

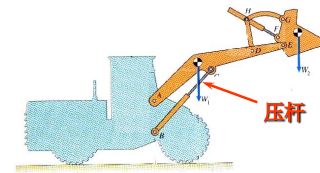
材料力学

第9章 压杆稳定

李德昌

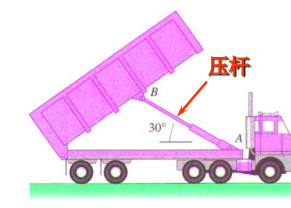
1

第9章 压杆的稳定问题



2

第9章 压杆的稳定问题



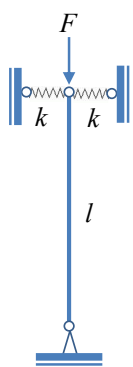
3

易拉罐受压失稳

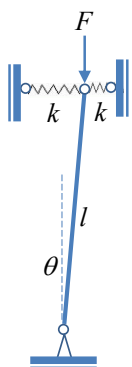


变形体由于失稳所造成的破坏是整体破坏——灾难性后果

9



刚体的失稳

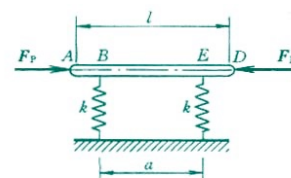


$$Fl\theta = 2kl\theta \cdot l$$

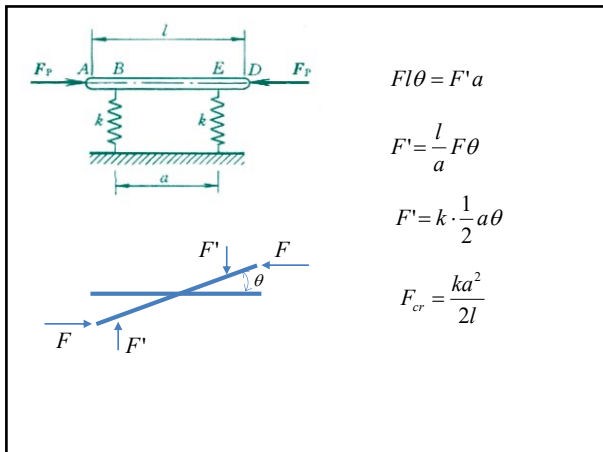
$$F_{cr} = 2kl$$

10

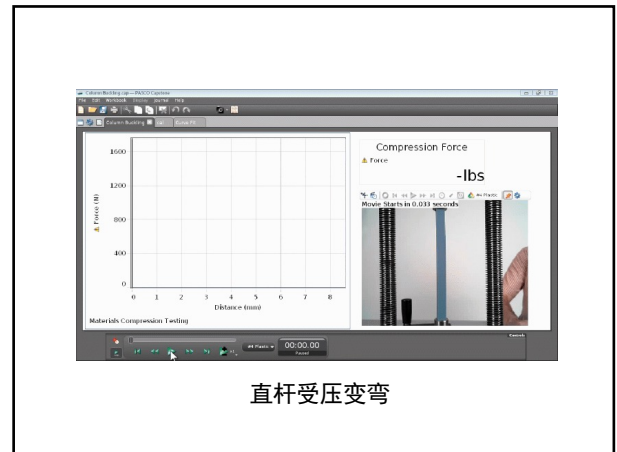
- 图示刚性杆AD在B、E两处由弹簧刚度为k的两根弹簧所支承，并在 F_P 力作用下保持水平平衡位置。试求系统的临界载荷 F_{Per} 。
- 提示：假定AB杆在微小倾角时保持平衡。



