

工程数值方法

Numerical Method for Engineering

任 课 教 师：曹 彦 鹏

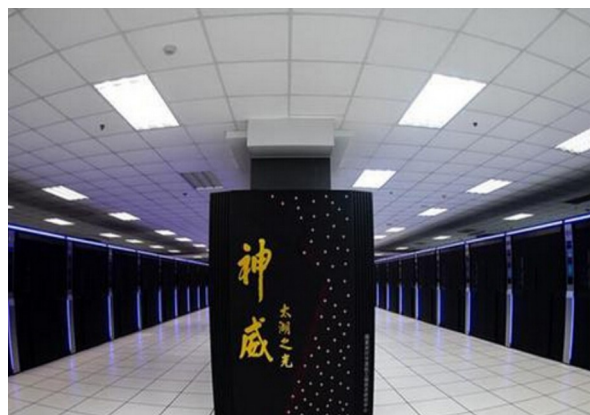
caoyp@zju.edu.cn

玉泉校区教 1-205

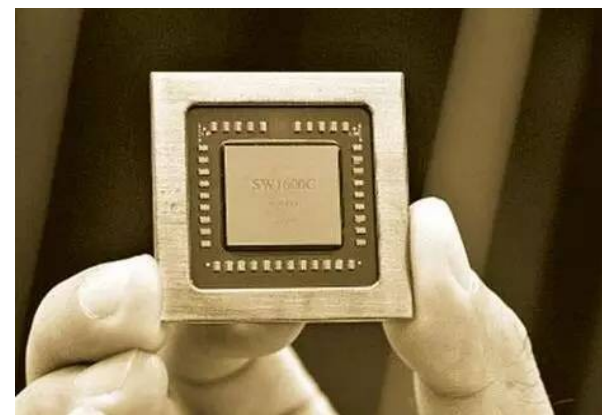
超级计算（Supercomputing）是世界高新技术领域的研究热点



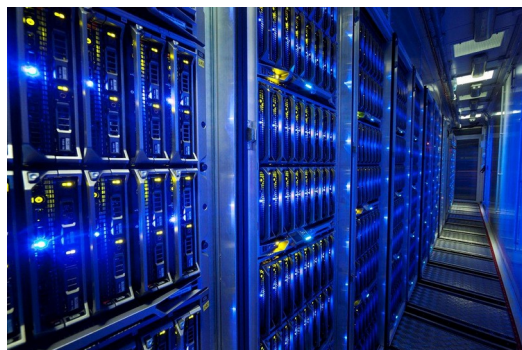
天河一号超级计算机



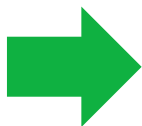
神威 · 太湖之光超级计算机



申威 26010 众核处理器



高性能数据处理硬件



更快、更准确的分析结果



提问： VS

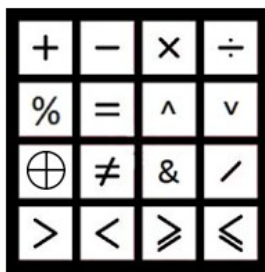


=
?

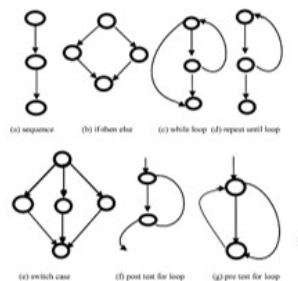
源
果



数据储存



运算操作



逻辑控制



快速、稳定、大规模

计算机 — 硬件(CPU 或 GPU 处理器)

软件: 核心是算法
Algorithm

数值算法 Numerical Algorithm

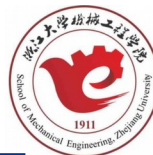
非数值算法

- 硬件进行**高速、稳定、大规模**的简单数据运算
- 软件则是通过**高效、稳定的算法**组合计算机的简单运算去实现各种**复杂的功能**和解决各种**复杂的问题**

针对科学和工程中的数学问题, 根据**计算机运算特点**, 设计 / 分析有效的求解算法, 即为**数值分析 / 计算方法**



计算方法的重要性



借助计算机**高速计算的能力**，解决现代科学、工程、或经济中的复杂问题，是**计算机与数学的有机结合**

科学计算是20世纪重要科学技术进步之一，已与**理论研究和实验研究**相并列成为**科学研究的第三种方法**。现今科学计算已是体现国家科学技术**核心竞争力的重要标志**，是国家科学技术创新发展的关键要素。

—— 国家自然科学基金委员会，2014年重大研究计划项目指南

在迅猛发展的高性能计算技术推动下，**计算科学**将是 21 世纪确保国家**核心竞争能力的战略技术之一**。

—— 计算科学：确保美国竞争力，2005年美国**总统信息技术咨询委员会**

国家重大战略需求中许多科学问题的解决**高度依赖于**科学计算中**基础算法**的发展水平



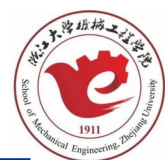
航天飞机发射

火箭是以热气流高速向后喷出，利用产生的反作用力向前运动的喷气推进装置。它自身携带燃烧剂与氧化剂，不依赖空气中的氧助燃，既可在大气中，又可在外层空间飞行。火箭在飞行过程中随着火箭推进剂的消耗，其质量不断减小，是变质量飞行体。

需要装载多少飞行燃料



提问：数值计算方法的应用？



装载飞行燃料（燃烧剂与氧化剂）

太多 - 增加升空重量和成本

太少 - 无法完成升空高度

假设飞行燃料的重量为 T ，影响 T 的因素有哪些？

发射高度（ H ） - 重力的影响

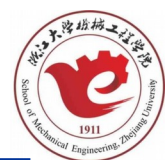
运载重量（ N ） - 变质量飞行体

发射地点（ L ） - 运行轨迹

天气情况（ W ） - 空气密度



提问：数值计算方法的应用？



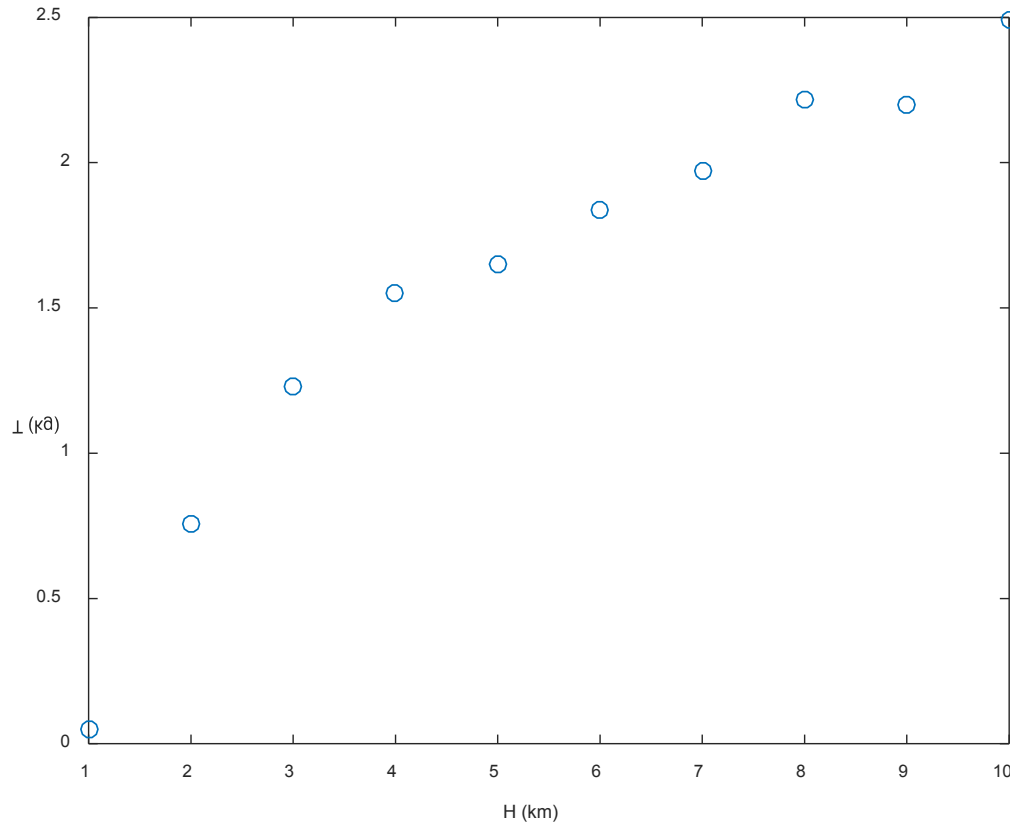
所需飞行燃料量的数学模型（Modeling）

$$T = \mathbf{f}(H, N, L, W)$$

如果能得到准确翻译 T 与其他影响变量之间关系的**函数 \mathbf{f} （非线性、多维）**，我们就能准确计算不同发射任务所需的**最少**飞行燃料量。

非常复杂的科学工程问题 !!

