第3章 插 值
Interpolation

苏 芮
srhello@zju.edu.cn
开物苑4-202

上节课知识回顾

1.线性方程组消元法稳定性分析

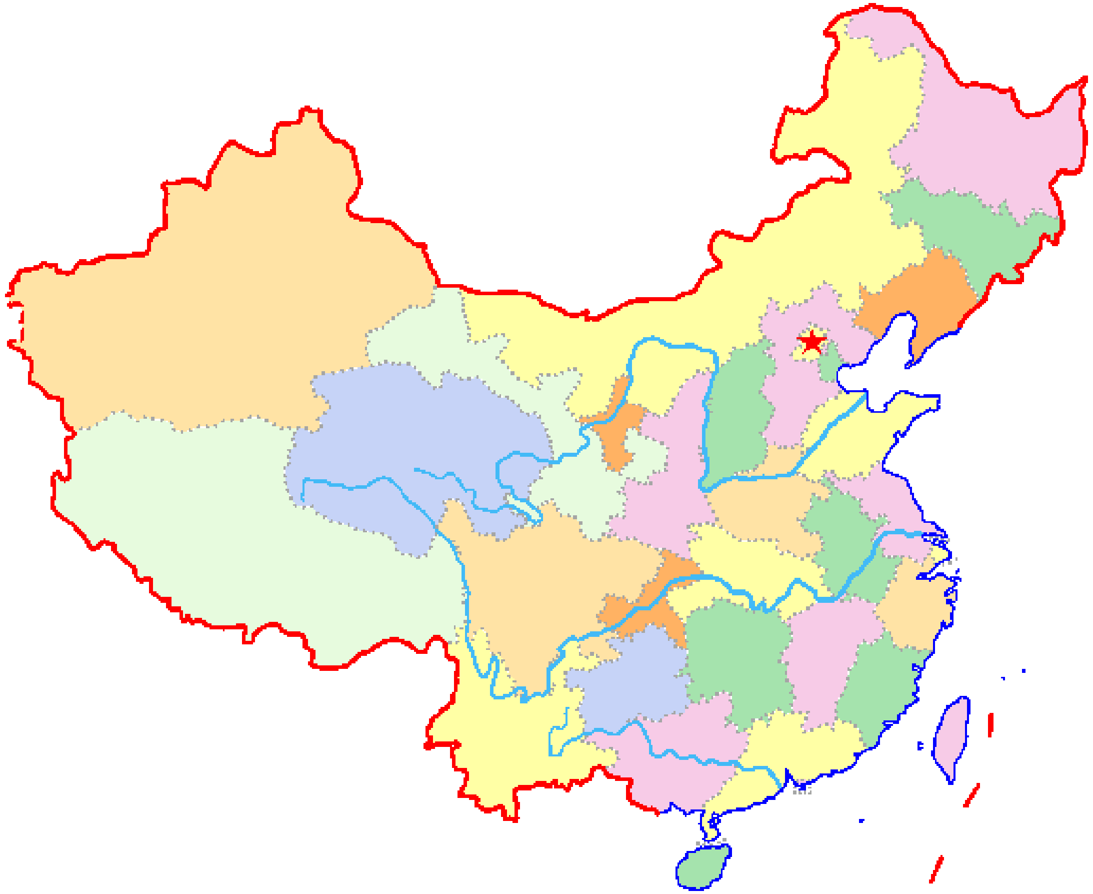
- 评价指标，（误差，剩余向量）
- 范数（向量范数、矩阵范数）、条件数（条件数如何计算？大小和线性方程组求解稳定性的关系？）

2.迭代法解线性方程组

- 雅各比迭代法（如何实现？）
- 高斯-赛德尔迭代法（如何改进？）
- 矩阵分裂法构建雅各比迭代法和高斯-赛德尔迭代法（理解对应的Matlab代码）
- 超松弛迭代法
- 迭代法的收敛条件

插值的应用

对某一地区或国家，如何根据测绘部门测量的数据绘制一张该地区的地图？（无限次的测量？）



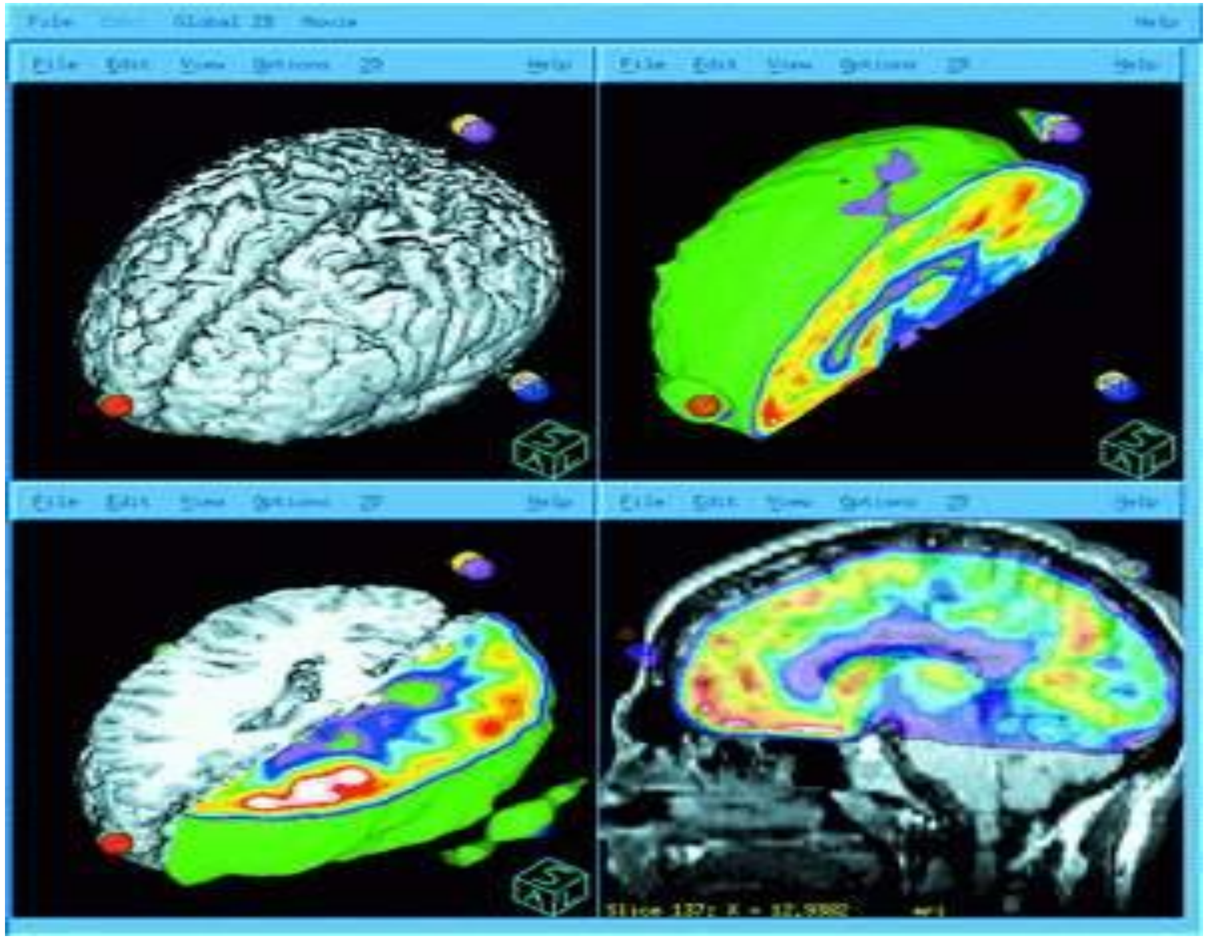
插值的应用

将一张低像素的图像放大成为一副高像素的图像？如何对增加的像素点添加数值？

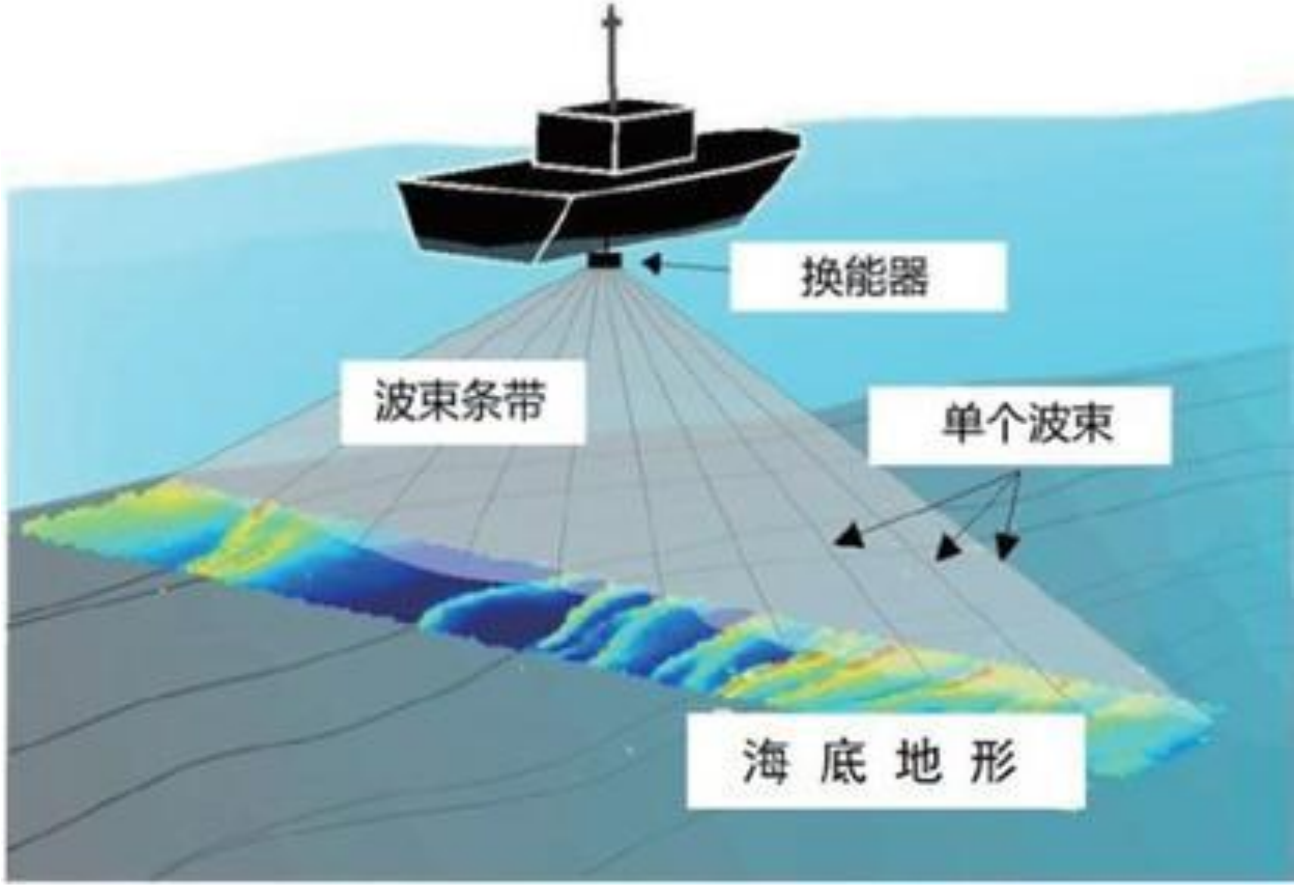
(a) Nearest-neighbor. (b) Bilinear. (c) Bicubic.