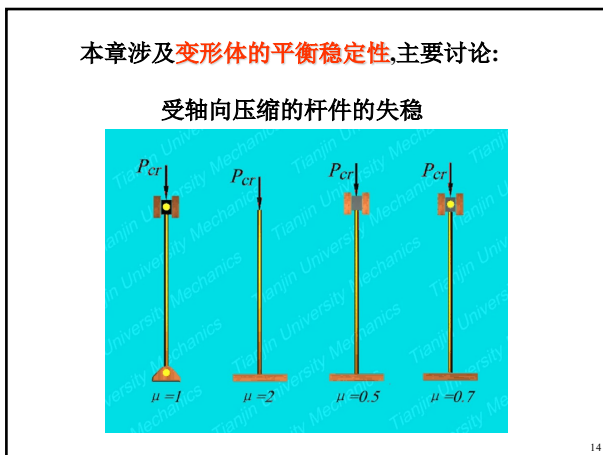
11



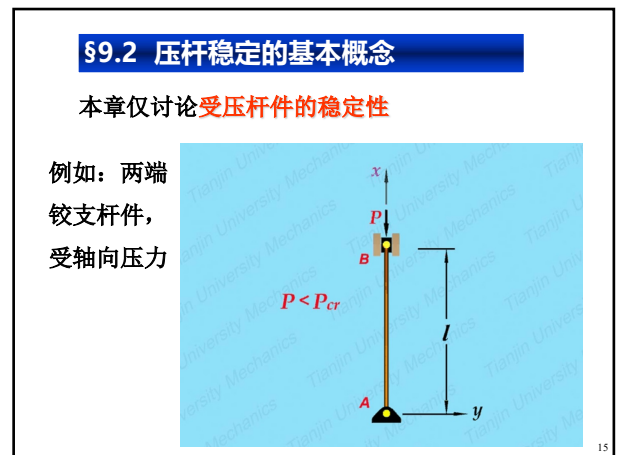
12



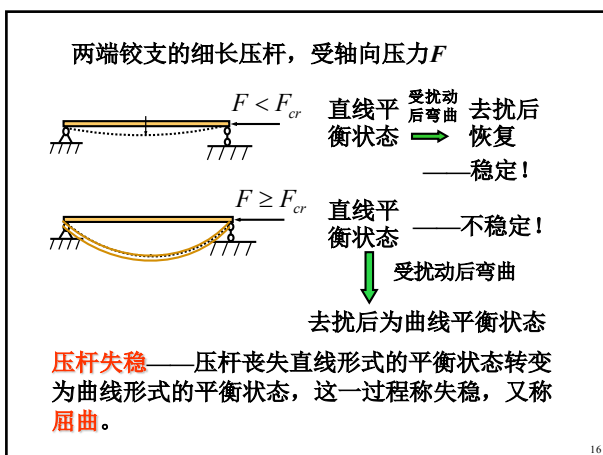
13



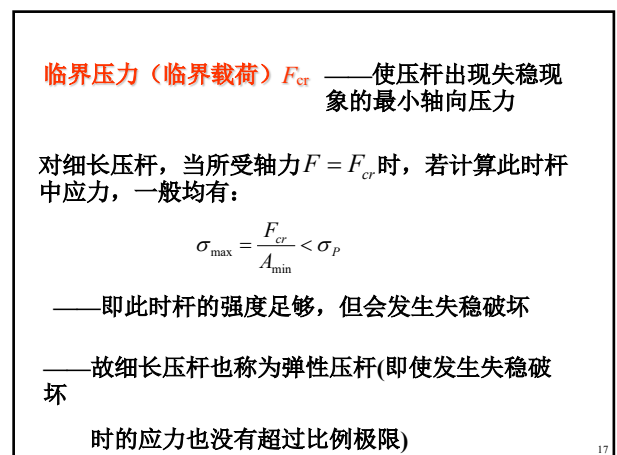
14



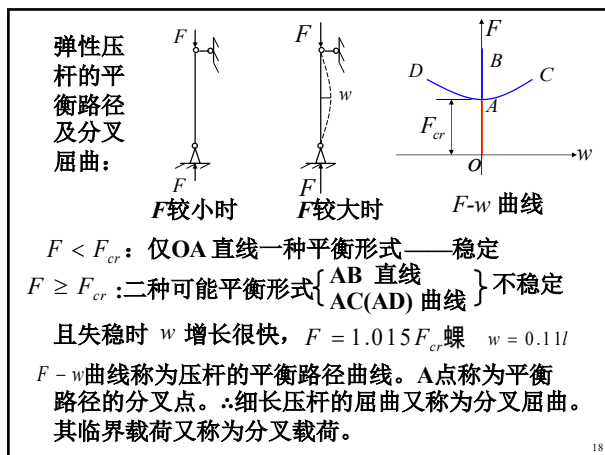
15



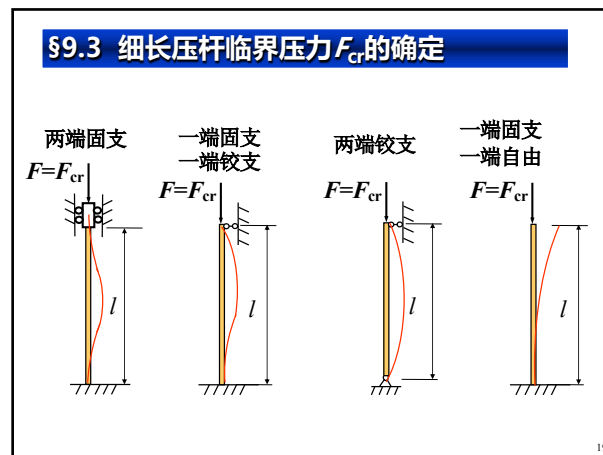
16



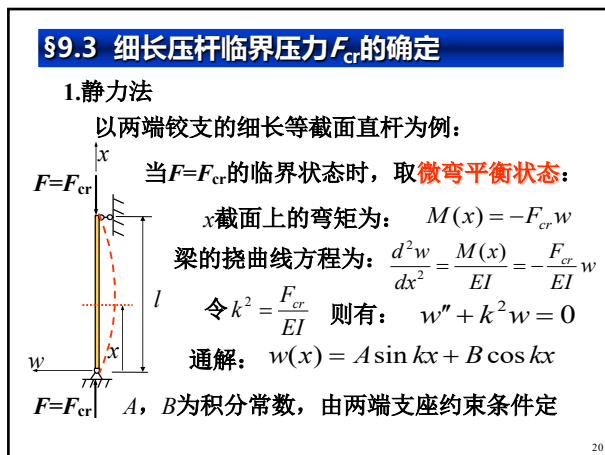
17



