第五章　弯曲应力



重要概念的回顾与强化

弯曲正应力公式

几何关系

观察变形
提出假设

平面假设
单向受力假设
中性层、中性轴

变形的分布规律

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

物理关系

应力的分布规律

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

静力关系

建立公式

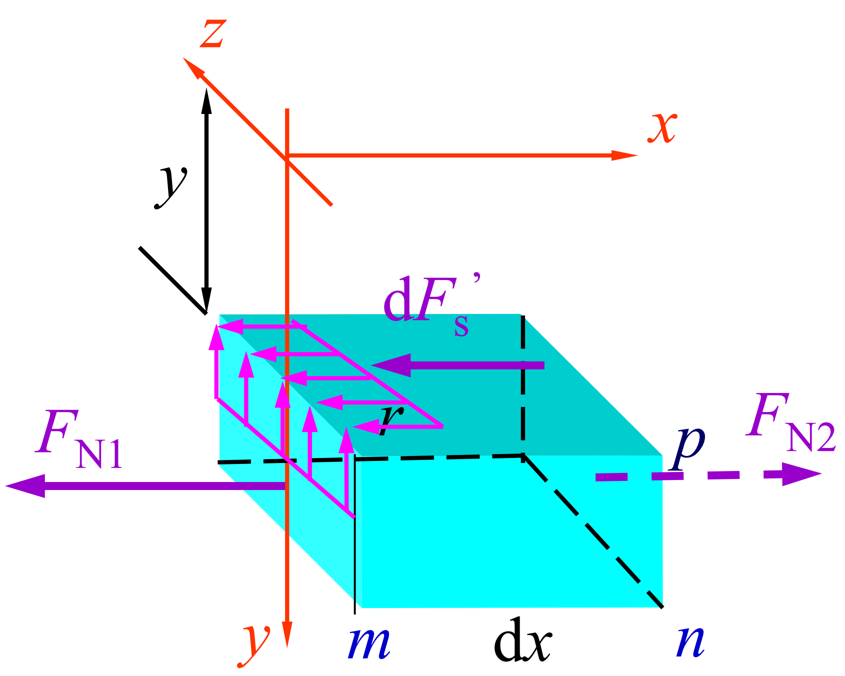
$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}}$$

曲率和载荷的关系

弯曲切应力公式

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

距离z轴y处的切应力



I_z：整个横截面对中性轴的惯性矩；

b ：矩型截面的宽度

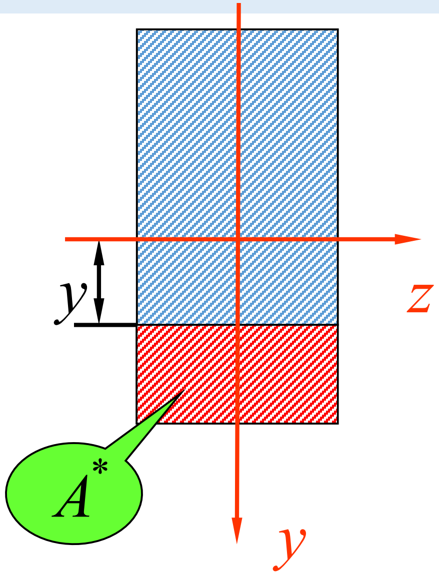
S_z^*：距中性轴为y的横线以下部分对中性轴的静矩

重要概念的回顾与强化

弯曲切应力公式

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

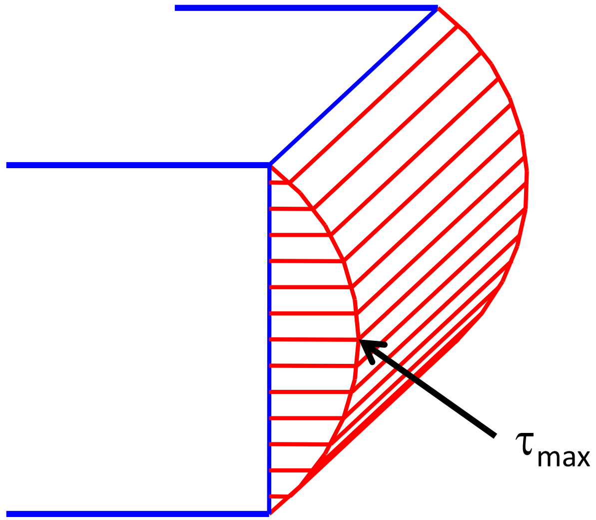
距离z轴y处的切应力



切应力在横截面上的变化规律

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times bh^3/12} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh} = \boxed{\frac{3F_S}{2A}}$$

