《机械系统动力学》——浙江大学本科生课程（08192050）

第四章 多自由度系统

主讲：祝毅

（yiz@zju.edu.cn）

2024年春

3 特征向量的正交性

- 特征向量的概念
- 特征向量的正交性
- 主坐标的定义

3 特征向量的正交性

- 特征向量的概念
- 特征向量的正交性
- 主坐标的定义

3.1 特征向量的概念

- 特征向量

  将求得的固有频率ω_r (r=1,2,…,n)分别代入方程

$$(\mathbf{K}-\omega_r^2\mathbf{M})\mathbf{u}^{(r)}=0,\quad (r=1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}^{(r)}=[u_1^{(r)}\ u_2^{(r)}\ \cdots\ u_n^{(r)}]^{\mathrm{T}},\quad (r=1,2,\cdots,n)$$

称向量$\mathbf{u}^{(r)}$为对应特征值ω_r^2的<u>特征向量</u>，也称为<u>振型向量</u>或<u>模态向量</u>，它表示了所谓的<u>固有振型</u>。

3 特征向量的正交性

- 特征向量的概念
- 特征向量的正交性
- 主坐标的定义

3.2 特征向量的正交性

- 考虑固有频率ω_r对应的特征向量$\mathbf{u}^{(r)}$和固有频率ω_s对应的特征向量$\mathbf{u}^{(s)}$，有

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\begin{cases}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)}=\omega_r^2\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}\\ \mathbf{K}\mathbf{u}^{(s)}=\omega_s^2\mathbf{M}\mathbf{u}^{(s)}\end{cases}$$

- 用$u^{(s)\mathrm{T}}$左乘第一个方程的两边和用$u^{(r)\mathrm{T}}$左乘第二个方程的两边，得

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)}=\omega_r^2\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}\\ \mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(s)}=\omega_s^2\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(s)}\end{cases}$$

3.2 特征向量的正交性

- 因为矩阵**M**和**K**是对称的，转置第二个方程，可得

$$\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)} = \omega_s^2 \mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}$$

- 与第一个方程相减，可得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)} = 0$$

- 当$r \neq s$，即$\omega_r \neq \omega_s$时，必须有

$$\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)} = 0, \qquad (r \neq s)$$

振型向量关于
质量矩阵是正交的

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)} = 0, \qquad (r \neq s)$$

振型向量关于
刚度矩阵是正交的

3.2 特征向量的正交性

- 正交性只有当**M**和**K**为对称矩阵时才是正确的。
- 如果r=s，则不论$\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}$取任何值，都有

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}=0$$

所以可令

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}=M_r\\ \mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)}=K_r\end{cases}$$

称M_r为<u>模态质量</u>，K_r为<u>模态刚度</u>。

3.2 特征向量的正交性

- 如果将振型向量正则化，则称振型向量为关于质量矩阵和刚度矩阵的正则正交性。令

$$\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)} = 1, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)} = \omega_r^2, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)} = \delta_{rs}, & (r, s = 1, 2, \cdots, n) \\ \mathbf{u}^{(s)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)} = \delta_{rs}\omega_r^2, & (r, s = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

式中δ_{rs}为克朗尼格δ符号，其数学定义为

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & (r = s) \\ 0, & (r \neq s) \end{cases}$$

3.2 特征向量的正交性

- 振型向量可以排列成为n阶方阵，称为模态矩阵(或振型矩阵)，即

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)} & \cdots & \mathbf{u}^{(n)} \end{bmatrix}$$

- 引入模态质量矩阵

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix}$$

3.2 特征向量的正交性

- 引入<u>模态刚度矩阵</u>

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_n \end{bmatrix}$$

3.2 特征向量的正交性

- 若振型向量按照方程 $\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}=1, \quad (r=1,2,\cdots,n)$ 进行正则化，然后排列成正则振型矩阵$\mathbf{u}$，则模态质量矩阵为单位矩阵，模态刚度矩阵为固有频率平方的对角矩阵。

$$\mathbf{M}_r=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}=\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_r=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2\end{bmatrix}$$