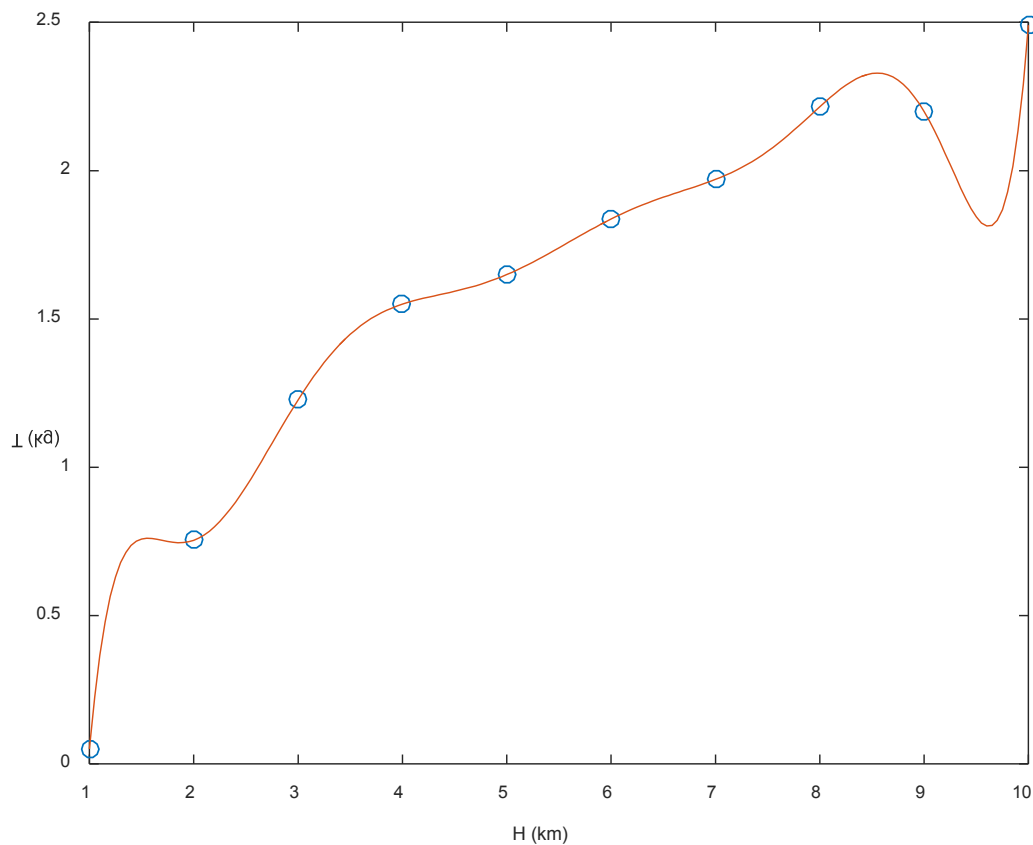
例 1. 通过实验测量将物体发射至不同高度
($H_1, H_2 \dots H_n$) 所需的燃料量 ($T_1, T_2 \dots T_n$)



