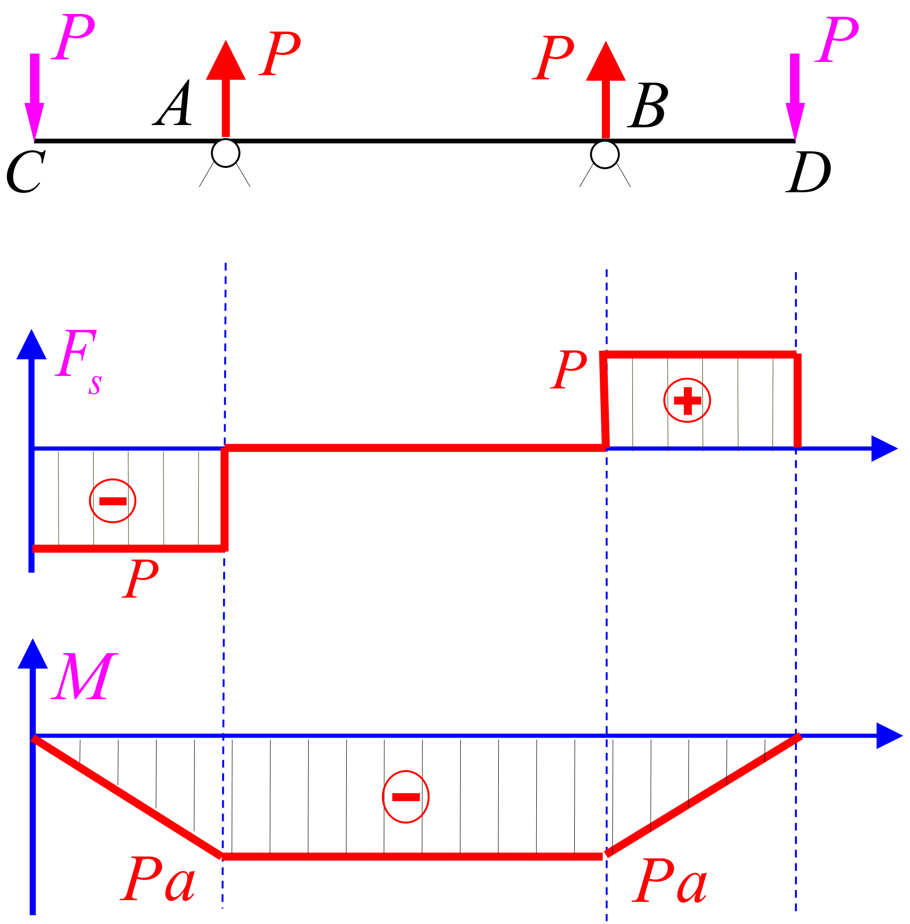
第五章　弯曲应力

重要概念的回顾与强化



AB段： $F_s = 0, \ \ M = \text{const}$ （纯弯曲）

重要概念的回顾与强化

观察变形
提出假设

平面假设
单向受力假设
中性层、中性轴

几何关系

变形的分布规律

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

物理关系

应力的分布规律

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

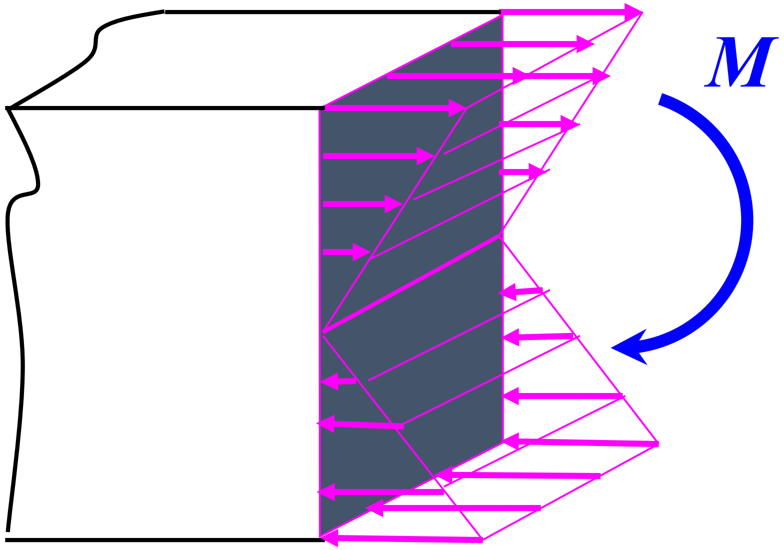
静力关系

建立公式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

重要概念的回顾与强化

纯弯曲的正应力



$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

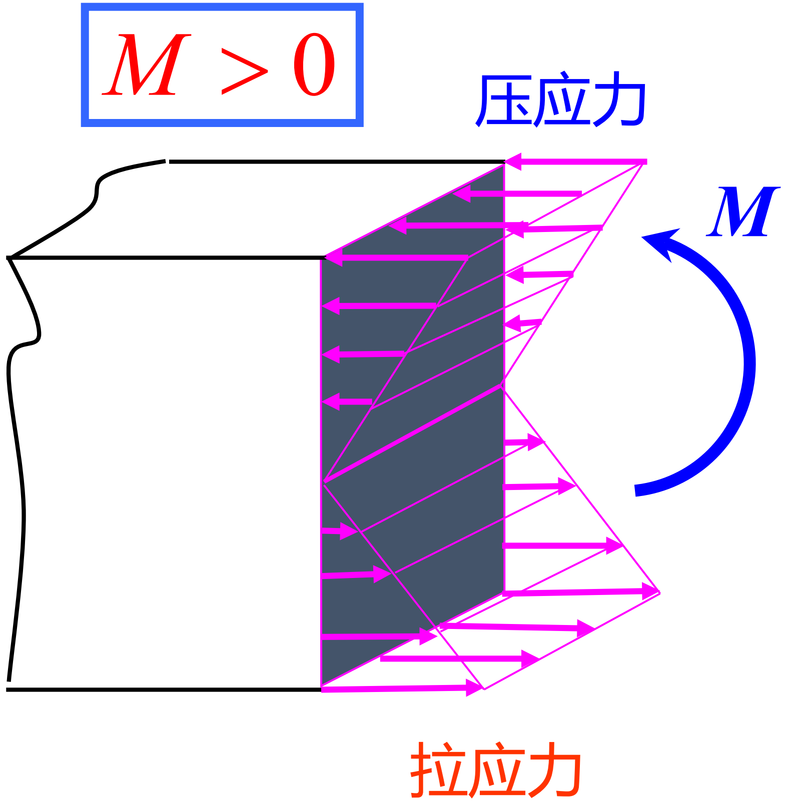
- 正应力大小与其到中性轴距离成正比；
- 与中性轴距离相等的点正应力相等；
- 中性轴上正应力为零。

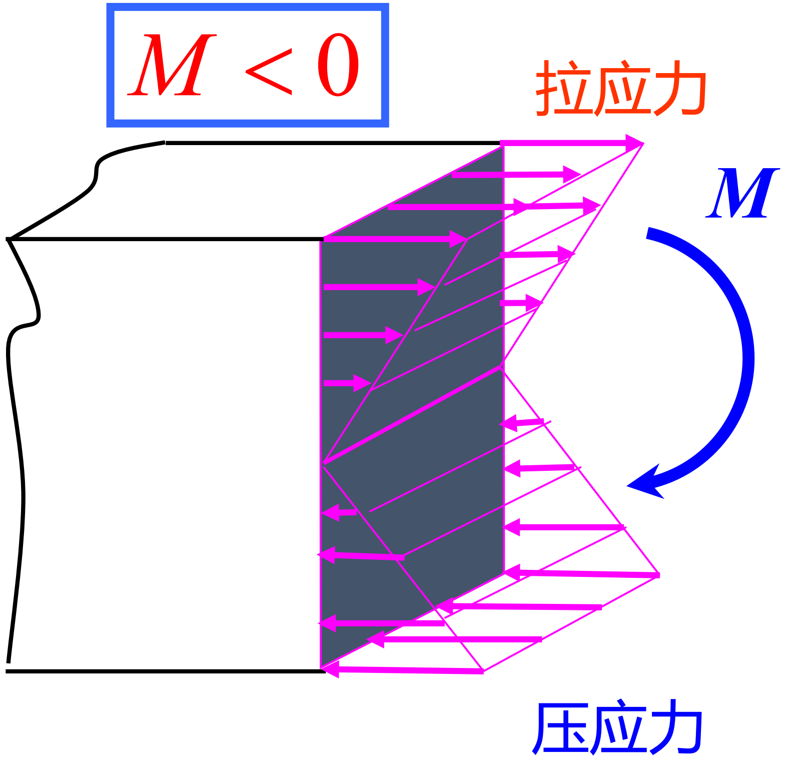
重要概念的回顾与强化

纯弯曲的正应力

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

- 数值根据公式计算
- 拉压根据变形判断

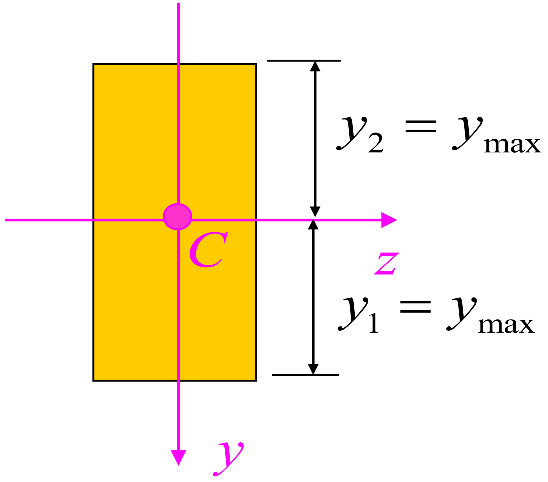




纯弯曲的正应力

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

当中性轴是横截面的对称轴时：



$$y_1 = y_2 = y_{max}$$

$$\sigma_{t\max} = \sigma_{c\max}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_Z} = \frac{M}{W_Z} \qquad \sigma_{\min} = -\frac{M}{W_Z}$$

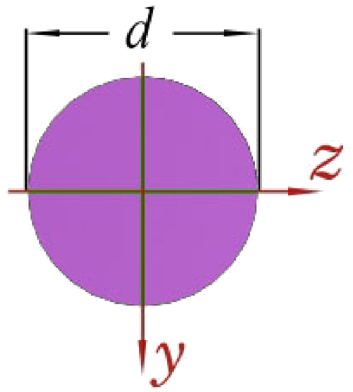
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$ ➡ 抗弯截面系数