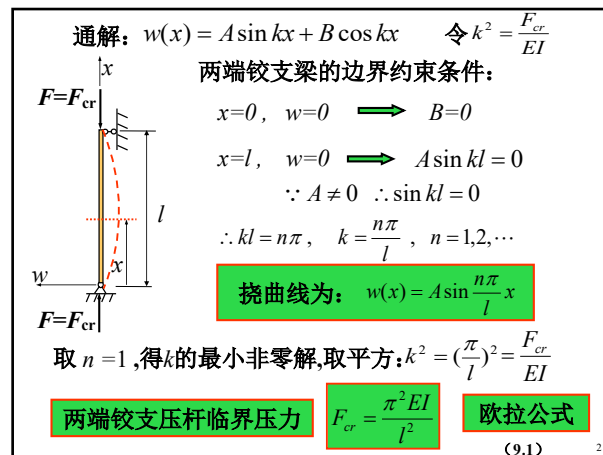
18



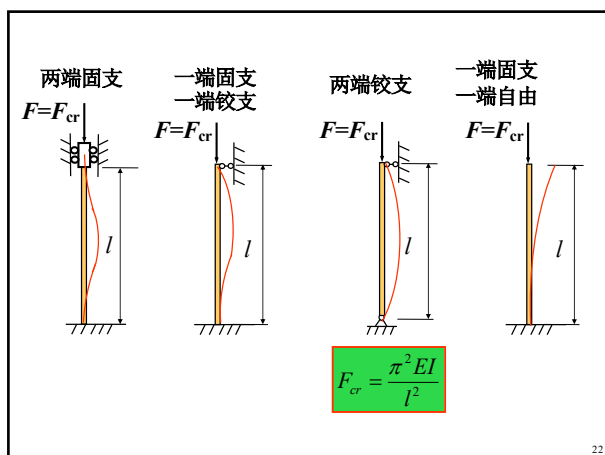
19



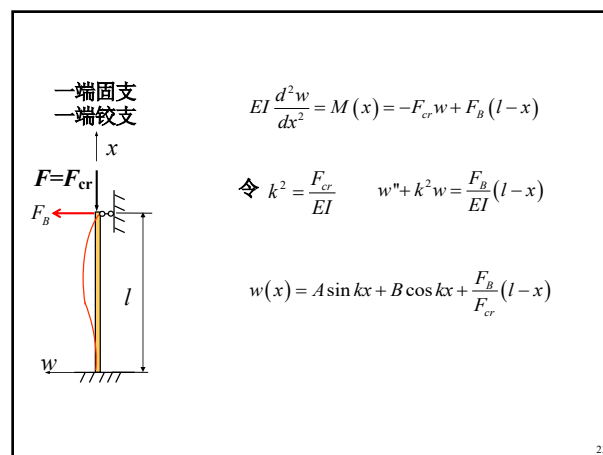
20



21



22



23

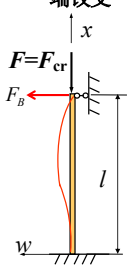
通解: $w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_B}{F_{cr}}(l-x)$ 令 $k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$