发射高度 9.5km (可测)
需要多少飞行燃料？

发射高度 30km (不可测)
需要多少飞行燃料？

不同的预测方法的结果（第三章 - 插值）

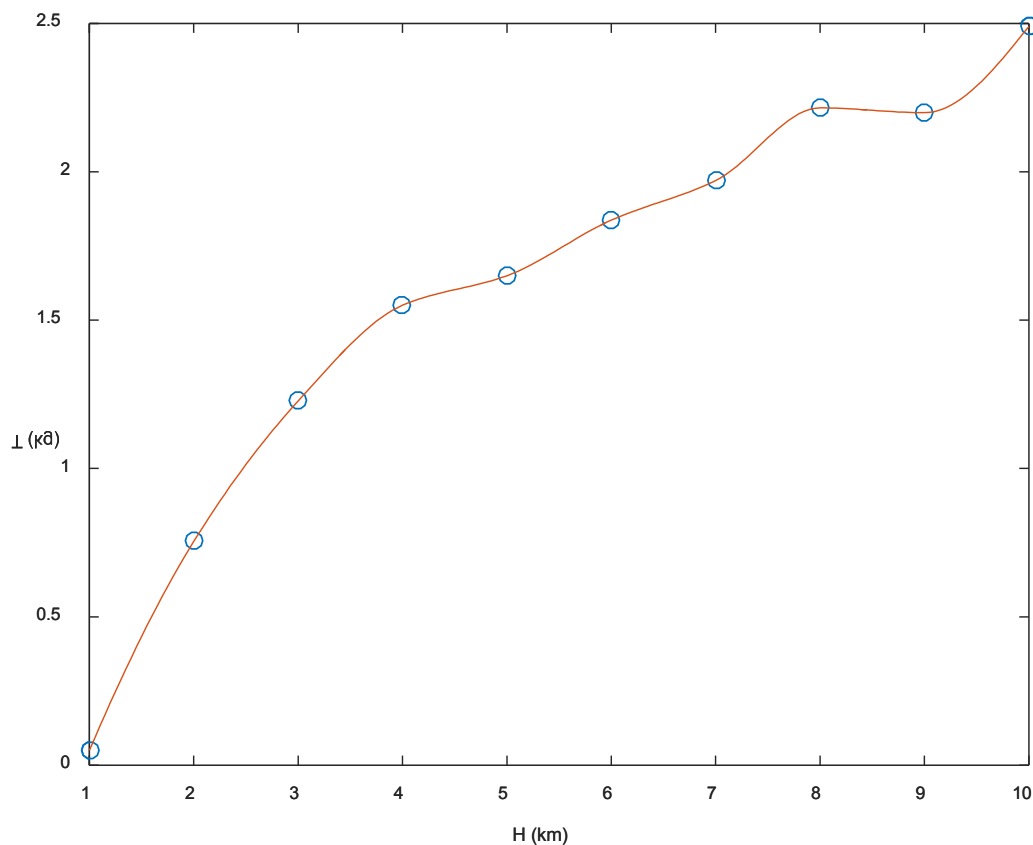


拉格朗日（Lagrange）
插值

模型准确拟合每个测量
点的数据？

是否是好的预测模型？

不同的预测方法的结果（第三章 - 插值）

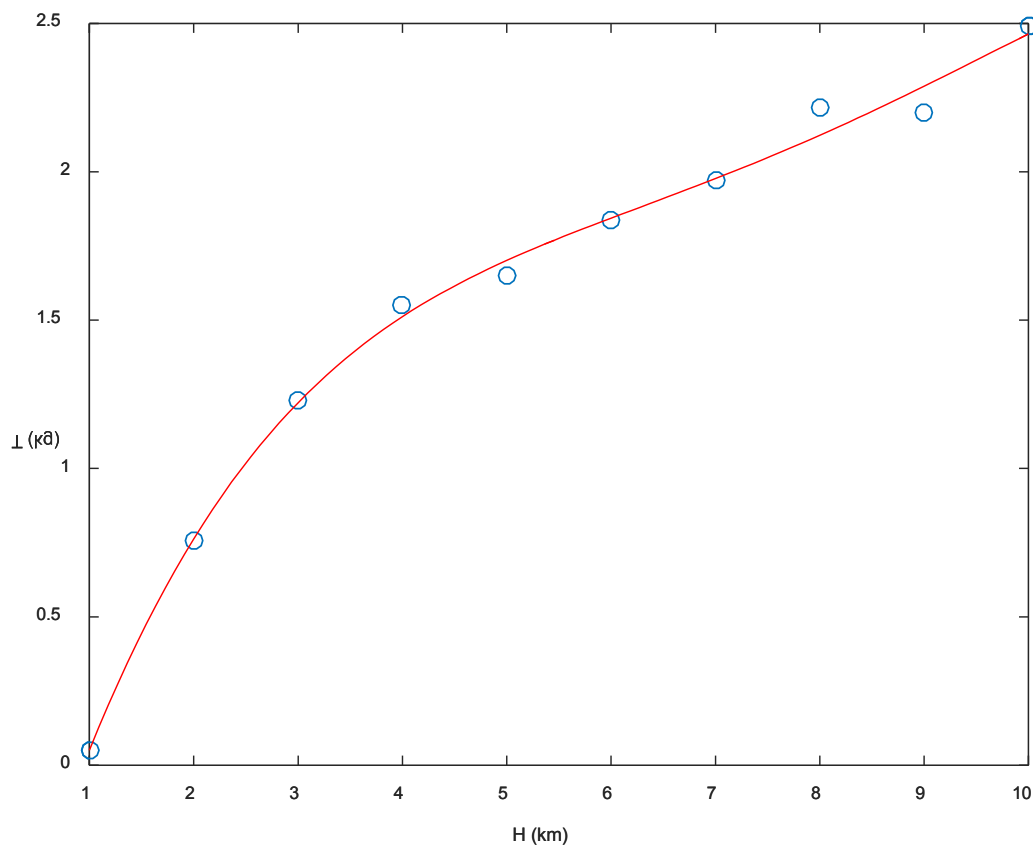


分段保形（piece wise shape preserve）插值

模型准确拟合每个测量点的数据？

是否是好的预测模型？

不同的预测方法的结果（第三章 - 插值）



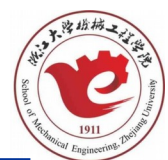
二次多项式（2nd poly）
插值

模型准确拟合每个测量
点的数据？

是否是好的预测模型？

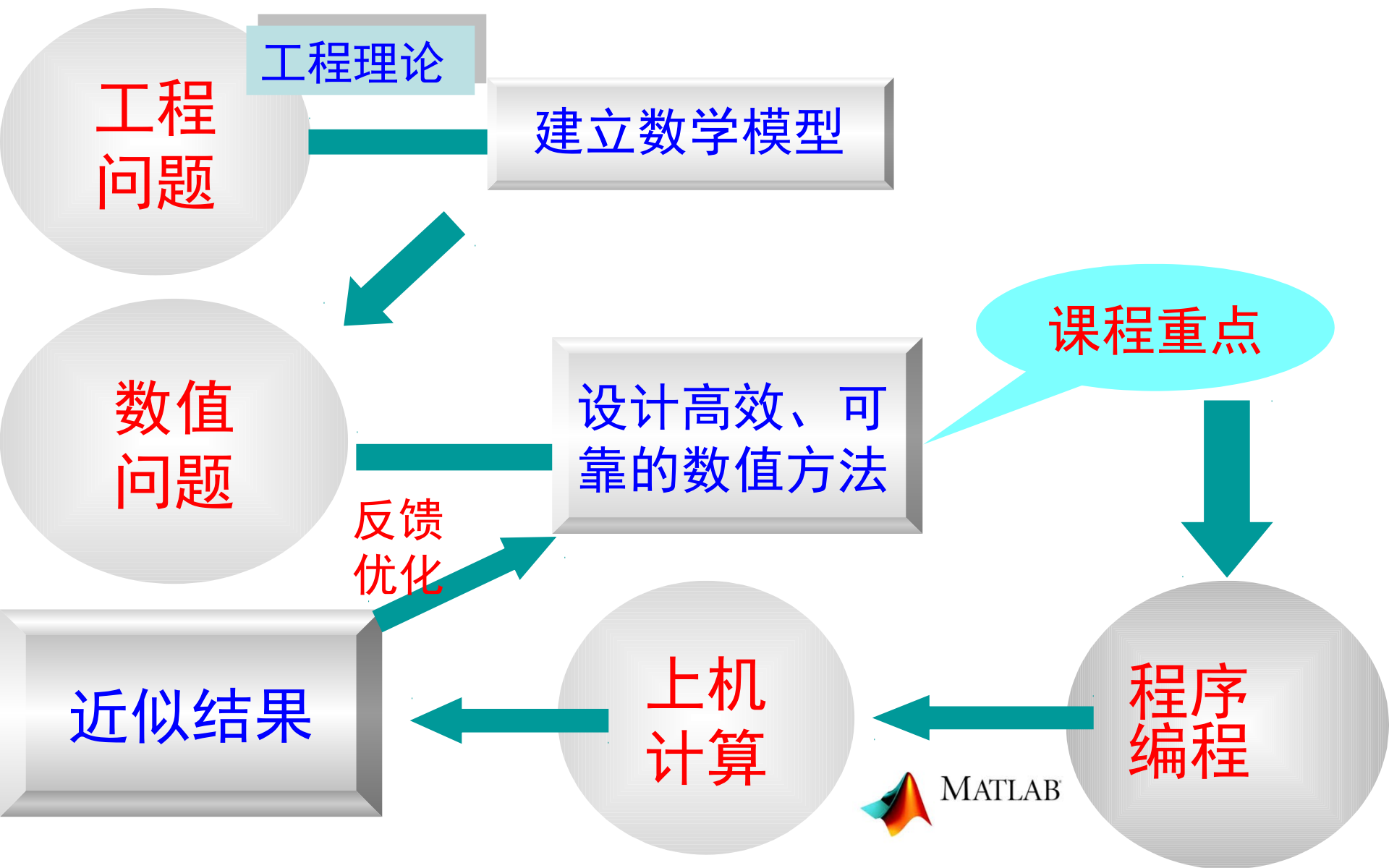


什么是数值计算方法？



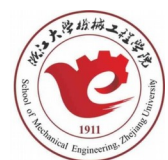
研究对象：数值问题——有限个输入数据（问题的自变量、原始数据）与有限个输出数据（待求解数据）之间函数关系的一个明确无歧义的描述。

研究方法：根据计算机特点，通过离散、逼近、递推等方法求工程问题中满足精度要求的近似解。





数值方法的设计原则



算法可靠性

收敛性：方法的可行性

稳定性：初始数据等产生的误差对结果的影响

误差控制：运算结果不能产生太大的偏差且
能够控制误差

计算复杂度

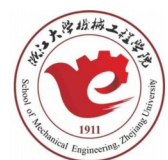
便于编程实现：逻辑复杂度要小

计算量要小：运算复杂度要低，运行时间要短

存贮量要小：运算过程变量尽量少



数值计算方法实现的基本途径



◆ Dispersing (离散化)

只计算定义域上有限个变量的值，而不是所有函数变量的值

◆ Approach (逼近)

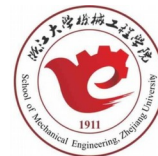
用简单函数 $y(x)$ 近似替代函数 $f(x)$, 但误差 $E(x)=f(x)-y(x)$ 要满足精度要求。

◆ Deduce by degrees (递推)

