

第十四章
超静定结构

1

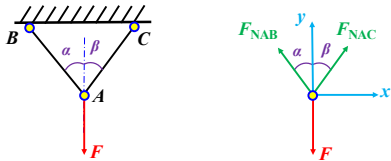
第十四章 超静定结构

- §14.1 超静定结构概述
- §14.2 用力法解超静定结构
- §14.3 对称及反对称性质的利用

14

§14.1 超静定结构概述

- 1、回顾
- 静定问题：**杆件的轴力（约束反力）可以用静力平衡条件求出,这种情况称作静定问题。
- 未知力（内力或外力）个数等于独立的平衡方程数**



15

§14.1 超静定结构概述

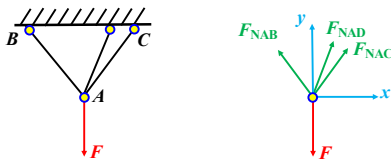
- 1、回顾
- 超静定问题：**杆件的轴力（约束反力）只凭静力平衡方程已不能解出全部未知力，这种情况称做超静定问题。
- 超静定结构：**结构的强度和刚度均得到提高
- 未知力个数多于独立的平衡方程数**

独立平衡方程数：
平面任意力系：3个平衡方程
平面共点力系：2个平衡方程

16

§14.1 超静定结构概述

- 1、回顾
- 超静定问题：**杆件的轴力（约束反力）只凭静力平衡方程已不能解出全部未知力，这种情况称做超静定问题。



17

§14.1 超静定结构概述

- 2、概念
- 用静力学平衡方程无法确定全部约束力和内力的结构，统称为超静定结构或系统，也称为静不定结构或系统。**



18

§14.1 超静定结构概述

3、超静定结构分类

- 第一类：仅在结构外部存在多余约束，即支反力是超静定的，可称为外力超静定系统；
- 第二类：仅在结构内部存在多余约束，即内力是超静定的，可称为内力超静定系统；
- 第三类：在结构外部和内部均存在多余约束，即支反力和内力是超静定的，也称联合超静定结构。

19

§14.1 超静定结构概述

3、超静定结构分类

判断下列结构属于哪类超静定？

外力超静定

内力超静定

混合超静定

20

§14.1 超静定结构概述

4、超静定次数的判定

- 外力超静定次数的判定：根据约束性质确定支反力的个数，根据结构所受力系的类型确定独立平衡方程的个数，二者的差即为结构的超静定次数；
- 内力超静定次数的判定：一个平面封闭框架为三次内力超静定；平面桁架的内力超静定次数等于未知力的个数减去二倍的节点数。

21

§14.1 超静定结构概述

5、分析方法

- 1、力法：以未知力为基本未知量的求解方法；
- 2、位移法：以未知位移为基本未知量的求解方法。

22

§14.2 用力法解超静定结构

1、力法的求解过程

- (1) 判定超静定次数：
解除超静定结构的多余约束，用多余约束力 X_1, X_2, X_3, \dots 代替多余约束，得到一个几何不变的静定系统，称为原超静定系统的“相当系统”；
- (2) 在多余约束处满足“变形几何条件”，得到变形协调方程；
- (3) 由补充方程求出多余约束力；
- (4) 在相当系统上求解原超静定结构的内力和变形。

23

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1

如图所示，梁 EI 为常数，试求支座反力。

- (1) 去掉多余约束代之约束反力，得相当系统。

把 B 支座作为多余约束

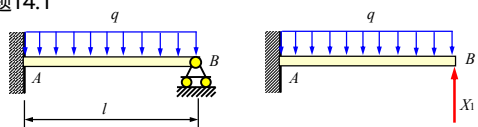
AB 悬臂梁为相当系统

X_1 为多余反力

24

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



(2) 利用多余约束处的变形情况写出变形协调条件:

$$B \text{ 点的挠度为 } 0 \quad \Delta_{1X_1} + \Delta_{1F} = 0$$

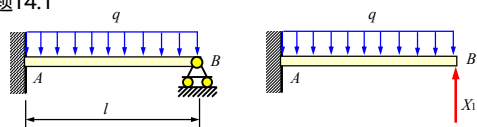
Δ_{1X_1} 表示 X_1 作用在相当系统时, X_1 作用点 B 沿 X_1 方向的位移。

