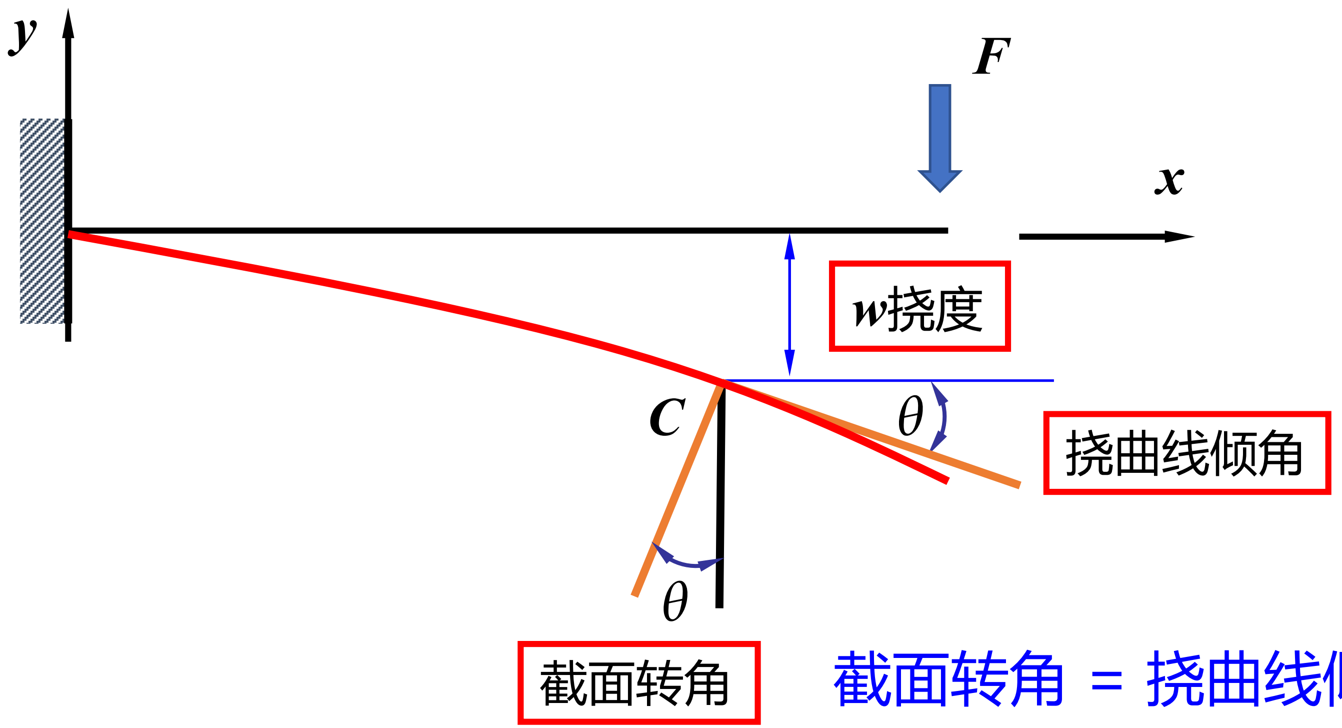
第六章 弯曲变形

重要概念的回顾与强化

挠曲线: 梁轴线变形后成为一条连续光滑的平面曲线。

挠度w：挠曲线上任意点的纵坐标（梁轴线任意点竖直方向的位移）

截面转角: 横截面对其原来位置的角位移，用 θ 表示。



截面转角 = 挠曲线倾角

重要概念的回顾与强化

挠曲线的**近似**微分方程

$$\boldsymbol{w''=\frac{M(x)}{EI_z}}$$

EI_z：抗弯刚度

转角 $$\theta = w' = \int \frac{M}{EI_z}dx + C$$

挠度 $$w = \int\left(\frac{M}{EI_z}dx\right)dx + Cx + D$$

§6.3 用积分法求弯曲变形

积分常数的确定

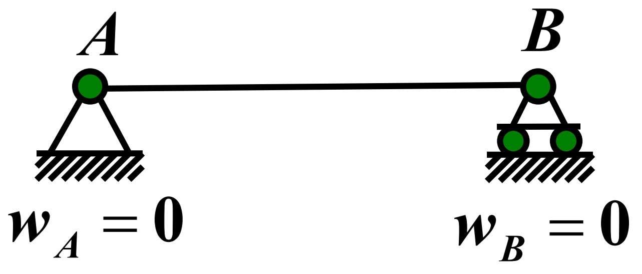
$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

$$w = \frac{1}{EI_z}\int\int M(x)dxdx + Cx + D$$

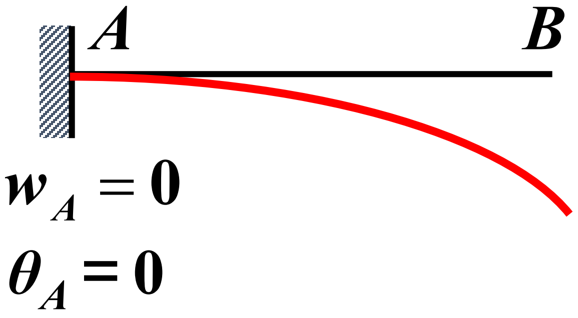
1. 位移边界条件

2. 光滑连续条件

- 在简支梁中，左右两铰支座处的挠度w_A和w_B都等于0。

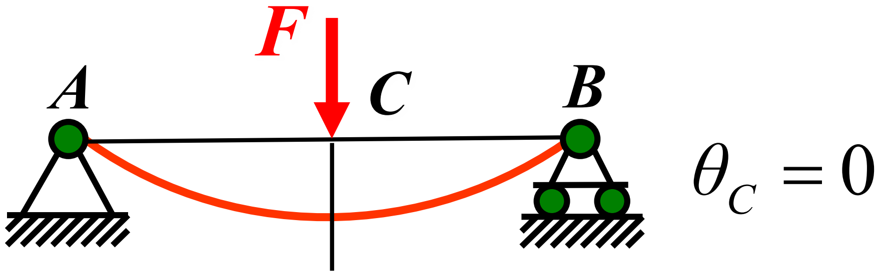


- 在悬臂梁中，固定端处的挠度 w_A 和转角 θ_A 都等于0。



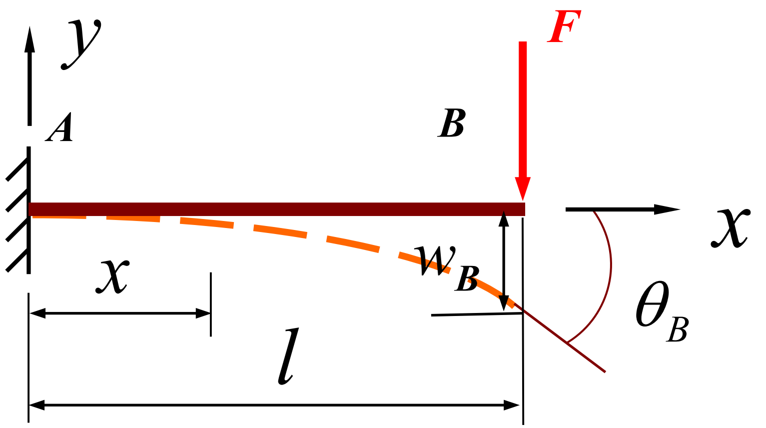
- 在弯曲变形的对称点上，转角应等于零

- 在挠曲线的任一点上，有唯一确定的挠度和转角



积分法

$$w'' = \frac{M(x)}{EI_z}$$



可以给出全梁的挠度和转角

$$w = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l)$$

$$\theta = \frac{Fx}{2EI}(x - 2l)$$

可求出某一截面的挠度和转角

$$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI} \qquad \theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

§6.3 用积分法求弯曲变形

积分法

可以给出全梁的挠度和转角

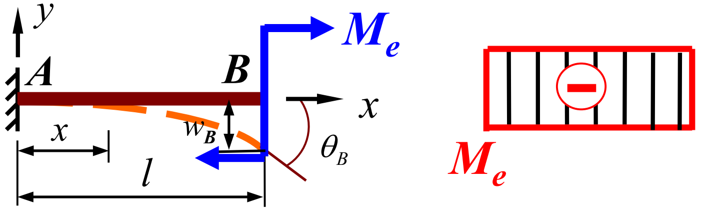
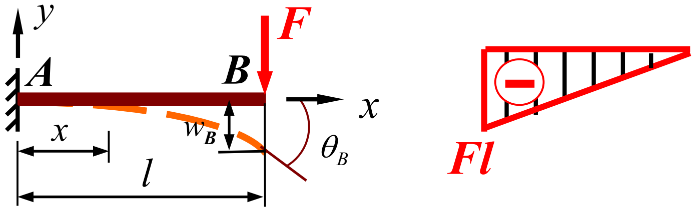
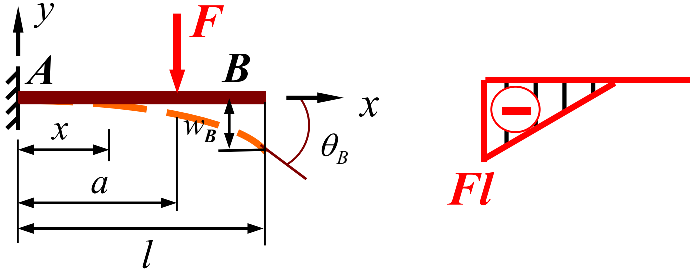
叠加法

小变形（线弹性范围内工作）

多种载荷同时作用下的总变形，等于每一载荷单独作用下的变形的叠加。

§6.3 用积分法求弯曲变形

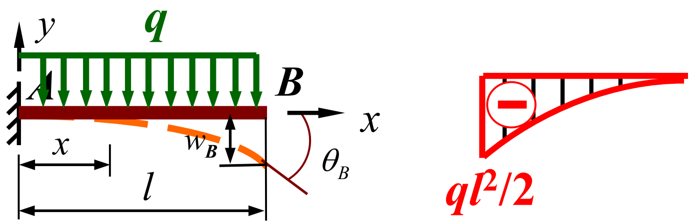
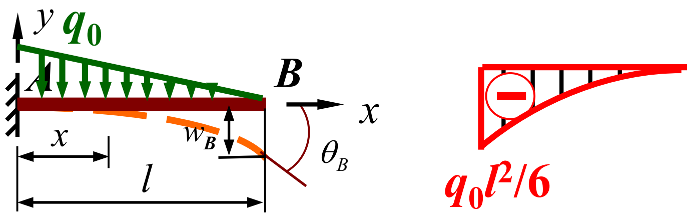
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
1		$w=-\dfrac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B=-\dfrac{M_e l}{EI}$ $w_B=-\dfrac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{2EI}$ $w_B=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$
3		$w=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\quad(0\le x\le a)$ $w=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3x-a)\quad(a\le x\le l)$	$\theta_B=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$ $w_B=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