插值的应用

信息技术中的图像重建



大脑成像

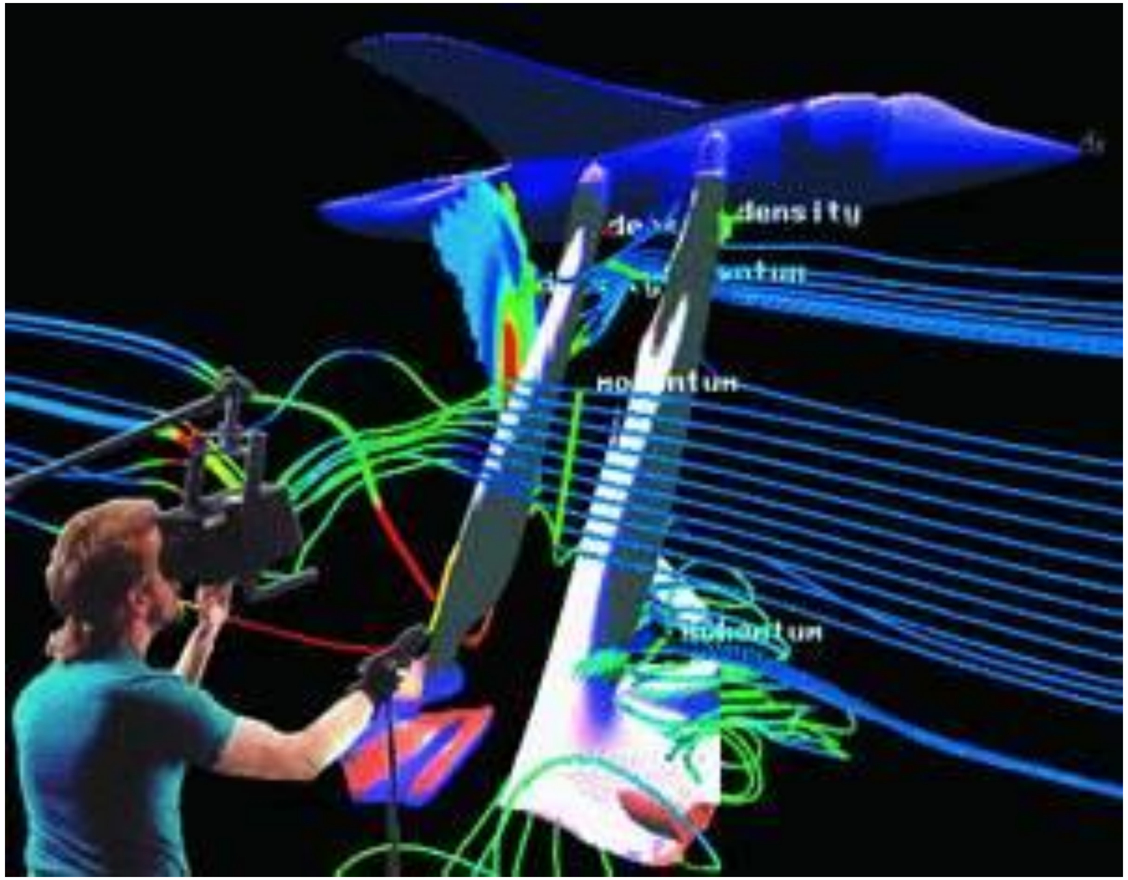


海底侧扫声呐成像

插值的应用

机械零件的外观设计

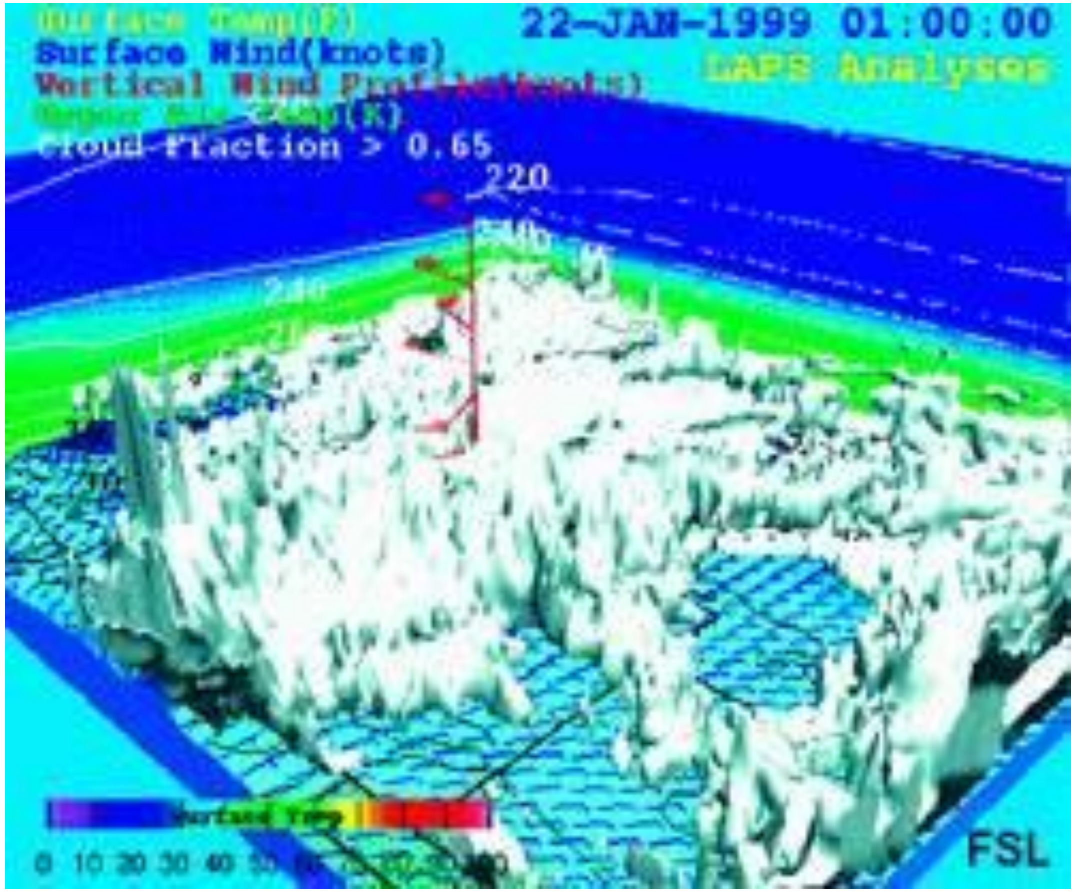
汽车车轮造型



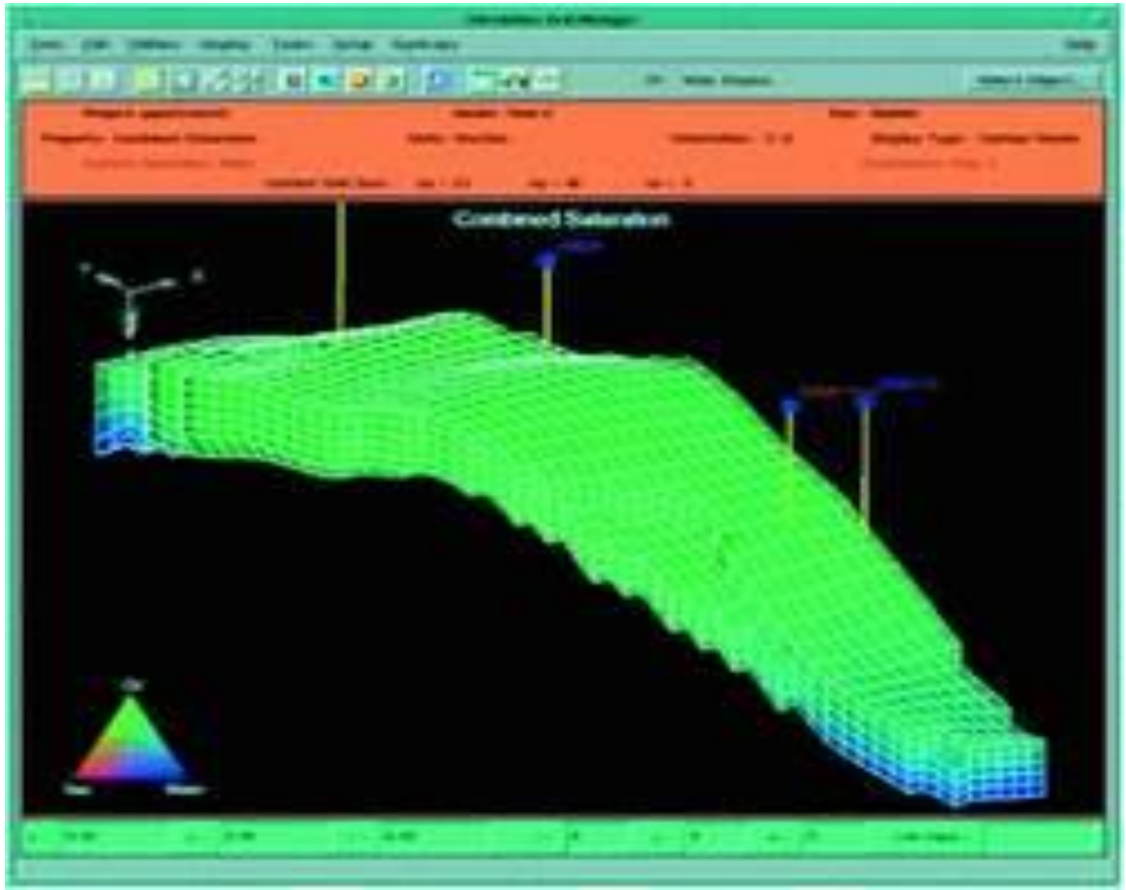
虚拟风洞

插值的应用

天文观测与地理信息数据的处理



气象三维数据模型



油藏模型

插值的定义与基础理论

在工程实践和科学实验中，常常需要从一组实验观测数据揭示自变量**x**与因变量**y**之间的关系，一般可以用一个**近似**的函数关系式**y = f(x)**来表示.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

插值的定义与基础理论

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

(其中 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,x_0、x_1、$\cdots$、x_n 是$[a,b]$上 $n+1$ 个互异的点),要求在某函数类$\{\psi(x)\}$中求一个函数 $\psi(x)$,使

$$\psi(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,n) \tag{4.2}$$

并用 $\psi(x)$作为函数 $f(x)$的近似函数,即

$$f(x)\approx\psi(x) \qquad (x\in[a,b])$$

通常,称区间$[a,b]$为**插值区间**,称点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$为**插值节点**,称(4.2)为**插值条件**.插值条件是选择近似函数 $\psi(x)$的标准,满足此标准的近似函数 $\psi(x)$称为函数 $f(x)$在节点 x_i $(i=0,1,\cdots,n)$上的**插值函数**.称函数 $f(x)$为**被插值函数**.

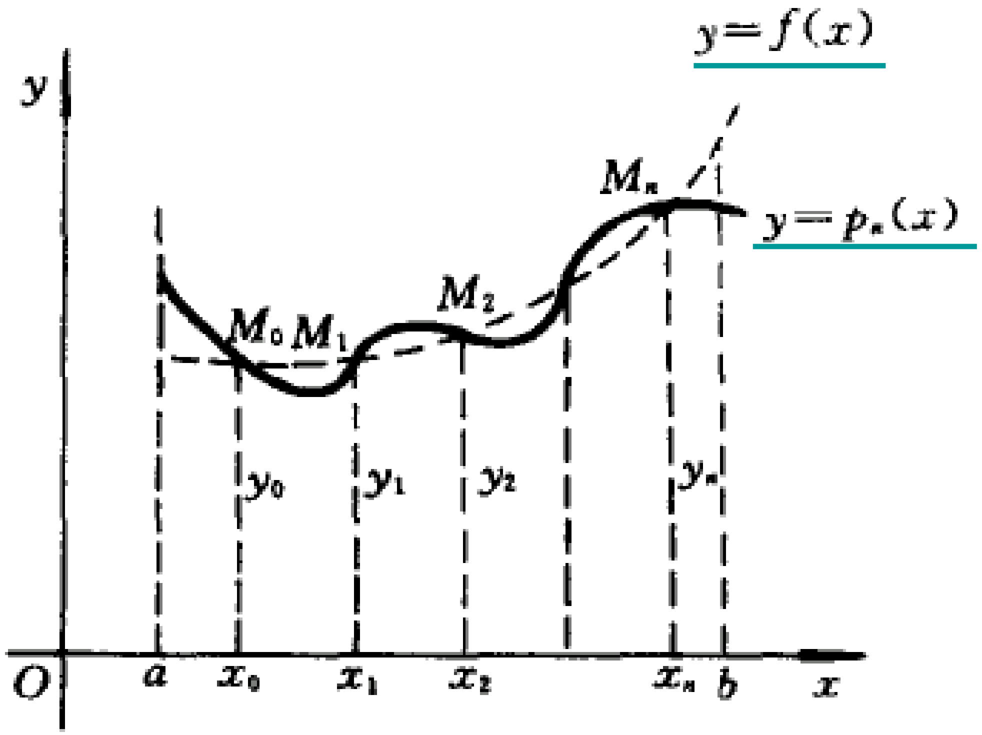
函数类$\{\psi(x)\}$有多种取法,常用的有代数多项式、三角函数和有理函数.本章只讨论代数多项式情况,相应的插值问题称为**多项式插值**.

插值的定义与基础理论

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$$

$$p_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$



插值的定义与基础理论

插值余项

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

插值的定义与基础理论

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ \zeta\in(a,b)\text{且依赖于 }x.$$

$f^{(n+1)}$ 为 $f(x)$ $n+1$ 阶导数

如何计算插值余项?

插值的定义与基础理论

定理 2 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有直到 $n+1$ 阶导数，$p_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_i \in [a,b](i=0,1,\cdots,n)$ 上的 n 次插值多项式，则对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{4.6}$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$\zeta\in(a,b)$ 且依赖于 x.

证明* 由插值条件(4.4)知，所有插值节点 $x_i(i=0,1;\cdots,n)$ 都是余项 $R_n(x)$ 的零点，故可设

$$R_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x) \tag{4.7}$$

其中 $k(x)$ 为待定函数. 对于 $[a,b]$ 上异于 x_i 的任意一点 x，为求相应的 $k(x)$，作辅助函数

$$F(t)=f(t)-p_n(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)$$

对t求导，k(x)看成常数

由 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数

$$\boxed{\omega^{n+1}{}_{n+1}(x)=\left[(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)\right]^{n+1}}$$

$$F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-k(x)\cdot(n+1)! \tag{4.8}$$

且

$$F(x)=F(x_0)=F(x_1)=\cdots=F(x_n)=0$$

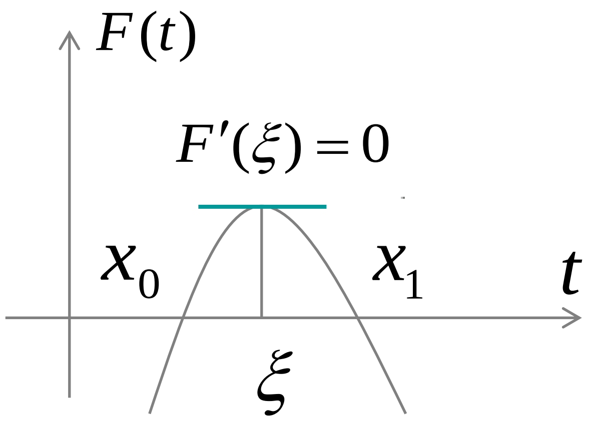
插值的定义与基础理论

即 $F(t)$在$[a,b]$上至少有 $n+2$ 个互异的零点 x、x_0、x_1、…、x_n. 由罗尔(Rolle)定理,$F(t)$的两个零点之间 $F'(t)$至少有一个零点,故 $F'(t)$在(a,b)内至少有 $n+1$ 个互异零点. 对 $F'(t)$再应用罗尔定理,推得 $F''(t)$在(a,b)内至少有 n 个互异零点. 以此类推,可知 $F^{(n+1)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点 ζ,即

$$F^{(n+1)}(\zeta)=0$$

于是由(4.8)式得

$$f^{(n+1)}(\zeta)-k(x)\cdot(n+1)!\ \ =0$$



故

$$k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

代入(4.7)即得(4.6).