§5.2 纯弯曲时的正应力

常见截面的I_Z和W_Z

$$I_Z=\int_A y^2 dA$$

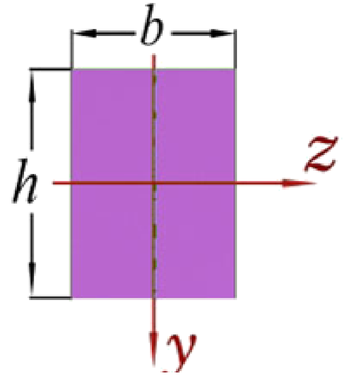
$$W_z=\frac{I_Z}{y_{max}}$$



圆截面

$$I_Z=\frac{\pi d^4}{64}$$

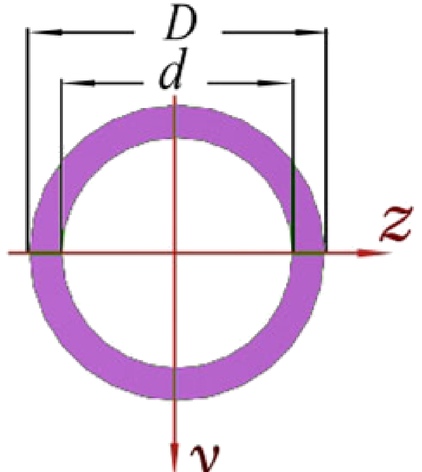
$$W_z=\frac{\pi d^3}{32}$$



矩形截面

$$I_Z=\frac{bh^3}{12}$$

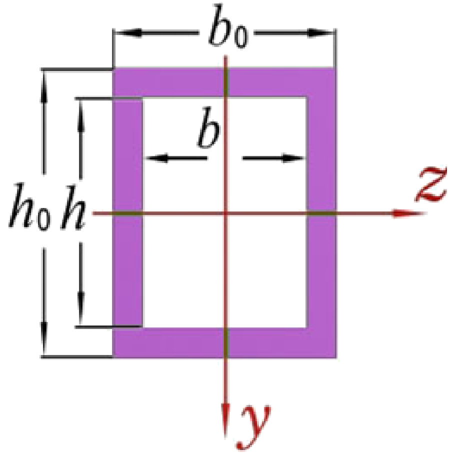
$$W_z=\frac{bh^2}{6}$$



空心圆截面

$$I_Z=\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

$$W_z=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

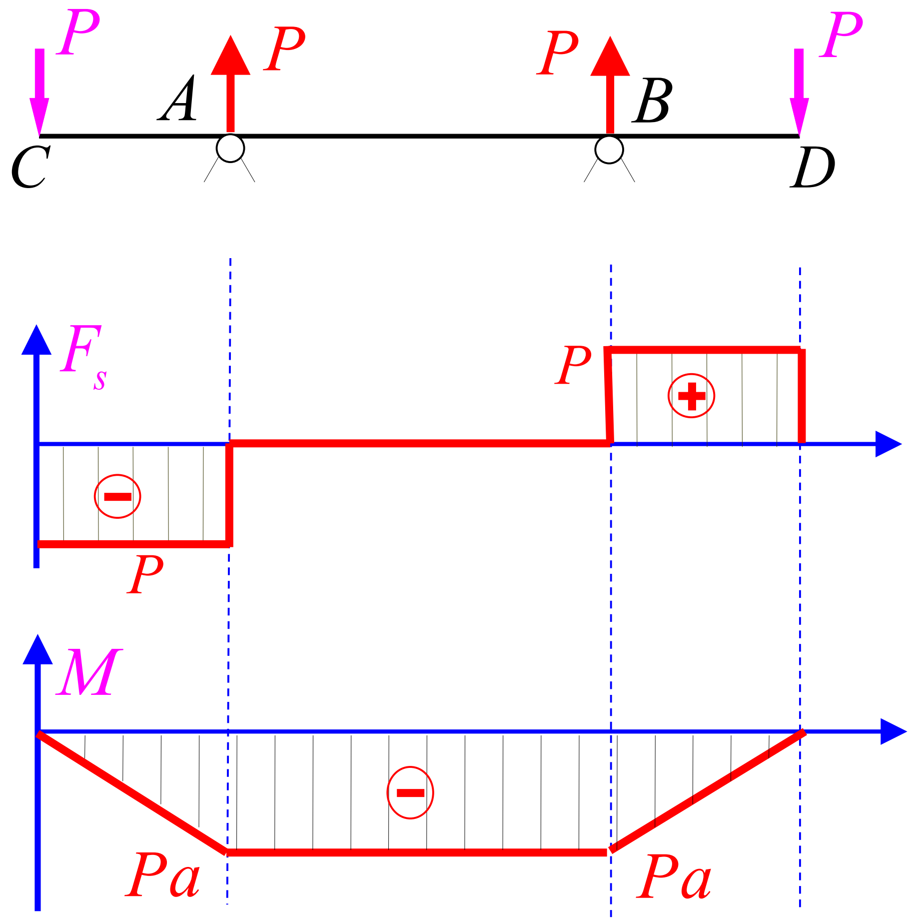


空心矩形截面

$$I_Z=\frac{b_0h_0{}^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$$

$$W_z=(\frac{b_0h_0{}^3}{12}-\frac{bh^3}{12})/(h_0/2)$$

§5.3 横力弯曲时的正应力



AC和BD段：　$F_s \neq 0,\ M \neq 0$　（横力弯曲）

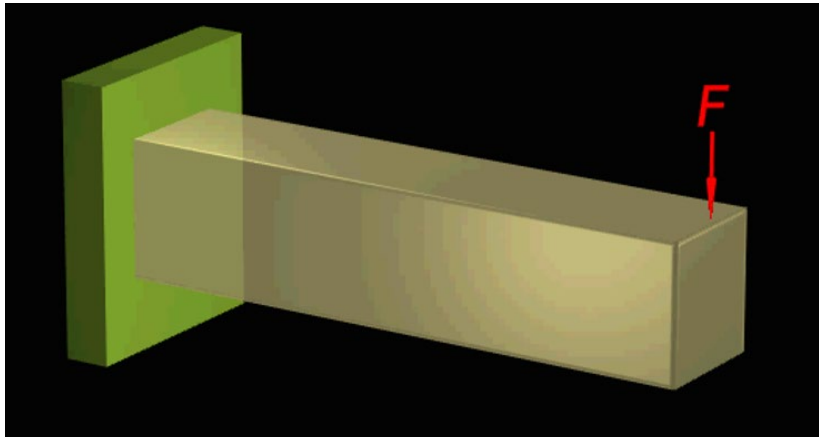
§5.3 横力弯曲时的正应力

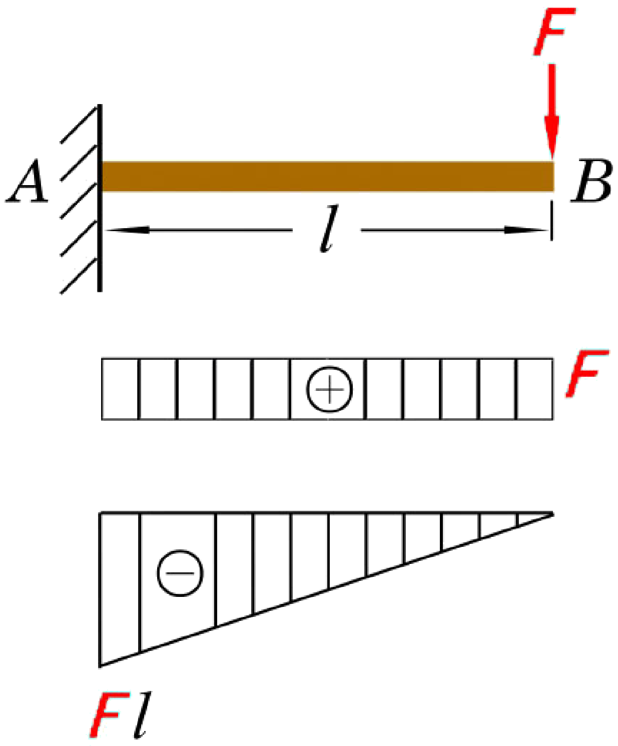
纯弯曲正应力公式 $$\sigma = \frac{M\,y}{I_z}$$

- 在平面假设和单向受力假设基础上推导，实验证明在纯弯曲情况下正确。
- 对于横力弯曲，由于剪力存在，横截面将产生剪切变形，横截面不再保持为平面。
- 此外，在与中性层平行的纵截面上，有时还有横向力引起的挤压应力。
- 梁在纯弯曲时所作的平面假设和单向受力假设都不成立。