悬臂梁

§6.3 用积分法求弯曲变形

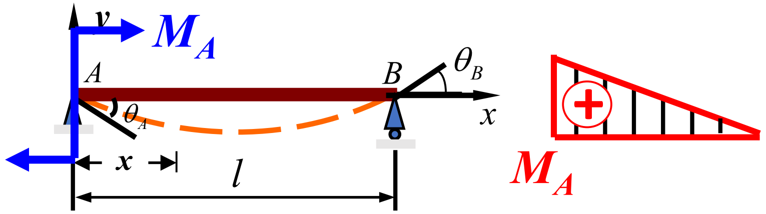
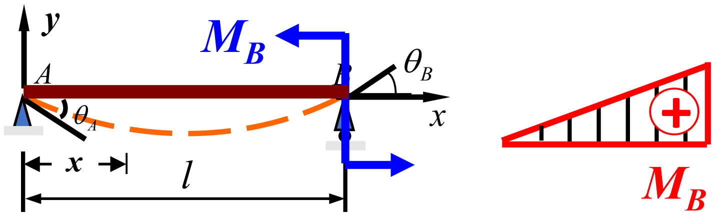
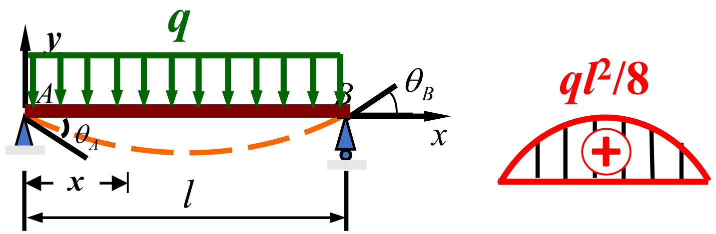
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
4		$w=-\dfrac{qx^2}{24EI}\left(x^2-4lx+6l^2\right)$	$\theta_B=-\dfrac{ql^3}{6EI}$ $w_B=-\dfrac{ql^4}{8EI}$
5		$w=-\dfrac{q_0x^2}{120EIl}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$	$\theta_B=-\dfrac{q_0l^3}{24EI}$ $w_B=-\dfrac{ql^4}{30EI}$

悬臂梁

§6.3 用积分法求弯曲变形

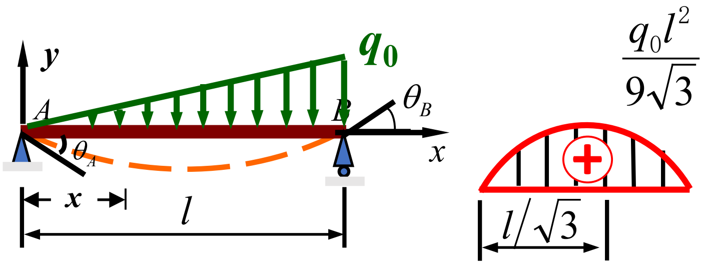
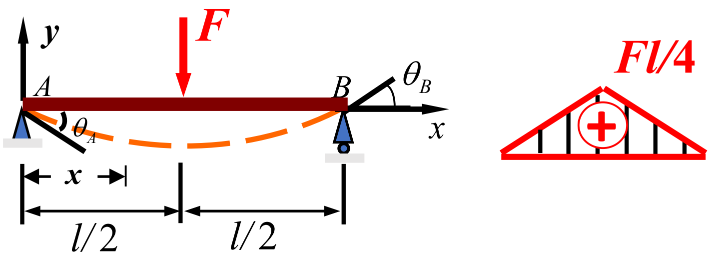
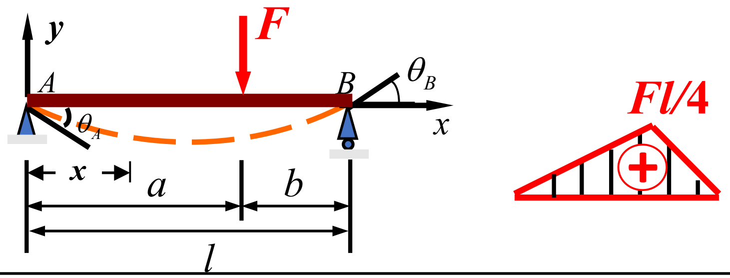
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
1		$w=-\frac{M_A x}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{M_A l}{3EI}$, $\theta_B=\frac{M_A l}{6EI}$ $w_C=-\frac{M_A l^2}{16EI}$ $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ $w_{\max}=-\frac{M_A l^2}{9\sqrt{3}EI}$
2		$w=-\frac{M_B x}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=-\frac{M_B l}{6EI}$, $\theta_B=\frac{M_B l}{3EI}$ $w_C=-\frac{M_B l^2}{16EI}$ $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ $w_{\max}=-\frac{M_B l^2}{9\sqrt{3}EI}$
3		$w=-\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=-\frac{ql^3}{24EI}$, $\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}$ $w_{\max}=-\frac{5ql^4}{384EI}$

简支梁

§6.3 用积分法求弯曲变形

常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
4		$w=-\frac{q_0x}{360EIl}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$	$\theta_A=-\frac{7q_0l^3}{360EI}$, $\theta_B=\frac{q_0l^3}{45EI}$ $w_{\max}=-\frac{5q_0l^4}{768EI}$
5		$w=-\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)\quad\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=-\frac{Fl^2}{16EI}$, $\theta_B=\frac{Fl^2}{16EI}$ $w_{\max}=-\frac{Fl^3}{48EI}$
6		$w=-\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)\quad(0\le x\le a)$ $w=-\frac{Fb}{6EIl}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]\quad(a\le x\le l)$	$\theta_A=-\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$, $\theta_B=\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$ $w_C=-\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$ $(x=\frac{l}{2}$，当$a\ge b$时$)$ $w_{\max}=-\frac{Fb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl}$ $(x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$，当$a\ge b$时$)$

简支梁

选择题1： 已知等直梁在某一段上的挠曲线方程为 $w(x)=-ax^4$，a 是不为零的常量，则在该段梁上（　　）。

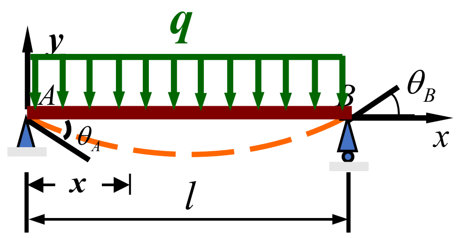
A. 分布载荷是x的一次函数　　B. 分布载荷是x的二次函数

C. 有均匀分布载荷作用　　D. 无分布载荷作用

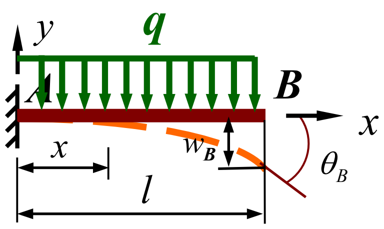
选择题2： 已知等截面直梁在某一段上的挠曲线方程为$y(x) = Ax^2(4lx-6l^2-x^2)$, A是不为零的常量，则在该段梁上（　　）。

A. 无分布载荷作用　　B. 有均布载荷作用

C. 分布载荷是x的一次函数　　D. 分布载荷是x的二次函数



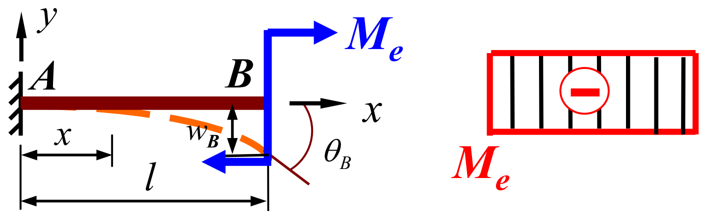
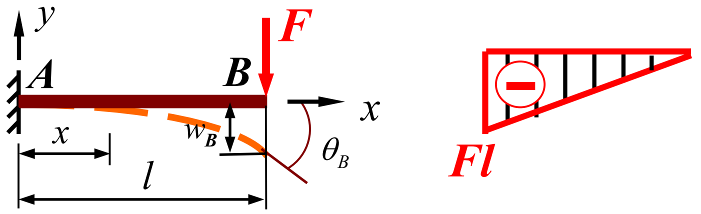
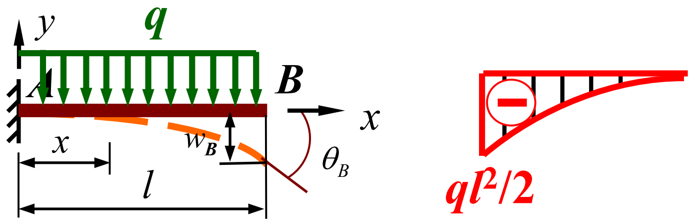
$$w=-\frac{qx}{24EI}\left(l^3-2lx^2+x^3\right)$$



$$w=-\frac{qx^2}{24EI}\left(x^2-4lx+6l^2\right)$$

§6.4 用叠加法求弯曲变形

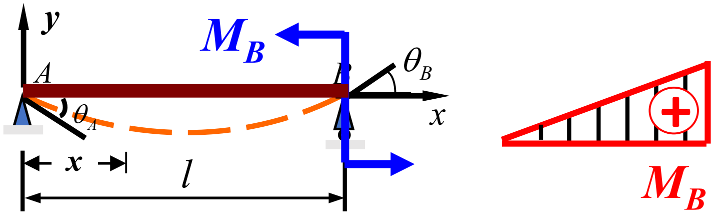
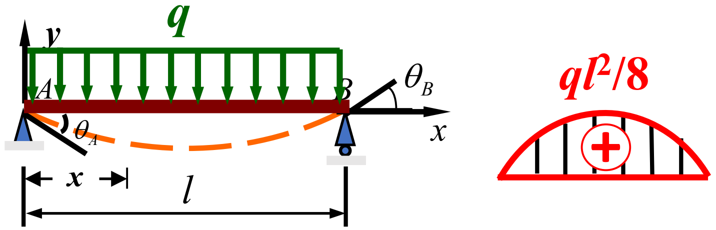
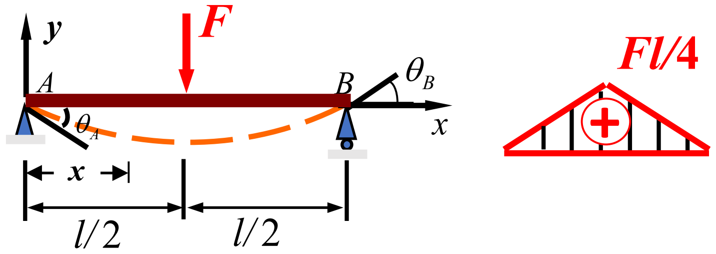
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	最大挠度	最大转角
1		$w_B = -\frac{M_e l^2}{2EI}$ (↓)	$\theta_B = -\frac{M_e l}{EI}$ (↻)
2		$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$ (↓)	$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$ (↻)
3		$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$ (↓)	$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$ (↻)