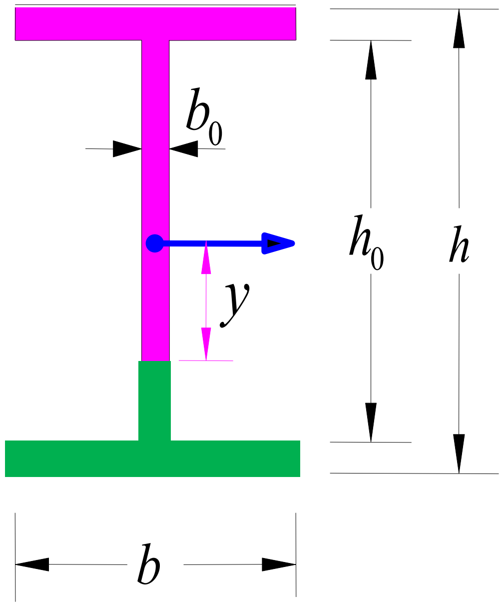


重要概念的回顾与强化

弯曲切应力公式

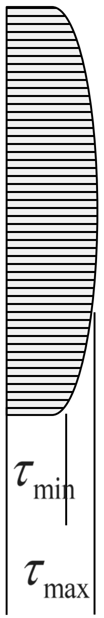
$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

距离z轴y处的切应力



腹板切应力在横截面上的变化规律

$$\tau = \frac{F_s}{I_z b_0}\left[\frac{b}{8}\left(h - h_0^2\right) + \frac{b_0}{2}\left(\frac{h_0^2}{4} - y^2\right)\right]$$



腹板上的剪力占主导，且近似均匀分布

$$\tau \approx \boxed{\frac{F_s}{b_0 h_0}}$$

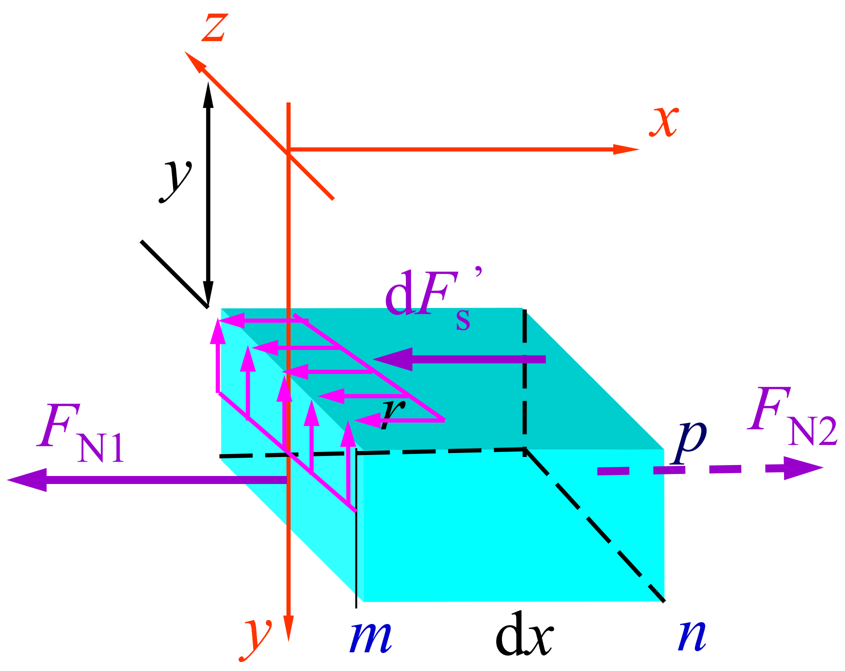
§5.4 弯曲切应力

3、圆截面梁的切应力

§5.4 弯曲切应力

矩形截面梁切应力公式推导过程中涉及的假设和思路：

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$



- 横截面上各点切应力与剪力平行 （τ // F_s）；
- 切应力沿截面宽度方向均匀分布；
- 根据剪应力互等定理转换求解思路；
- 横截面上弯曲正应力公式;
- （切三刀得到的单元体）的静力平衡。