一端固支
一端铰支

一端固支一端铰支梁的边界约束条件:

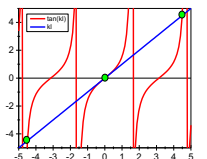
$$x=0, w=0, w'=0$$

$$x=l, w=0$$

$$\begin{cases} B + \frac{F_B}{F_{cr}}l = 0 \\ Ak - \frac{F_B}{F_{cr}} = 0 \\ A \sin kl + B \sin kl = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & l \\ k & 0 & -1 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$


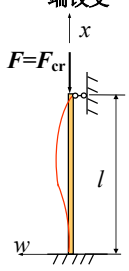
24

一端固支
一端铰支

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & l \\ k & 0 & -1 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \tan kl = kl$$


$$kl \approx 4.49$$

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

$$F_{cr} \approx \frac{4.49^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$


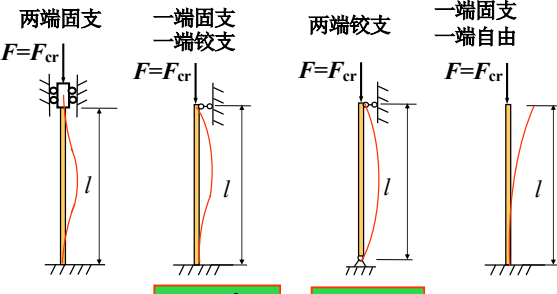
25

两端固支

一端固支
一端铰支

两端铰支

一端固支
一端自由



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

26

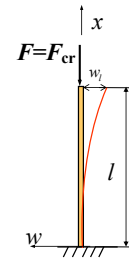
一端固支
一端自由

x 截面上的弯矩为: $M(x) = F_{cr}(w_l - w)$

梁的挠曲线方程为: $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F_{cr}}{EI}(w_l - w)$

令 $k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$ 则有: $w'' + k^2 w = k^2 w_l$

通解:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + w_l$$


27

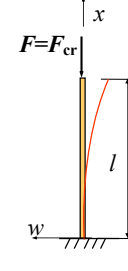
通解: $w(x) = A \sin kx + B \cos kx + w_l$ 令 $k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$

一端固支
一端自由

一端固支一端铰支梁的边界约束条件:

$$x=0, w=0, \theta=0$$

$$x=l, w=w_l$$

$$\begin{cases} B + w_l = 0 \\ Ak = 0 \\ A \sin kl + B \cos kl + w_l = w_l \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$


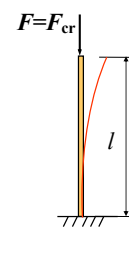
28

一端固支
一端自由

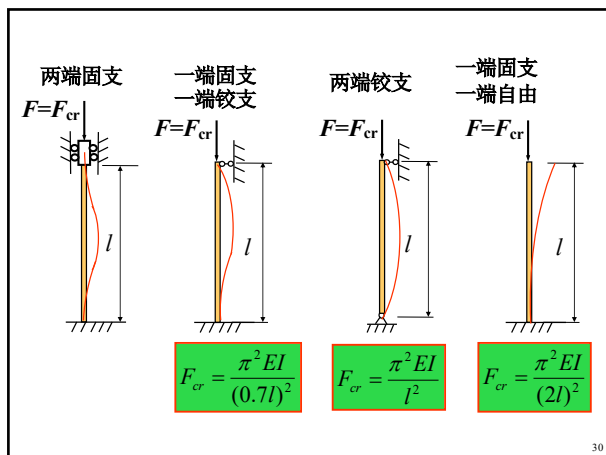
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$k \cos kl = 0$$