Δ_{1F} 表示 F (广义力) 作用在相当系统时, X_1 作用点 B 沿 X_1 方向的位移。

25

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



用 δ_{11} 表示沿 X_1 方向的单位力在其作用点引起的 X_1 方向的位移。

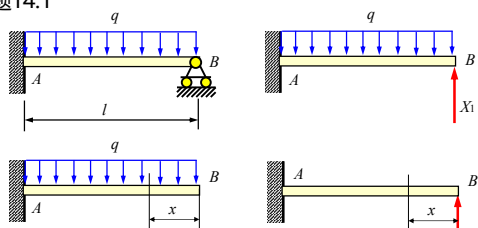
由于 X_1 作用, B 点的沿 X_1 方向位移是 δ_{11} 的 X_1 倍

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11} X_1$$

26

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



(3) 利用莫尔定理求 Δ_{1F}

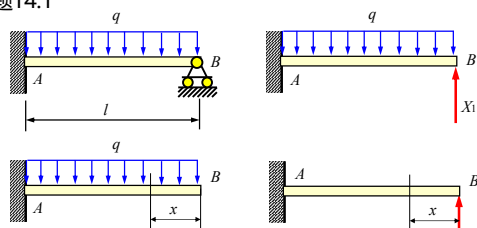
$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\bar{M}(x) = x$$

27

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



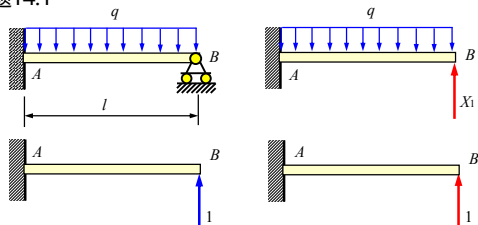
(3) 利用莫尔定理求 Δ_{1F}

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right) \cdot x dx = -\frac{ql^4}{8EI}$$

28

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



(4) 利用莫尔定理求 δ_{11}

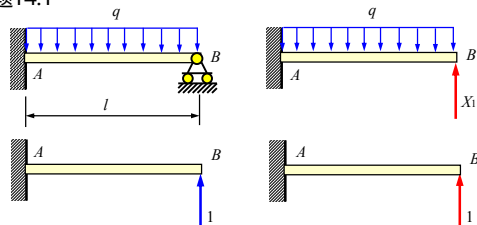
$$M(x) = x$$

$$\bar{M}(x) = x$$

29

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



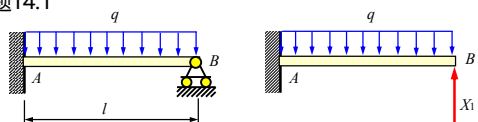
(4) 利用莫尔定理求 δ_{11}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l x \cdot x dx = \frac{l^3}{3EI}$$

30

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.1



$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} \right) \cdot x dx = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l x \cdot x dx = \frac{l^3}{3EI}$$

代入 $\Delta_{1X_1} + \Delta_{1F} = 0$ $\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1$

➔ $\frac{l^3}{3EI}X_1 - \frac{ql^4}{8EI} = 0$ 解得 $X_1 = \frac{3}{8}ql$

31

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程

上例中以多余力为未知量的变形协调方程可改写成下式

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

此即变形协调方程的标准形式，即所谓的力法正则方程。

X_1 : 多余未知量;

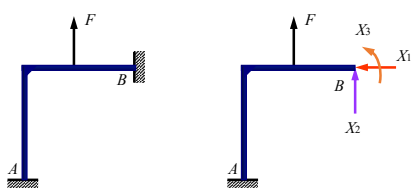
δ_{11} : 在相当系统上, X_1 取单位值时引起的在 X_1 作用点沿着 X_1 方向的位移;