悬臂梁

§6.4 用叠加法求弯曲变形

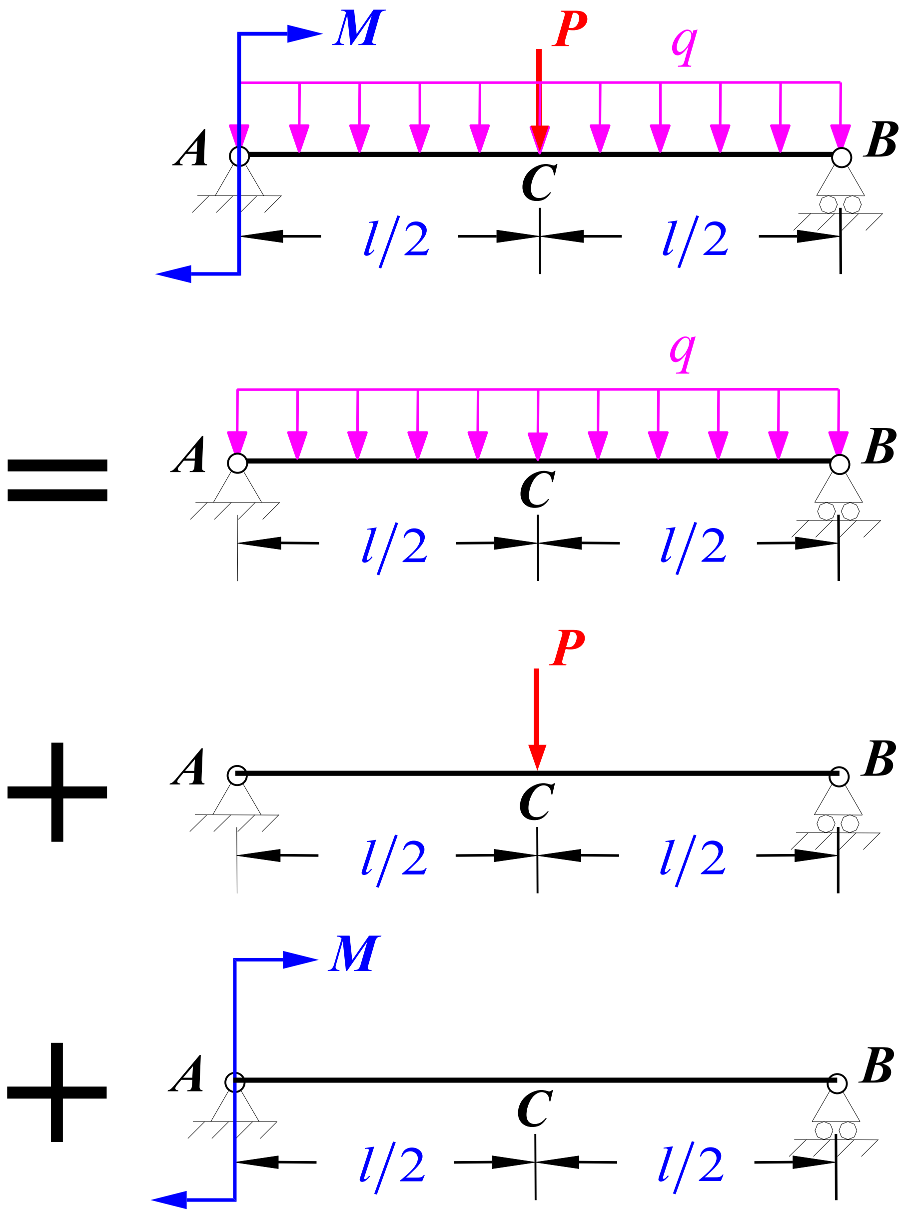
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	最大挠度	梁端转角
1		$w_C=-\frac{M_B l^2}{16EI}$	$\theta_A=-\frac{M_B l}{6EI}$ $\theta_B=\frac{M_B l}{3EI}$
2		$w_C=-\frac{5ql^4}{384EI}$	$\theta_A=-\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}$
3		$w_C=-\frac{Fl^3}{48EI}$	$\theta_A=-\frac{Fl^2}{16EI}$ $\theta_B=\frac{Fl^2}{16EI}$

简支梁

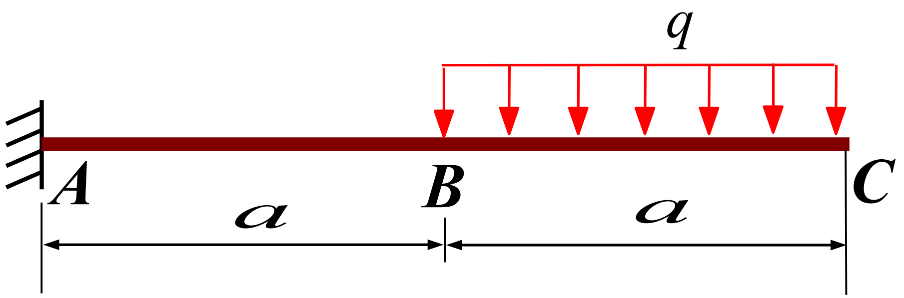
例题3　用叠加法求 w_C、θ_A、θ_B

w_C	θ_A	θ_B
$=$	$=$	$=$
$-\dfrac{5ql^4}{384EI}$	$\dfrac{ql^3}{24EI}$	$-\dfrac{ql^3}{24EI}$
$+$	$+$	$+$
$-\dfrac{Pl^3}{48EI}$	$\dfrac{Pl^2}{16EI}$	$-\dfrac{Pl^2}{16EI}$
$+$	$+$	$+$
$-\dfrac{Ml^2}{16EI}$	$\dfrac{Ml}{3EI}$	$-\dfrac{Ml}{6EI}$



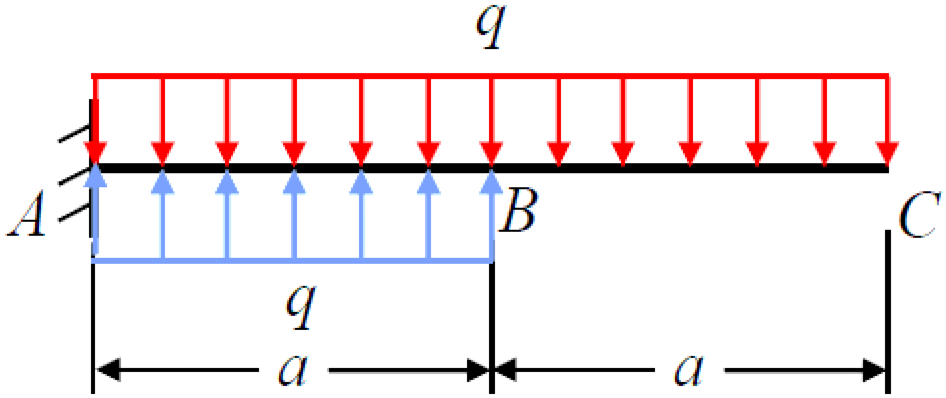
§6.4 用叠加法求弯曲变形

例题4 已知：悬梁臂受力如图所示，q、a、EI 均已知，求C截面的挠度和转角。

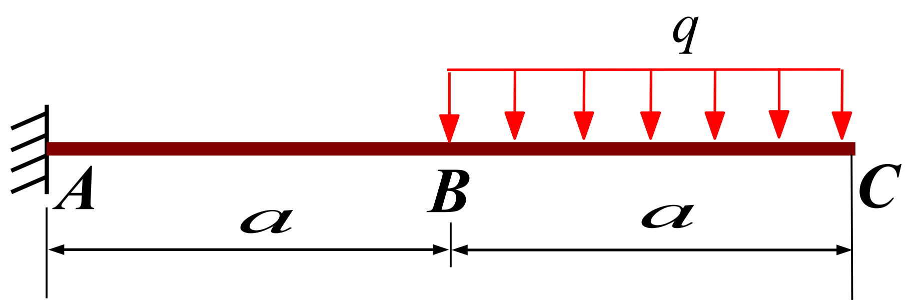


解： 1. 将梁上的载荷变成可查的情形

利用梁全长承受均布载荷的已知结果

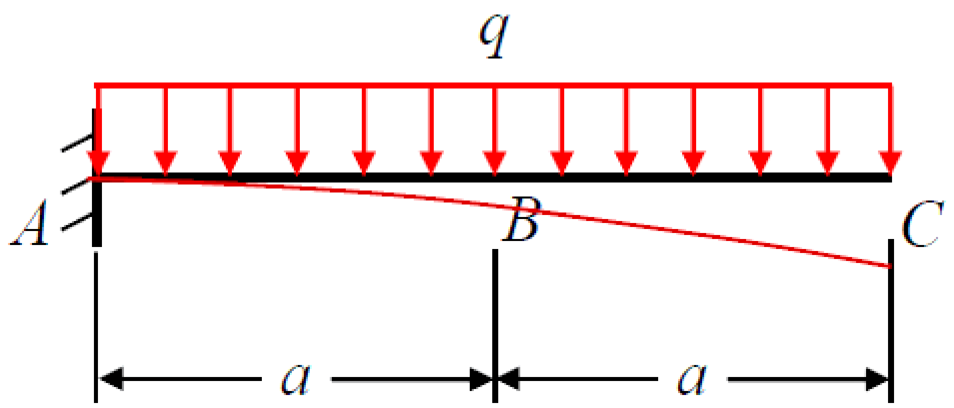


例题4 已知：悬梁臂受力如图所示，q、a、EI 均为已知，求C截面的挠度和转角。



解： 2. 分别计算两种载荷下C截面的挠度和转角

全梁承受均布载荷作用时：

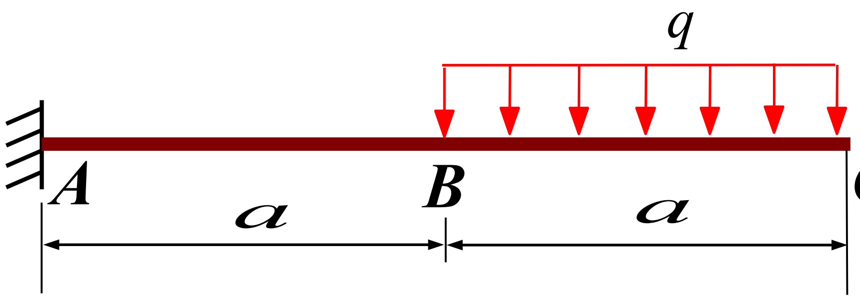


$$w_{C1} = -\frac{q(2a)^4}{8EI} = -\frac{2qa^4}{EI}$$

$$\theta_{C1} = -\frac{q(2a)^3}{6EI} = -\frac{4qa^3}{3EI}$$

§6.4 用叠加法求弯曲变形

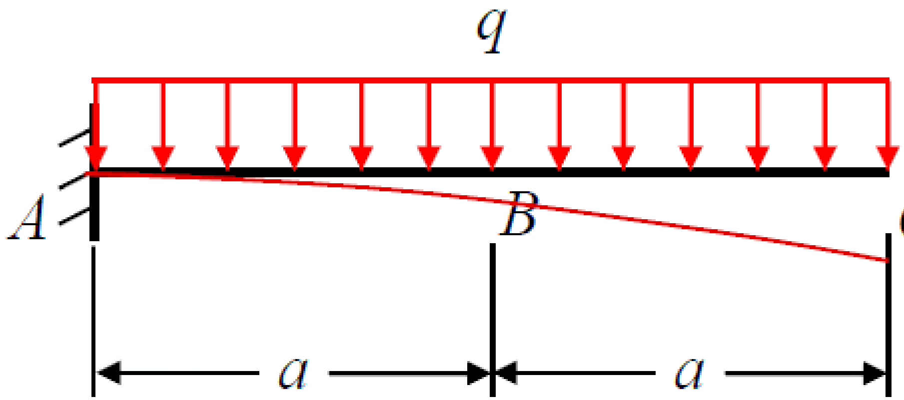
例题4　已知：悬梁臂受力如图所示，q、a、EI 均为已知，求C截面的挠度和转角。