对于 $x=x_i\quad(i=0,1,\cdots,n)$,(4.6)式显然成立. ▌

全阶多项式插值

$$P(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

拉格朗日（Lagrange）插值多项式

```
x = 0:3;
y = [-5  -6  -1  16]
```

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-6)}(-5) + \frac{x(x-2)(x-3)}{(2)}(-6) + \frac{x(x-1)(x-3)}{(-2)}(-1) + \frac{x(x-1)(x-2)}{(6)}(16).$$

$$x^3 - 2x - 5$$

常见的多项式形式

全阶多项式插值

```
%lagrange insert
function y=lagrange(x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
    z=x(i)
    s=0.0
    for k=1:n
        p=1.0;
        for j=1:n
            if j~=k
                p=p*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
            end
        end
        s=p*y0(k)+s;
    end
    y(i)=s;
end
```

```
x=[0.4:0.1:0.8];
y=[-0.916291 -0.693147 -
0.510826
     -0.356675 -0.223144];
lagrange(x,y,0.54)

 ans =

       -0.6161
```

$$P(x)=\sum_k\left(\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)y_k$$

全阶多项式插值

```
x =[0, 1, 2, 3];
y = [-5, -6, -1, 16];
u=-.25:.01:3.25
v=polyinterp(x,y,u)
plot(x,y,'o',u,v,'-')
symx=sym('x')
P=polyinterp(x,y,symx)
P=simplify(P)
```

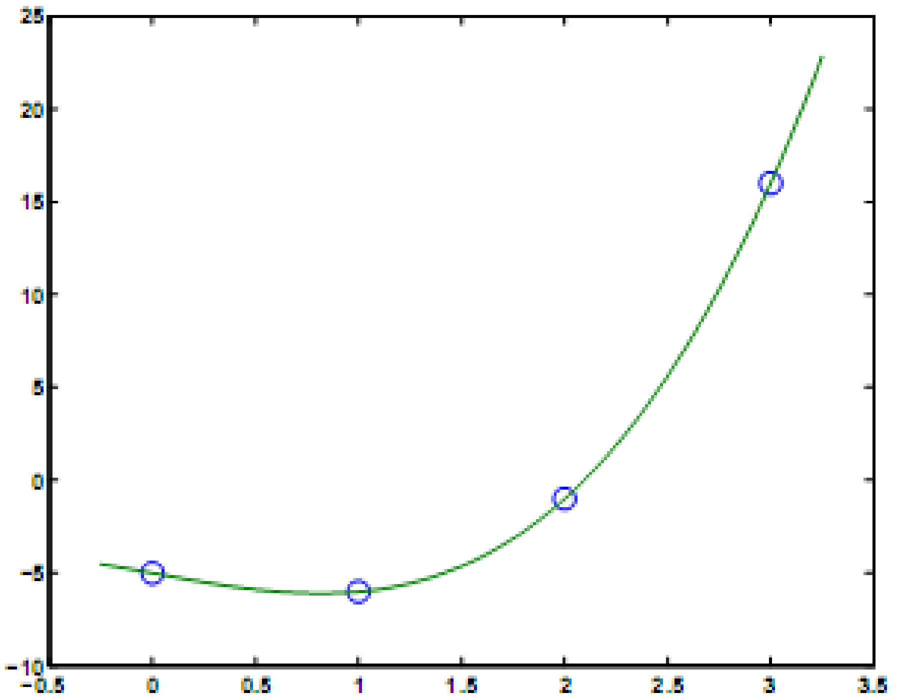


Figure 3.1. polyinterp.

分析polyinterp function的编程细节，并与之前的lagrange function比较。

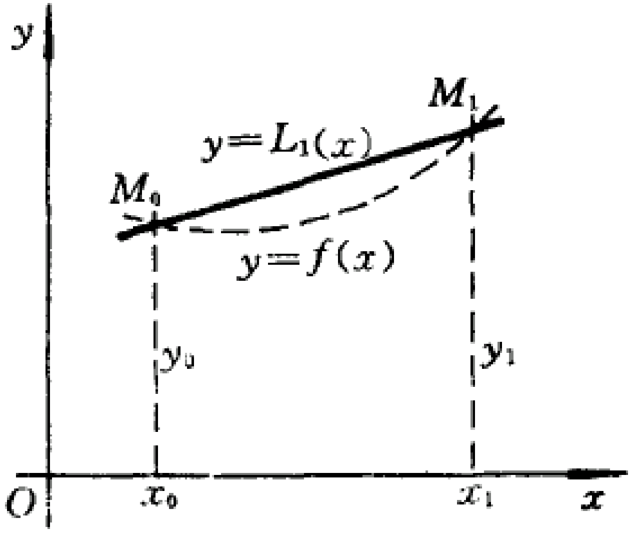
全阶多项式插值

当 n=1 时

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

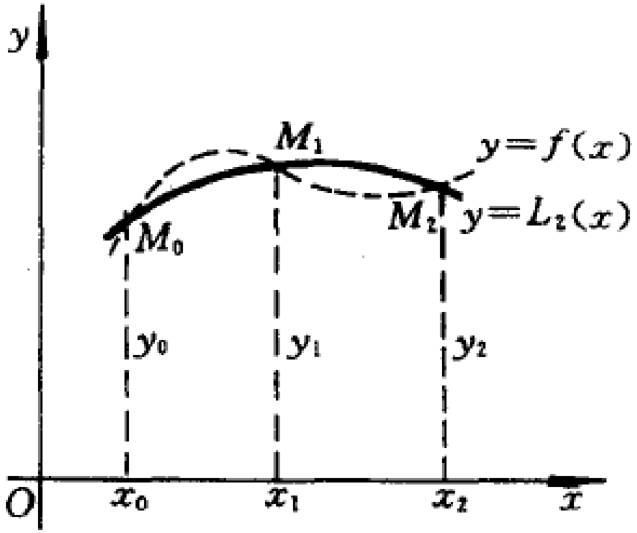
线性插值



当 n=2 时

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

抛物线插值



全阶多项式插值

例 1 给定函数表如下： * 重要题型！

x	…	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	…
e^x	…	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	…

试用线性插值与抛物插值求 $e^{0.285}$ 的近似值，并估计截断误差.

全阶多项式插值

$$L_1(x)=1.2214\times\frac{x-0.3}{0.2-0.3}+1.3499\times\frac{x-0.2}{0.3-0.2}$$

$$e^{0.285}\approx L_1(0.285)$$

$$=1.2214\times\frac{0.285-0.3}{0.2-0.3}+1.3499\times\frac{0.285-0.2}{0.3-0.2}$$

$$\approx 1.3306$$

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

$$R_1(x)=\frac{f''(\zeta)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_1(x)=\frac{1}{2}e^{\zeta}(x-x_0)(x-x_1)\qquad(\zeta\in[x_0,x_1])$$

将 $x=0.285, x_0=0.2, x_1=0.3$ 等代入即得

$$|R_1(0.285)|\leqslant\frac{1}{2}e^{0.3}|(0.285-0.2)(0.285-0.3)|<0.0009$$

全阶多项式插值

类似地，在抛物插值时取节点 $x_0=0.2, x_1=0.3, x_2=0.4$，所得 $e^{0.285}$ 的近似值与截断误差为

$$e^{0.285}\approx L_2(0.285)$$

$$=1.2214\times\frac{(0.285-0.3)(0.285-0.4)}{(0.2-0.3)(0.2-0.4)}$$

$$+1.3499\times\frac{(0.285-0.2)(0.285-0.4)}{(0.3-0.2)(0.3-0.4)}$$

$$+1.4918\times\frac{(0.285-0.2)(0.285-0.3)}{(0.4-0.2)(0.4-0.3)}\approx 1.3298$$

$$|R_2(0.285)|\leqslant\frac{1}{6}e^{0.4}|(0.285-0.2)(0.285-0.3)(0.285-0.4)|$$

$$<0.00004$$

实际上，$e^{0.285}$ 的准确值为 $1.329762\cdots$.

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

全阶多项式插值

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$$

常见的多项式形式

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

全阶多项式插值

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

是 $n+1$ 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式. 由线性代数知

$$D=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 0}(x_i-x_j)$$

因节点互异, 故 $D\neq 0$, 方程组有唯一解. 于是有

定理 1 当插值节点互异时, 满足插值条件(4.4)的 n 次插值多项式 $p_n(x)$ 存在且唯一.

全阶多项式插值

```
x = 0:3;
y = [-5  -6  -1  16];

 V = vander(x)
```

generates

```
 V =
       0       0       0       1
       1       1       1       1
       8       4       2       1
      27       9       3       1
```

Then

```
 c = V\y'
```

computes the coefficients.

```
 c =
     1.0000
     0.0000
    -2.0000
    -5.0000
```

$$x^3 - 2x - 5.$$

全阶多项式插值

稳定性？？

```
x=1:6;
y=[16 18 21 17 15 12];
disp ( [x; y] )
u=.75:.05:6.25;
v=polyinterp(x,y,u)
plot(x,y,’o’,u,v,’-’);
```

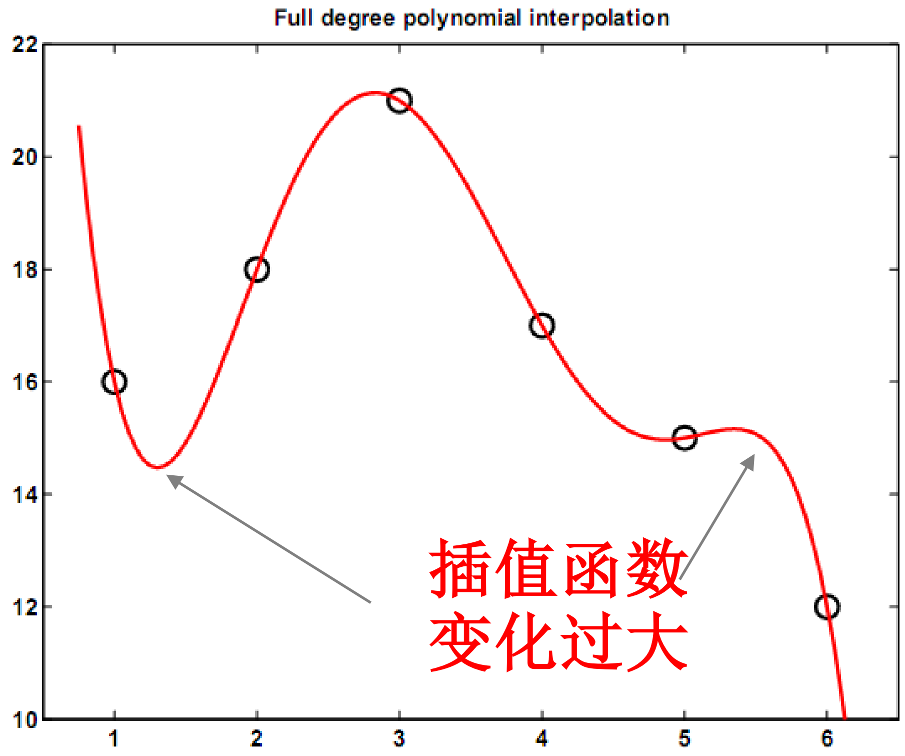


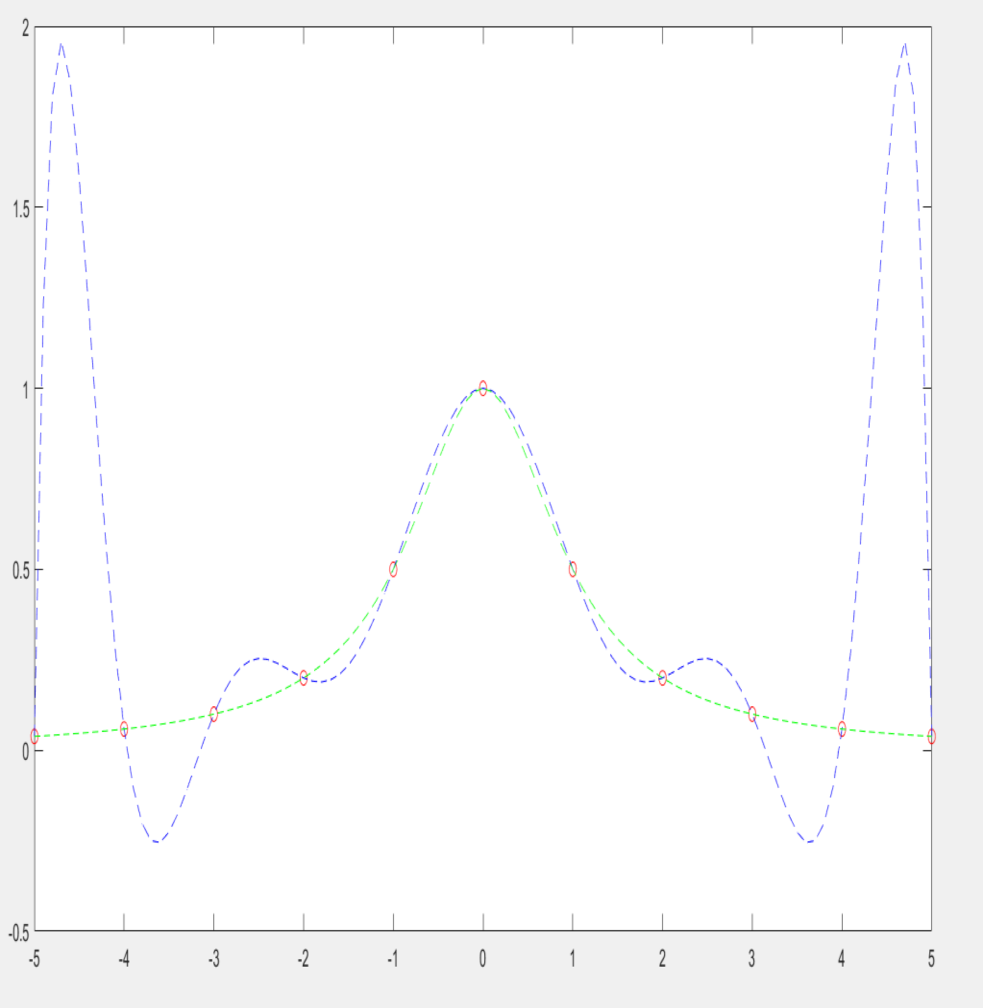
Figure 3.2. *Full-degree polynomial interpolation.*