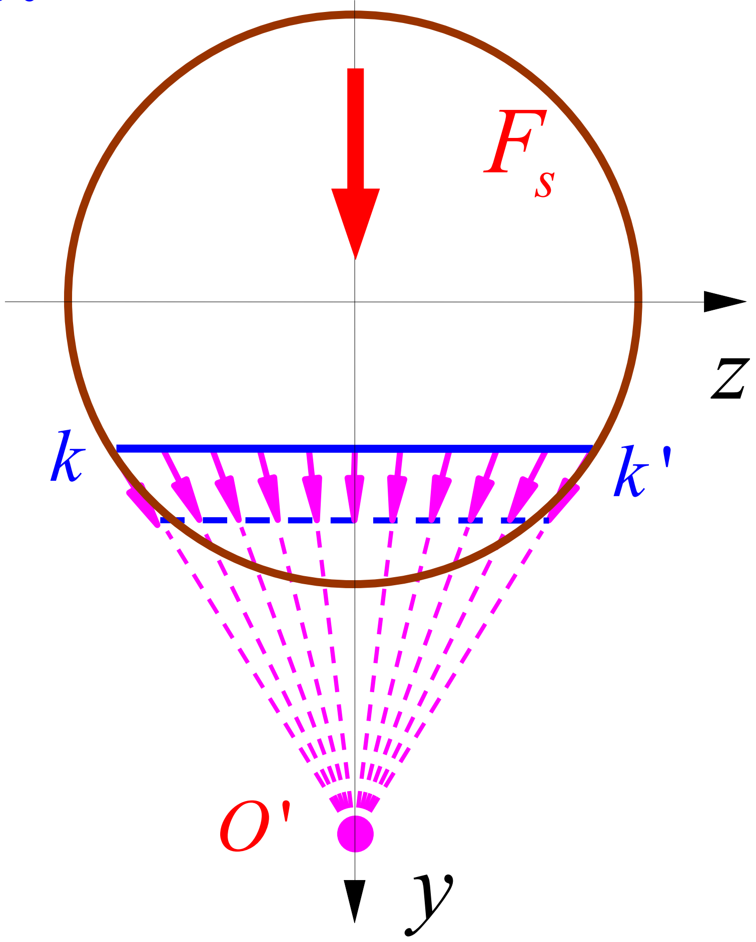
3、圆截面梁的切应力

第三刀的边缘上切应力的方向与圆周相切，和剪力不平行。

两个假设

（1）沿宽度*kk'*上各点处的切应力均汇交于*O'*点。

（2）沿宽度方向各点切应力沿*y*方向分量 τ_y 相等。



- 横截面上各点 τ_y 与剪力平行；
- τ_y 沿截面宽度方向均匀分布；
- 剪应力互等定理转换求解思路；
- 横截面上弯曲正应力公式；
- （切三刀得到的单元体）的静力平衡；