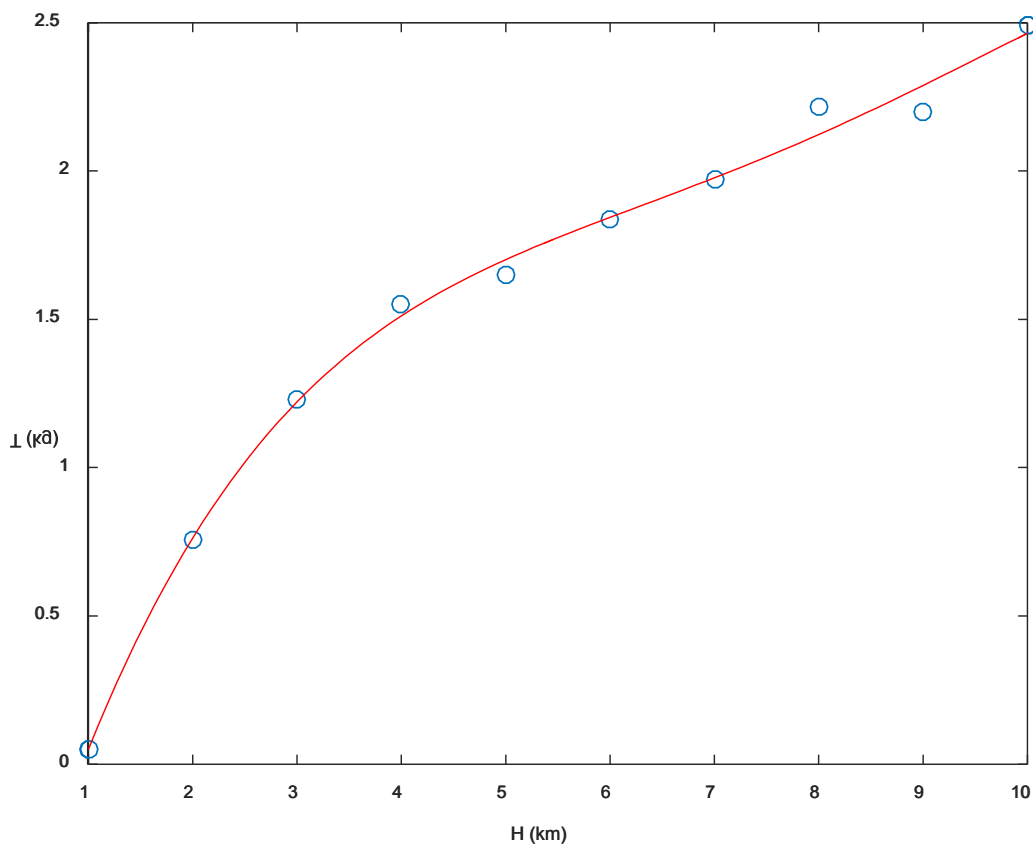
递推是将一个复杂的计算过程转化为简单过程的多次重复的数学方法。



误差分析 (Error Analysis)



在任何科学计算中其解的精确性总是相对的，而误差则是绝对的。



如： $\pi = 3.1415926\dots$

$$\pi^* = 3.14 \quad |e^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$\pi^* = 3.141592 \quad |e^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

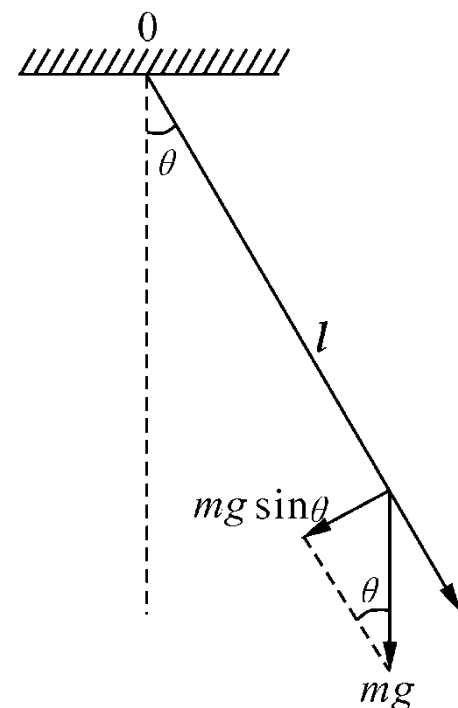
从下面这个例子就可以了解误差产生的原因。

高中物理中的单摆周期公式：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



其中： l 为摆长； g 为自由落体加速度； m 是质点的质量。



根据牛顿第二运动定律

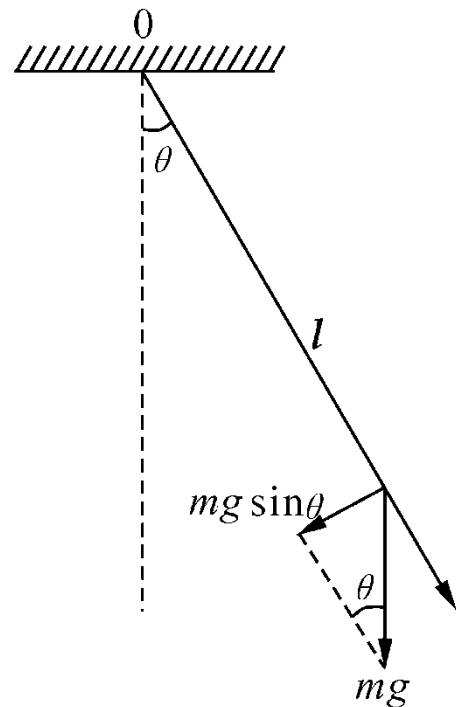
$$f = mg \sin \theta = ma = -ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

所以 $ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

即 $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

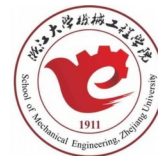
当 θ 很小时, $\sin \theta \approx \theta$, 令 $\omega^2 = \frac{g}{l}$

则有 $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$ 二阶常系数线性齐次微分方程





误差分析 (Error Analysis)



当 θ 很小时, $\sin \theta \approx \theta$,

单摆的非线性的运动被线性地近似为简谐运动

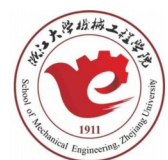
方程的解为 $\theta = A \sin(\omega t + \varphi)$

A 是最大振幅, ω 是角速度, φ 是初相角 (由初始位置定)。

因此
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



误差分析 (Error Analysis)



现在我们来分析单摆周期求解过程的误差情况：

模型误差 $\left\{ \begin{array}{l} \text{忽略空气阻力} \\ \text{忽略 o 点处的摩擦力} \end{array} \right.$

截断误差： $\theta \approx \sin \theta$

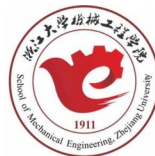
由 Taglor 展式： $\sin \theta = \theta + \left[-\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] \approx \theta$

观察误差： $g = 9.8 \text{ 米 / 秒}^2, l \text{ 长度}$

舍入误差 $\therefore +, -, *, /, \text{开方}$



误差分析 (Error Analysis)

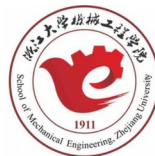


一、误差的来源与分类 /* Source & Classification */

- 1、从实际问题中抽象出数学模型
—— 模型误差 /* Modeling Error */
- 2、通过观测得到模型中某些参数（或物理量）的值
—— 观测误差 /* Measurement Error */
- 3、数学模型与数值算法之间的误差求近似解
—— 方法误差（截断误差 /* Truncation Error */）
- 4、由于机器字长有限，原始数据和计算过程会产生新的误差
—— 舍入误差 /* Roundoff Error */



误差分析的基本概念



Def 1.1 (绝对误差 /* absolute error */)

设 x 为真值 (精确值) x^* 为 的一个近似

$$e^* = x^* - x$$

称 e^* 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。
注：误差可正可负，误差常是无限位的。

绝对误差限 /* accuracy */ —— 绝对值的上界 ε^*

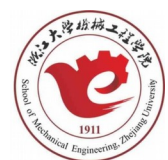
$$|e^*| = |x^* - x| \leq \varepsilon^* \text{ 如 : } \pi^* = 3.14159$$

$$|\pi^* - \pi| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5} \quad (\pi = 3.1415926\cdots)$$

绝对误差能否完全表示近似值的好坏？



误差分析的基本概念



Def 1.2 (相对误差 /* relative error */)

近似值 x^* 的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

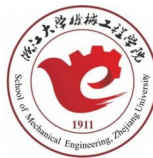
称为近似值 x^* 的相对误差，记 $e_r^* = \frac{e^*}{x}$

□ 注： □ 实际计算时，相对误差通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$



误差分析的基本概念



▣ 相对误差限——相对误差的绝对值的上界 ε_r^*

/* relative accuracy */

▣ 相对误差也可正可负 $\left| \frac{e^*}{x^*} \right| = \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right| \leq \varepsilon_r^*$

Def 1.3 (有效数字 /*Significant Digits*/)

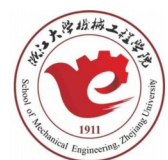
若近似值 x^* 与准确值的误差绝对值不超过某一位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，称 x^* 有 n 位有效数字 则

如： $\pi = 3.1415926 \dots$ $\pi^* = 3.14$ $|e^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ 3 位

$\pi^* = 3.141592$ $|e^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 6 位



误差分析的基本概念



□ 相对误差限 □ 有效数字

例 2 : 为使 π^* 的相对误差小于 0.001%, 至少应取几位有效数字?