全阶多项式插值

Runge现象产生

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

```
x=[-5:1:5];
y=1./(1+x.^2);
x0=[-5:0.1:5];
y0=lagrange(x,y,x0);
y1=1./(1+x0.^2);
plot(x,y),hold on
plot(x0,y0,'--r')
hold off
```



插值函数变化过大，超出给定数据值的变化。

全阶多项式插值

数值计算方法实现的基本途径

◆ Dispersing （离散化）

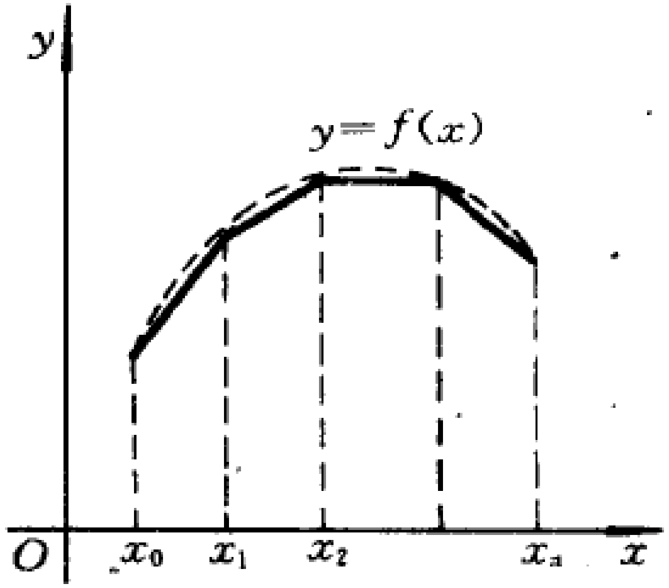
只计算定义域上有限个变量的值，而不是所有函数变量的值

◆ Approach （逼近）

用简单函数y(x)近似替代函数f(x),但误差E(x)=f(x)-y(x)要满足精 度要求。

◆ Deduce by degrees （递推）

递推是将一个复杂的计算过程转化为简单过程的多次重复的数学方法。



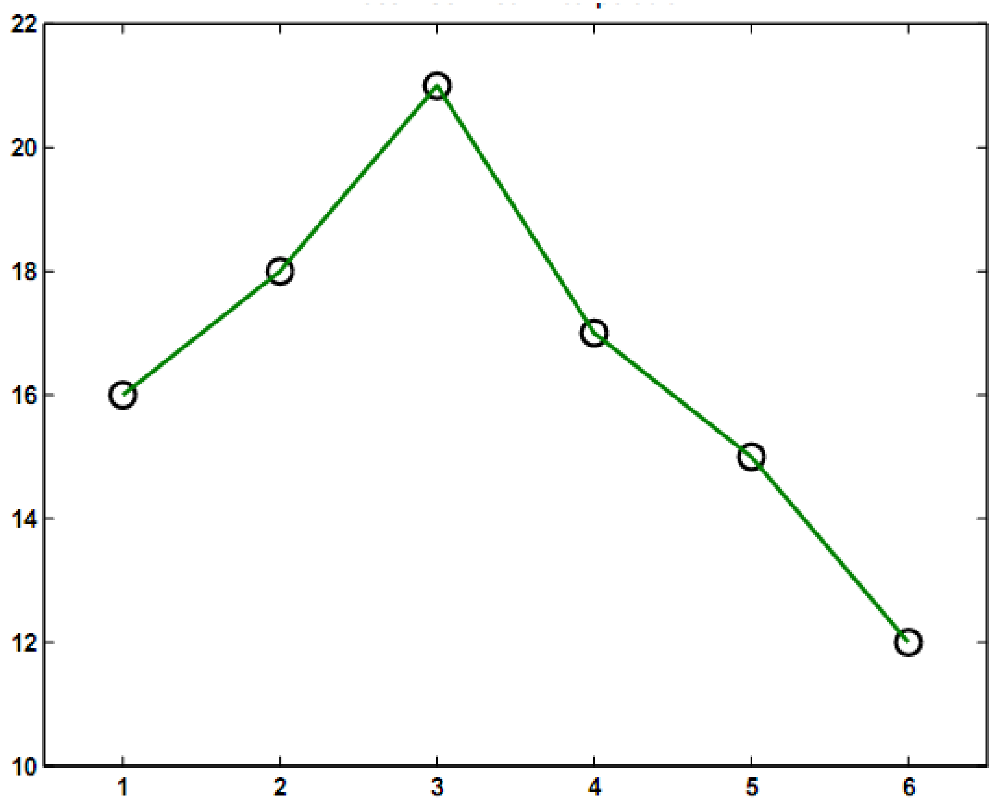
分段线性插值 $f(x)\approx L_1(x)=y_{i-1}\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+y_i\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$

分段抛物插值 $f(x)\approx L_2(x)=\sum\limits_{k=i-1}^{i+1}\left[y_k\prod\limits_{\substack{j=i-1\\ j\neq k}}^{i+1}\left(\dfrac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)\right]$

更好的插值方案 - 分段线性插值与分段抛物插值?

分段线性插值

```
x=1:6;
y=[16 18 21 17 15 12];
plot(x,y,'o',x,y,'-')
```



三个变量

$$x_k \le x < x_{k+1}.$$

$$s = x - x_k.$$

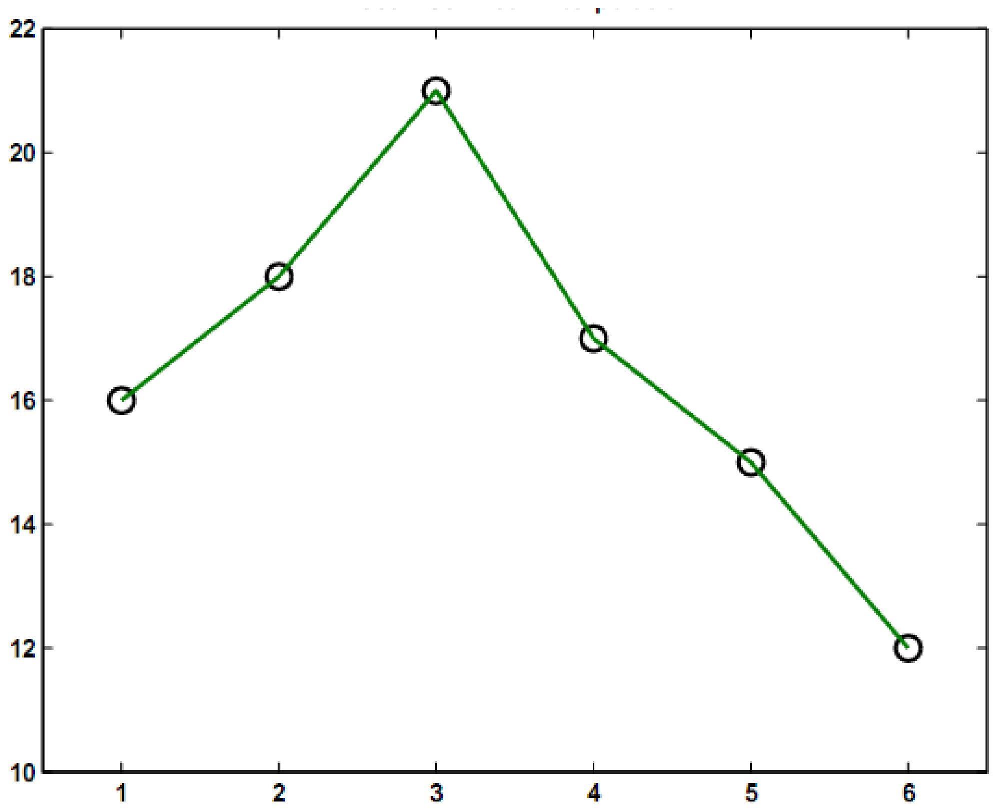
$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

$$\begin{aligned} L(x) &= y_k + (x - x_k)\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &= y_k + s\delta_k. \end{aligned}$$

分段线性插值

```
function v = piecelin(x,y,u)
%PIECELIN  Piecewise linear interpolation.
%   v = piecelin(x,y,u) finds the piecewise linear L(x)
%   with L(x(j)) = y(j) and returns v(k) = L(u(k)).

%   First divided difference

    delta = diff(y)./diff(x);

%   Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)

       k(x(j) <= u) = j;


%   Evaluate interpolant

    s = u - x(k);
    v = y(k) + s.*delta(k);
```

分段线性插值



每个子区间上，导数值恒定，但在不同子区间的交汇点上发生跳变，连续性不好。

如何定义更好连贯性的插值函数？？

分段三次埃米特插值

满足以下四个插值条件的函数成为埃米特插值基函数

$$P(x_k)=y_k,\ P(x_{k+1})=y_{k+1},$$
$$P'(x_k)=d_k,\ P'(x_{k+1})=d_{k+1}.$$

函数 $y=f(g(x))$，其中 $y=f(u),u=g(x)$ 都可导，则

$y'=f'(u)u'(x)=f'(g(x))g'(x)$。

对s求导

$$P(x)=\frac{3hs^2-2s^3}{h^3}y_{k+1}+\frac{h^3-3hs^2+2s^3}{h^3}y_k+\frac{s^2(s-h)}{h^2}d_{k+1}+\frac{s(s-h)^2}{h^2}d_k.$$

$\delta_k=\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$ 差商

$s=x-x_k$ 局部变量

$h=h_k$ 步长

分段三次埃米特插值

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} y_k + \frac{s^2(s-h)}{h^2} d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2} d_k.$$

$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

$$s = x - x_k$$

$$h = h_k$$

该插值函数中的已知变量?

该插值函数中的未知变量?

如果节点的一阶导数*d_k*给定，就可以计算*P(x)* –
如何计算*d_k*?

保形插值

基本思路：计算分段均差 $\delta_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$ **，限制斜率d_k，约束函数值变化**

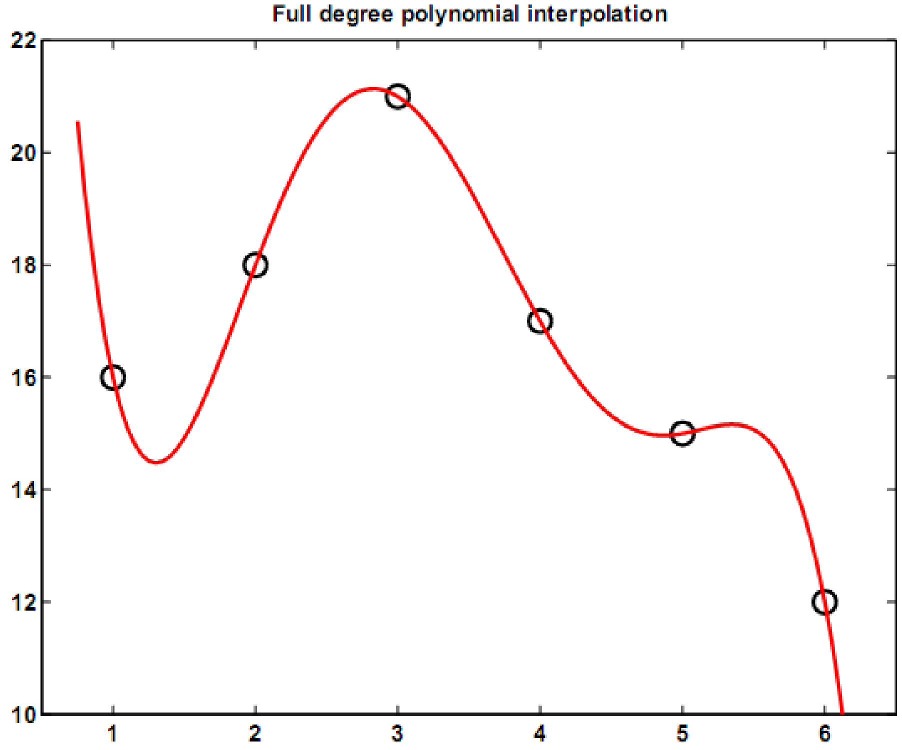
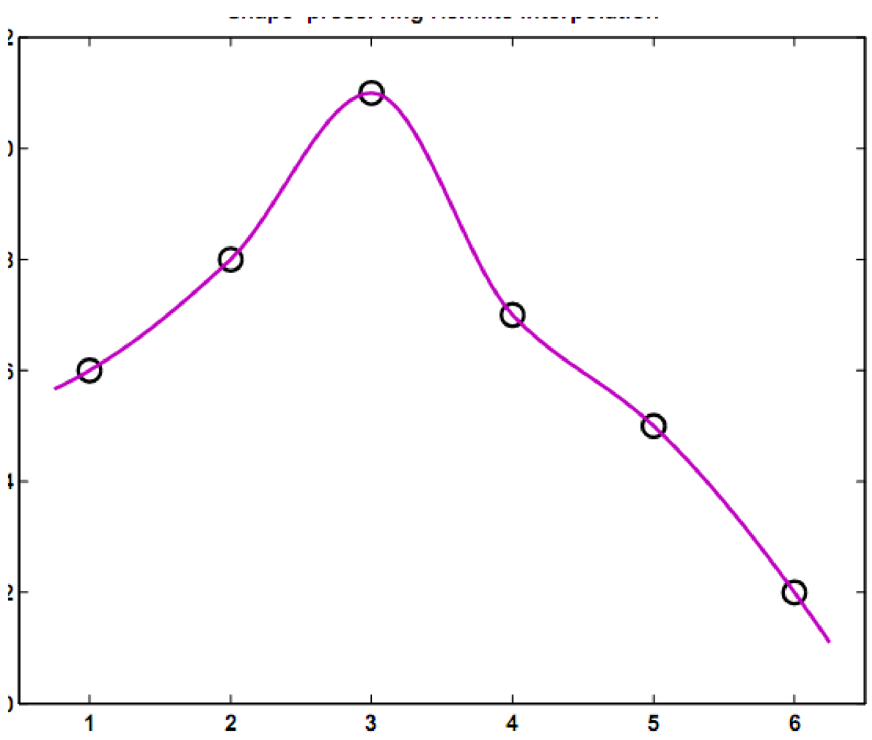