解： 2. 分别计算两种载荷下C截面的挠度和转角

梁AB段承受均布载荷作用时:

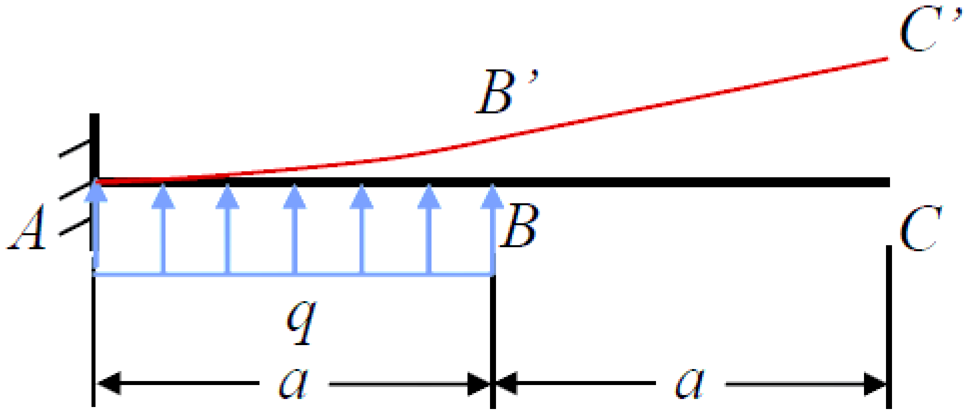
$$w_{B2}=\frac{qa^4}{8EI}\qquad \theta_{B2}=\frac{qa^3}{6EI}$$



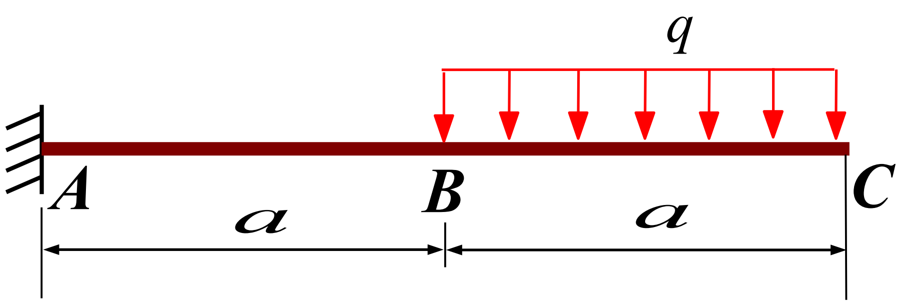
故:

$$\theta_{C2}=\theta_{B2}=\frac{qa^3}{6EI}$$

$$w_{C2}=w_{B2}+\theta_{B2}\times a=\frac{qa^4}{8EI}+\frac{qa^3}{6EI}\times a=\frac{7qa^4}{24EI}$$

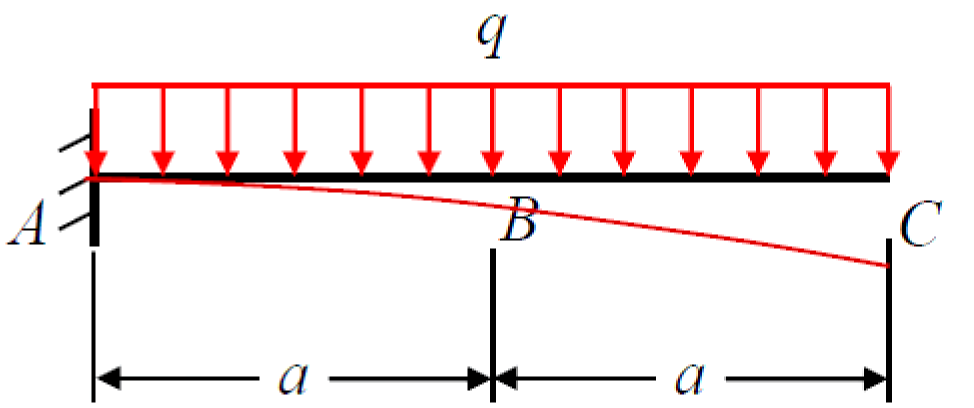


例题4 已知：悬梁臂受力如图所示，q、a、EI 均为已知，求C截面的挠度和转角。

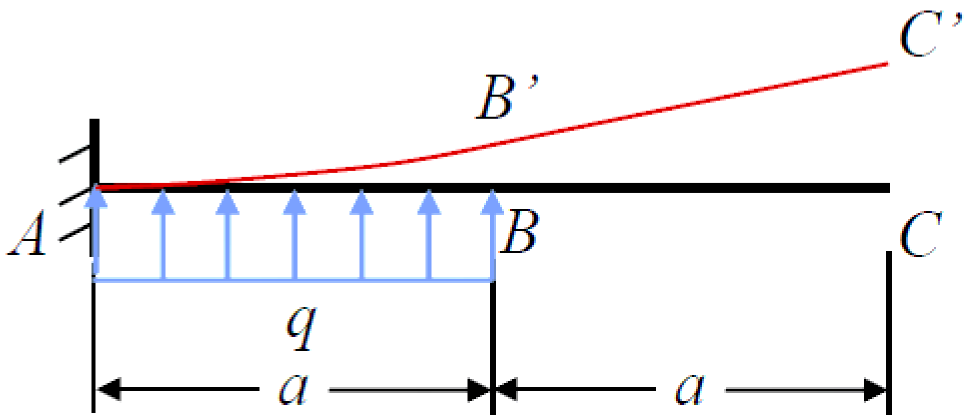


解：3. 将结果叠加

$$w_C = -\frac{2qa^4}{EI} + \frac{7qa^4}{24EI} = -\frac{41qa^4}{24EI} \quad (\downarrow)$$



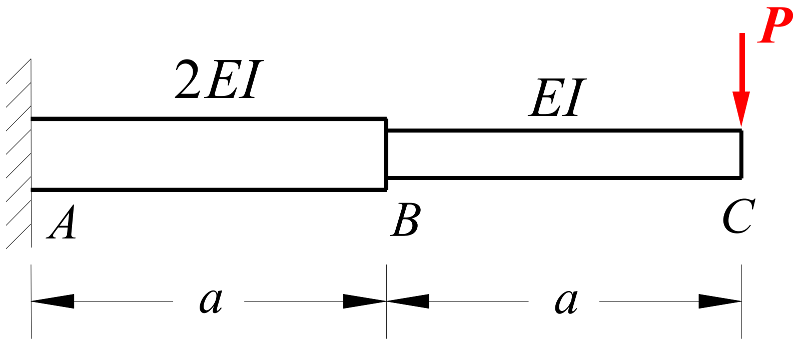
$$\theta_{C1} = -\frac{4qa^3}{3EI} + \frac{qa^3}{6EI} = -\frac{7qa^3}{6EI} \quad (\circlearrowright)$$