解 : 假设 π^* 取到 n 位有效数字, 则其相对误差上限为

$$e_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

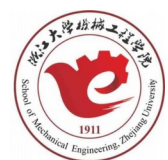
若 $x^* = \pm 0.a_1a_2 \cdots a_n \times 10^m$ 有 n 位有效数字时, 显然有

$$\varepsilon(x) = |x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}, \text{ 又因为 } |x^*| \geq a_1 \times 10^{m-1}, \text{ 其相对误差有:}$$

$$|\varepsilon_r^*(x)| = \left| \frac{\varepsilon(x)}{x^*} \right| \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{a_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$



误差分析的基本概念



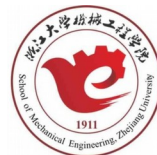
要保证其相对误差小于 0.001% ，只要保证其上限满足

$$e_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} < 0.001\%$$

已知 $a_1 = 3$ ，则从以上不等式可解得 $n > 6 - \log 6$ ，即 $n \geq 6$ ，应取 $\pi^* = 3.14159$ 。



误差分析的基本概念



近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.747\dots\dots$ 将 e^{-x^2} 作 Taylor 展开后再积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx \\ &= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{3!} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{4!} \times \frac{1}{9} - \dots}_{S_4} \end{aligned}$$

取 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx S_4$, R_4 /* Remainder */

则 $R_4 = \frac{1}{4!} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{5!} \times \frac{1}{11} + \dots$ 由截去部分引起 /* Truncation Error */

这里 $|R_4| < \frac{1}{4!} \times \frac{1}{9} < 0.005$ 引起

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 1 - 0.333 + 0.1 - 0.024 = 0.743$$

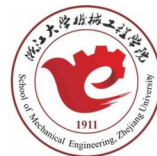
舍入误差 /* Roundoff Error */ $< 0.0005 \times 2 = 0.001$

计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 的总体误差 $< 0.005 + 0.001 = 0.006$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.33333\dots \\ \frac{1}{42} &= 0.02380\dots \end{aligned}$$



数值方法的运算性能



计算下列多项式的值，其中 a_0, a_1, \dots, a_n, x 为已知数据

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

若直接由 x 算出 x^2, \dots, x^n ，再乘以相应的系数 a_0, a_1, \dots, a_n 并相加，则要做 $n(n+1)/2$ 次乘法和 n 次加法，占用 $2n+1$ 个存储单元

秦九韶递推法，也称为 Horner 算法

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$$

$$f_1 = a_n x + a_{n-1} \quad \dots\dots$$

$$f_2 = f_1 x + a_{n-2} \quad f_n = f_{n-1} x + a_0$$

$$f_3 = f_2 x + a_{n-3}$$

我们需要设计高精度、高稳定性、高运算性能的数值方法

计算 $I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

□ 公式一 $I_n = \frac{1}{e} [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - n I_{n-1}$

∴ $I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056$ 记为 I_0^*

此公式精确成立

$I_1^* = 1 - 1 \cdot I_0^* = 0.36787944$

.....

$I_{10}^* = 1 - 10 \cdot I_9^* = 0.08812800$

$I_{11}^* = 1 - 11 \cdot I_{10}^* = 0.03059200$

$I_{12}^* = 1 - 12 \cdot I_{11}^* = 0.63289600$?

$I_{13}^* = 1 - 13 \cdot I_{12}^* = -7.2276480$??

$I_{14}^* = 1 - 14 \cdot I_{13}^* = 94.959424$?!

$I_{15}^* = 1 - 15 \cdot I_{14}^* = -1423.3914$!!

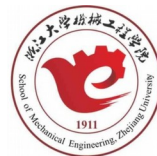
!



积分结果
应该是正
数且越来
也小!!



数值方法的稳定性



分析第 n 步的误差

$$|E_n| = |I_n - I_n^*| = |(1 - nI_{n-1}) - (1 - nI_{n-1}^*)| = n|E_{n-1}| = \cdots = n!|E_0|$$

初始的小扰动迅速积累，误差呈递增趋势！！

造成这种情况的是不稳定的算法 /* unstable algorithm */

改进方法：先估计一个 I_N ，再反推要求的 I_n ($n \ll N$)

$$I_n = 1 - n I_{n-1} \Rightarrow I_{n-1} = \frac{1}{n} (1 - I_n)$$

$$I_{15}^* = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{e \cdot 16} + \frac{1}{16} \right] \approx 0.042746233$$