§5.3 横力弯曲时的正应力

1、横力弯曲





$F_s \neq 0, \quad M \neq 0$ （横力弯曲）

弹性力学精确分析表明，当跨度 l 与横截面高度 h 之比 $l/h > 5$时，

即为细长梁时，纯弯曲正应力公式对于横力弯曲近似成立。

§5.3 横力弯曲时的正应力

1、横力弯曲

横力弯曲正应力公式 $$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

公式适用范围

1、细长直梁的纯弯曲或横力弯曲；

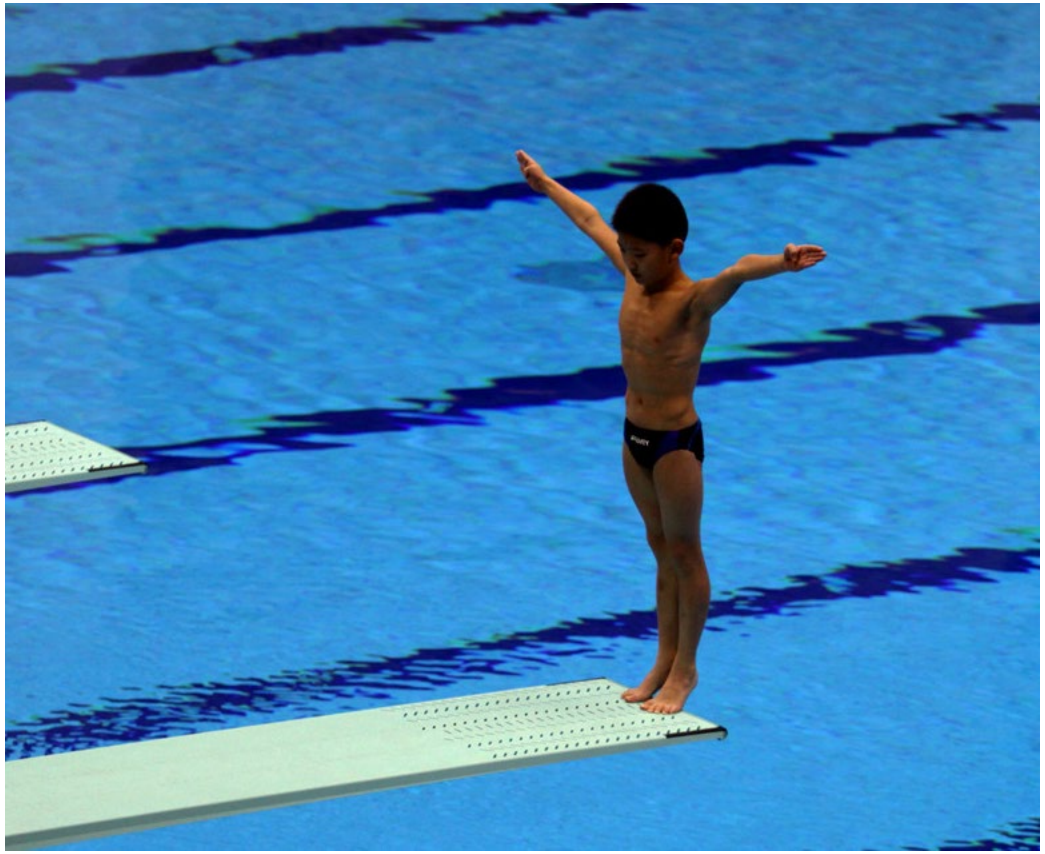
2、在弹性范围内；

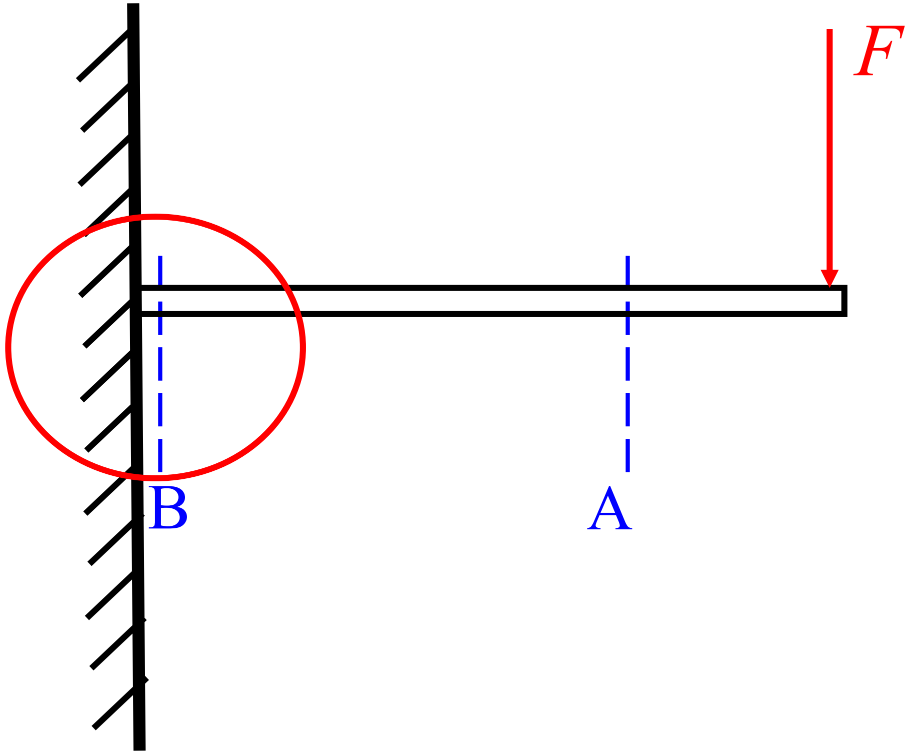
3、对称弯曲（横截面惯性积I_{yz}=0）。

横力弯曲最大正应力 $$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

纯弯曲最大正应力 $$\boldsymbol{\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}}$$

§5.3 横力弯曲时的正应力



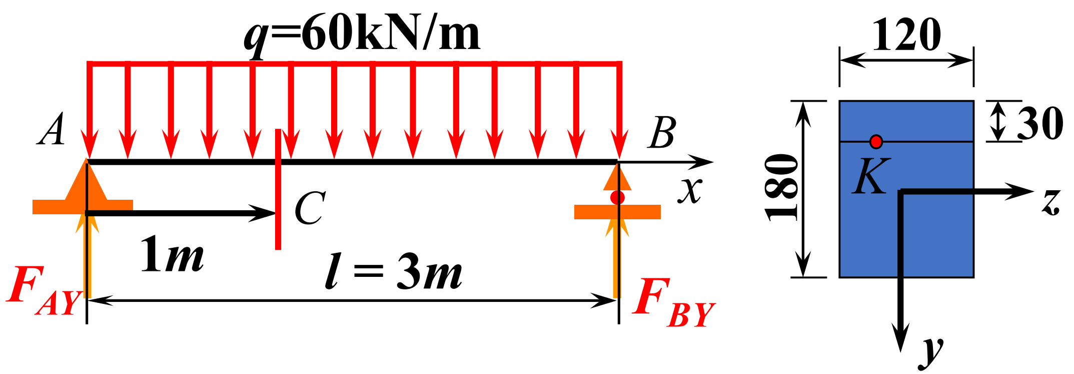


如果跳板发生断裂，则更可能是出现在A处还是出现在B处横截面？

横截面上哪个点？

例题5.1

如图中所示的简支梁，上面作用有均布载荷，大小为q = 60 kN/m。简支梁的横截面为矩形截面，高为180mm，宽为120mm。在简支梁的C截面处，有一点K，距离其上边缘为30mm。试求：



1、C截面上K点正应力

2、C截面上最大正应力

3、全梁上最大正应力

4、若已知E = 200 GPa，求C截面的曲率半径ρ

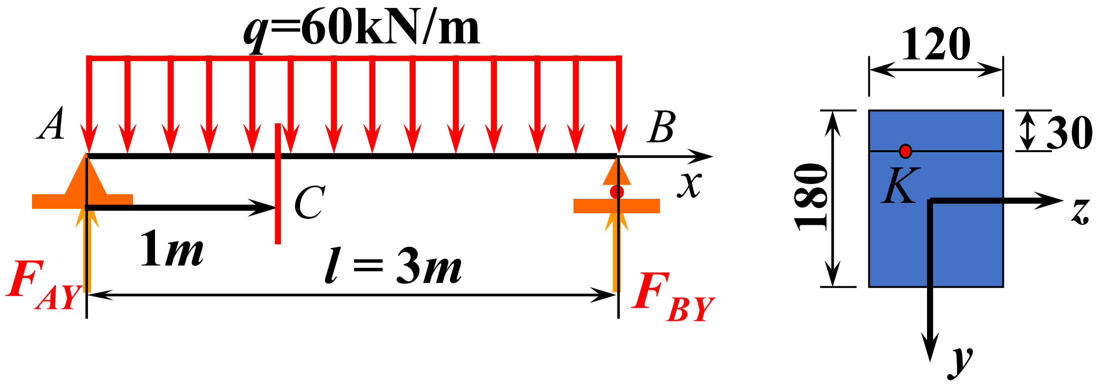
例题5.1

1、C截面上K点正应力

2、C截面上最大正应力

3、全梁上最大正应力

4、已知E=200 GPa，求C截面的曲率半径ρ



解：（1）剪力和弯矩

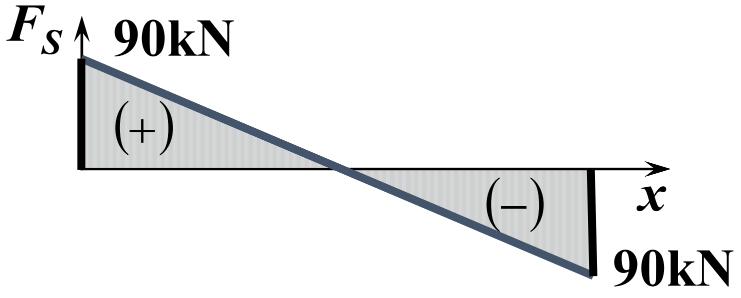
$$F_{Ay}=90\text{kN} \qquad F_{By}=90\text{kN}$$

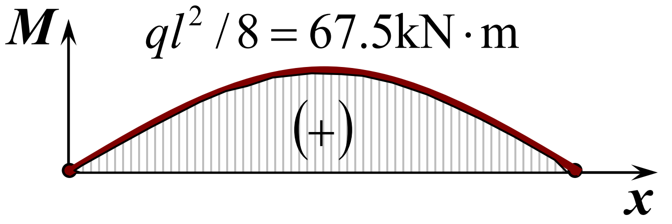
$$M_C=90\times1-60\times1\times0.5=60\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$I_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{0.12\times0.18^3}{12}=5.832\times10^{-5}\text{m}^4$$

$$\sigma_K=\frac{M_C\cdot y_K}{I_z}=\frac{60\times10^3\times(\frac{180}{2}-30)\times10^{-3}}{5.832\times10^{-5}}=61.7\times10^6\text{Pa}=61.7\text{MPa}$$

（注意：压应力）





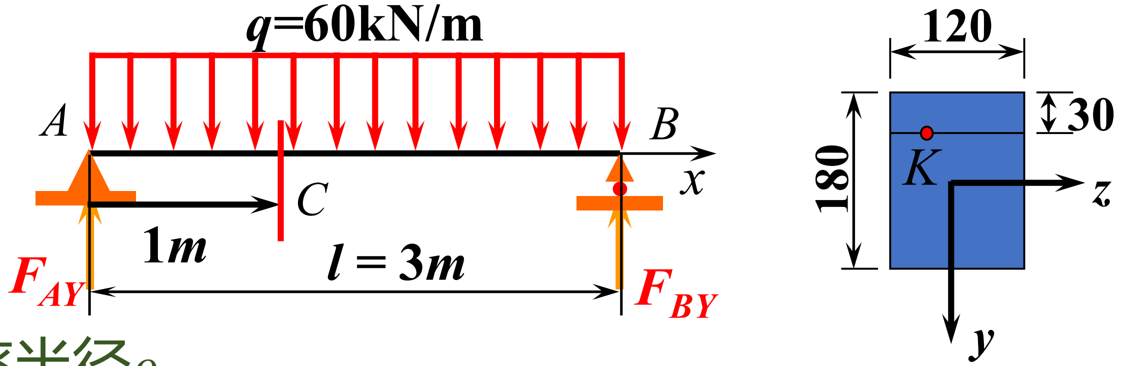
例题5.1

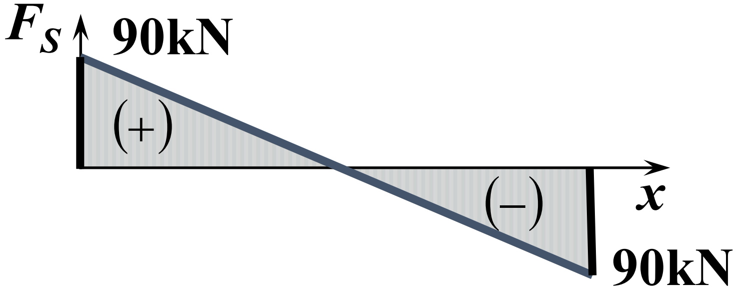
1、*C*截面上*K*点正应力

2、*C*截面上最大正应力

3、全梁上最大正应力

4、已知E=200 GPa，求C截面的曲率半径ρ

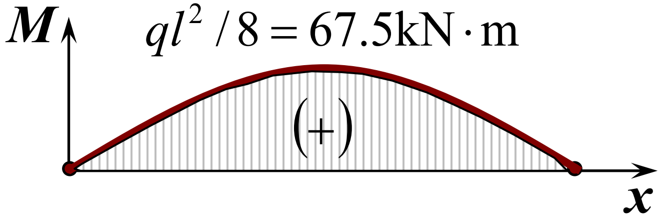




解：（2）求截面最大正应力

C截面弯矩 $M_C = 60\text{kN}\cdot\text{m}$

C截面惯性矩 $I_Z = 5.832\times10^{-5}\text{m}^4$



$$\sigma_{C\max} = \frac{M_C \times y_{\max}}{I_Z}$$

$$= \frac{60\times10^3 \times \frac{180}{2} \times 10^{-3}}{5.832\times10^{-5}} = 92.55\times10^6 \ \text{Pa} = 92.55 \ \text{MPa}$$