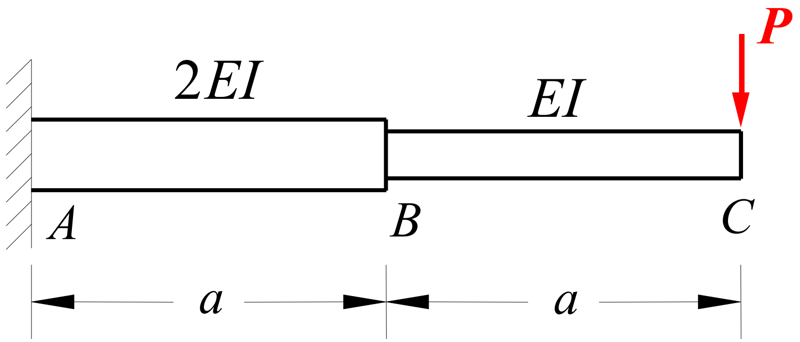
§6.4 用叠加法求弯曲变形

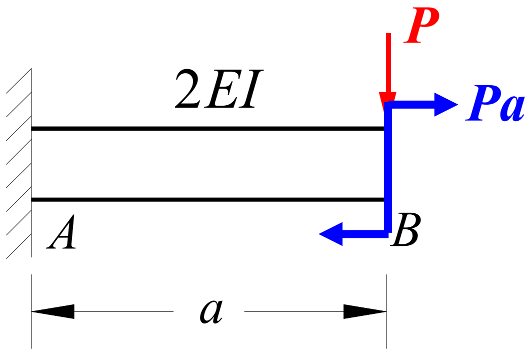
例题5 （逐段刚化法）

用叠加法求图示变截面梁B、C截面的挠度w_B、w_C。

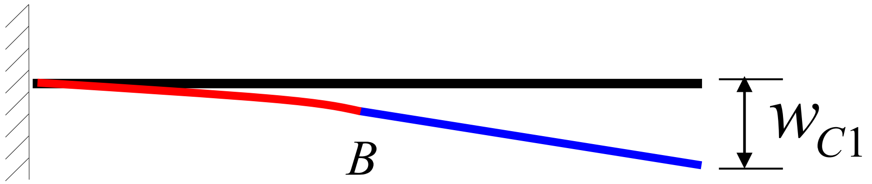


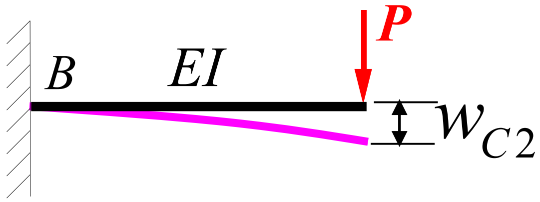
分析： 求w_B





求w_C

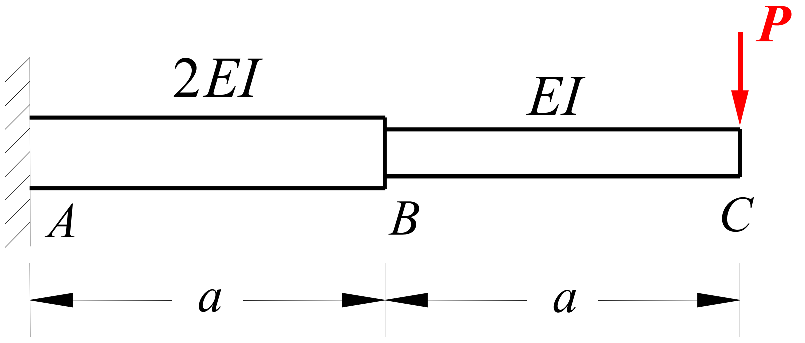




$$w_C = w_{C1} + w_{C2}$$

例题5 （逐段刚化法）

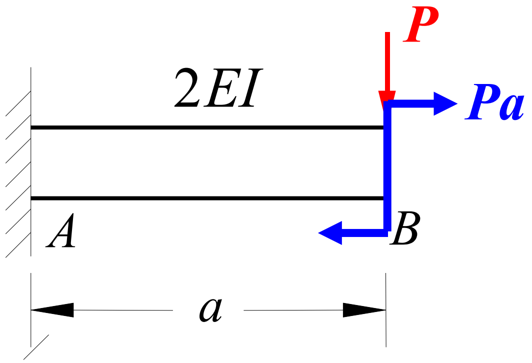
用叠加法求图示变截面梁B、C截面的挠度w_B、w_C。



解：（1）B截面

$$w_B = -\frac{Pa^3}{3(2EI)} - \frac{Pa \cdot a^2}{2(2EI)}$$

$$= -\frac{5Pa^3}{12EI}(\downarrow)$$



$$\theta_B = -\frac{Pa^2}{2(2EI)} - \frac{Pa \cdot a}{2EI}$$

$$= -\frac{3Pa^2}{4EI} \ (\circlearrowright)$$

§6.4 用叠加法求弯曲变形

例题5 （逐段刚化法）

用叠加法求图示变截面梁B、C截面的挠度w_B、w_C。

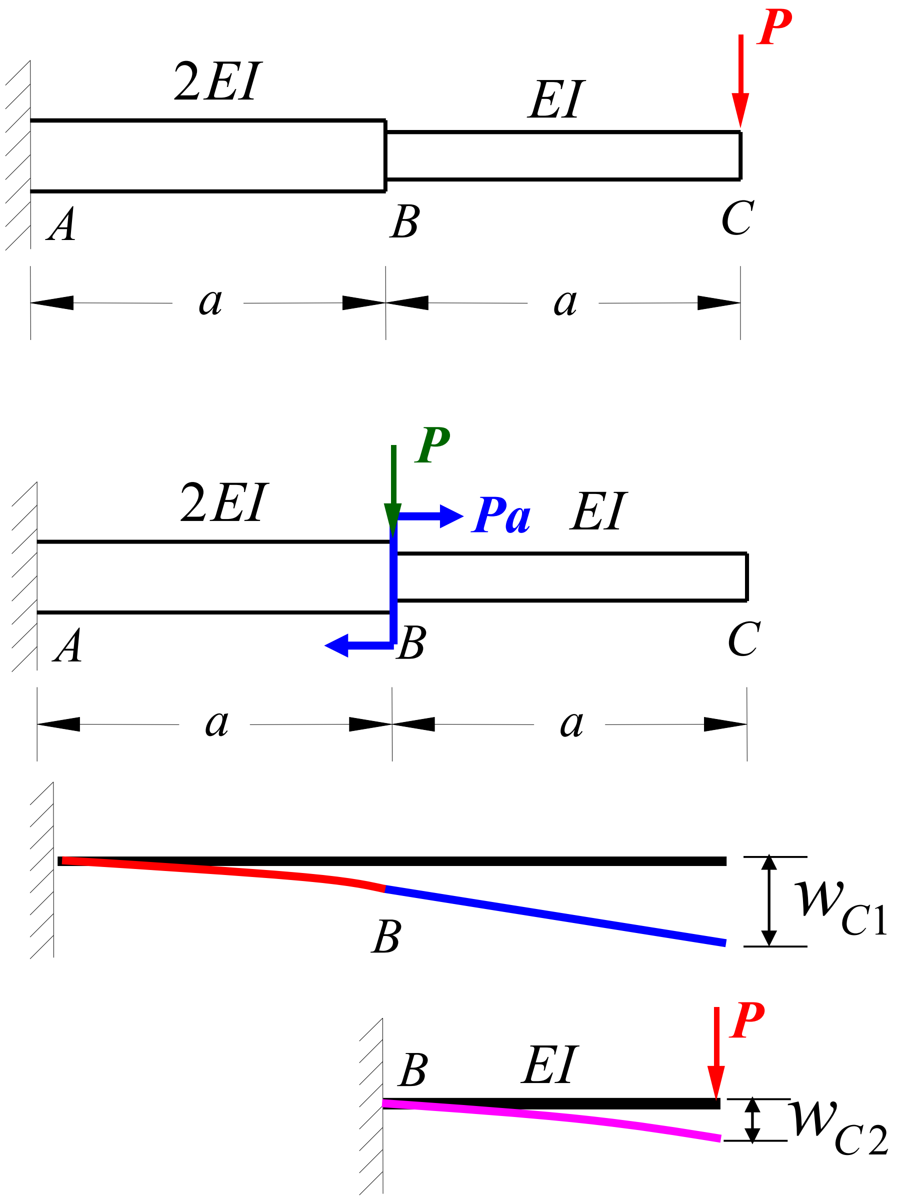
解：（2）C截面

$$w_{C2}=-\frac{Pa^3}{3EI}$$

$$w_{C1}=w_B+\theta_B\cdot a$$

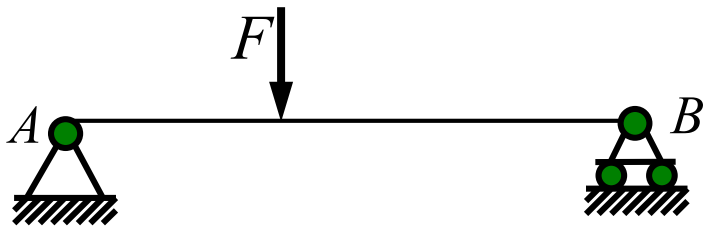
$$w_C=w_{C1}+w_{C2}$$

$$=-\frac{3Pa^3}{2EI}(\downarrow)$$



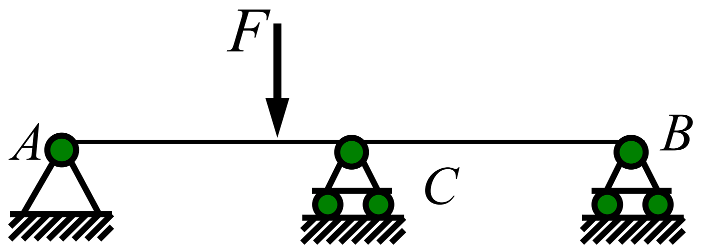
§6.5 简单超静定梁

静定梁：约束力用静力平衡方程即可确定



静定梁

单凭静力平衡方程不能求出全部支反力的梁，称为超静定梁。（即支反力数目大于有效平衡方程数目的梁）



超静定梁

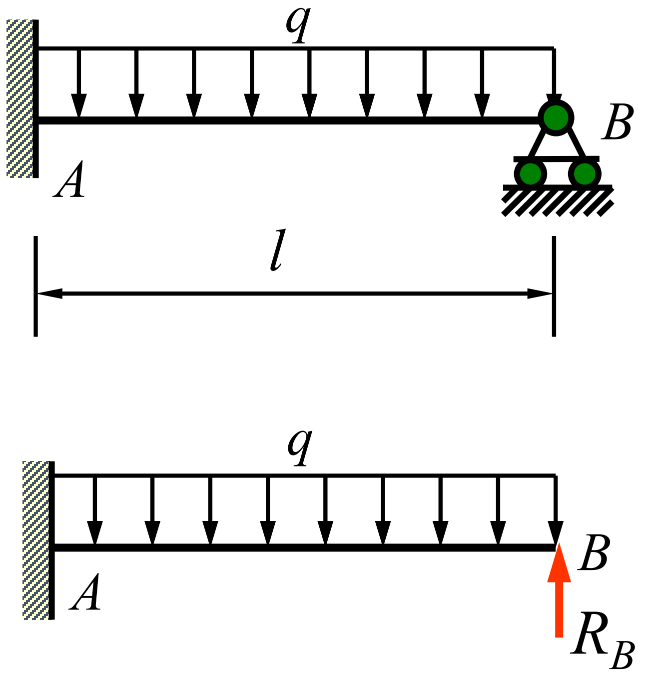
超静定梁的求解

（1）解除多余约束，建立等效系统

将可动绞支座看作多余约束，

解除多余约束代之以约束反力R_B，

得到原超静定梁的**等效**静定系。



（2）变形协调方程

$$w_B = 0$$

多余约束虽然增加了未知力，但也提供了建立变形协调方程的可能！

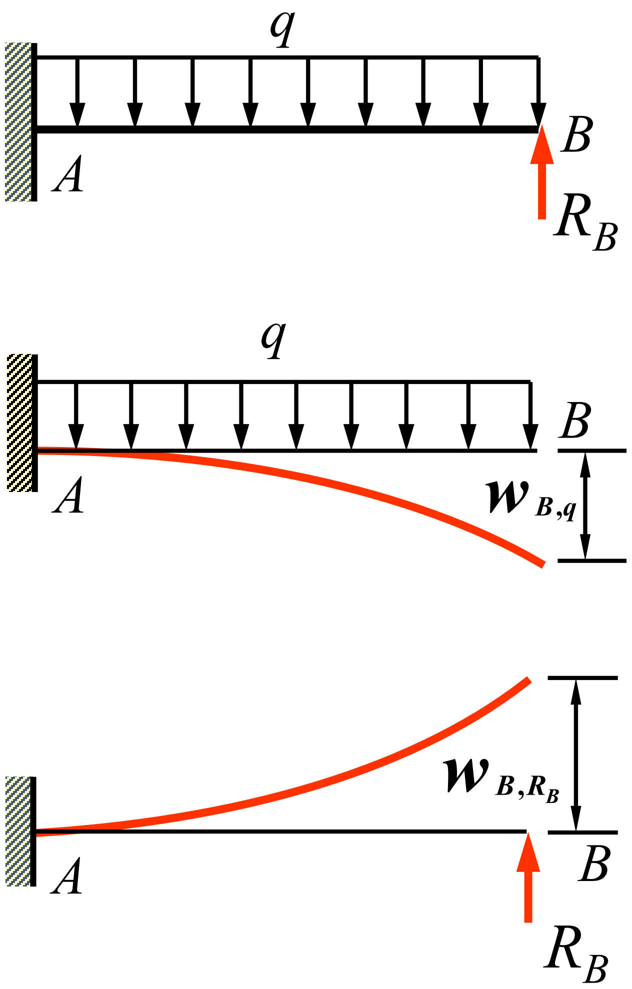
超静定梁的求解

（3）叠加法

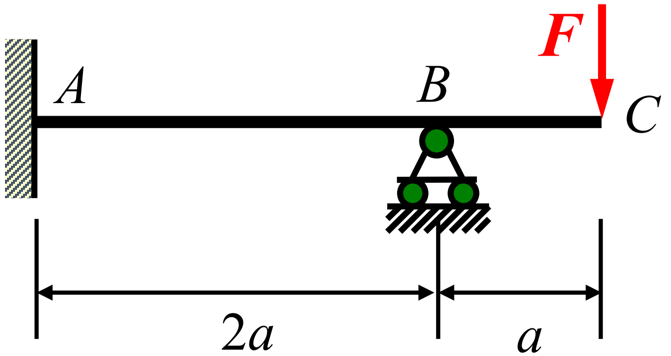
$$w_B = w_{B,q} + w_{B,R_B} = \mathbf{0}$$

由该式解得

$$R_B = \frac{3}{8}ql$$



例题6　求解右图梁的支座反力。



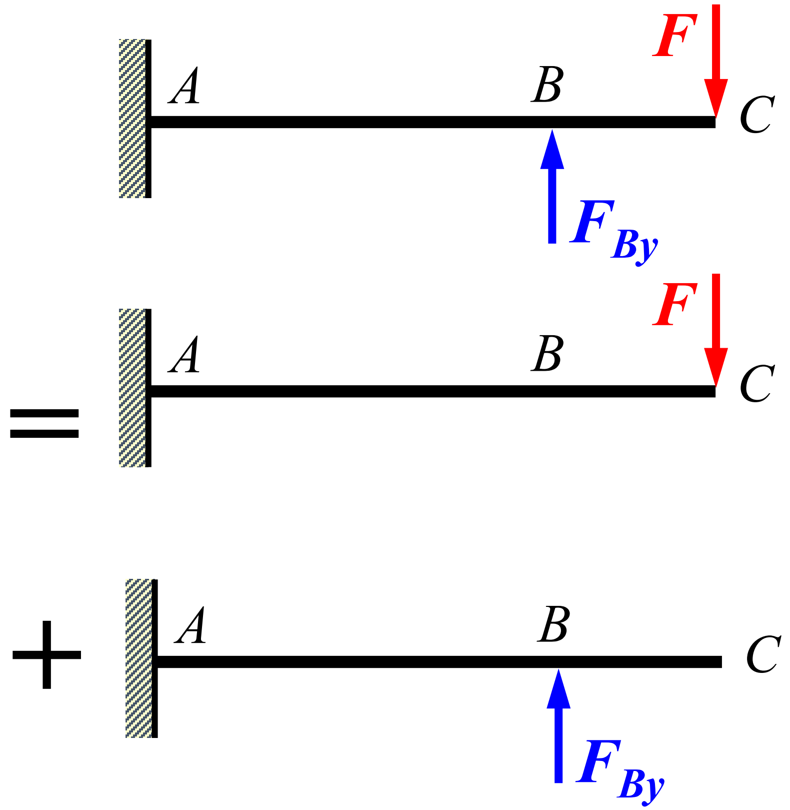
解：（1）判定超静定次数；

（2）解除多余约束，建立等效系统；

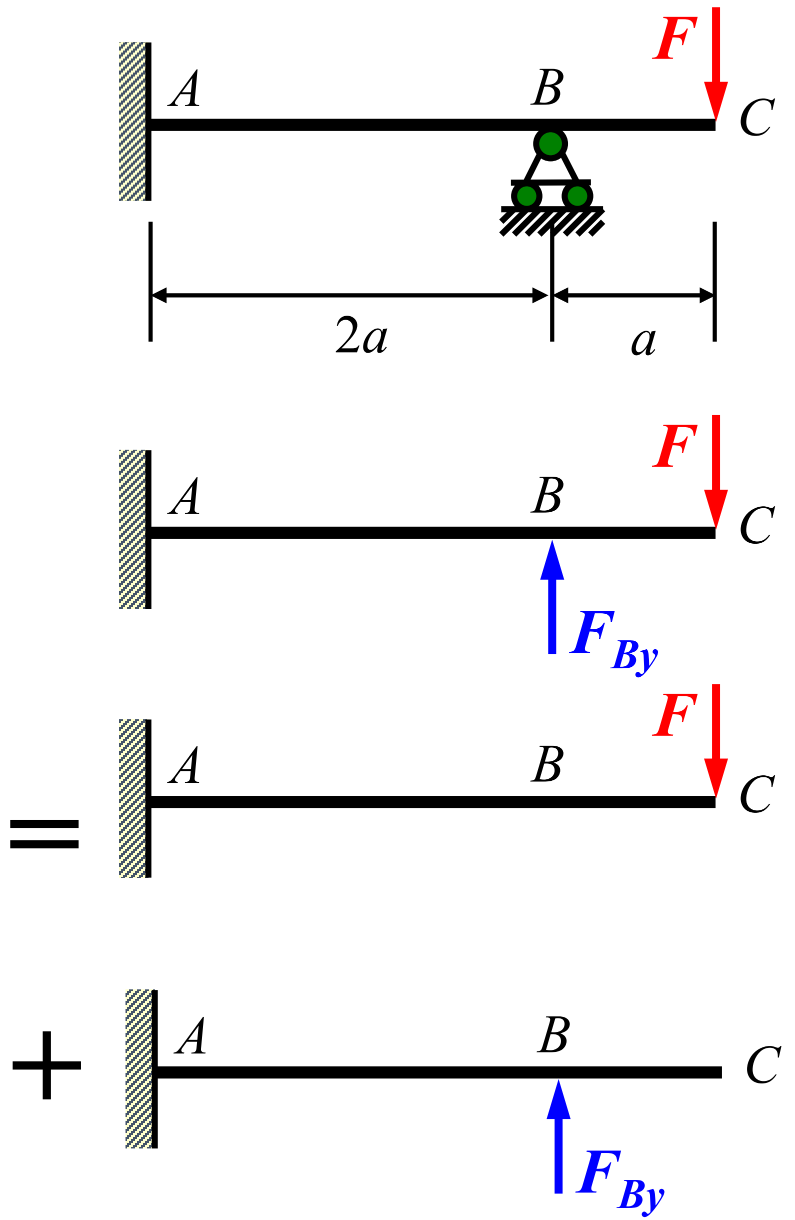