$$\Rightarrow I_{14}^* = \frac{1}{15} (1 - I_{15}^*) \approx 0.063816918$$

$$I_{13}^* = \frac{1}{14} (1 - I_{14}^*) \approx 0.066870220$$

$$I_1^* = \frac{1}{2} (1 - I_2^*) \approx 0.36787944$$

$$I_0^* = \frac{1}{1} (1 - I_1^*) \approx 0.63212056$$

分析反推计算的误差：

注意此公式与公式一
在理论上等价！

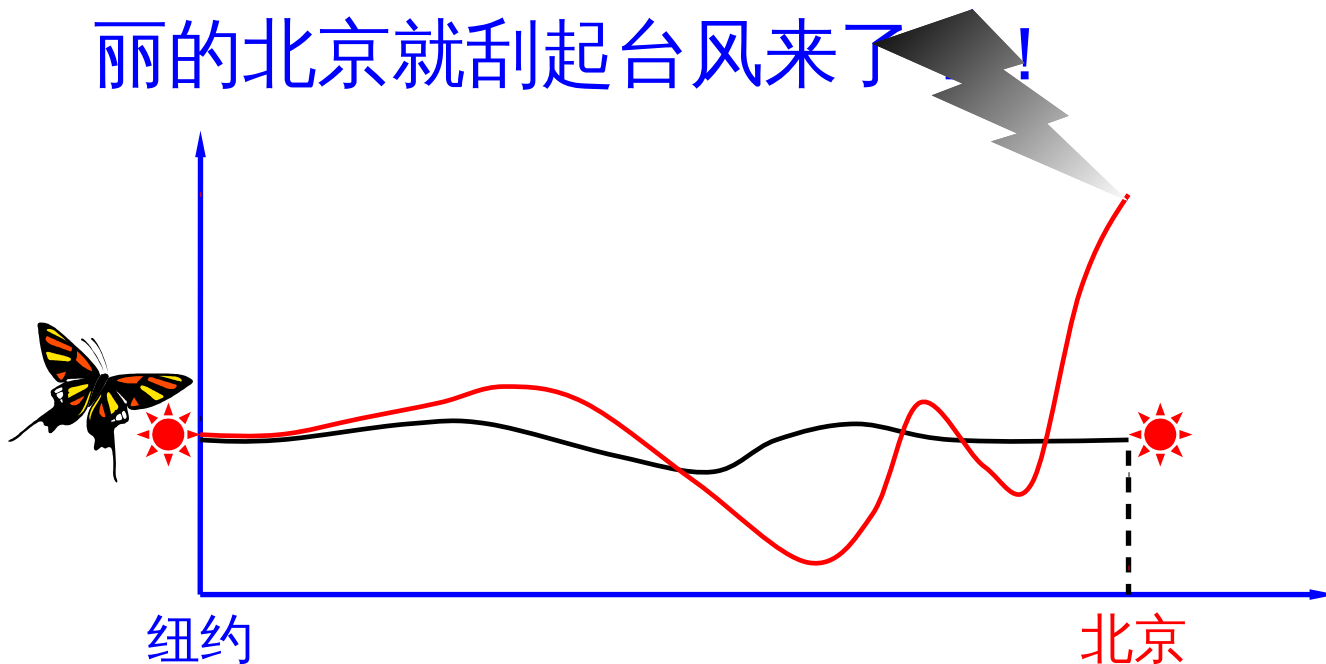
： 计算结果靠谱！

改进后算法误差递减，为稳定的算法 /* stable algorithm */

数值方法的稳定性

例 6 : 蝴蝶效应 —— 纽约的一只蝴蝶翅膀一拍，风和日

丽的北京就刮起台风来了！



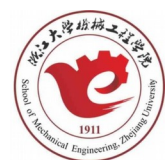
这是一个病态问题

关于蝴蝶效应

关于本身是病态的问题，还是留给数学家去头痛吧！



数值方法的稳定性

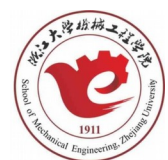


蝴蝶效应是气象学家洛伦兹 1963 年提出来的。其大意为：一只南美洲亚马孙河流域热带雨林中的蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国德克萨斯引起一场龙卷风。

蝴蝶效应在社会学界用来说明：一个坏的微小的机制，如果不加以及时地引导、调节，会给社会带来非常大的危害，戏称为“龙卷风”或“风暴”；一个好的微小的机制，只要正确指引，经过一段时间的努力，将会产生轰动效应，称为“革命”。



误差传播分析的方法和原则



一、误差分析的方法

(1) 两个近似数 x_1^* , x_2^* , 四则运算得到的误差限分别为

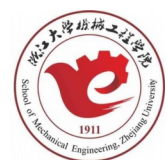
$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* \mp x_2^*) \approx |x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}$$



误差传播分析的方法和原则



(2) 对于函数 $y = f(x)$ ，若用 x^* 取代 x ，将对 y 产生什

么影响？

分析： $e^*(y) = f(x^*) - f(x)$

Mean Value
Theorem

$$e^*(x) = x^* - x$$

$$= f'(\xi)(x^* - x)$$

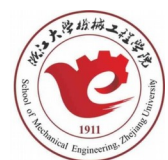
x^* 与 x 非常接近时，可认为 $f'(\xi) = f'(x^*)$ ，则有：

$$\text{绝对误差 } |e^*(y)| \approx |f'(x^*)| |e^*(x)|$$

即： x 产生的误差经过 f 作用后被放大 / 缩小了 $|f'(x)|$ 倍。
故称 $|f'(x)|$ 为放大 / 缩小因子 /* amplification factor */ 或 绝对条件数 /* absolute condition number */。



误差传播分析的方法和原则



相对误差

$$|e_r^*(y)| = \left| \frac{e^*(y)}{f(x^*)} \right| \quad |e_r^*(x)| = \left| \frac{e^*(x)}{x^*} \right|$$

$$|e_r^*(y)| = \left| \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \cdot \frac{x^*}{f(x^*)} \cdot \frac{x^* - x}{x^*} \right|$$
$$\approx \left| \frac{x^* \cdot f'(x^*)}{f(x^*)} \right| \cdot |e_r^*(x)| = \left| \frac{f'(x^*)}{f(x^*)} \right| \cdot |e^*(x)|$$

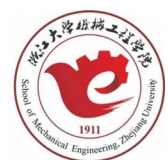
f 的条件数在某一点是 **小** \ **大** , 则称 f 在该点是 **好** 条件的 /* well-conditioned */ \ **坏** 条件的 /* ill-conditioned */ 。

相对误差条件数
/* relative condition number */

注：关于多元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可类似讨论，理论工具：Taylor 公式



误差传播分析的方法和原则



例 7 设 $x = 10 \pm 5\%$, 试求函数 $f(x) = \sqrt[n]{x}$ 的相对误差限.

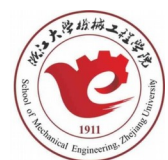
解 : 由题设知:近似值为 $x^* = 10$,绝对误差限为 $e(x^*) = 5\%$

$$f'(x^*) = \frac{1}{n} (x^*)^{\frac{1}{n}-1} = \sqrt[n]{x^*} \cdot \frac{1}{nx^*}$$

$$e_r(f^*) = \frac{e(f^*)}{f(x^*)} \approx \frac{f'(x^*)e(x^*)}{f(x^*)} = \frac{e(x^*)}{nx^*} = \frac{0.005}{n}$$



误差传播分析的方法和原则



二、几点注意事项 /* Remarks */

1、避免相近二数相

减
例： $a_1 = 0.12345$ ， $a_2 = 0.12346$ ，各有 **5** 位有效数字。而 $a_2 - a_1 = 0.00001$ ，只剩下 **1** 位有效数字。

□ 几种经验性避免方法：

$$\sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x + \varepsilon} + \sqrt{x}}; \quad \ln(x + \varepsilon) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right);$$

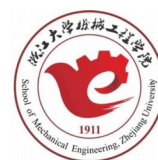
当 $|x| \ll 1$ 时 $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2};$

:

$$e^x - 1 = x \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \dots \right)$$



误差传播分析的方法和原则



2、避免小分母：分母小会造成浮点溢出 /* over flow

*3、避免大数吃小数

例：用单精度计算 $x^2 - (10^9 + 1)x + 10^9 = 0$ 的根

。精确解为 $x_1 = 10^9$, $x_2 = 1$

□ 算法 1：利用求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

在计算机内， 10^9 存为 0.1×10^{10} ，1 存为 0.1×10^1 。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。

即 1 的指数部分须变为 10^{10} ，则： $1 = 0.0000000001 \times 10^{10}$ ，取单精度时就成为：

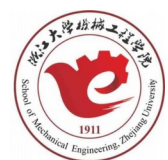
$$10^9 + 1 = 0.100000000 \times 10^{10} + 0.000000001 \times 10^{10} = 0.100000001 \times 10^{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 10^9, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

大数吃小数



误差传播分析的方法和原则



✍️ 算法 2 : 先解出 $x_1 = \frac{-b - \text{sign}(b) \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 10^9$

再利用 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1} = \frac{10^9}{10^9} = 1$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

例：按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$$1 + 2 + 3 + \dots + 40 + 10^9$$

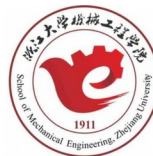
4、先化简再计算，减少步骤，避免误差积累。

一般来说，计算机处理下列运算的速度为 $(+, -) > (\times, \div) > (\exp)$

5、选用稳定的算法



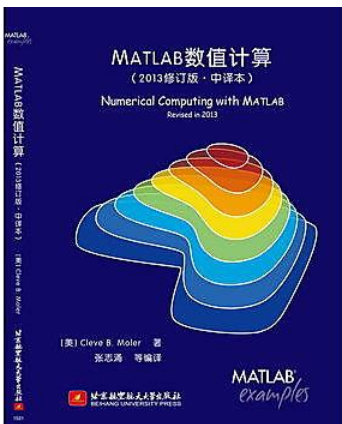
课程学习方法



- 在学习过程中，既要重视与方法有关的理论，又要重视方法的实际应用，必须注意理解设计原理及处理问题的技巧，重视有关的基本概念，误差分析、收敛分析、稳定性分析等。
- **做一定量的习题，能实际动手编程！！**
- 复习《高等数学》、《线性代数》、《程序设计》等

通过该课程学习，学生应该掌握以下几个基本知识点与技能：

- 1) 了解数值分析方法的基本概念和原理
- 2) 掌握通过计算机进行数值计算和仿真的方法
- 3) 可进行机械系统、机电系统的建模分析
- 4) 能对结果进行分析、评价



<https://ww2.mathworks.cn/moler/chapters.html>

教 材:

《 MATLAB 数值计算 (Numerical Computing with MATLAB) 》 [美] Cleve B.Moler 著, 张志涌等编译, 北京航空航天大学出版社 . 2015 第 1 版

参考书:

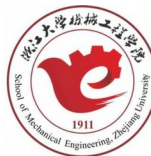
《数值方法 (MATLAB 版) (第 4 版) 》 [美] John H.Mathews 、 Kurtis D.Fink 著 周璐、陈渝、钱方等 译, 电子工业出版社 . 2005-12 第 4 版

《数值计算方法》李有法主编 高等教育出版社;

《 MATLAB 与科学计算》王沫然编著 电子工业出版社。



课程学习目标



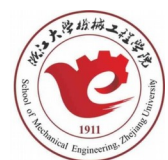
算法设计：设计求解实际问题的高效可靠的数值方法

- **有效性：**易于在计算机上实现
- **可靠性：**收敛性稳定性等有数学理论保证
- **数值实验：**要通过数值试验来证明算法是行之有效的

算法分析：对求得的数值解进行精度评估

算法优化：实现算法的高效运行

算法编程：熟悉一门计算机编程语言，如 C 语言；掌握一种科学计算软件，如 Matlab



1.期末考试占比 30%

2.8 次平时课程作业、出勤及课题讨论表现占比 40%

(一次点名不到扣 5 分，有不到纪录的同学会再次点名)。

3.大作业占比 30% (小组 3 人 - 有标准，实践限制，有明确方程，数值求解与理论求解对比，按照科研报告格式)。引导鼓励学生结合国防军工、航天登月、大国重器等国家重大科研项目的需求制定自己大作业研究题目，根据与国家战略需求的契合度情况给予成绩调整。

复杂机械部件应力分布分析

界面设计

核心算法设计

我们初次选题,也是因为老师在老师广泛的选题空间下,选择了发挥空间极大、也是较为陌生的领域,利用这次大作业的机会,也基于个人的兴趣,对 `matlab` 做出一次探知。一个人一旦对某事物有了浓厚的兴趣,就会主动去求知、去探索、去实践,并在求知、探索、实践中产生愉快的情绪和体验。这样才能主动学习,并且学好到精通。

悟性，通常人认为指顿悟，慧根，我觉得就是对一个问题不断的思索，将自己的体会和感受融合，获得属于自己的知识。有很多事情、问题，都是可以想明白的。只有不停的想，才能想明白，想透彻。

悟性，通常人认为指顿悟，慧根，我觉得就是对一个问题不断的思索，将自己的体会和感受融合，获得属于自己的知识。有很多事情、问题，都是可以想明白的。只有不停的想，才能想明白，想透彻。

总结心得

通过 Matlab 进行魔方的建模与还原

数据库建立

1.1坐标点提取

-----利用matlab GUI函数提取目标点的坐标

学生宿舍区: 蓝田 云峰 丹青 白沙 翠柏 大食堂 校医院
东教学区: 东一至东六 图书馆 教师办公楼 生物报告厅
西教学区: 西一至西六 大学生活动中心 生物实验室 计算机中心 会议中心 海洋楼 实验中心
运动区: 体育馆 风雨操场 东操场 西操场 灯光篮球场 网球场
医学院区: 医学院附设学院 医学院图书馆 人工气候室 生命科学学院
农生环区: 农生环 李厚德楼 生命科学研究院 行政服务办事大厅
其他: 月牙楼 小操场 东一门 东二门 东三门 北一门 西一区 大草坪



地标数据采集

- ★N: 找最短
- ★Dijkstra: 求图中最小的，和它连着的 min，为当前最小值，current=0; 然后遍历下邻边min
- ★图里找到了结点时，就不再考虑，路径点加一
- ★将顶点加入ActiveList中，不再考虑，路径点加一
- ★从源点到四个方向都走一次，找到四个点就加入Open List
- ★N: 超时的话，不要再继续降序，不在Active List，也不参加排序
- ★文字卡点成为“多步数问题”
- ★用数组记录位置
- ★N: 多步骤
- ★只需求出最佳状态即为多步数，对每步进行标记即可
- ★根据初始点的个数
- ★标记一段操作为“算法成功”



核心算法设计

GUI界面设计

最终GUI呈现如下:



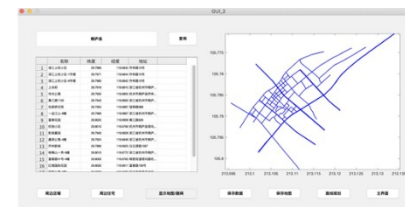
GUI界面设计和路径规划结果展示



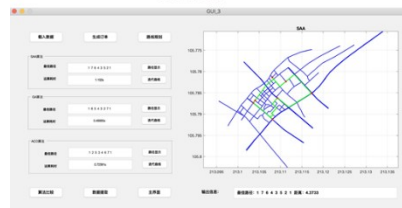
紫金港校园导航



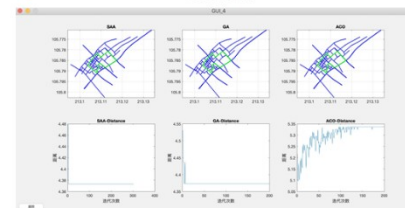
数据采集



数据提取



算法设计



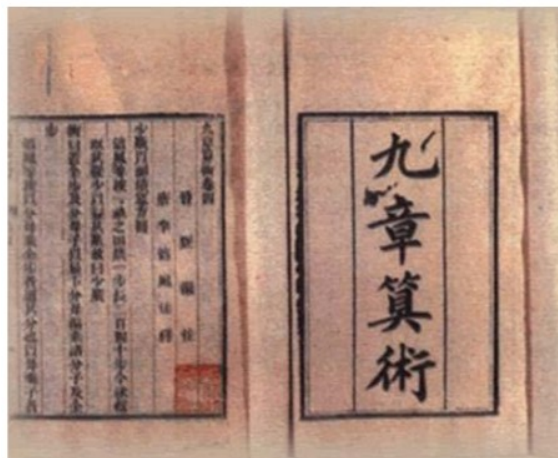
算法对比

物流配送系统设计

例：一个古老的数学问题

今有 上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。
问上、中、下禾实一秉各几何？

—— 《九章算术》



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

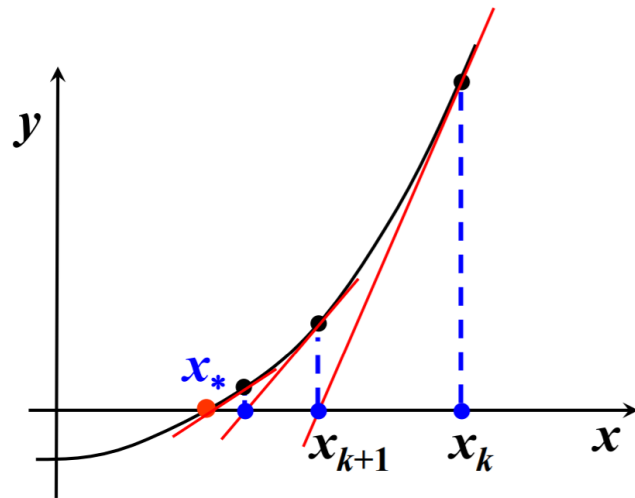
$$Ax = b$$

第二课—线性方程组数值求解

例：怎样计算平方根？如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{201}$, \sqrt{n}

求解方程： $f(x) = x^2 - 2$

Newton迭代法： $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right)$



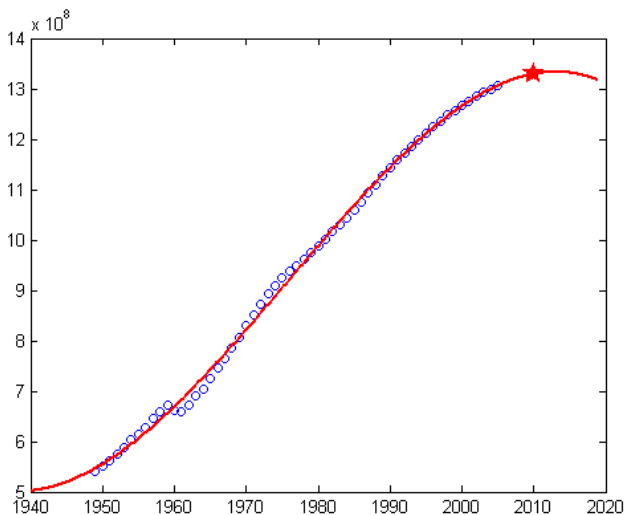
$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.500000, \quad x_2 = 1.416667, \\ x_3 = 1.414216, \quad x_4 = 1.414214$$