Δ_{1F} : 在相当系统上, 由原载荷引起的在 X_1 作用点沿着 X_1 方向的位移。

32

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程

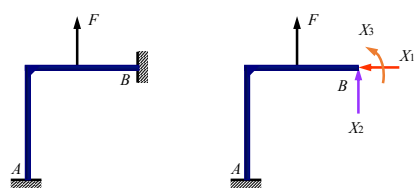


这是三次超静定问题

33

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



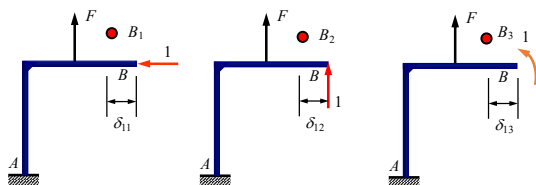
在相当系统上, 由 F 、 X_1 、 X_2 、 X_3 单独作用在B点引起的水平位移分别记作 Δ_{1F} 、 Δ_{1X_1} 、 Δ_{1X_2} 、 Δ_{1X_3}

1表示B点的水平位移方向

34

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



B点的水平位移等于零 $\Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1X_3} + \Delta_{1F} = 0$

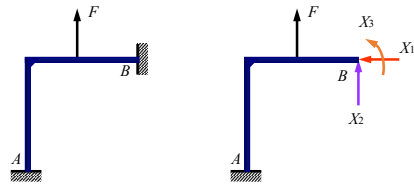
$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1 \quad \Delta_{1X_2} = \delta_{12}X_2 \quad \Delta_{1X_3} = \delta_{13}X_3$$

➔ $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0$

35

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



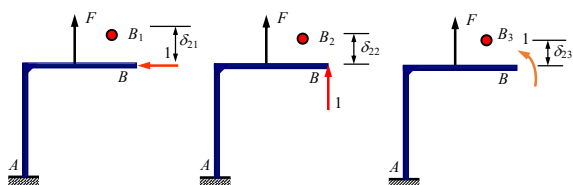
2表示B点的铅垂位移方向, B点的铅垂位移等于零

$$\Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2X_3} + \Delta_{2F} = 0$$

36

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



$$\Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2X_3} + \Delta_{2F} = 0$$

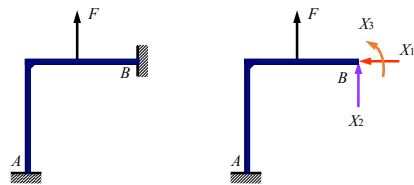
$$\Delta_{2X_1} = \delta_{21}X_1 \quad \Delta_{2X_2} = \delta_{22}X_2 \quad \Delta_{2X_3} = \delta_{23}X_3$$

$$\Rightarrow \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0$$

37

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



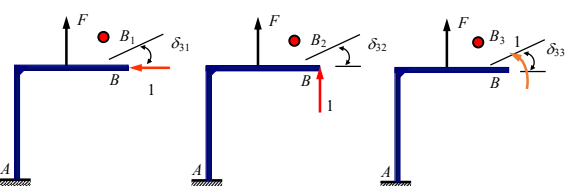
3表示B点的旋转方向，B点的转角等于零

$$\Delta_{3X_1} + \Delta_{3X_2} + \Delta_{3X_3} + \Delta_{3F} = 0$$

38

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



$$\Delta_{3X_1} + \Delta_{3X_2} + \Delta_{3X_3} + \Delta_{3F} = 0$$

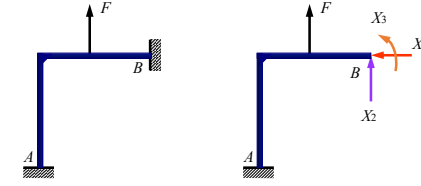
$$\Delta_{3X_1} = \delta_{31}X_1 \quad \Delta_{3X_2} = \delta_{32}X_2 \quad \Delta_{3X_3} = \delta_{33}X_3$$

$$\Rightarrow \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

39

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程



$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \\ \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