（3）变形协调条件　$w_B = 0$

（4）叠加法求解

$$w_B = w_{B,F} + w_{B,F_{By}} = 0$$



例题6 求梁的支反力，梁的抗弯刚度为EI。



解：查表得：

$$w_{BF}=-\frac{F(2a)^2}{6EI}(9a-2a)=-\frac{14Fa^3}{3EI}$$

$$w_{BF_{By}}=\frac{8F_{By}a^3}{3EI}$$

$$-\frac{14Fa^3}{3EI}+\frac{8F_{By}a^3}{3EI}=0$$

$$F_{By}=\frac{7}{4}F$$

§6.6 弯曲刚度准则

$$\boxed{w_{\max} \le [w], \qquad \theta_{\max} \le [\theta]}$$

机械工程（轴）： $[w] = \left(\dfrac{1}{5000} \sim \dfrac{1}{10000}\right) l$

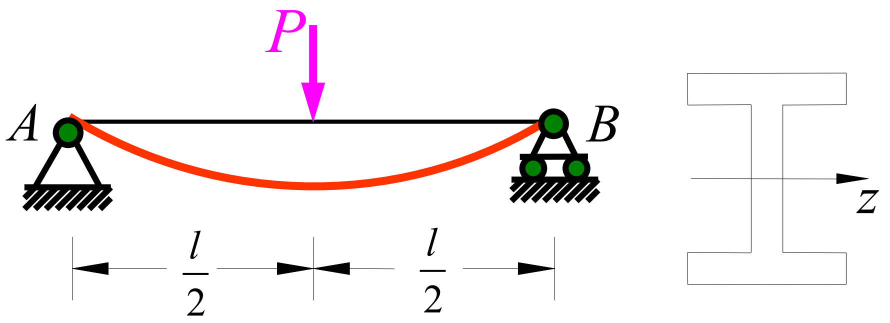
土木工程（梁）： $[w] = \left(\dfrac{1}{250} \sim \dfrac{1}{1000}\right) l$

传动轴: $[\theta] = 0.005 \sim 0.001 \ \ \text{rad}$

§6.6 弯曲刚度准则

例题8 工字钢梁 l=8 m， I_z= 2370 cm^4, W_z= 237 cm^3，[w] = l/500，E = 200 GPa，[σ] = 100 MPa。

试根据梁的刚度条件，确定梁的许可载荷 [P]，并校核强度。



解：由刚度条件

$$w_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} \le [w] = \frac{l}{500}$$

$$P \le \frac{48EI}{500l^2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Pl}{4W_z} = 60\text{MPa} \le [\sigma]$$

所以满足强度条件。

§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

影响梁弯曲变形的因素：

$$w'' = \frac{M(x)}{EI_z}$$

- 梁的支承和载荷情况
- 梁的材料、截面尺寸、形状等

（1）增大梁的抗弯刚度EI

- 增大E

选用弹性模量E较高的材料能提高梁的刚度

§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

增大弹性模量

钢结构形成整体的巨型大跨度空间马鞍形结构，钢桁架(steel truss)最长313米，横跨体育场一至四层，最倾斜的钢柱和地面夹角达到59°

特种钢材Q460：钢材受力强度达到460 MPa 时才会发生塑性变形

§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

影响梁弯曲变形的因素：

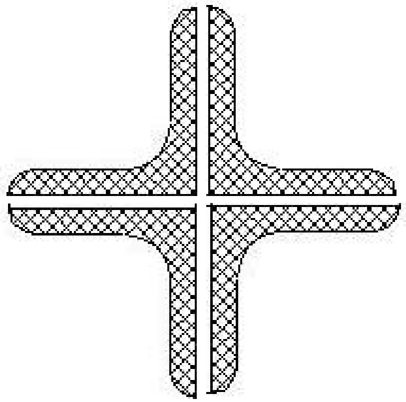
- 梁的支承和载荷情况
- 梁的材料、截面尺寸、形状等

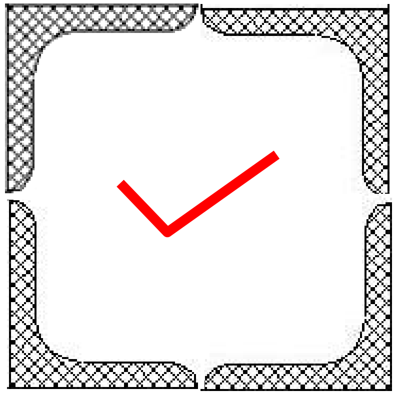
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