Figure 3.2. *Full-degree polynomial interpolation.*



保形插值

左右均差正负相反

$$d_k = 0.$$

两个子区间长度相等

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_{k-1}} + \frac{1}{\delta_k}\right)$$

两个子区间长度不等

$$\frac{w_1 + w_2}{d_k} = \frac{w_1}{\delta_{k-1}} + \frac{w_2}{\delta_k},$$

$$w_1 = 2h_k + h_{k-1},\quad w_2 = h_k + 2h_{k-1}.$$

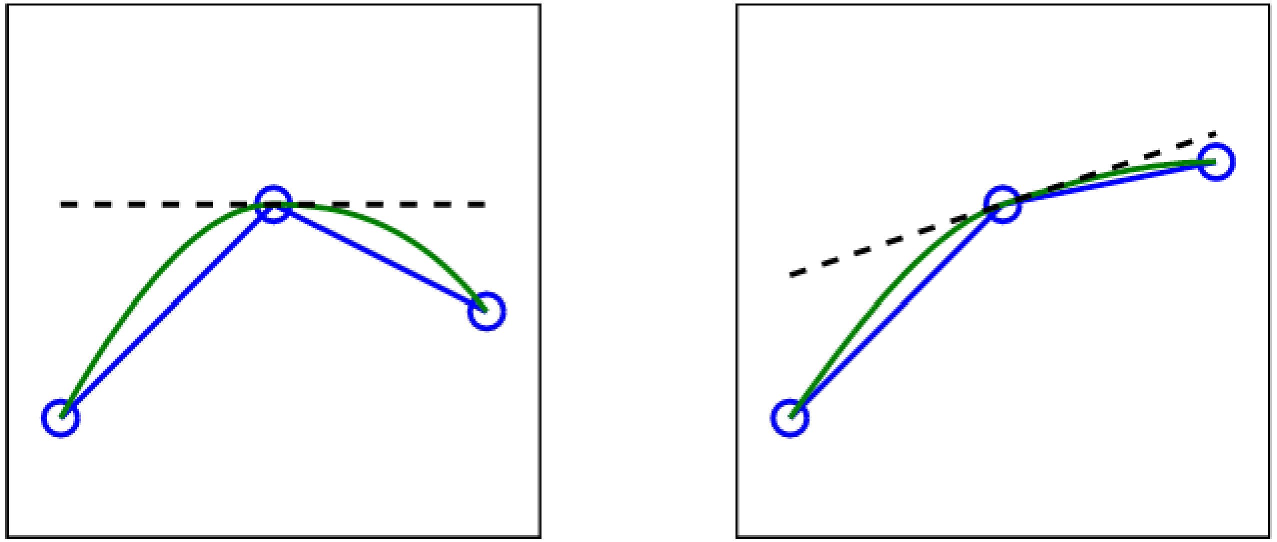


Figure 3.5. *Slopes for* pchip.

保形插值

```
function d = pchipslopes(h,delta)
%  PCHIPSLOPES  Slopes for shape-preserving Hermite cubic
%  pchipslopes(h,delta) computes d(k) = P'(x(k)).

%  Slopes at interior points
%  delta = diff(y)./diff(x).
%  d(k) = 0 if delta(k-1) and delta(k) have opposites
%         signs or either is zero.
%  d(k) = weighted harmonic mean of delta(k-1) and
%         delta(k) if they have the same sign.

   n = length(h)+1;
   d = zeros(size(h));
   k = find(sign(delta(1:n-2)).*sign(delta(2:n-1))>0)+1;
   w1 = 2*h(k)+h(k-1);
   w2 = h(k)+2*h(k-1);
   d(k) = (w1+w2)./(w1./delta(k-1) + w2./delta(k));

%  Slopes at endpoints

   d(1) = pchipend(h(1),h(2),delta(1),delta(2));
   d(n) = pchipend(h(n-1),h(n-2),delta(n-1),delta(n-2));
```

$$\frac{w_1+w_2}{d_k} = \frac{w_1}{\delta_{k-1}} + \frac{w_2}{\delta_k},$$

$$w_1 = 2h_k + h_{k-1}, \quad w_2 = h_k + 2h_{k-1}.$$

插值计算

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} y_k$$
$$+ \frac{s^2(s-h)}{h^2} d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2} d_k,$$

求得斜率d_k后，可以根据局部变形s的幂形式多项式计算插值函数

$$P(x) = y_k + sd_k + s^2 c_k + s^3 b_k$$

$$c_k = \frac{3\delta_k - 2d_k - d_{k+1}}{h},$$

$$b_k = \frac{d_k - 2\delta_k + d_{k+1}}{h^2}.$$

```
% Piecewise polynomial coefficients

  n = length(x);
  c = (3*delta - 2*d(1:n-1) - d(2:n))./h;
  b = (d(1:n-1) - 2*delta + d(2:n))./h.^2;

% Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)

  k = ones(size(u));
  for j = 2:n-1
     k(x(j) <= u) = j;
  end

% Evaluate interpolant

  s = u - x(k);
  v = y(k) + s.*(d(k) + s.*(c(k) + s.*b(k)));
```

样条插值

定义 4 对于给定函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

(其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$),若函数 $S(x)$ 满足条件

(1) $S(x)$ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上都是不高于三次的多项式;

(2) $S(x)$、$S'(x)$、$S''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上都连续;

(3) $S(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

则称 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 关于节点 x_0、x_1、$\cdots$、x_n **的三次样条插值函数**.

样条插值

$$S_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\begin{cases} S(x_i - 0) = S(x_i + 0) & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0) & (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ S(x_i) = y_i & (i = 0, 1, 2 \cdots, n) \end{cases}$$

样条插值

边界条件：

(1)给出端点处的一阶导数值

$$S'(x_0)=y'_0,\qquad S'(x_n)=y'_n \tag{4.36}$$

(2)给出端点处的二阶导数值

$$S''(x_0)=y''_0,\qquad S''(x_n)=y''_n \tag{4.37}$$

(3)若 $y=f(x)$是以 $b-a$ 为周期的函数时，则可要求 $S(x)$、$S'(x)$、$S''(x)$都是以 $b-a$ 为周期的函数，即

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0),\qquad S''(x_0+0)=S''(x_n-0) \tag{4.38}$$

样条插值

$$P(x)=\frac{3hs^2-2s^3}{h^3}y_{k+1}+\frac{h^3-3hs^2+2s^3}{h^3}y_k$$
$$+\frac{s^2(s-h)}{h^2}d_{k+1}+\frac{s(s-h)^2}{h^2}d_k.$$

三次埃米特插值基函数

$$\boxed{P''(x)=\frac{(6h-12s)\delta_k+(6s-2h)d_{k+1}+(6s-4h)d_k}{h^2}}$$

$$P''(x_k+)=\frac{6\delta_k-2d_{k+1}-4d_k}{h_k}.$$

$$P''(x_k-)=\frac{-6\delta_{k-1}+4d_k+2d_{k-1}}{h_{k-1}}.$$

$$P''(x_{k+1}-)=\frac{-6\delta_k+4d_{k+1}+2d_k}{h_k}.$$

$$\boxed{P''(x_k+)=P''(x_k-).}$$

$$\boxed{h_kd_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)d_k+h_{k-1}d_{k+1}=3(h_k\delta_{k-1}+h_{k-1}\delta_k).}$$

样条插值

$$h_k d_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) d_k + h_{k-1} d_{k+1} = 3(h_k \delta_{k-1} + h_{k-1} \delta_k).$$

$$Ad = r$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} h_2 & h_2 + h_1 & & & & \\ h_2 & 2(h_1 + h_2) & h_1 & & & \\ & h_3 & 2(h_2 + h_3) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-1} + h_{n-2} & h_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$r = 3 \begin{pmatrix} r_1 \\ h_2\delta_1 + h_1\delta_2 \\ h_3\delta_2 + h_2\delta_3 \\ \vdots \\ h_{n-1}\delta_{n-2} + h_{n-2}\delta_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}$$

```
d = A\r
```

r_1 and r_n 与端点条件有关

样条插值

建立和求解三对角线性方程

```
function d = splineslopes(h,delta);
%  SPLINESLOPES  Slopes for cubic spline interpolation.
%  splineslopes(h,delta) computes d(k) = S'(x(k)).
%  Uses not-a-knot end conditions.

%  Diagonals of tridiagonal system

   n = length(h)+1;
   a = zeros(size(h)); b = a; c = a; r = a;
   a(1:n-2) = h(2:n-1);
   a(n-1) = h(n-2)+h(n-1);
   b(1) = h(2);
   b(2:n-1) = 2*(h(2:n-1)+h(1:n-2));
   b(n) = h(n-2);
   c(1) = h(1)+h(2);
   c(2:n-1) = h(1:n-2);

%  Right-hand side

   r(1) = ((h(1)+2*c(1))*h(2)*delta(1)+ ...
          h(1)^2*delta(2))/c(1);
   r(2:n-1) = 3*(h(2:n-1).*delta(1:n-2)+ ...
             h(1:n-2).*delta(2:n-1));
   r(n) = (h(n-1)^2*delta(n-2)+ ...
          (2*a(n-1)+h(n-1))*h(n-2)*delta(n-1))/a(n-1);

%  Solve tridiagonal linear system

   d = tridisolve(a,b,c,r);
```

$$\boxed{h_k d_{k-1} + 2(h_{k-1}+h_k)d_k + h_{k-1}d_{k+1} = 3(h_k\delta_{k-1} + h_{k-1}\delta_k).}$$

$$A = \begin{pmatrix} h_2 & h_2+h_1 & & & & \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\ & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-1}+h_{n-2} & h_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$r = 3\begin{pmatrix} r_1 \\ h_2\delta_1 + h_1\delta_2 \\ h_3\delta_2 + h_2\delta_3 \\ \vdots \\ h_{n-1}\delta_{n-2} + h_{n-2}\delta_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}$$

样条插值

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} y_k + \frac{s^2(s-h)}{h^2} d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2} d_k,$$

求得斜率d_k后，可以根据局部变形s的幂形式多项式计算插值函数

$$P(x) = y_k + s d_k + s^2 c_k + s^3 b_k$$

$$c_k = \frac{3\delta_k - 2d_k - d_{k+1}}{h},$$

$$b_k = \frac{d_k - 2\delta_k + d_{k+1}}{h^2}.$$

```
% Piecewise polynomial coefficients

  n = length(x);
  c = (3*delta - 2*d(1:n-1) - d(2:n))./h;
  b = (d(1:n-1) - 2*delta + d(2:n))./h.^2;

% Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)

  k = ones(size(u));
  for j = 2:n-1
     k(x(j) <= u) = j;
  end

% Evaluate interpolant

  s = u - x(k);
  v = y(k) + s.*(d(k) + s.*(c(k) + s.*b(k)));
```

不同插值方法比较

有何
本质不同?