3 特征向量的正交性

- 特征向量的概念
- 特征向量的正交性
- 主坐标的定义

3.4 主坐标的定义

- 继续研究无阻尼多自由度的自由振动问题：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- 引入另一组广义坐标$\boldsymbol{\eta}$，对于振型矩阵$\mathbf{u}$，满足

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$$

- 左乘以$\mathbf{u}^{T}$，有

$$\mathbf{u}^{T}\mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{u}^{T}\mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$$

3.4 主坐标的定义

- 得到解耦方程组：

$$\mathbf{M}_r\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{K}_r\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$$

或

$$M_r\ddot{\eta}_r\left(t\right)+K_r\eta_r\left(t\right)=0, \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

该方程具有与单自由度系统的运动微分方程相同的结构，可作为n个独立的单自由度系统来处理。

- 广义坐标$\boldsymbol{\eta}$称为<u>主坐标</u>。

3.4 主坐标的定义

- 特别地，$\mathbf{q}=\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$ 中，$\mathbf{u}$为正则振型矩阵，则有：

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$$

或

$$\ddot{\eta}_r(t)+\omega_r^2\eta_r(t)=0,\qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

- 广义坐标$\boldsymbol{\eta}$称为<u>正则坐标</u>。

内容提要

- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

4 对初始条件的响应

- 问题的提出
- 多自由度系统的解耦
- 主坐标下的初始条件
- 对初始条件的响应

4 对初始条件的响应

- 问题的提出
- 多自由度系统的解耦
- 主坐标下的初始条件
- 对初始条件的响应

4.1 问题的提出

- 系统自由振动的微分方程是n个二阶的常微分方程组，其矩阵形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{0}$$

如果给定$2n$个初始条件(即初始位移向量$\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0$和初始速度向量 $\dot{\mathbf{q}}(0)=\dot{\mathbf{q}}_0$)，就完全确定了方程的一组特解，这组特解就是系统对初始条件的响应。

4 对初始条件的响应

- 问题的提出
- 多自由度系统的解耦
- 主坐标下的初始条件
- 对初始条件的响应

4.2 多自由度系统的解耦

- 定义正则坐标$\boldsymbol{\eta}$，满足 $\mathbf{q}=\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$

得到解耦方程组：

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$$

或

$$\ddot{\eta}_r(t)+\omega_r^2\eta_r(t)=0,\qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow\quad \eta_r(t)=\eta_{r0}\cos\omega_r t+\frac{\dot{\eta}_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r t,\qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

4 对初始条件的响应

- 问题的提出
- 多自由度系统的解耦
- 主坐标下的初始条件
- 对初始条件的响应

4.3 主坐标下的初始条件

- 主坐标与原广义坐标的变换

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q} = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0$$

4 对初始条件的响应

- 问题的提出
- 多自由度系统的解耦
- 主坐标下的初始条件
- 对初始条件的响应

4.4 对初始条件的响应

- 正则坐标的初始位移η_{r0}和$\dot{\eta}_{r0}$初始速度可以表示为

$$\eta_{r0} = \mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{q}_0 \ , \dot{\eta}_{r0} = \mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t) \qquad \eta_r(t) = \eta_{r0}\cos\omega_r t + \frac{\dot{\eta}_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r t, \qquad (r = 1,2,\cdots,n)$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\mathbf{u}^{(r)}\eta_r(t) = \sum_{r=1}^{n}\mathbf{u}^{(r)}\left(\eta_{r0}\cos\omega_r t + \frac{\dot{\eta}_{r0}}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\mathbf{u}^{(r)}\left[\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{q}_0\cos\omega_r t + \frac{1}{\omega_r}\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0\sin\omega_r t\right]$$

内容提要

- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

5 无阻尼强迫振动

- 问题的提出
- 振型分析法的求解过程
- 正则坐标下的初始条件
- 强迫振动的解

5 无阻尼强迫振动

- 问题的提出
- 振型分析法的求解过程
- 正则坐标下的初始条件
- 强迫振动的解

5.1 问题的提出

- n自由度系统的无阻尼强迫振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{F}(t)$$

式中，$\mathbf{M}$和$\mathbf{K}$为$n\times n$阶的质量矩阵和刚度矩阵，n维向量$\mathbf{q}(t)$和$\mathbf{F}(t)$分别表示广义坐标和广义力。