（1）增大梁的抗弯刚度EI

- 增大E
- 增大I

工程中常采用工字型，框型截面





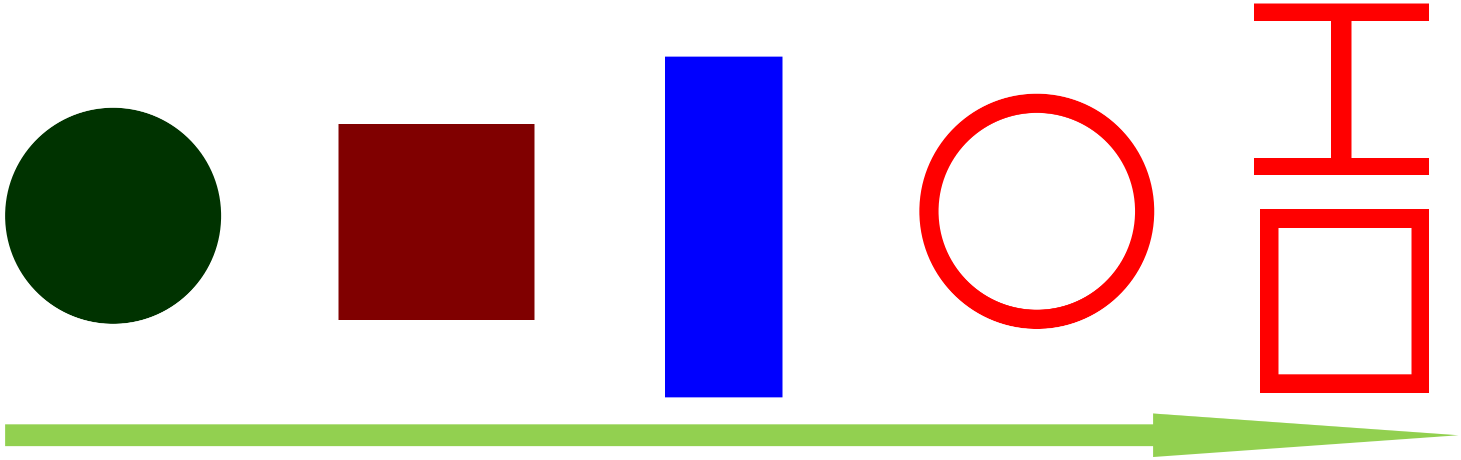
§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

影响梁弯曲变形的因素：

- 梁的支承和载荷情况
- 梁的材料、截面尺寸、形状等

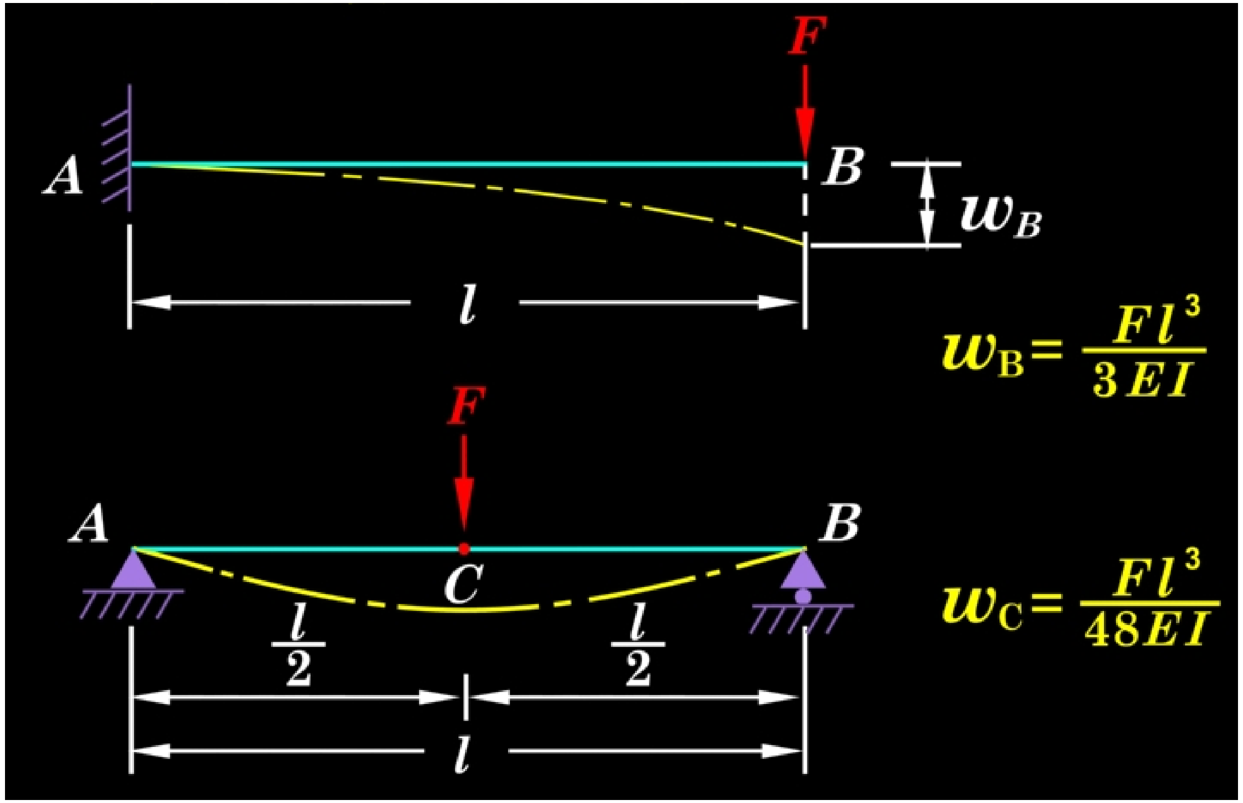
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