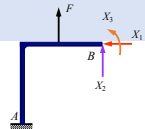
三次超静定系
统的正则方程

40

§14.2 用力法解超静定结构

2、力法正则方程

正则方程的推广



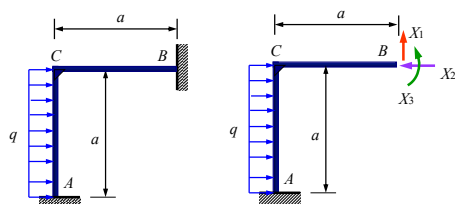
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \\ \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{位移互等定理}) \end{cases}$$

41

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

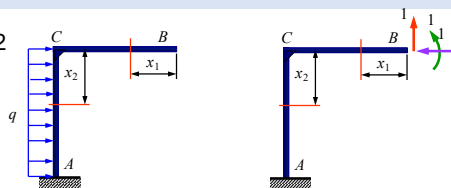
求解静不定结构刚架，设两杆的E/相等。



42

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

解: (1) 用单位荷载法求 Δ_{1F} , Δ_{2F} , Δ_{3F}

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot a \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{6EI}$$

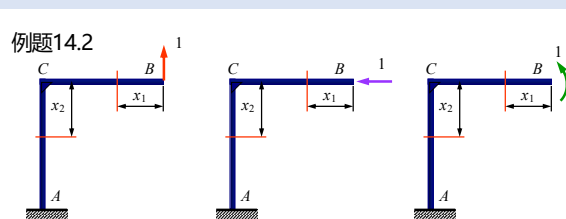
$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot x_2 \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\Delta_{3F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot 1 \cdot dx_2 = -\frac{qa^3}{6EI}$$

43

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

解: (2) 求 δ_{ij}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a x_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^a a \cdot a \cdot dx_2 \right] = \frac{4a^3}{3EI}$$

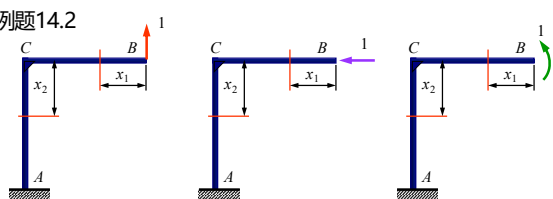
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot x_2 \cdot dx_2 = \frac{a^3}{3EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_2 \right] = \frac{2a}{EI}$$

44

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

解: (2) 求 δ_{ij}

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot a \cdot dx_2 = \frac{a^3}{2EI}$$

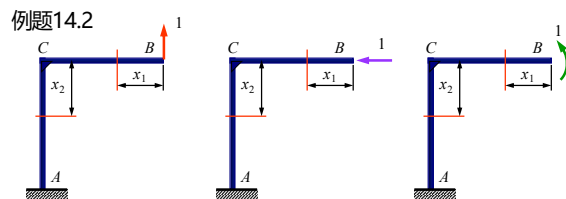
$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a x_1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a a \cdot 1 \cdot dx_2 \right] = \frac{3a^2}{2EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot 1 \cdot dx_2 = \frac{a^2}{2EI}$$

45

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

解: (2) 求 δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} dx$$

46

§14.2 用力法解超静定结构

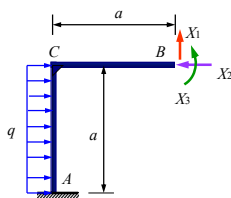
例题14.2

解: (2) 求 δ_{ij}

$$\delta_{11} = \frac{4a^3}{3EI} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{a^3}{2EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{a^3}{3EI} \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{3a^2}{2EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{2a}{EI} \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{a^2}{2EI}$$



47

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2

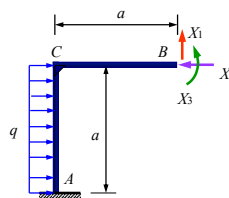
解: (3) 求 X_1 , X_2 , X_3

代入正则方程:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases}$$

化简得:

$$\begin{cases} 8aX_1 + 3aX_2 + 9X_3 = qa^2 \\ 12aX_1 + 8aX_2 + 12X_3 = 3qa^2 \\ 9aX_1 + 3aX_2 + 12X_3 = qa^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{qa}{16} \\ X_2 = \frac{7qa}{16} \\ X_3 = \frac{qa^2}{48} \end{cases}$$



48