5 无阻尼强迫振动

- 问题的提出
- 振型分析法的求解过程
- 正则坐标下的初始条件
- 强迫振动的解

5.2 振型分析法的求解过程

- 齐次方程振型矩阵的求解

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

振型矩阵

$$\mathbf{u}=\left[\mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}^{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{u}^{(n)}\right]$$

特征值（固有频率） ω_r^2

振型向量（特征向量）

$$\mathbf{u}^{(r)}=[u_1^{(r)} \ u_2^{(r)} \ \cdots \ u_n^{(r)}]^{\mathrm{T}}$$

5.2 振型分析法的求解过程

- 振型矩阵的正则化，使得

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}$$

- 引入正则坐标$\boldsymbol{\eta}(t)$，使得

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)$$

5.2 振型分析法的求解过程

- 正则坐标代入原方程

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^{T}\mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{u}^{T}\mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{u}^{T}\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{N}(t)$$

式中，$\mathbf{N}(t)=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{F}(t)$是与广义坐标向量$\boldsymbol{\eta}(t)$相应的$n$维广义力向量，即正则激励。

5.2 振型分析法的求解过程

- 方程组中每两个方程互不相关，即

$$\ddot{\eta}_r(t)+\omega_r^2\eta_r(t)=N_r(t)$$

$$(r=1,2,\cdots,n)$$

具有与单自由度系统的运动微分方程相同的结构，可作为n个独立的单自由度系统来处理。

5 无阻尼强迫振动

- 问题的提出
- 振型分析法的求解过程
- 正则坐标下的初始条件
- 强迫振动的解

5.3 正则坐标下的初始条件

- 正则坐标与原坐标的关系

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q} = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0$$

5 无阻尼强迫振动

- 问题的提出
- 振型分析法的求解过程
- 正则坐标下的初始条件
- 强迫振动的解

5.4 强迫振动的解

- 正则坐标下的单自由度系统解

$$\eta_r(t)$$

- 强迫振动的解

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{u}^{(r)} \eta_r(t)$$

内容提要

- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

6 有阻尼系统

- 问题的提出
- 有阻尼系统的振型分析法
- 有阻尼系统解的分析

6.1 问题的提出

- 一般粘性阻尼的多自由度系统，在外激励的作用下，系统的运动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{F}(t)$$

6.2 有阻尼系统的振型分析法

- 齐次无阻尼方程振型矩阵的确定

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

振型矩阵

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)} & \cdots & \mathbf{u}^{(n)}\end{bmatrix}$$

特征值

（固有频率）ω_r^2

振型向量（特征向量）

$$\mathbf{u}^{(r)}=[u_1^{(r)}\ u_2^{(r)}\ \cdots\ u_n^{(r)}]^{\mathrm{T}}$$

6.2 有阻尼系统的振型分析法

- 振型矩阵的正则化，使得

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}$$

- 引入正则坐标$\boldsymbol{\eta}(t)$，使得

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)$$

6.2 有阻尼系统的振型分析法

- 正则坐标代入原方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{C}\mathbf{u}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{u}^T\mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}(t)=\mathbf{N}(t)$$

对角阵否？

6. 有阻尼系统解的分析

- 阻尼矩阵的分析
  - 阻尼矩阵一般为正定或半正定的对称矩阵
  - 比例阻尼

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

⟹ $\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u}$ 为对角矩阵

⟹ 可转化为单自由度有阻尼系统

6. 有阻尼系统解的分析

- 阻尼矩阵的分析
  - 各固有频率对应阻尼比小于0.2，可假设

$$\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & & \\ & 2\zeta_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix}$$

➡ 可转化为单自由度有阻尼系统

6. 有阻尼系统解的分析

- 阻尼矩阵的分析
  - 若系统的阻尼较大，不能用无阻尼系统的振型矩阵使方程解耦，即阻尼矩阵C不能对角化，它将包含复特征值和复特征向量。

完