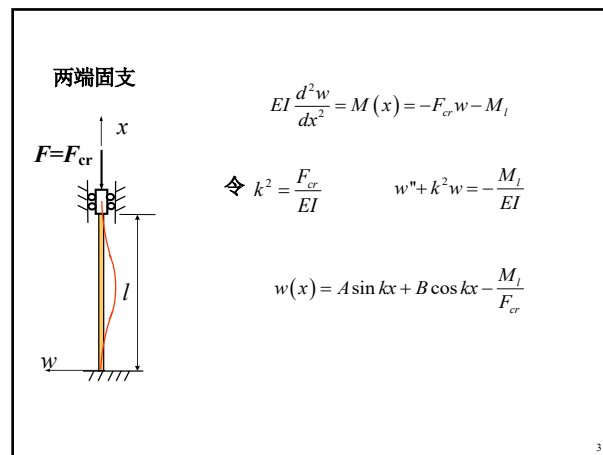
$$kl = \frac{n\pi}{2}, n=1, 3, 5, \dots \quad k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$


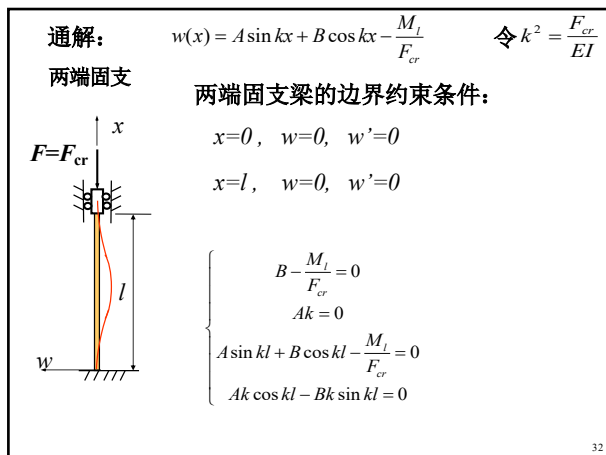
29



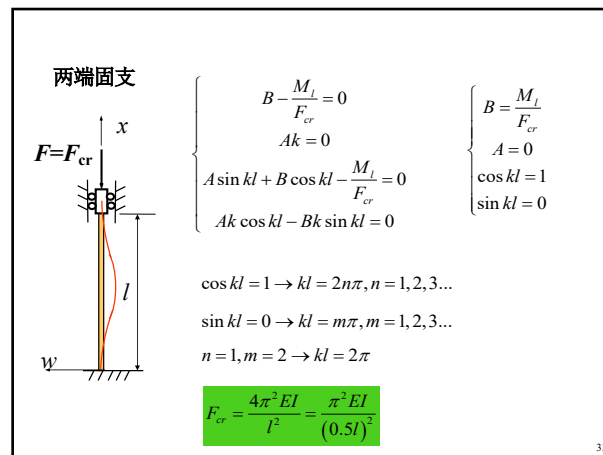
30



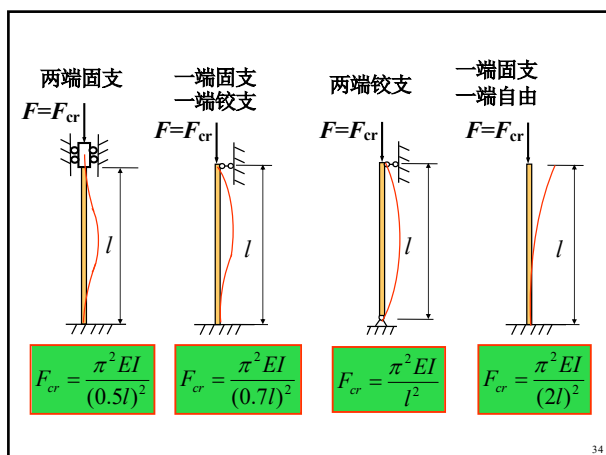
31



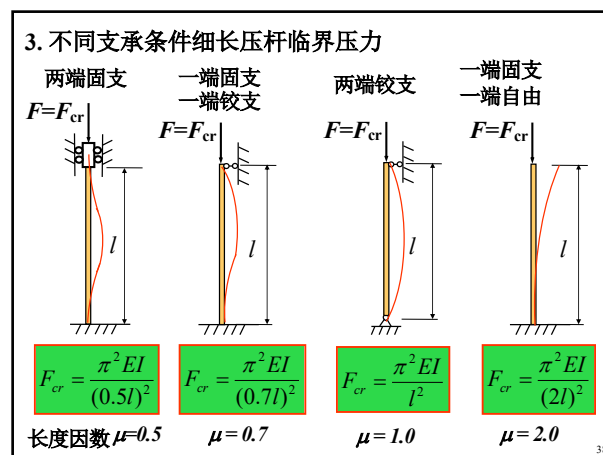
32



33



34



38

细长压杆临界压力的欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

(9.2)