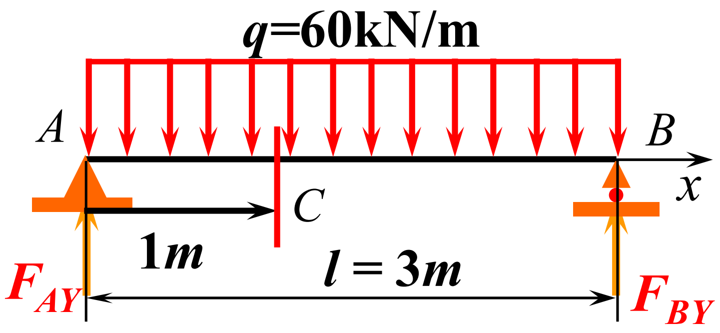
例题5.1

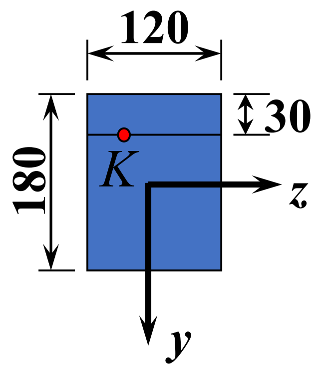
1、C截面上K点正应力

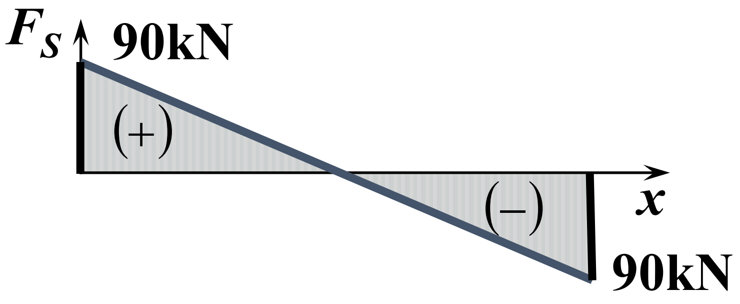
2、C截面上最大正应力

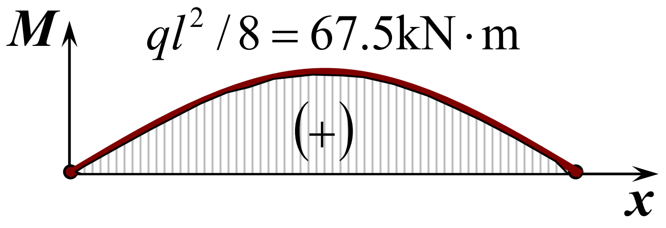
3、全梁上最大正应力

4、已知E=200 GPa，求C 截面的曲率半径ρ









解：（3）全梁最大正应力

最大弯矩 $M_{\max} = 67.5\text{kN}\cdot\text{m}$

截面惯性矩 $I_Z = 5.832\times10^{-5}\text{m}^4$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}y_{\max}}{I_Z}$$

$$= \frac{67.5\times10^3\times\dfrac{180}{2}\times10^{-3}}{5.832\times10^{-5}} = 104.17\times10^6\ \text{Pa} = 104.17\ \text{MPa}$$

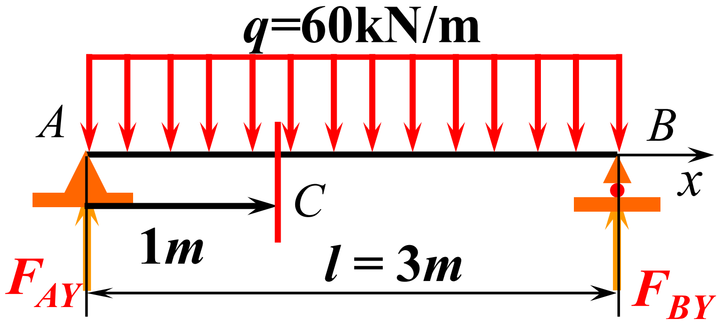
例题5.1

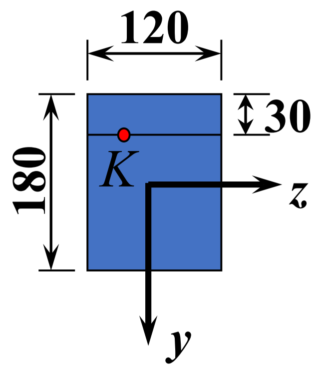
1、C截面上K点正应力

2、C截面上最大正应力

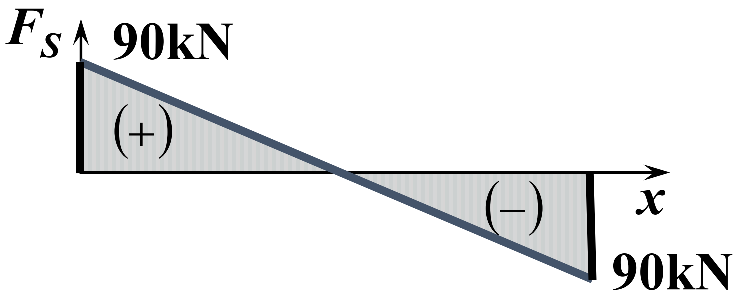
3、全梁上最大正应力

4、已知E=200 GPa，求C 截面的曲率半径ρ





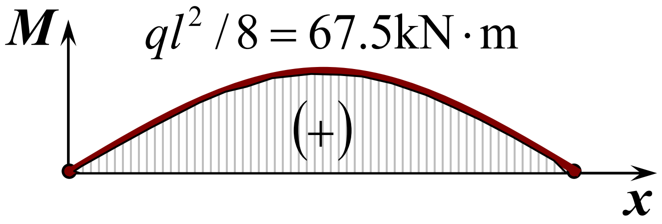
解：（4）C截面的曲率半径ρ



$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

$$\rho_C=\frac{EI_Z}{M_C}$$

$$=\frac{200\times10^9\times5.832\times10^{-5}}{60\times10^3}=194.4\ \ \text{m}$$



2、强度准则

梁内的最大工作应力不超过材料的许用应力。

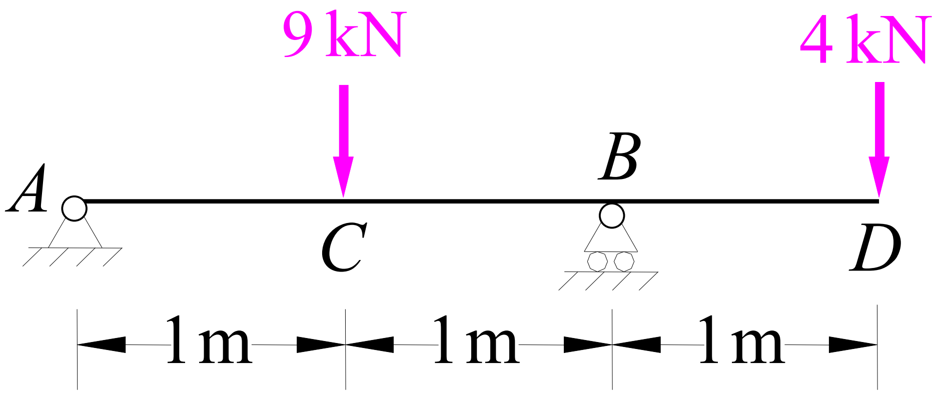
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_Z} = \frac{M_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

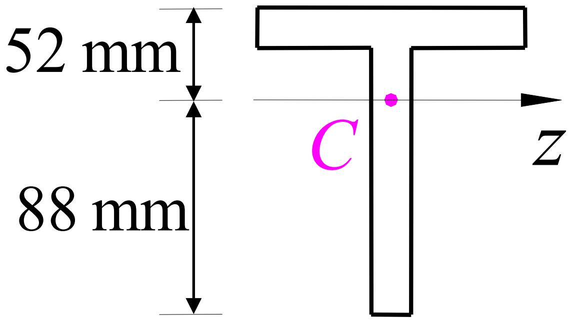
（1）强度校核 $\frac{M_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma]$

（2）设计截面 $W_Z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$

（3）确定许可载荷 $M_{\max} \leq W_Z[\sigma]$

例题5.3 T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图示，许用拉应力$[\sigma_t] = 30\ \text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c] = 60\ \text{MPa}$， 已知截面对形心轴z的惯性矩为$I_z = 7.63\times10^{-6}\ \text{m}^4$，试校核此梁的强度。