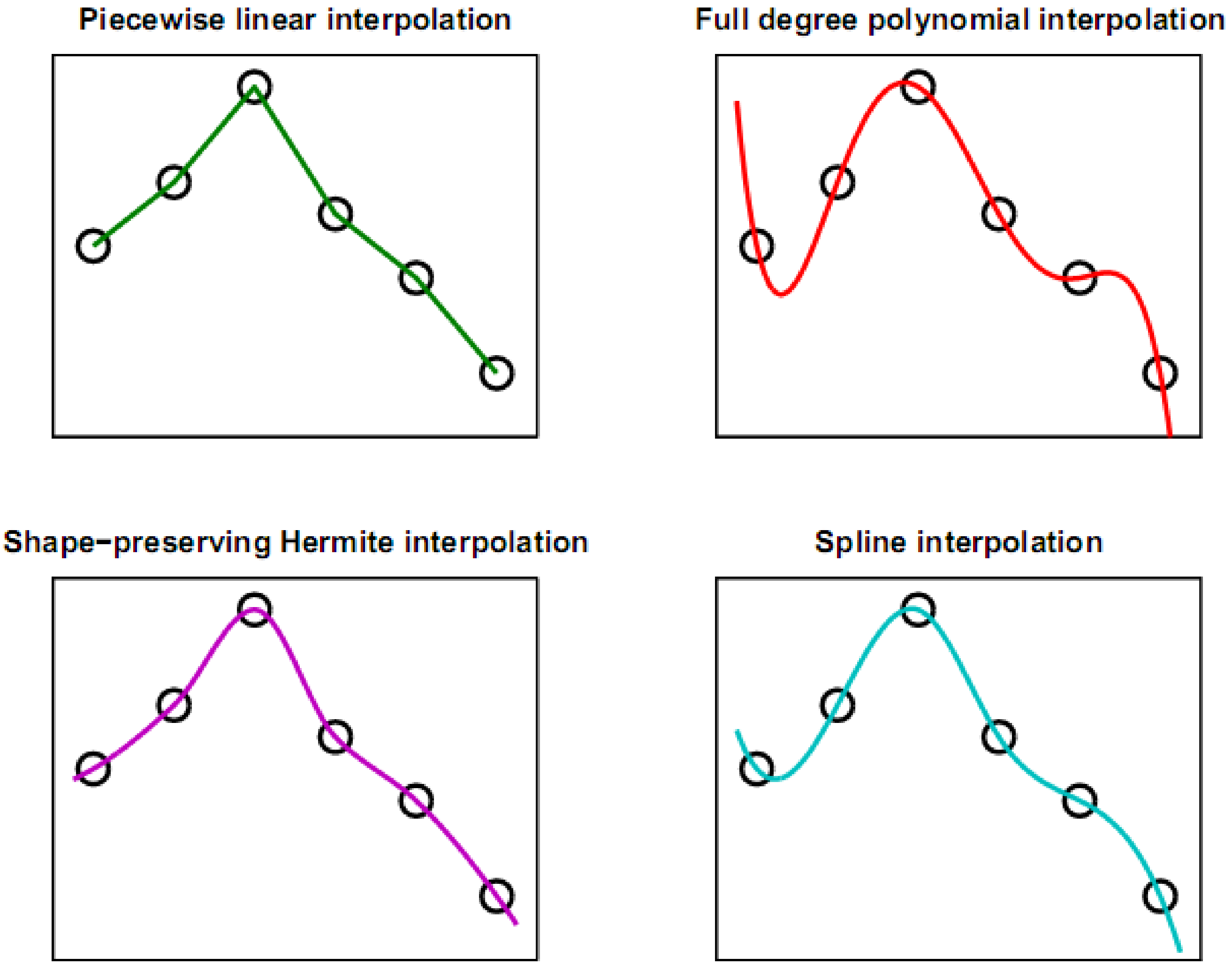


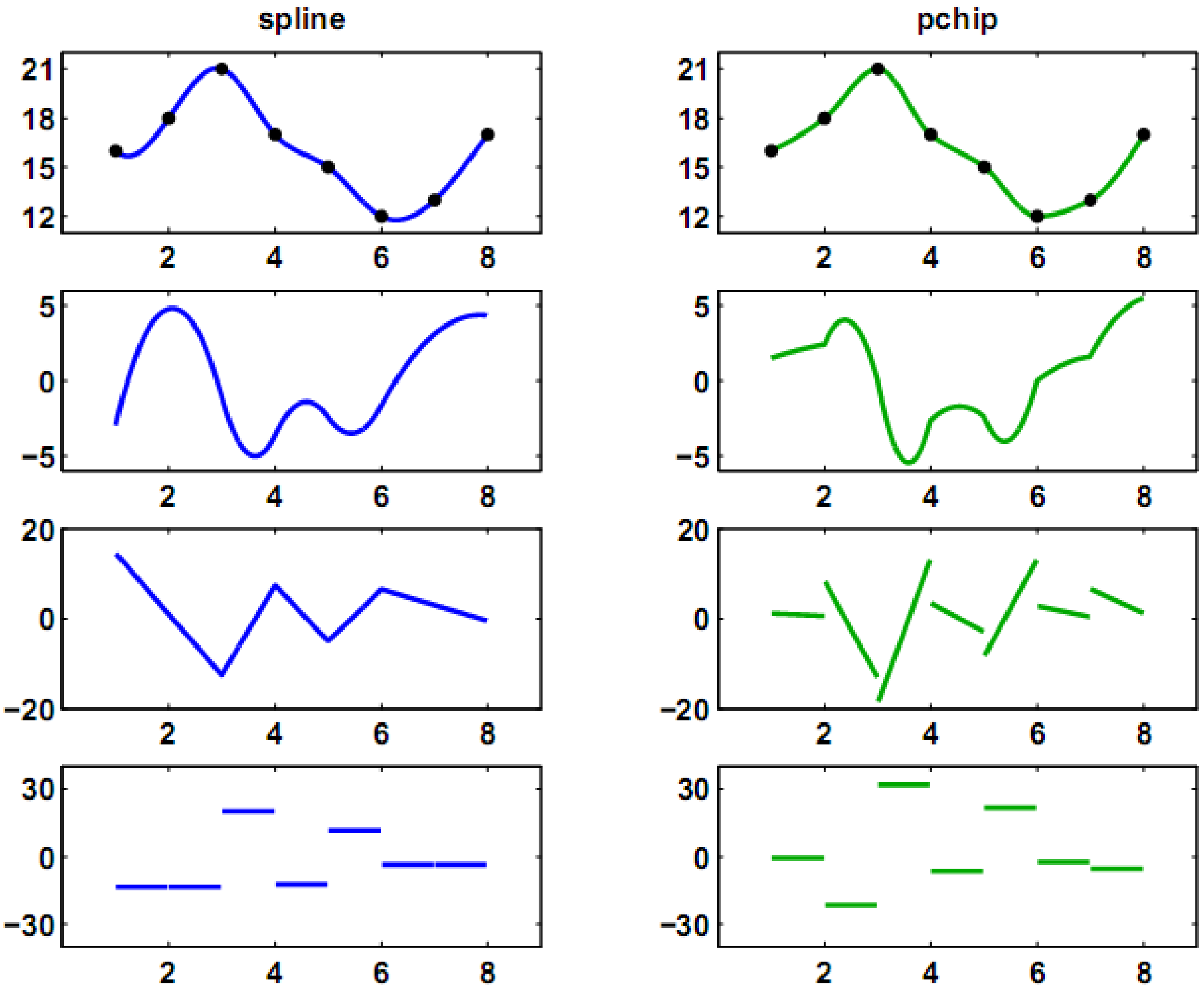
Figure 3.8. *Four interpolants.*

不同插值方法比较

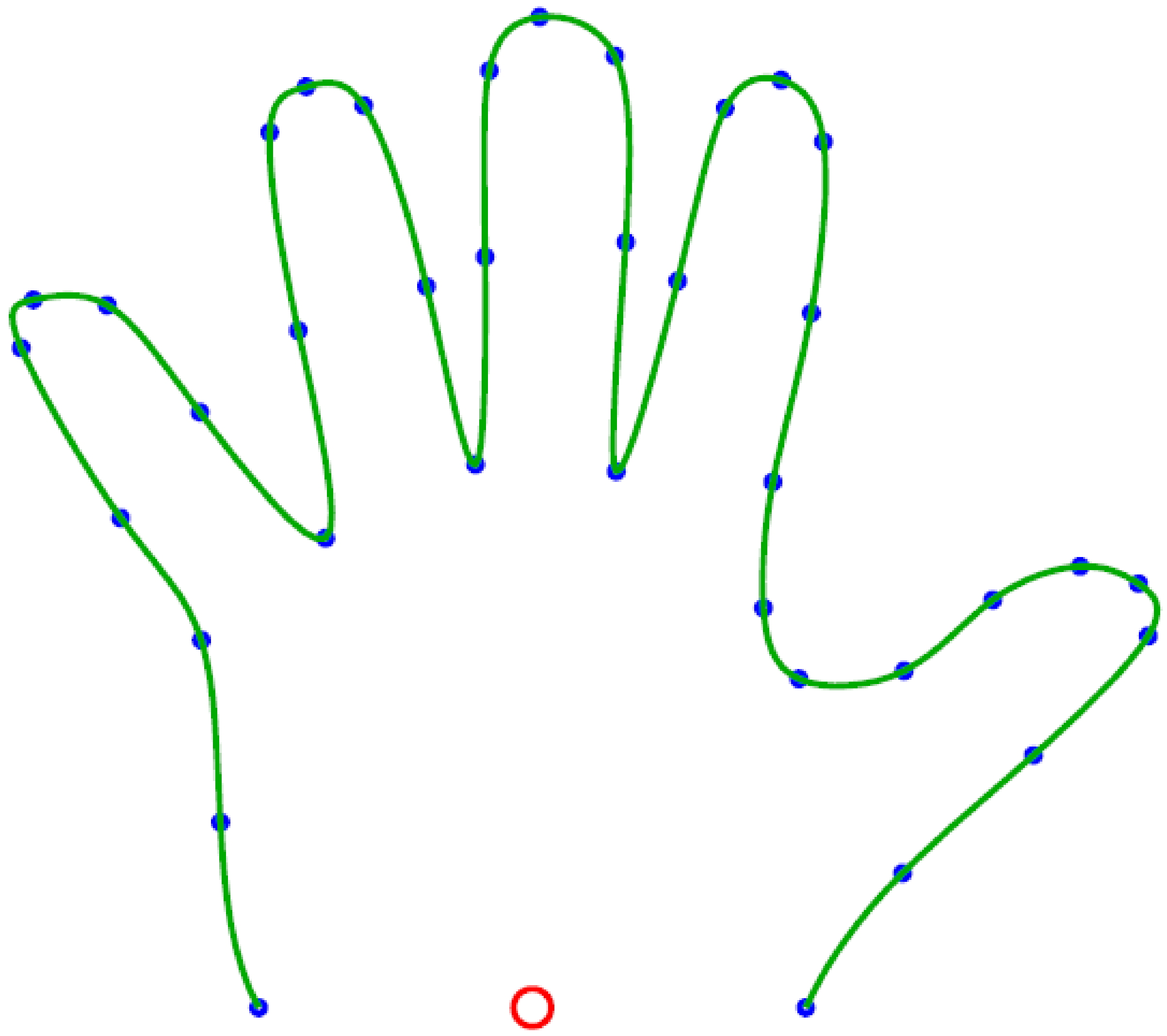
一阶导数

二阶导数

三阶导数



不同插值方法比较



牛顿插值法

$$P(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

拉格朗日（Lagrange）插值多项式

```
x = 0:3;
y = [-5  -6  -1  16]
```

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-6)}(-5) + \frac{x(x-2)(x-3)}{(2)}(-6) + \frac{x(x-1)(x-3)}{(-2)}(-1) + \frac{x(x-1)(x-2)}{(6)}(16).$$

前面构造的拉格朗日插值多项式，其形式具有对称性，既便于记忆，又便于应用与编制程序．但是，由于公式依赖于全部插值节点，在增加或减少节点时，必须全部重新计算．为克服这个缺点，插值多项式可以如何构造？

牛顿插值法

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)$$
$$+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

这种形式的插值多项式称为n次牛顿插值多项式

求解数据

其中系数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$可由插值条件

$$N_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

已知数据

确定.

牛顿插值法

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0、x_1、x_2、…上的值依次为 $f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(x_2)$、…. 称 $\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$ $(i\neq j)$ 为 $f(x)$ 在 x_i、x_j 处的**一阶差商**，记作 $f[x_i,x_j]$，即

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

称一阶差商的差商 $\dfrac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$ $(i,j,k$ 互异$)$ 为 $f(x)$ 在 x_i、x_j、x_k 处的**二阶差商**，记作 $f[x_i,x_j,x_k]$，即

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

一般地，称 $m-1$ 阶差商的差商

$$f[x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{i_m}]=\frac{f[x_{i1},\cdots,x_{i_m}]-f[x_{i0},\cdots,x_{i_{m-1}}]}{x_{i_m}-x_{i0}}$$

为 $f(x)$ 在点 x_{i0}、x_{i1}、…、x_{i_m} 处的 m **阶差商**.

特别地，规定零阶差商 $f[x_i]=f(x_i)$.

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)$$
$$+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

由插值条件 $N_n(x_0)=f(x_0)$立即可得

$$a_0=f(x_0)\quad(\text{即 } f[x_0])$$ **0阶差商**

再由插值条件 $N_n(x_1)=f(x_1)$可得

$$a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$ **1阶差商**

进一步由插值条件 $N_n(x_2)=f(x_2)$可得

$$a_2=\frac{f(x_2)-f(x_0)-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_0,x_1,x_2]$$ **2阶差商**

$$\boxed{\begin{aligned}N_n(x)=&f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}}$$

牛顿插值法

表 4-1

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

牛顿插值法

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

例 2　已知函数表如下：

x	$\cdots$	100	121	144	169	$\cdots$
$\sqrt{x}$	$\cdots$	10	11	12	13	$\cdots$

试用线性插值与抛物插值求$\sqrt{115}$的近似值，并估计它们的截断误差.