μ —— 长度因数 μl —— 相当长度

μ 由压杆两端的支承条件决定，随支承约束条件的减弱而增加（因而使压杆的 F_{cr} 下降），即约束条件越弱的杆 F_{cr} 越小，越容易失稳。

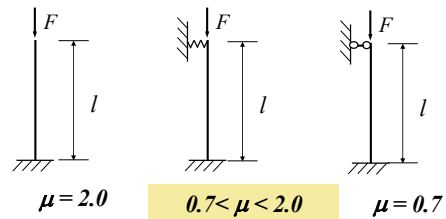
记住四种典型支承条件压杆的长度因数 μ ：

固-固 $\mu=0.5$ 固-铰 $\mu=0.7$ 铰-铰 $\mu=1$ 固-自由 $\mu=2$

两端为其他支承条件的细长压杆（如约束强度介于固支与铰支之间的弹性支承）， μ 值可查工程设计手册。

39

例如：

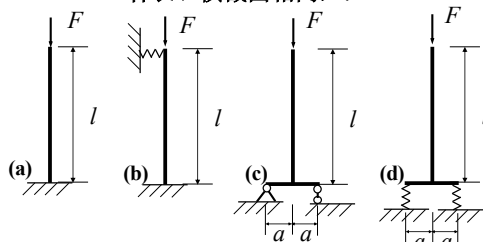


判断根据：弹簧铰支座的约束条件强于自由端，但弱于铰支座，故一端固支另一端弹簧铰支的压杆的长度因数满足：

$$0.7 < \mu < 2.0$$

40

将以下4种情形临界压力的大小排序（各杆材料、杆长、横截面相同）：



约束条件由强到弱的顺序为 (b), (a), (c), (d)

$$\therefore F_{cr}(b) > F_{cr}(a) > F_{cr}(c) > F_{cr}(d)$$

稳定性由强到弱的顺序为 (b) < (a) < (c) < (d)

41

细长压杆临界压力的欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

1. 式中的惯性矩 I

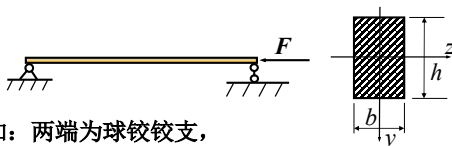
I 应为横截面关于失稳弯曲中性轴的惯性矩。

计算前应先判断：截面一旦发生失稳弯曲，是以哪根轴为中性轴的弯曲。

(1) 两端支座的约束条件若在横截面内各轴线所在平面内完全相同(如球铰，固支端)，则弯曲应发生于 I 数值最小的平面内；

即公式中的 I 取横截面内的最小惯性矩 I_{\min}

42



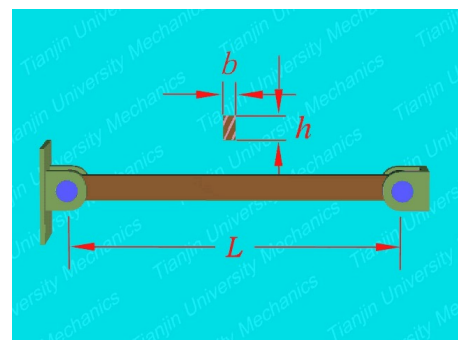
如：两端为球铰铰支，

矩形截面， $I_y < I_z$

失稳弯曲以 y 轴为中性轴，惯性矩应取 $I_{\min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$

$$\therefore F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

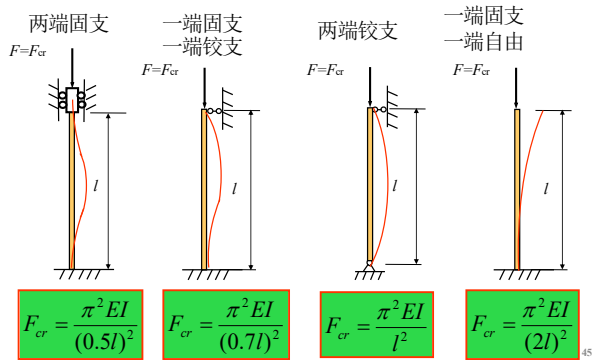
43



$$\therefore F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \quad \mu = ?, I_{\min} = ?$$

44

临界载荷



45