分析： 对于铸铁梁，拉伸和压缩力学性能不同

在危险截面处，拉伸强度和压缩强度都应校核

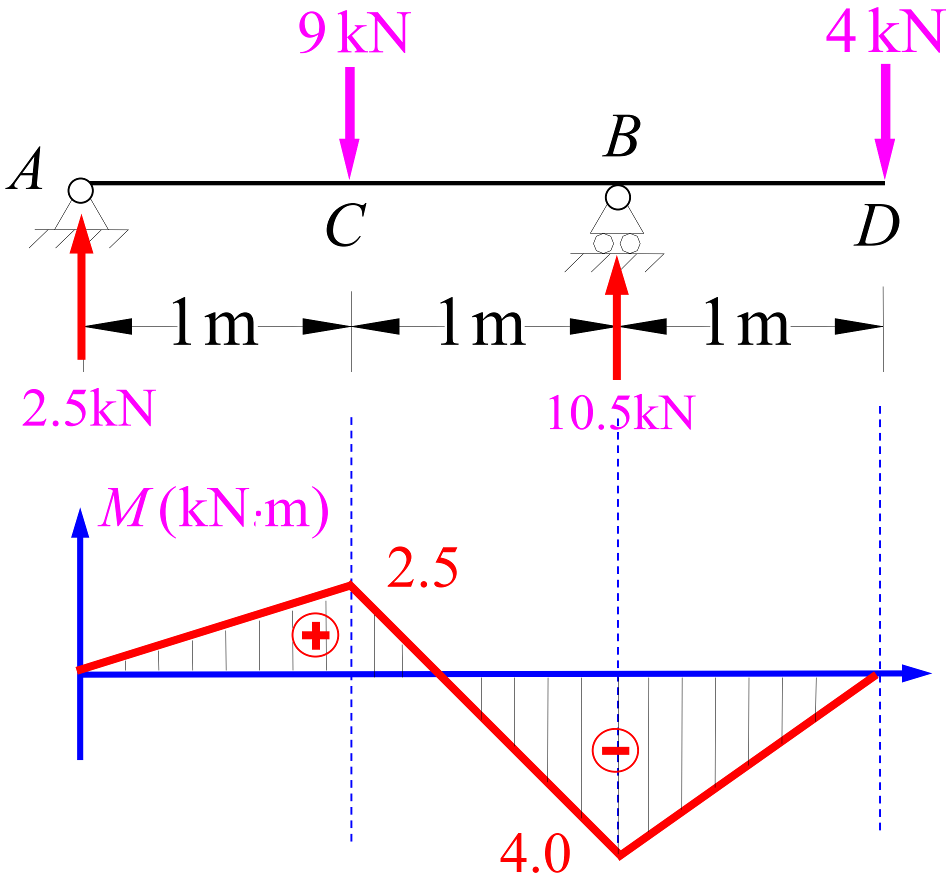
例题5.3 T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图示，许用拉应力$[\sigma_t] = 30$ MPa，许用压应力$[\sigma_c] = 60$ MPa， 已知截面对形心轴z的惯性矩为$I_z = 7.63\times10^{-6}$ m^4，试校核此梁的强度。

解： 求梁的支座约束力

F_{RA}=2.5 kN， F_{RB} = 10.5 kN

确定危险截面

对只有集中力作用情形，弯矩图各段均为直线且在各集中力作用处，弯矩图有转折（尖角）。



例题5.3 T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图示，许用拉应力$[\sigma_t] = 30$ MPa，许用压应力$[\sigma_c] = 60$ MPa， 已知截面对形心轴z的惯性矩为$I_z = 7.63\times10^{-6}$ m^4，试校核此梁的强度。

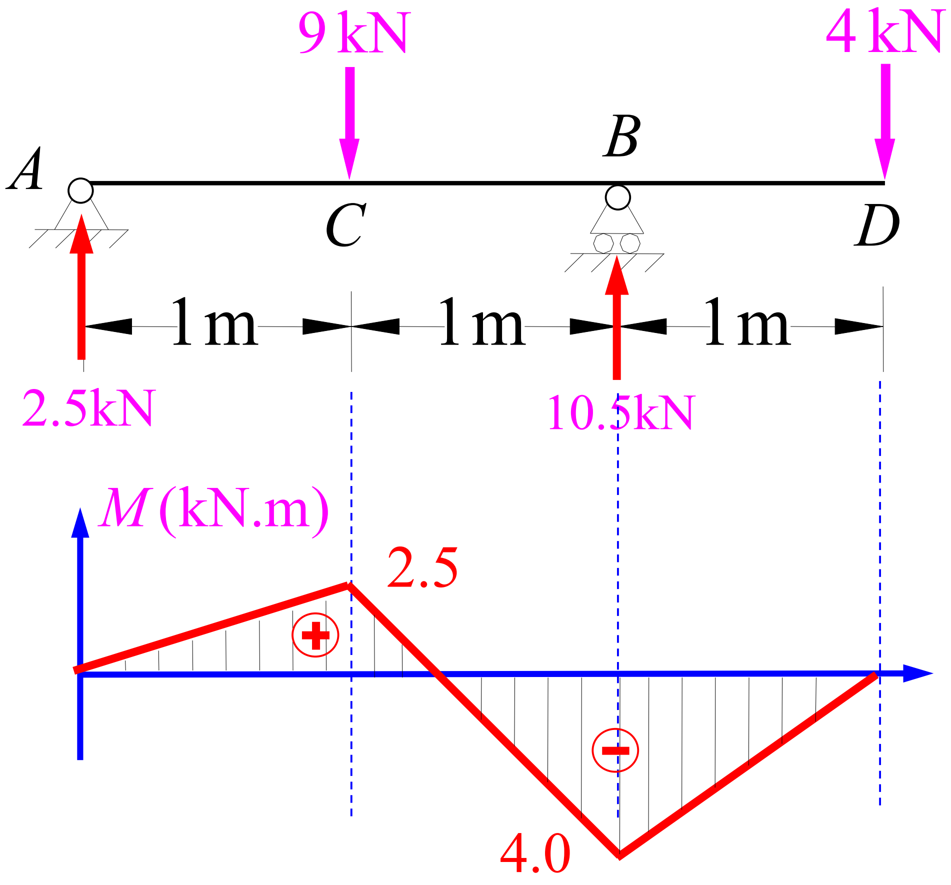
解：先确定危险截面

（1）截面B （上部受拉）

$$M_B = 4.0\ \text{kN.m}$$

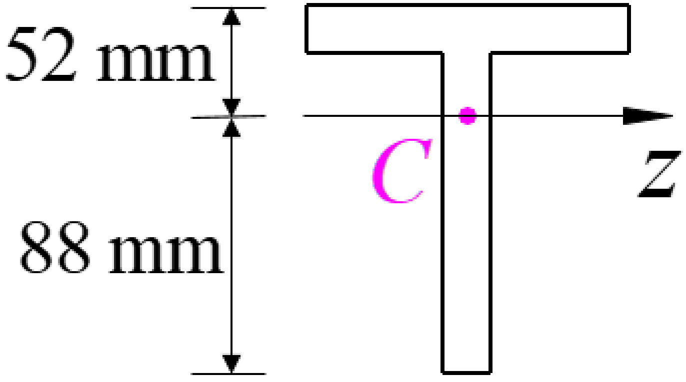
（2）截面C （下部受拉）

$$M_C = 2.5\ \text{kN.m}$$



带入计算之前，分析哪些部位比较危险

例题5.3 T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图示，许用拉应力$[\sigma_t]=30\ \mathrm{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=60\ \mathrm{MPa}$，已知截面对形心轴z的惯性矩为$I_z=7.63\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$，试校核此梁的强度。



解：强度校核 $I_z=7.63\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$

B截面(上拉下压): $M_B=4.0\ \mathrm{kN.m}$

$$\sigma_{tB}=\frac{M_B\cdot y_{t\max}}{I_z}=\frac{4.0\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}}=27.3\,\mathrm{MP_a}<[\sigma_t]=30\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{cB}=\frac{M_B\cdot y_{c\max}}{I_z}=\frac{4.0\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}}=46.1\,\mathrm{MP_a}<[\sigma_c]=60\mathrm{MPa}$$

C截面(上压下拉): $M_C=2.5\ \mathrm{kN.m}$

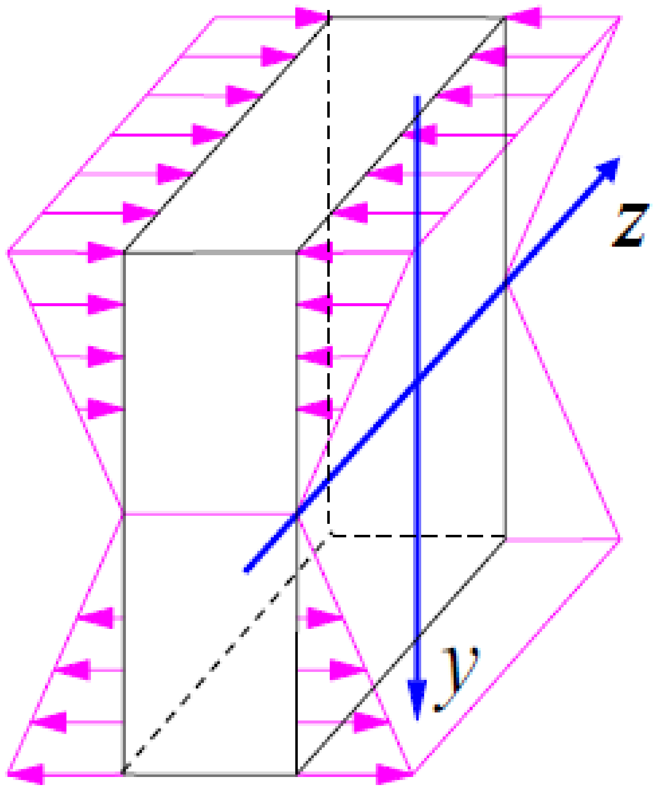
$$\sigma_{tC}=\frac{M_C\cdot y_{t\max}}{I_z}=\frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}}=28.8\,\mathrm{MP_a}<[\sigma_t]=30\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{cC}=\frac{M_C\cdot y_{c\max}}{I_z}=\frac{2.5\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}}=17.0\,\mathrm{MP_a}<[\sigma_c]=60\mathrm{MPa}$$

$\boxed{\text{此梁安全}}$

1、矩形截面梁

$$\begin{cases} \mathbf{M}\text{:} \quad \sigma = \dfrac{M y}{I_z} \\[2em] \mathbf{F_S}\text{:} \quad F_s \Leftrightarrow \tau \ ? \end{cases}$$



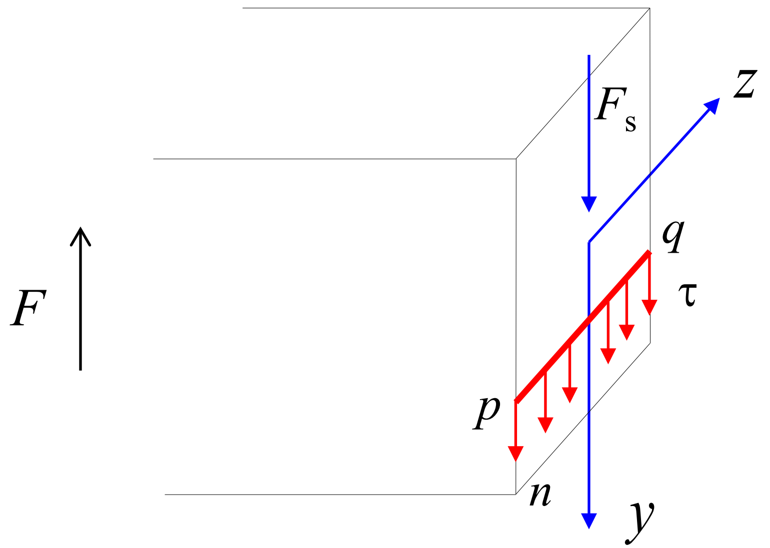
§5.4 弯曲切应力

1、矩形截面梁

假设

(1) 横截面上各点切应力与剪力平行 $(\tau // F_s)$;

