$ mm，内径$d = 80$ mm，$M_1 = 6$ kN·m，$M_2 = 4$ kN·m，材料的剪切弹性模量 $G = 80$ GPa。

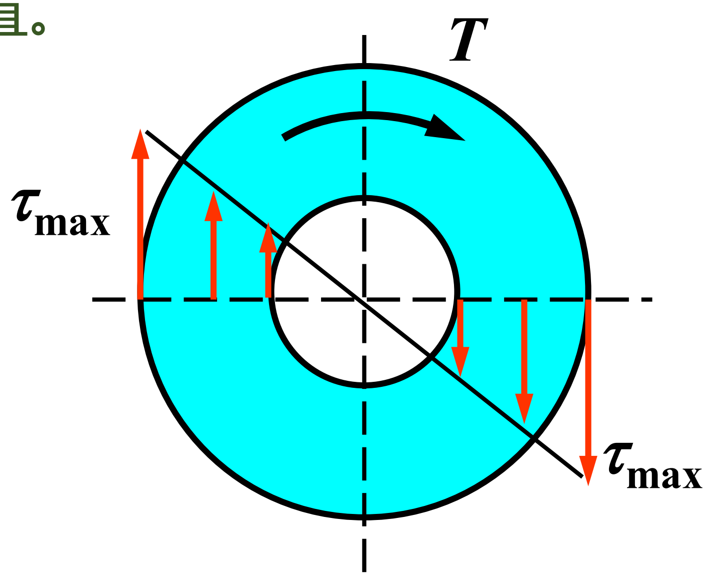


(1) 画轴的扭矩图；

(2) 求轴的最大切应力，并指出其位置。

解：(2) 轴的最大切应力及位置

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} = \frac{T_{max}}{\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)} = 34.5\ \text{MPa}$$



最大切应力发生在截面的周边上，且垂直于半径。