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

牛顿插值法

在实际计算中，特别是在函数 $f(x)$ 的高阶导数比较复杂或 $f(x)$ 的表达式没有给出时，常用差商表示的余项公式（证明从略）

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x) \tag{4.20}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

对区间 $[a, b]$ 上任一点都成立，从而有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

若视 x 为新节点 x_{n+1} 且记 $N = n+1$，则由此可得差商与导数间关系式

$$\boxed{f[x_0, x_1, \cdots, x_N] = \frac{f^{(N)}(\zeta)}{N!}}$$

其中 ζ 介于 $x_0, x_1, \cdots, x_N$ 之间.

牛顿插值法

程序 (牛顿插值多项式) 构造和计算经过点

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

```
n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';
```

```
%Use Tab to form the divided difference table

for j=2:n
    for k=j:n
        D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
    end
end
```

牛顿插值法

程序（牛顿插值多项式）构造和计算经过点

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

```
%Determine the coefficients of the Newton interpolatory

C=D(n,n);

for k=(n-1):-1:1
    C=conv(C,poly(X(k)));
    m=length(C);
    C(m)=C(m)+D(k,k);
end
```

牛顿插值法

2.3 差分与等距节点下的牛顿公式

在实际计算中，常常遇到等距节点的情况，即

$$x_k = x_0 + kh \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

其中 h 是常数，称为步长. 此时，利用差分概念，可将牛顿插值多项式(4.19)简化.

定义 2 设函数 $f(x)$在等距节点(4.22)处的函数值 $f(x_k) = y_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$. 我们称两个节点 x_k 和 x_{k+1}处函数值之差 $y_{k+1} - y_k$ 为函数 $f(x)$在 x_k 处以 h 为步长的**一阶向前差分**(简称**一阶差分**)，记作 Δy_k，即

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{4.23}$$

称节点 x_k 和 x_{k+1}处一阶差分之差 $\Delta y_{k+1} - \Delta y_k$ 为 $f(x)$在 x_k 处的**二阶差分**，记作 $\Delta^2 y_k$，即

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

一般地，称 $m-1$ 阶差分的差分

$$\Delta^m y_k = \Delta(\Delta^{m-1} y_k) = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k \tag{4.24}$$

为 $f(x)$在 x_k 处的 m **阶差分**.

牛顿插值法

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{\Delta^m y_0}{m!\,h^m}$$

因此，当节点等距时，只要在牛顿插值多项式(4.19)中令 $x=x_0+th$，由关系式(4.25)可得

$$N_n(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.26)$$

这个用向前差分表示的插值多项式称为**牛顿向前插值公式(简称前插公式)**；

牛顿插值法

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\zeta),\qquad \zeta\in(x_0,x_n)$$

定义 3 函数 $f(x)$在 x_k 处以 h 为步长的**一阶向后差分**和 m **阶向后差分**分别为

$$\nabla y_k=y_k-y_{k-1} \tag{4.28}$$

$$\nabla^m y_k=\nabla(\nabla^{m-1}y_k)=\nabla^{m-1}y_k-\nabla^{m-1}y_{k-1} \tag{4.29}$$

向后差分的计算,亦可通过构造向后差分表来完成.比较向后差分表与差商表的构造过程,同样可知在等距节点下差商与向后差分之间存在关系

$$f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-m}]=\frac{\nabla^m y_n}{m!\,h^m} \tag{4.30}$$

牛顿插值法

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

若将节点的排列顺序看成 x_n、x_{n-1}、…、x_1、x_0，那么牛顿插值多项式(4.19)可写成

$$N_n(x)=f[x_n]+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{n-1})$$

$$+\cdots+f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

令 $x=x_n+th$，于是在等距节点下由关系式(4.30)又可得

$$N_n(x_n+th)=y_n+t\nabla y_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \qquad (4.31)$$

这个用向后差分表示的插值多项式称为**牛顿向后插值公式(简称后插公式)**，常被用来计算表尾 x_n 附近(即 $x\in[x_{n-1},x_n]$，此时 $-1<t<0$)的函数值. 由插值余项公式(4.6)知，后插公式的余项可写成

$$R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\zeta),\qquad \zeta\in[x_0,x_n] \qquad (4.32)$$

为了应用方便，利用向前差分表及相应的项乘积可得Newton向前差分公式

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	
x_0	y_0					**1**
		Δy_0				**t**
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			$\frac{1}{2!}t(t-1)$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	$\frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			$\frac{1}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3)$
		Δy_3				
x_4	y_4					

利用向前差分表及相应的项乘积
可得Newton向后差分公式

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_1$		
x_2	y_2	∇y_2	$\nabla^2 y_2$	$\nabla^3 y_1$	
x_3	y_3	∇y_3			$\nabla^4 y_1$
			$\nabla^2 y_3$	$\nabla^3 y_2$	
x_4	y_4	∇y_4			
	1	**t**	$\frac{1}{2!}t(t+1)$	$\frac{1}{3!}t(t+1)(t+2)$	$\frac{1}{4!}t(t+1)(t+2)(t+3)$

牛顿插值法

例 1 给定函数表如下：

x	⋯	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	⋯
e^x	⋯	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	⋯

用前插公式计算 $e^{0.285}$ 的近似值

例2 给定数据表

x_i	1	2	4	6	7
$f(x_i)$	4	1	0	1	1

求4次牛顿插值多项式，并写出插值余项。

解 1) 构造差商表

i	x	$f(x_i)$	$f[x_0,x_i]$	$f[x_0,x_1,x_i]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_i]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_i]$
0	1	4				
1	2	1	-3			
2	4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$		
3	6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{30}$	
4	7	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$

2)由差商表可得4次牛顿插值多项式为

$$N_4(x) = 4 - 3(x-1) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2) - \frac{1}{30}(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$+ \frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

3) 牛顿插值余项为

$$f(x) - N_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(x-7)$$
$$\xi \in (\min(x,1), \max(x,7))$$

例3 用牛顿插值公式计算ln11.5。

解：取下面节点，作抛物线插值

$$x_0 = 11, x_1 = 12, x_2 = 13$$

x_i	$y_i=\ln x_i$	一阶插商	二阶插商	
11	2.3979			1
12	2.4849	0.0870		x-11
13	2.5649	0.0800	-0.0035	(x-11)(x-12)

$$N_2(x) = 2.3979 + 0.0870(x-11) - 0.0035(x-11)(x-12)$$

$$\Rightarrow \ln 11.5 \approx N_2(11.5) = 2.442275。$$

例4 已知等距节点及相应点上的函数值如下表所示，试求$N_3(0.5), N_3(0.9)$.

i	0	1	2	3
x_i	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.5	1.8	2.2	2.8

解 先构造向前差分表

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0.4	1.5			
			0.3		
1	0.6	1.8		0.1	
			0.4		0.1
2	0.8	2.2		0.2	
			0.6		
3	1.0	2.8			

由题意，$x_0 = 0.4, h = 0.2$.当$x = 0.5$时

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.5 - 0.4}{0.2} = 0.5.$$

由上表和公式**(5.4.8)**得

$$N_3(0.5) = 1.5 + 0.5 \times 0.3 + \frac{0.5(-0.5)}{2!} \times 0.1$$

$$+ \frac{0.5(-0.5)(-1.5)}{3!} \times 0.1$$

$$= 1.64375$$

当$x = 0.9$时，由$x=x_n+th \Rightarrow t = \frac{0.9-0.1}{h} = -0.5$,

由上表及公式(5.4.13)，得

$$N_3(0.9) = 2.8 + (-0.5) \times 0.6 + \frac{1}{2}(-0.5)(0.5)$$
$$+ \frac{1}{6}(-0.5)(0.5)(1.5)$$
$$= 2.46875$$

利用MATLAB软件进行插值

一维插值

MATLAB 中的插值函数为 interp1(),其调用格式为

$$yi = \text{interp1}(x, y, xi, '\text{method}')$$

其中 x，y 为插值点，yi 为在被插值点 xi 处的插值结果;x，y 为向量.'method'表示采用的插值方法，MATLAB 提供的插值方法有几种:'nearest' 最邻近插值;'linear'线性插值;'spline' 三次样条插值;'cubic' 立方插值.缺省时表示线性插值.

注意:所有的插值方法都要求 x 是单调的，并且 xi 不能够超过 x 的范围.

利用MATLAB软件进行插值

例　在一天 24 小时内，从零点开始每间隔 2 小时测得的环境温度数据分别为(℃)

12, 9, 9, 1 ,0 ,18, 24, 28, 27, 25, 20, 18, 15, 13,

推测中午 1 点(即 13 点)时的温度.

键入：

```
x = 0 : 2 : 24; y = [12 9 9 10 18 24 28 27 25 20 18 15 13];
x1 = 13; y1 = interp1(x,y,x1,'spline')
```

输出的 y1 即为所求.

若要得到一天 24 小时的温度曲线，只需继续键入：

```
xi = 0:1/3600:24;
yi = interp1(x,y,xi,'spline');
plot(x,y,'o',xi,yi)
```

还有其他的插值函数，如 interp1q，interpft，spline，interp2，interp3，interpN.

利用MATLAB软件进行插值

高维插值

N 维插值函数　interpN( )

其中 N 可以为 2,3,…, 如 N = 2 为二维插值,调用格式为

$$zi = interp2(x,y,z,xi,yi,'method')$$

其中 x,y,z 为插值节点,zi 为被插值点(xi,yi)处的插值结果.'method'表示采用的插值方法,'nearest' 最邻近插值,'linear' 线性插值,'cubic' 双三次插值.缺省时表示线性插值.所有的插值方法都要求 x 和 y 是单调的网格,x 和 y 可以是等距的也可以是不等距的.

利用MATLAB软件进行插值

气旋变化情况可视化

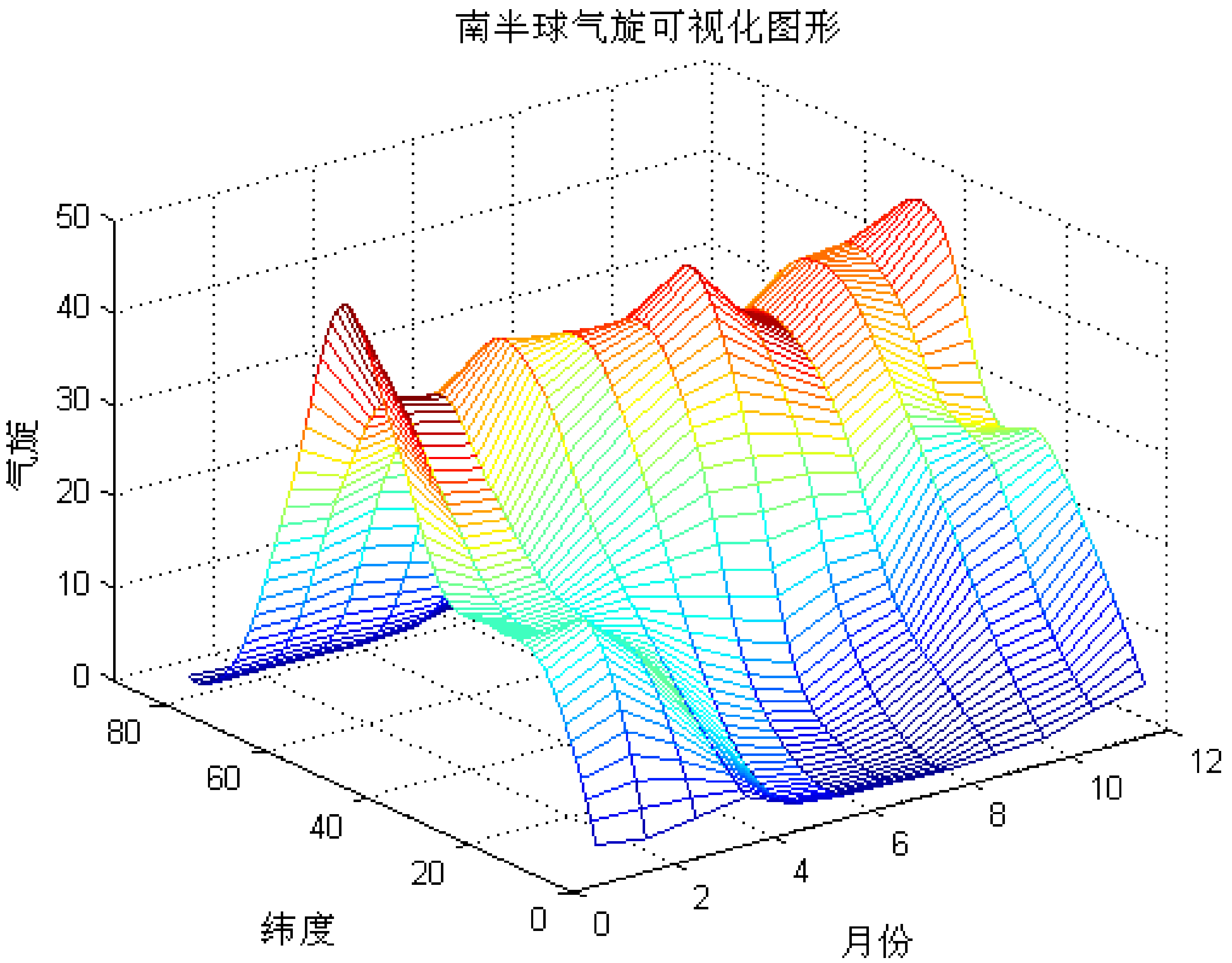
表 4.1 南半球地区按不同纬度 不同月份的平均气旋数据

	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
1 月	2.4	18.7	20.8	22.1	37.3	48.2	25.6	5.3	0.3
2 月	1.6	21.4	18.5	20.1	28.8	36.6	24.2	5.3	0
3 月	2.4	16.2	18.2	20.5	27.8	35.5	25.5	5.4	0
4 月	3.2	9.2	16.6	25.1	37.2	40	24.6	4.9	0.3
5 月	1.0	2.8	12.9	29.2	40.3	37.6	21.1	4.9	0
6 月	0.5	1.7	10.1	32.6	41.7	35.4	22.2	7.1	0
7 月	0.4	1.4	8.3	33.0	46.2	35	20.2	5.3	0.1
8 月	0.2	2.4	11.2	31.0	39.9	34.7	21.2	7.3	0.2
9 月	0.5	5.8	12.5	28.6	35.9	35.7	22.6	7	0.3
10 月	0.8	9.2	21.1	32.0	40.3	39.5	28.5	8.6	0
11 月	2.4	10.3	23.9	28.1	38.2	40	25.3	6.3	0.1
12 月	3.6	16	25.5	25.6	43.4	41.9	24.3	6.6	0.3