(2) 切应力沿截面宽度方向 (pq) 均匀分布。



§5.4 弯曲切应力

1、矩形截面梁

假设

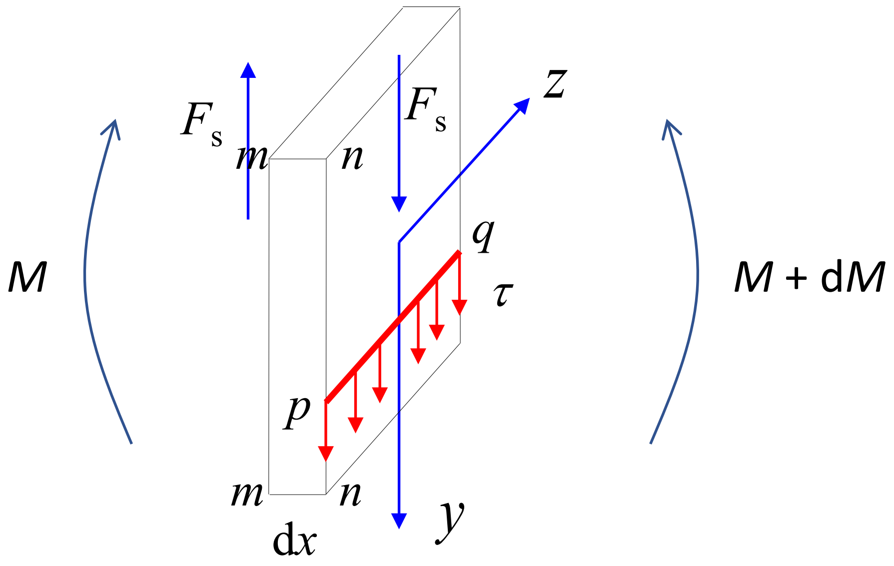
（1）横截面上各点切应力与剪力平行 $(\tau\, //\, F_s)$;

（2）切应力沿截面宽度方向（*pq*）均匀分布。

（3）横力弯曲正应力和纯弯曲正应力近似相同

左右横截面上

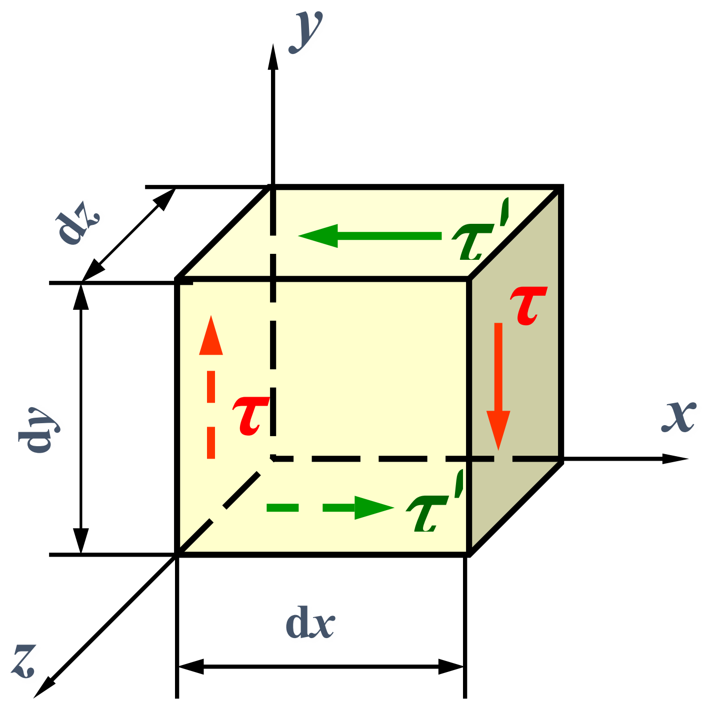
- 正应力已知
- 切应力未知



切应力互等定理

$$\boxed{\tau' = \tau}$$

- 在相互垂直的两个平面上，切应力**必然成对存在**，且数值相等；
- 两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。



§5.4 弯曲切应力

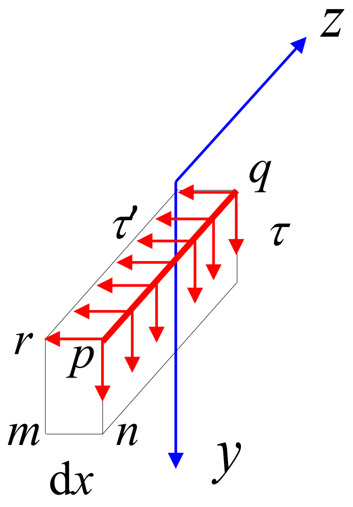
1、矩形截面梁

假设

（1）横截面上各点切应力与剪力平行 $(\tau // F_s)$;

（2）切应力沿截面宽度方向（pq）均匀分布。

（3）横力弯曲正应力和纯弯曲正应力近似相同



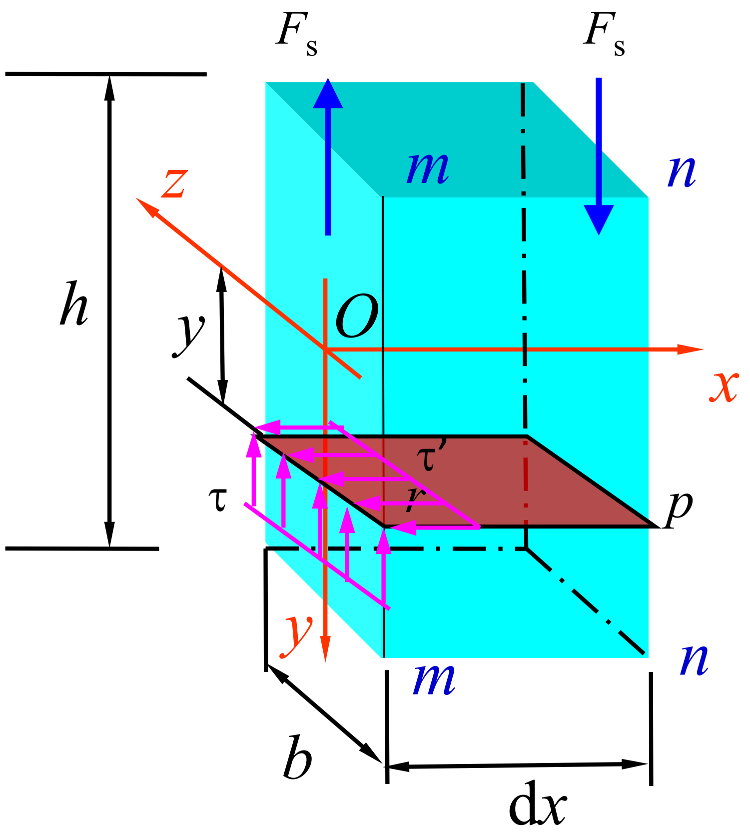
转换思路：

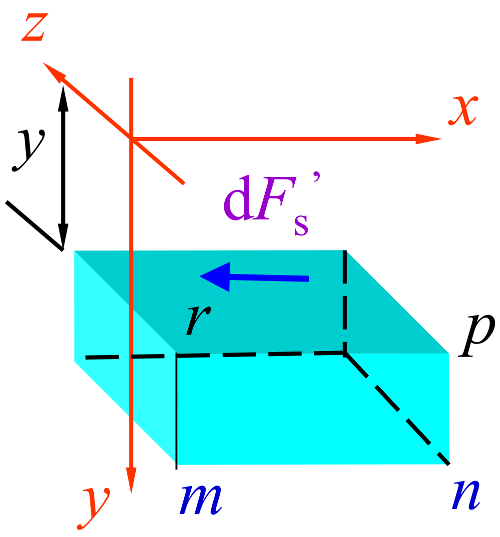
通过求τ' ，间接得τ

平行于中性层的平面上存在均匀分布切应力 τ'

§5.4 弯曲切应力

沿*pr*所在的平面（平行于中性层）切出一个单元体





*Pr*平面上的合力 $dF_s' = \tau' b dx$

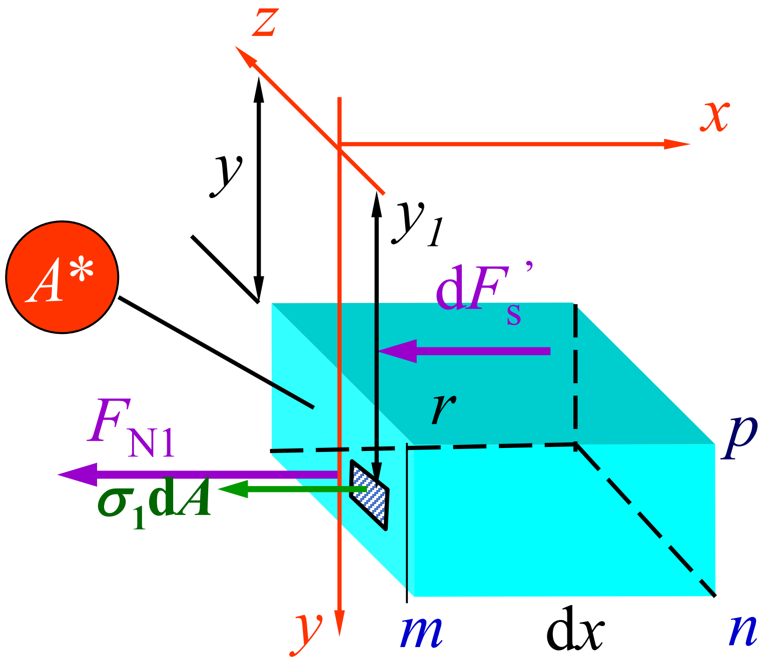
沿*pr*所在的平面（平行于中性层）切出一个单元体

m 横截面上存在正应力 σ_1

$$F_{N1} = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \int_{A^*} \frac{My_1}{I_z} \mathrm{d}A$$

$$= \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A = \frac{M}{I_z} S_z^{\ *}$$