（1）增大梁的抗弯刚度EI



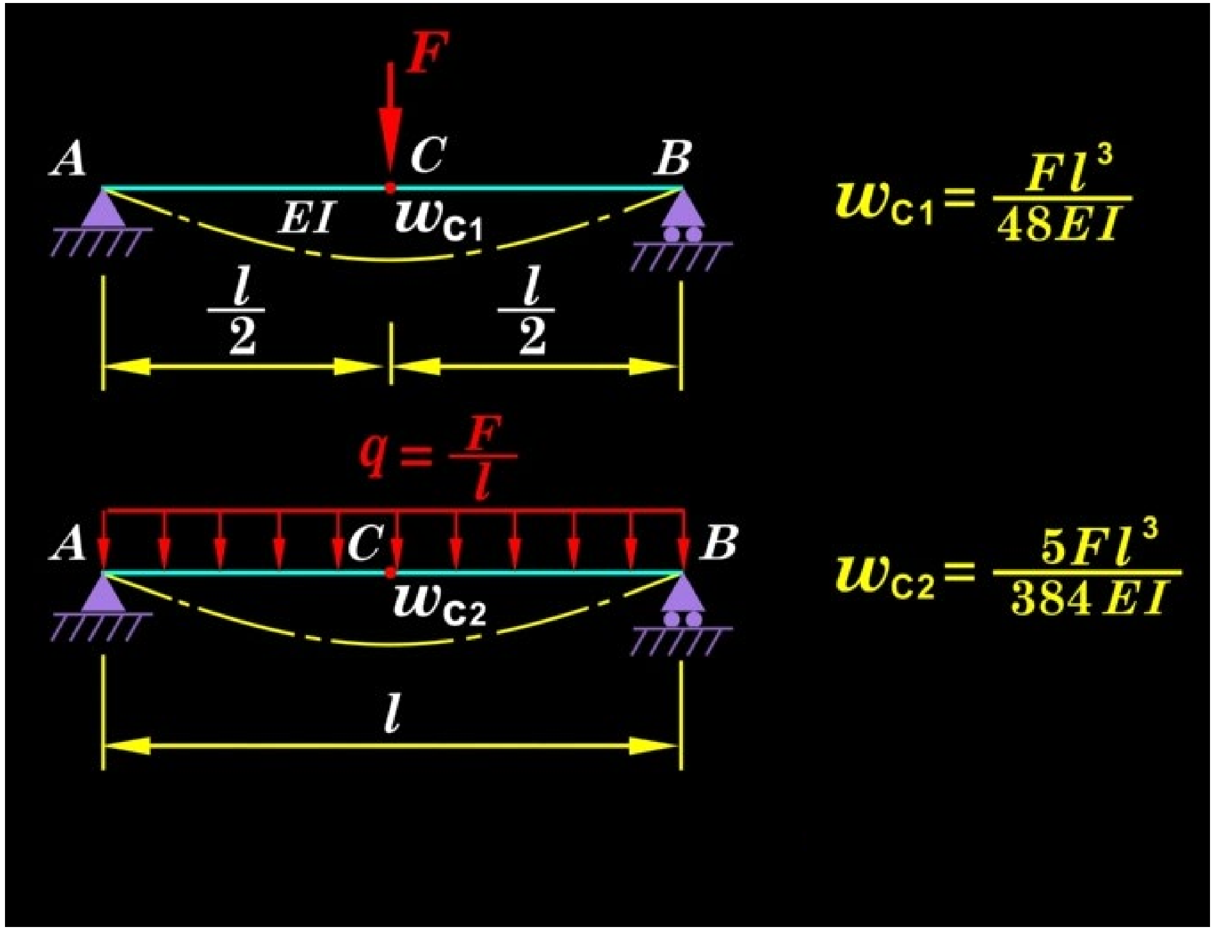
截面的优化方向

(2) 改善结构形式，减少梁的弯矩



改变支座类型

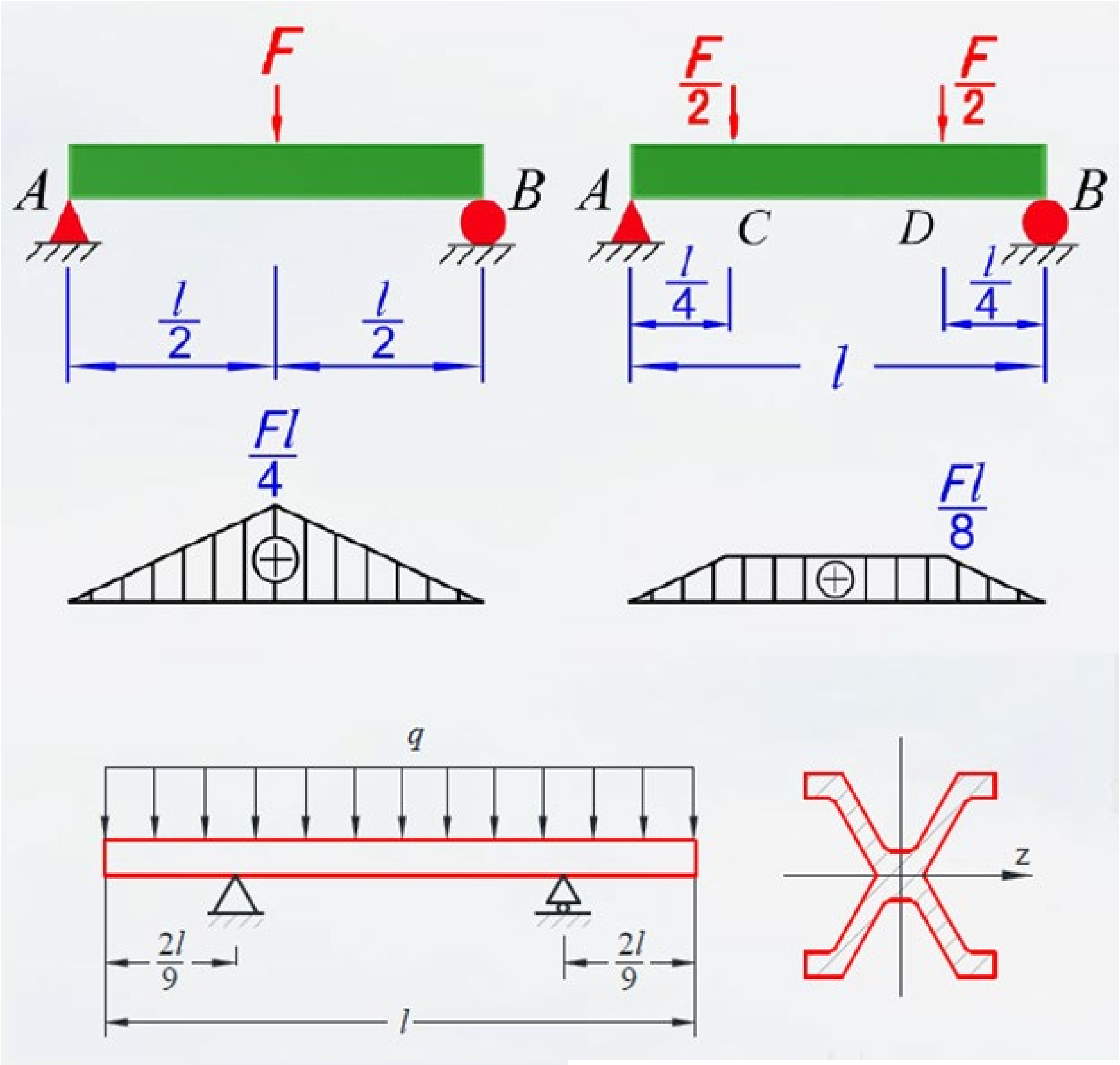
（2）改善结构形式，减少梁的弯矩

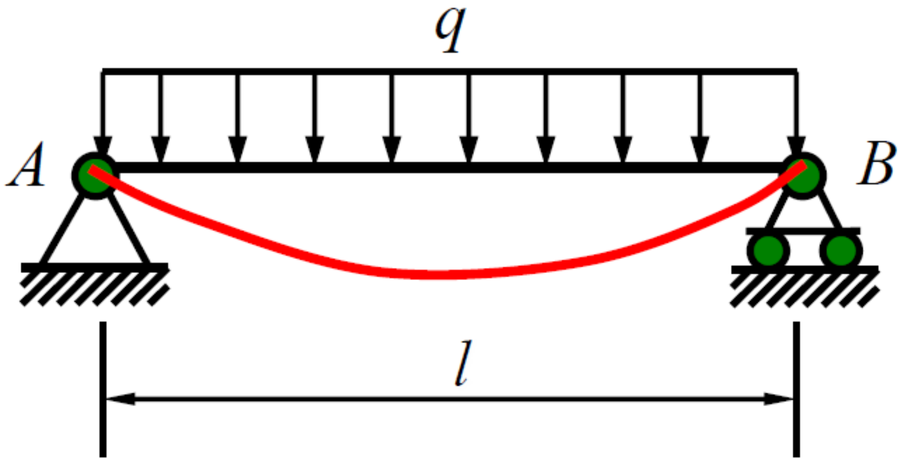


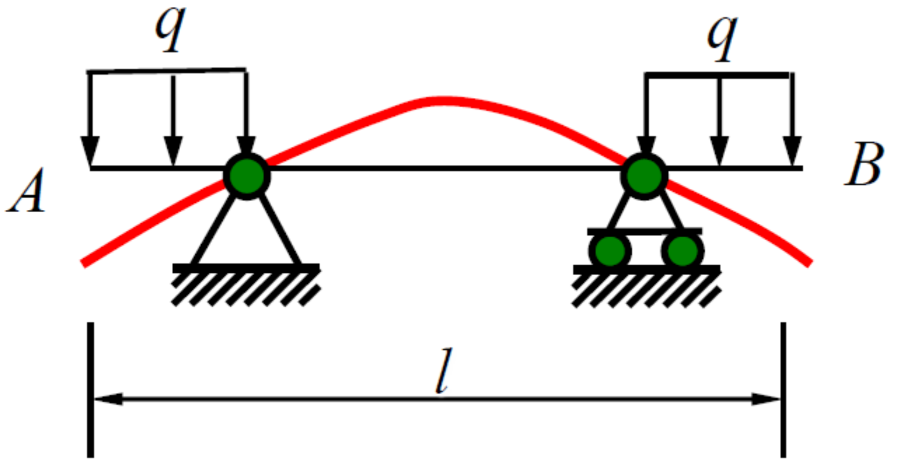
改变载荷类型

§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

（2）改善结构形式，减少梁的弯矩







§6.6 提高弯曲刚度的一些措施

（4）采用超静定结构

作业

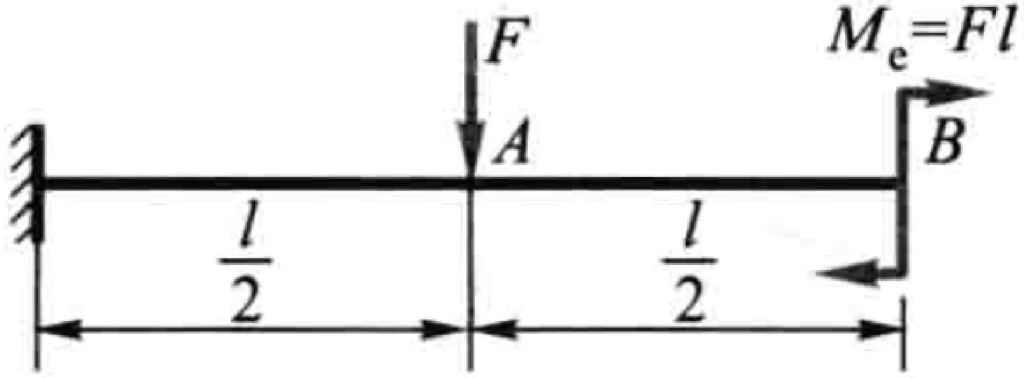
6.10 (a) 叠加法

6.15 刚度校核

6.27 逐段刚化法

作业

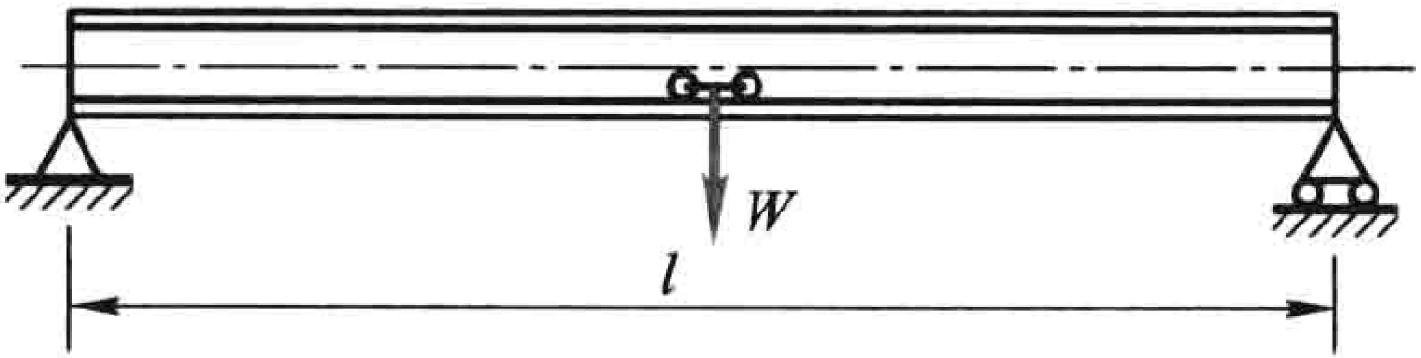
6.10 用叠加法求图示各梁截面 A 的挠度和截面 B 的转角。EI 为已知常数。



(a)

作业

6.15 桥式起重机的最大载荷为 $W = 20\ \mathrm{kN}$。起重机大梁为 No.32a 工字钢，$E = 210\ \mathrm{GPa}$，$l = 8.76\ \mathrm{m}$。规定 $[w] = \dfrac{l}{500}$。试校核大梁的刚度。



<table>
<tr><th rowspan="3">型号</th><th colspan="6" rowspan="2">尺寸/mm</th><th rowspan="3">截面面积 /cm²</th><th rowspan="3">理论重量 /(kg/m)</th><th colspan="7">参考数值</th></tr>
<tr><th colspan="4">x−x</th><th colspan="3">y−y</th></tr>
<tr><th>h</th><th>b</th><th>d</th><th>t</th><th>r</th><th>r₁</th><th>I_x /cm⁴</th><th>W_x /cm³</th><th>i_x /cm</th><th>I_x : S_x /cm</th><th>I_y /cm⁴</th><th>W_y /cm³</th><th>i_y /cm</th></tr>
<tr><td>32a</td><td>320</td><td>130</td><td>9.5</td><td>15.0</td><td>11.5</td><td>5.8</td><td>67.156</td><td>52.717</td><td>11 100</td><td>692</td><td>12.8</td><td>27.5</td><td>460</td><td>70.8</td><td>2.62</td></tr>
</table>

作业

6.27　图中两根梁的 EI 相同，且等于常量。两梁由铰链相互连接。试求 F 力作用点 D 的挠度。