第三课—非线性方程数值求解

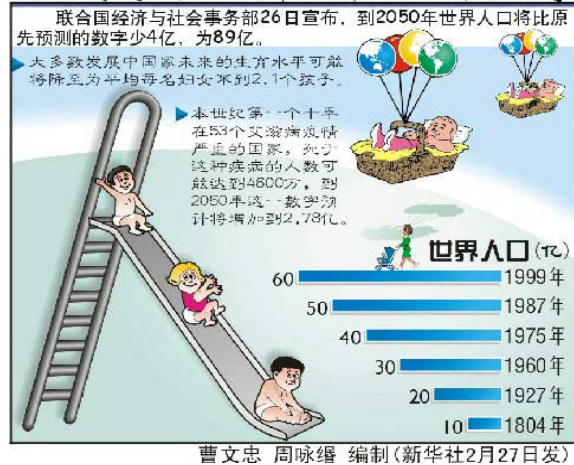
例：人口预测

表格中是我国 1950 年到 2005 年的人口数（见中国统计年鉴），试预测未来的人口数

年份	人口(万)
1950	55196
1955	61465
1960	66207
1965	72538
1970	82992
1975	92420
1980	98705
1985	105851
1990	11433
1995	121121
2000	126743
2005	130756

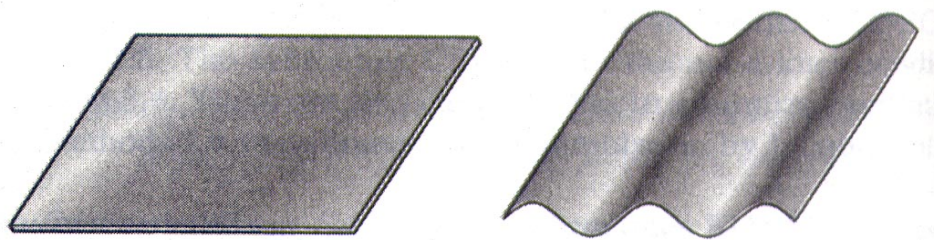


联合国调低2050年世界人口预测数字



第四课—最小二乘与曲线拟合

例：铝制波纹瓦的长度



假设要求波纹瓦长 48 英寸，每个波纹的高度（从中心线）为 1 英寸，且波纹是以近似 2π 英寸为一个周期的正弦函数

$f(x) = \sin x$ ，求制做一块波纹瓦所需铝板的长度 L 。

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} \, dx$$

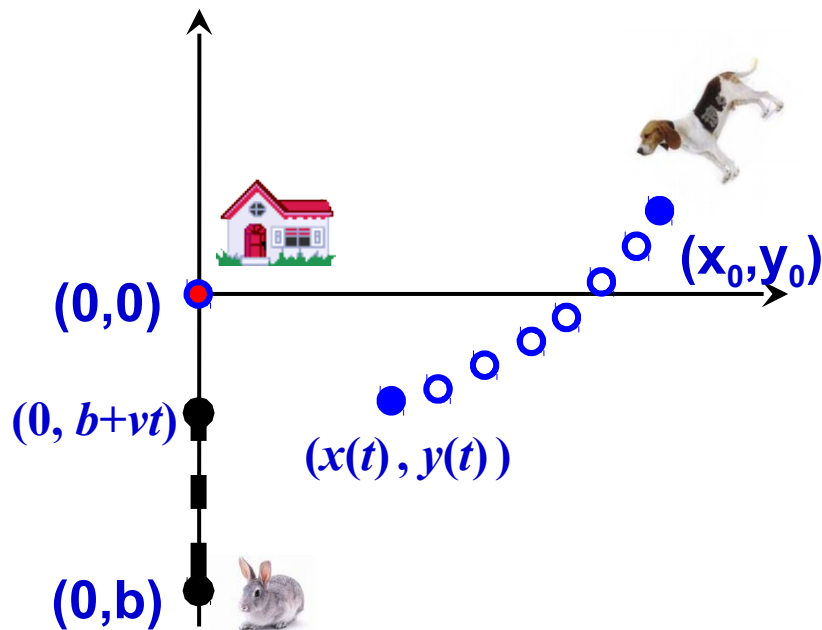
上述积分为第二类椭圆积分，无法通过解析方法计算

第六课—积分问题的数值计算

例：猎狗追兔问题

在旷野上有一只野兔和一条猎狗，猎狗发现野兔并开始追踪，同时野兔也发现猎狗，开始跑向兔穴。假定猎狗的追踪方向始终对着野兔，猎狗和野兔的奔跑速度分别为 u 和 v 。

问：猎狗能否在野兔进洞前抓住野兔？

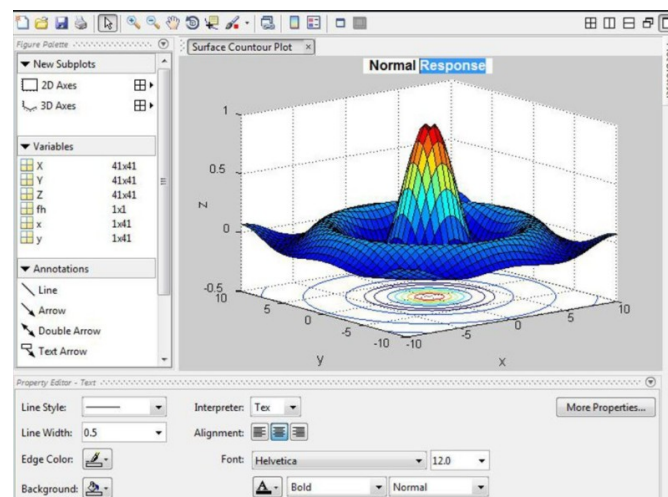


$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - (b + vt)}{x}$$

MATLAB (MATrix LABoratory) 语言是一种广泛应用于工程计算及数值分析领域的新型高级语言，是国际公认的最优秀的工程应用开发环境。 MATLAB 功能强大、简单易学、编程效率高。 MATLAB 已经成为线性代数、自动控制理论、数字信号处理、时间序列分析、动态系统仿真、图像处理等课程的基本教学工具。

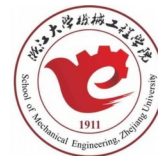


MATLAB





MATLAB 介绍

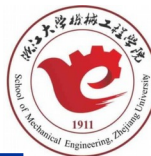


MATLAB R2017b - academic use

The image shows the MATLAB R2017b interface. The top menu bar includes '主页' (Home), '绘图' (Plots), and 'APP'. The toolbar contains various icons for file operations, variable management, code analysis, Simulink, layout, and help. The current file is 'IntroductionToStreamingSignalProcessingExample' located in 'C:\Users\MY\Documents\MATLAB\Examples\dsp'. The Editor window displays the following MATLAB script:

```
1 close all
2 clear
3
4 %generate the noisy signal which will be filtered
5 x= cos(2*pi*12*[0:0.001:1.23]);
6 x(end) = [];
7 [b a] = butter(2, [0.6 0.7], 'bandpass');
8 filtered_noise = filter(b,a,randn(1, length(x)*2));
9 x = (x + 0.5*filtered_noise(500:500+length(x)-1))/length(x)*2;
10 % This script is available at https://dadorran.wordpress.com search for
11 % filtering matlab demo
12 plot(x)
13 title('Noisy signal')
14 xlabel('Samples');
15 ylabel('Amplitude')
16
```

The Command Window is visible at the bottom left, showing the prompt 'fx|'.



感谢聆听，欢迎讨论！