A*是距中性轴为y的横线以外部分的横截面面积



$$S_z^{\ *} = \int_{A^*} y_1 dA$$

面积为A*的这部分横截面对z轴的静矩

§5.4 弯曲切应力

沿*pr*所在的平面（平行于中性层）切出一个单元体

n 横截面上存在正应力 σ_2

$$F_{N2}=\int_{A^*}\sigma_2 dA$$

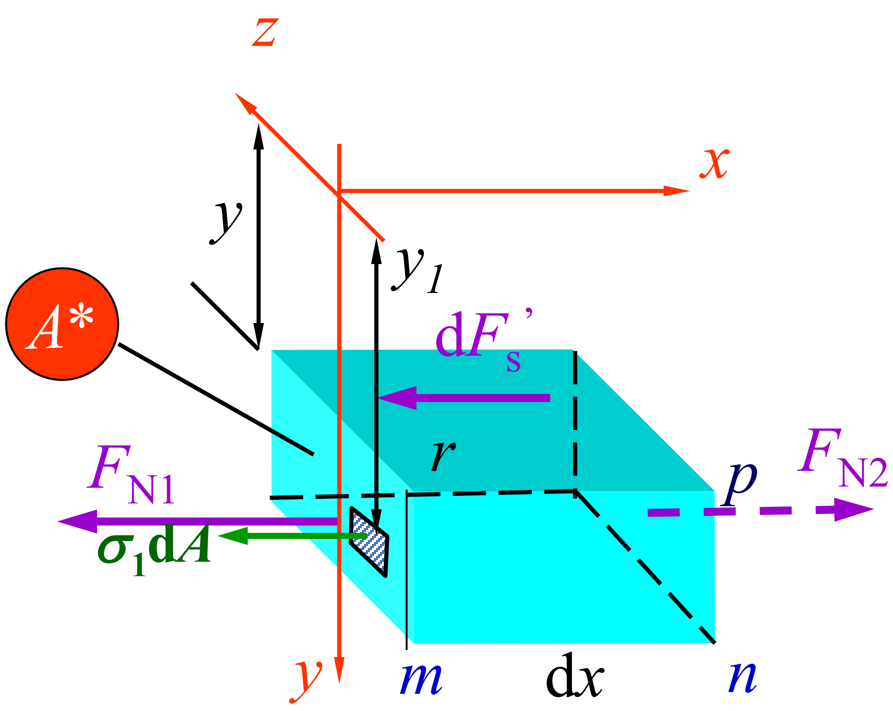
$$=\frac{M(x+dx)}{I_z}S_z^{\ *}$$

$$=\frac{M+dM}{I_z}S_z^{\ *}$$

A*是距中性轴为y的横线以外部分横截面面积

$$S_z^{\ *}=\int_{A^*}y_1 dA$$

面积为A*的这部分横截面对z轴的静矩

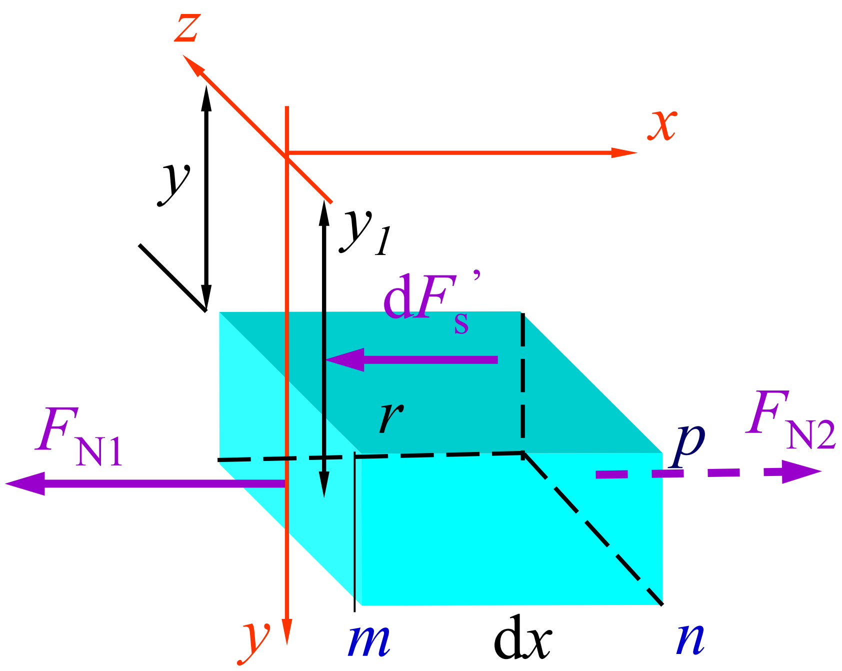


§5.4 弯曲切应力

沿*pr*所在的平面（平行于中性层）切出一个单元体

$$F_{N1}=\frac{M}{I_z}S_z^{*}\qquad F_{N2}=\frac{M+dM}{I_z}S_z^{*}$$

$$dF_S'=\tau' b dx$$



由平衡方程 $\sum F_x=0$

$$F_{N2}-F_{N1}-dF_S'=0$$

化简后得

$$\tau'=\frac{dM}{dx}\times\frac{S_z^{*}}{I_z b},\qquad \frac{dM}{dx}=F_S$$

$$\tau=\tau'=\frac{F_S S_z^{*}}{I_z b}$$

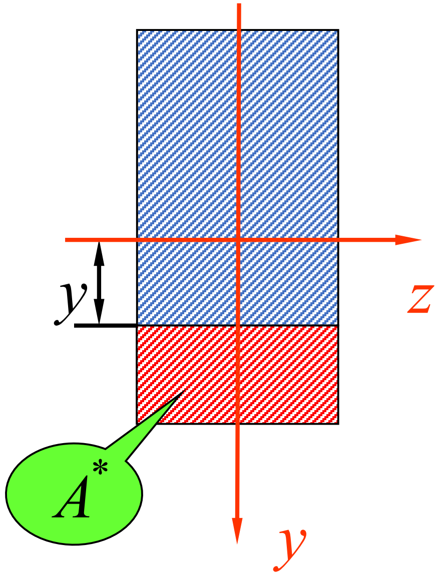
转换思路：通过求τ′，间接得到τ

§5.4 弯曲切应力

1、矩形截面梁的切应力

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

距离z轴y处的切应力



I_z：整个横截面对中性轴的惯性矩；

b ：矩型截面的宽度

S_z^*：距中性轴为y的横线以下部分对中性轴的静矩

§5.4 弯曲切应力

切应力在横截面上是如何变化的?

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

τ 沿截面的变化由静矩 $S_z^*(y)$ 控制

$$S_z^* = \int_{A^*} y_1 dA$$

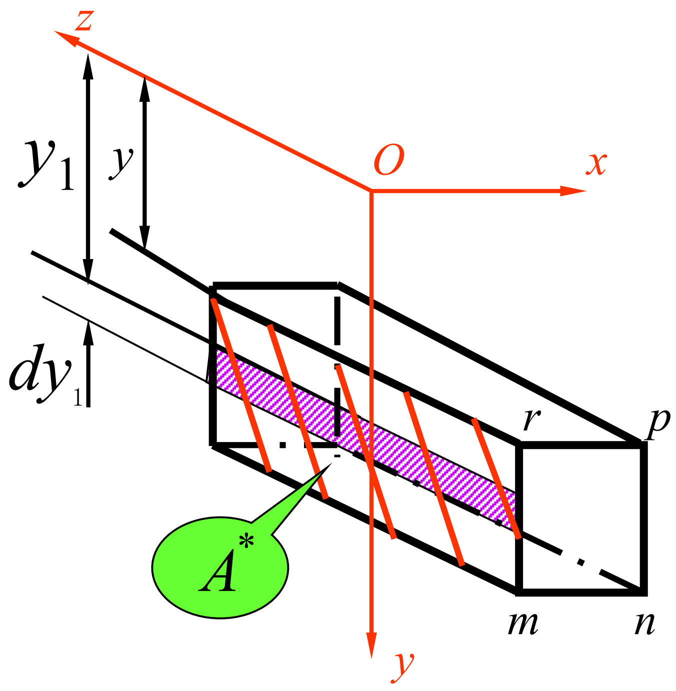
$$= \int_y^{h/2} y_1 b dy_1 = \frac{b}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

切应力沿截面高度按抛物线规律变化。

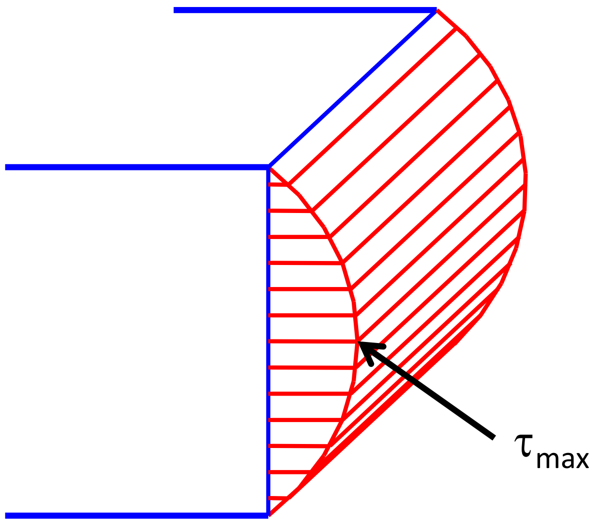
$y = \pm h/2$， $\tau = 0$

$y = 0$， $\tau = \tau_{max}$



切应力在横截面上的变化规律

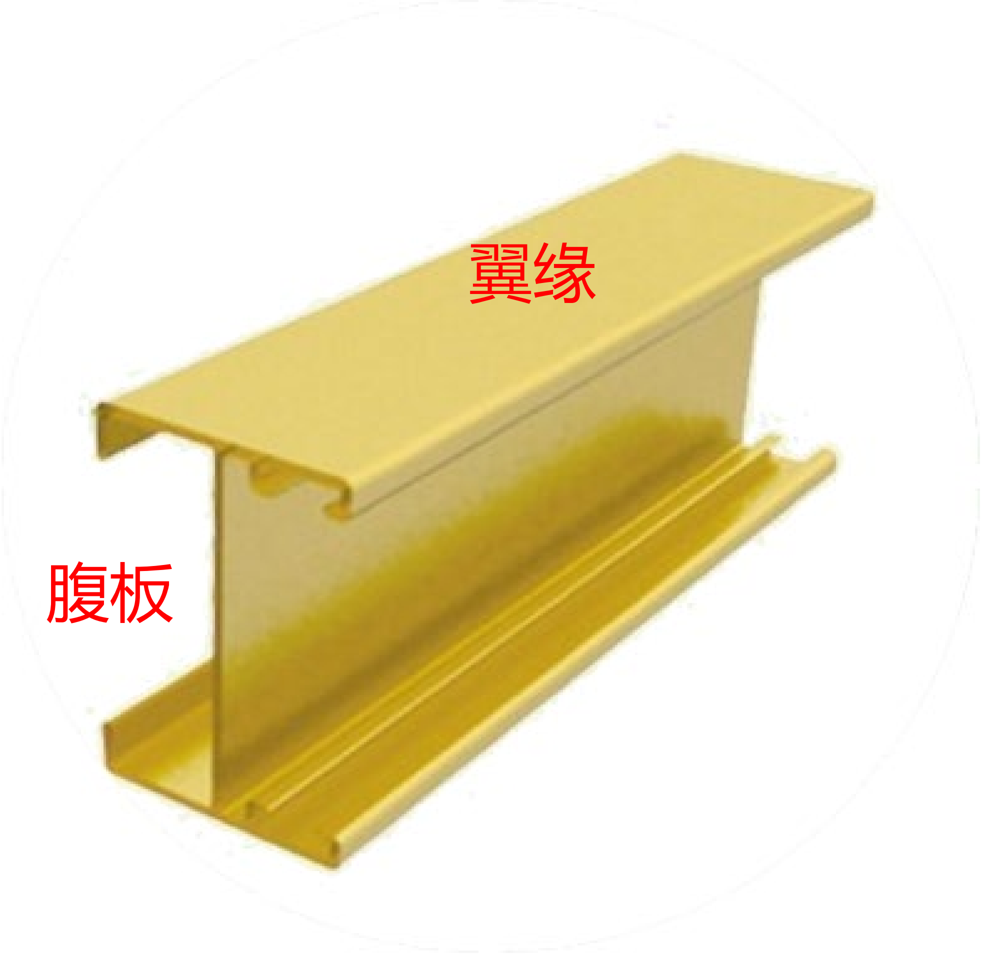
$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$