利用MATLAB软件进行插值

```
y = 5:10:85;x = 1:12;
z = [2.4, 1.6, 2.4, 3.2, 1.0, 0.5, 0.4, 0.2, 0.5, 0.8, 2.4, 3.6;…
    0.3, 0, 0, 0.3, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0, 0.1, 0.3]
[xi, yi] = meshgrid(1: 12, 5: 1: 85);  zi = interp2(x, y, z, xi, yi,'cubic');
mesh(xi,yi,zi)
xlabel('月份'), ylabel('纬度'), zlabel('气旋'),
axis([0 12 0 90 0 50])
title('南半球气旋可视化图形')
```

利用MATLAB软件进行插值



应用实例分析

某居民区的民用自来水是由一个圆柱形的水塔提供．水塔高 12.2 米，直径 17.4 米．水塔是由水泵根据水塔内水位高低自动加水，一般每天水泵工作两次．现在需要了解该居民区用水规律与水泵的工作功率．按照设计，当水塔的水位降至最低水位，约 8.2 米时，水泵自动启动加水；当水位升高到一个最高水位，约 10.8 米时，水泵停止工作．

可以考虑采用用水率(单位时间的用水量)来反映用水规律，并通过间隔一段时间测量水塔里的水位来估算用水率．表 4.2 是某一天的测量记录数据，测量了 28 个时刻，但是由于其中有 3 个时刻遇到水泵正在向水塔供水，而无水位记录(表 4.2 中用符号//表示)．

试建立合适的数学模型，推算任意时刻的用水率、一天的总用水量和水泵

利用MATLAB软件进行插值

工作功率.

表 4.2　原始数据(单位:时刻(小时),水塔中水位(米))

时刻 t	0	0.921	1.843	2.949	3.871	4.978	5.900
水位	9.677	9.479	9.308	9.125	8.982	8.814	8.686
时刻 t	7.006	7.928	8.967	9.9811	10.925	10.954	12.032
水位	8.525	8.388	8.220	//	//	10.820	10.500
时刻 t	12.954	13.875	14.982	15.903	16.826	17.931	19.037
水位	10.210	9.936	9.653	9.409	9.180	8.921	8.662
时刻 t	19.959	20.839	22.015	22.958	23.880	24.986	25.908
水位	8.433	8.220	//	10.820	10.591	10.354	10.180

利用MATLAB软件进行插值

由问题的要求,关键在于确定用水率函数,即单位时间内用水体积,记为 $f(t)$,又称水流速度.如果能够通过测量数据,产生若干个时刻的用水率,也就是 $f(t)$ 在若干个点的函数值,则 $f(t)$ 的计算问题就可以转化为插值或拟合问题.

1.假设

1)水塔中水流量是时间的连续光滑函数,与水泵工作与否无关,并忽略水位高度对水流速度的影响.

2)水泵工作与否完全取决于水塔内水位的高度,且每次加水的工作时间为 2 小时.

3)水塔为标准圆柱体.

考虑到假设 2),结合表 4.2 中具体数据,推断得出

4)水泵第一次供水时间段为[8.967, 10.954],第二次供水时间段为[20.839, 22.958].

利用MATLAB软件进行插值

水塔是一个圆柱体，体积为 $V = \frac{\pi}{4} D^2 h$

表 4.3　水塔中水的体积(单位:时刻(小时)，体积（立方米))

时刻	0	0.921	1.843	2.949	3.871	4.978	5.900
体积	2294	2247	2206	2163	2129	2089	2059
时刻	7.006	7.928	8.967	9.9811	10.925	10.954	12.032
体积	2020	1988	1948	//	//	2564	2489
时刻	12.954	13.875	14.982	15.903	16.826	17.931	19.037
体积	2420	2355	2288	2230	2176	2114	2053
时刻	19.959	20.839	22.015	22.958	23.880	24.986	25.908
体积	1999	1948	//	2564	2510	2454	2413

利用MATLAB软件进行插值

3. 水流速度的估算

水流速度应该是水塔中水的体积对时间的导数(微商).由于没有水的体积关于时间的函数表达式,而只有一个离散的函数值表 4.3,因此考虑用差商代替微商,这也是离散反映连续的常用思想.为提高精度,采用二阶差商,即 $f(t_i) = -\nabla^2 v_i$.

具体地,因为所有数据被水泵两次工作分割成三组数据,对每组数据的中间数据采用中心差商,前后两个数据不能够采用中心差商,改用向前或向后差商.

中心差商公式

$$\nabla^2 v_i = \frac{-v_{i+2} + 8v_{i+1} - 8v_{i-1} + v_{i-2}}{12(t_{i+1} - t_i)}.$$

向前和向后差商公式

$$\nabla^2 v_i = \frac{-v_{i+2} + 4v_{i+1} - 3v_i}{2(t_{i+1} - t_i)},$$

$$\nabla^2 v_i = \frac{3v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{2(t_i - t_{i-1})}.$$

利用MATLAB软件进行插值

表 4.4　水塔中水的流速(单位:时刻(小时),流速(立方米/小时))

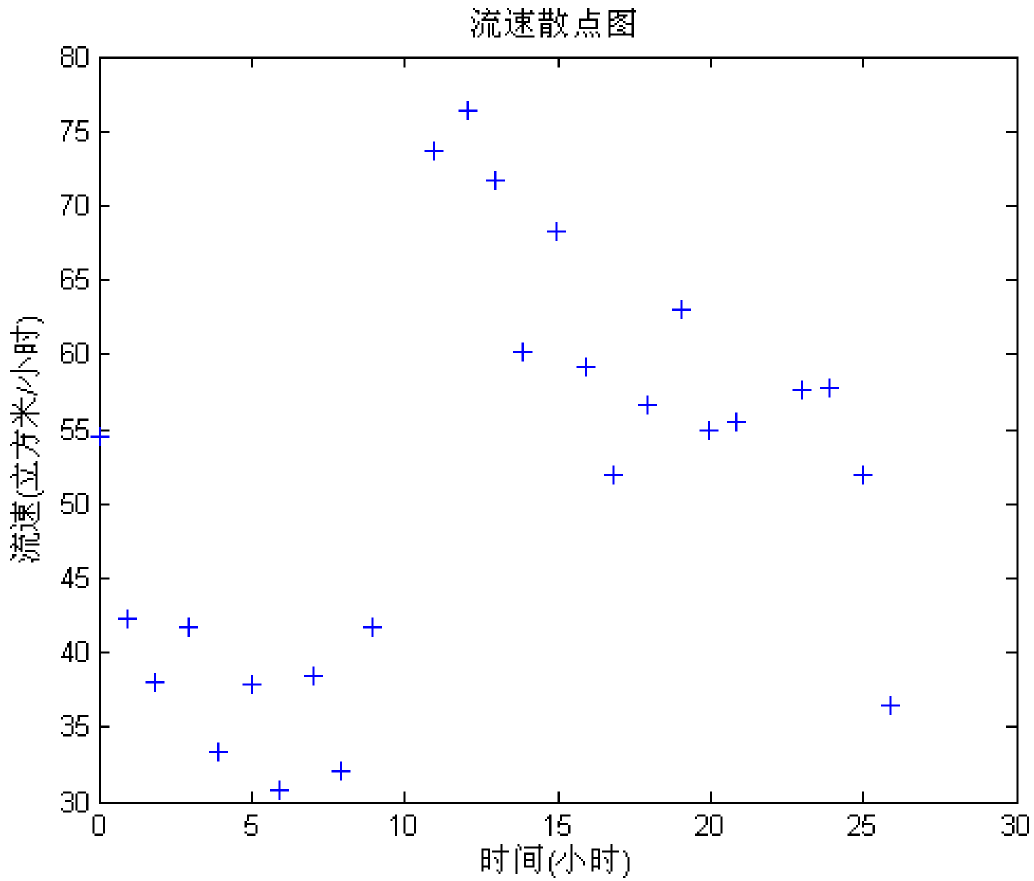
时刻	0	0.921	1.843	2.949	3.871	4.978	5.900
体积	54.516	42.320	38.085	41.679	33.297	37.814	30.748
时刻	7.006	7.928	8.967	9.9811	10.925	10.954	12.032
体积	38.455	32.122	41.718	//	//	73.686	76.434
时刻	12.954	13.875	14.982	15.903	16.826	17.931	19.037
体积	71.686	60.190	68.333	59.217	52.011	56.626	63.023
时刻	19.959	20.839	22.015	22.958	23.880	24.986	25.908
体积	54.859	55.439	//	57.602	57.766	51.891	36.464

利用MATLAB软件进行插值

1.作出水流速散点图

键入：

```
plot(t,r,'b+');   % (t,r)表示时间和流速, 如表4.4
title('流速散点图'); xlabel('时间(小时)'); ylabel('流速(立方米/小时)')
```



利用MATLAB软件进行插值

2.模型及计算结果

问题已经转变为根据流速 $f(t)$ 的一个函数值表，产生函数 $f(t)$ 在整个区间（二十四小时）上的函数或函数值，插值和拟合是两种最常用的方法．如果建立拟合模型，需要根据散点图的趋势，选择适当的拟合函数形式．如果采用插值模型，可以考虑分段线性插值、三次样条插值等等．

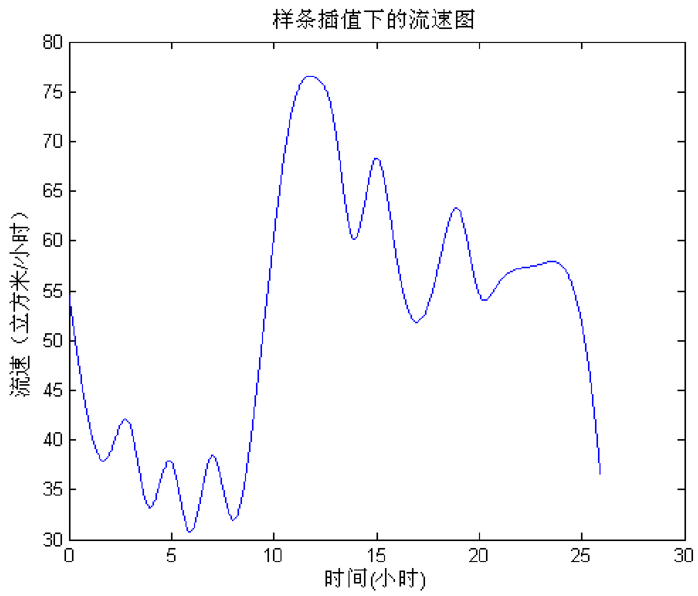
通过对不同插值方法的比较，结合假设，考虑到流速应该是时间的连续光滑函数，下面采用三次样条插值模型．

1）用水率 首先由三次样条插值计算得到用水率函数 $f(t)$，如图 4.3 所示．

利用MATLAB软件进行插值

MATLAB 程序：

```
x0 = t;  y0 = r;
[l,n] = size(x0);  d1 = x0(n) - x0(1);
  x = x0(1):1/3600:x0(n);          % 被插值点
  ys = interp1(x0,y0,x,'spline');    % 样条插值输出
  plot(x,ys);
  xlabel('时间(小时)');ylabel('流速(立方米/小时)');
  title('样条插值下的流速图')
```



利用MATLAB软件进行插值

思考题：

在某海域测得一些点(x,y)处的水深 z(单位:英尺)由表 4.7 给出,水深数据是在低潮时测得的.船的吃水深度为 5 英尺,问在矩形区域$(75,200)\times(-50,150)$里的哪些地方船要避免进入.

表 4.7　水道水深测量数据(单位:英尺)

x	129.0	140.0	103.5	88.0	185.5	195.0	105.5
y	7.5	141.5	23.0	147.0	22.5	137.5	85.5
z	4	8	6	8	6	8	8
x	157.5	107.5	77.0	81.0	162.0	162.0	117.5
y	−6.5	−81.0	3.0	56.5	−66.5	84.0	−33.5
z	9	9	8	8	9	4	9

第三章 课后作业

3.3、3.4、3.10

思考题：

在某海域测得一些点(x,y)处的水深z(单位:英尺)由表4.7给出，水深数据是在低潮时测得的.船的吃水深度为5英尺，问在矩形区域$(75,200)\times(-50,150)$里的哪些地方船要避免进入.

表 4.7　水道水深测量数据(单位:英尺)

x	129.0	140.0	103.5	88.0	185.5	195.0	105.5
y	7.5	141.5	23.0	147.0	22.5	137.5	85.5
z	4	8	6	8	6	8	8
x	157.5	107.5	77.0	81.0	162.0	162.0	117.5
y	-6.5	-81.0	3.0	56.5	-66.5	84.0	-33.5
z	9	9	8	8	9	4	9

感谢聆听,欢迎讨论！