$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times bh^3/12} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh} = \boxed{\frac{3F_S}{2A}}$$

式中$A=bh$，为矩形截面的面积。

2、工字型截面梁的切应力



工字梁的特点：

- ✓ 省材料
- ✓ 材料分布有讲究
- ✓ 工程上应用广泛

§5.4 弯曲切应力

2、工字型截面梁的切应力

切应力推导过程：

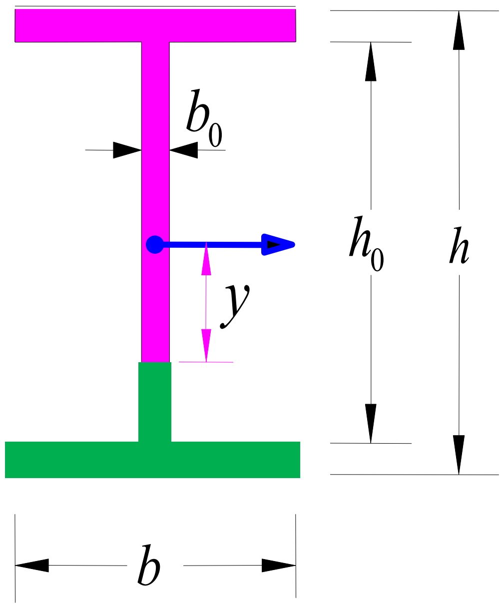
横截面上各点切应力与剪力平行 （τ // F_s）；

切应力沿截面宽度方向均匀分布；

剪应力互等定理；

横截面上弯曲正应力公式；

（切三刀得到的单元体）的静力平衡。



腹板切应力 $\tau = \dfrac{F_S S_z^*}{I_z b_0}$　　翼缘切应力 $\tau = \dfrac{F_S S_z^*}{I_z b}$

比较腹板和翼缘处的切应力！

2、工字型截面梁的切应力

$$S_Z^* = \frac{b}{8}\left(h - h_0^{2}\right) + \frac{b_0}{2}\left(\frac{h_0^{2}}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_s}{I_z b_0}\left[\frac{b}{8}\left(h - h_0^{2}\right) + \frac{b_0}{2}\left(\frac{h_0^{2}}{4} - y^2\right)\right]$$

腹板：

$$\tau = \frac{F_s S_Z^*}{I_Z b_0}$$

$$\tau_{\min} = \frac{F_s}{I_Z b_0}\left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_0^{2}}{8}\right)$$

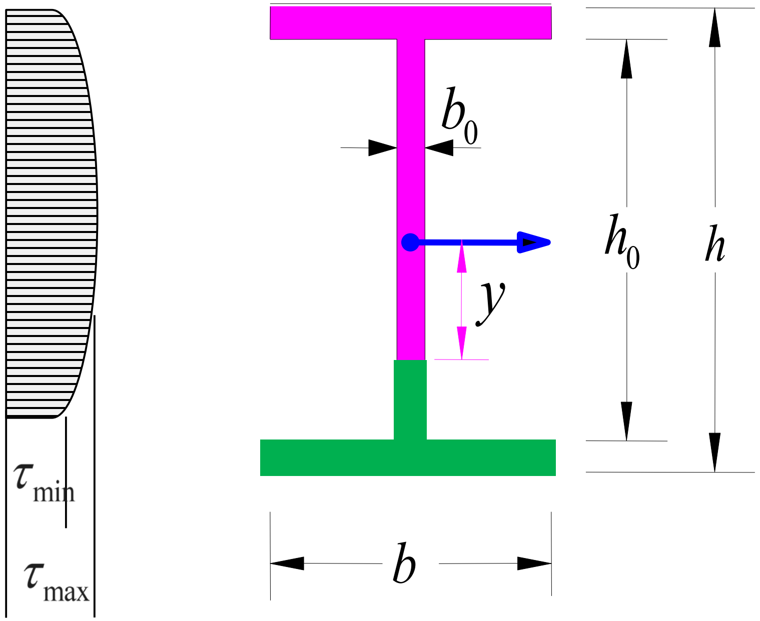
$$\tau_{\max} = \frac{F_s}{I_Z b_0}\left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_0^{2}}{8} + \boxed{\frac{b_0 h_0^{2}}{8}}\right)$$

最大切应力在中性轴上

$$\tau_{\max} \approx \tau_{\min}$$

翼缘：

$$\tau = \frac{F_s S_Z^*}{I_Z b}$$



- 翼缘平行于F_s的切应力分量数值很小，可忽略不计。

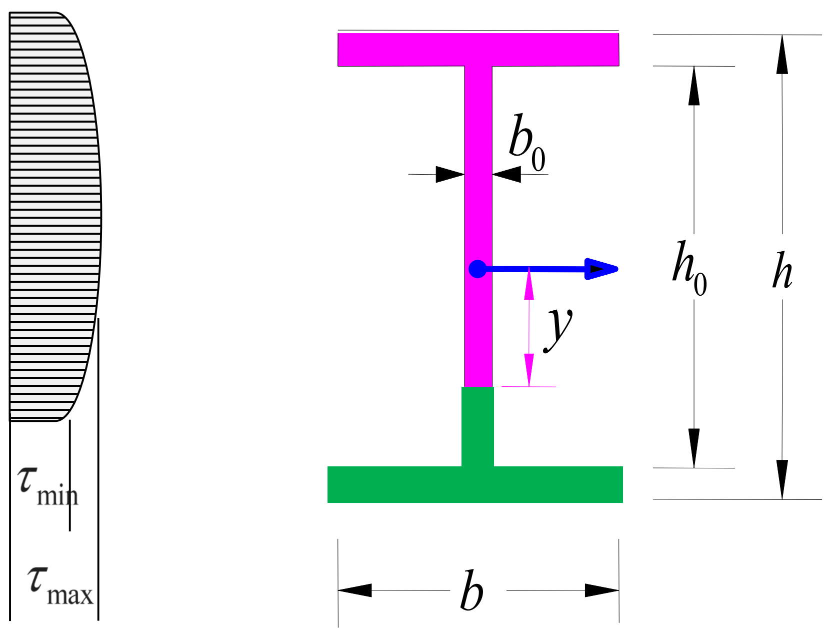
2、工字型截面梁的切应力

$$F_{s,\text{腹板}} \approx (0.95 \sim 0.97)F_s$$

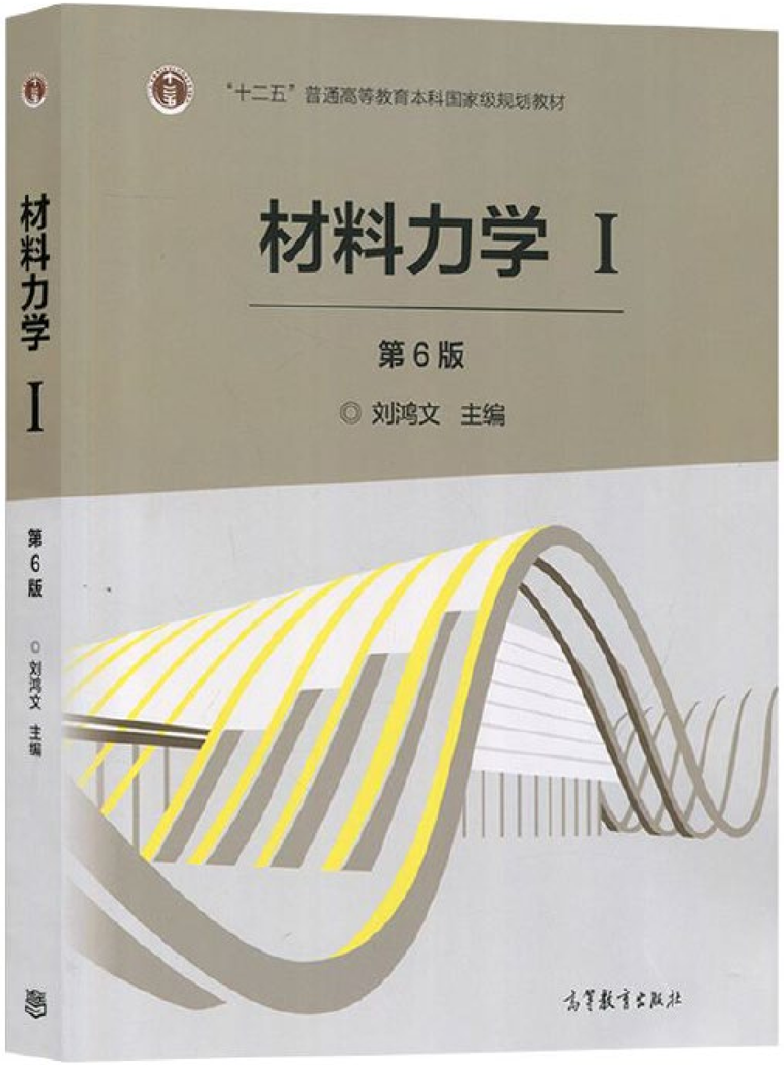
腹板上的剪力占主导，且近似均匀分布

腹板切应力近似公式

$$\tau \approx \frac{F_s}{b_0 h_0}$$



作业



5.2 （正应力）

5.10 （正应力）

5.11 （强度设计）

5.16 （强度设计）

5.19 （正应力和切应力）

下周二（4月16日）之前交