3、圆截面梁的切应力

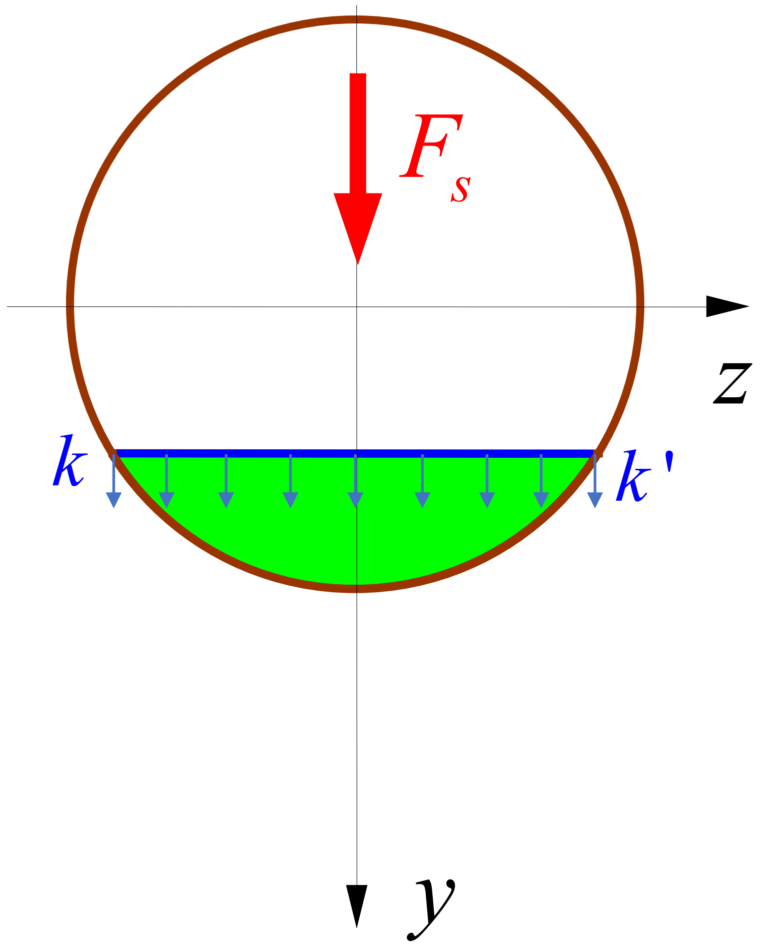
$$\tau_y = \frac{F_s S_Z^*}{I_Z b}$$

$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}$$

S_Z^*： 弦kk'以下面积对z 轴的静矩。

b: kk'弦的长度

最大切应力在哪个位置?

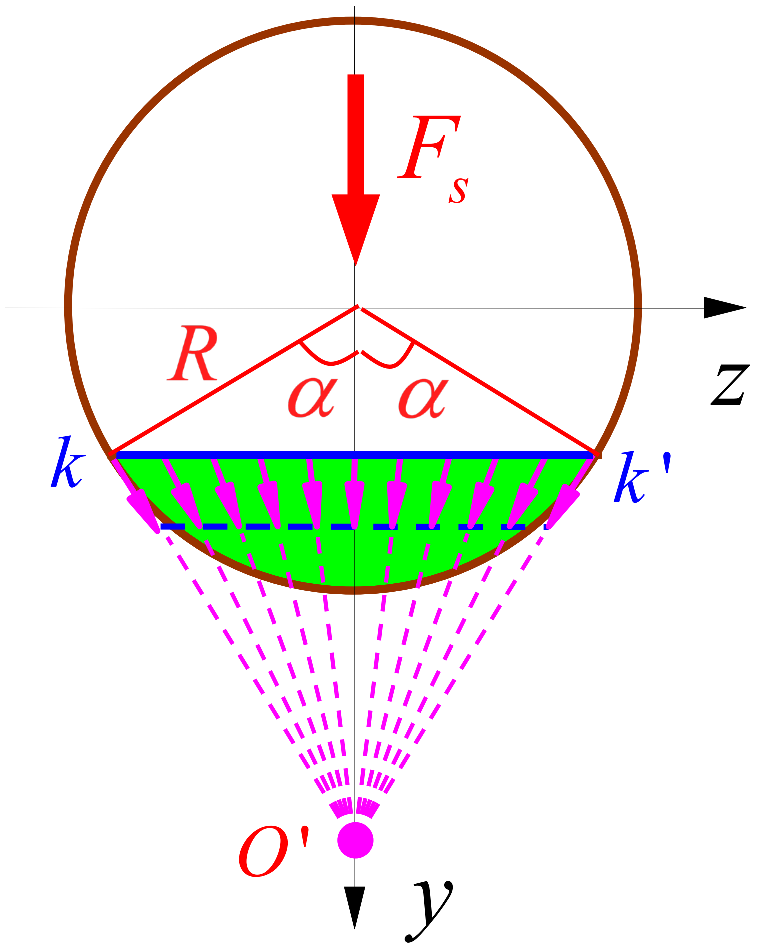


3、圆截面梁的切应力

$$S_Z^* = S_{Z扇形}^* - S_{Z三角形}^*$$

$$S_{Z扇形}^* = \frac{2R^3 \sin\alpha}{3}$$

$$S_{Z三角形}^* = \frac{2}{3}R^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$$



3、圆截面梁的切应力

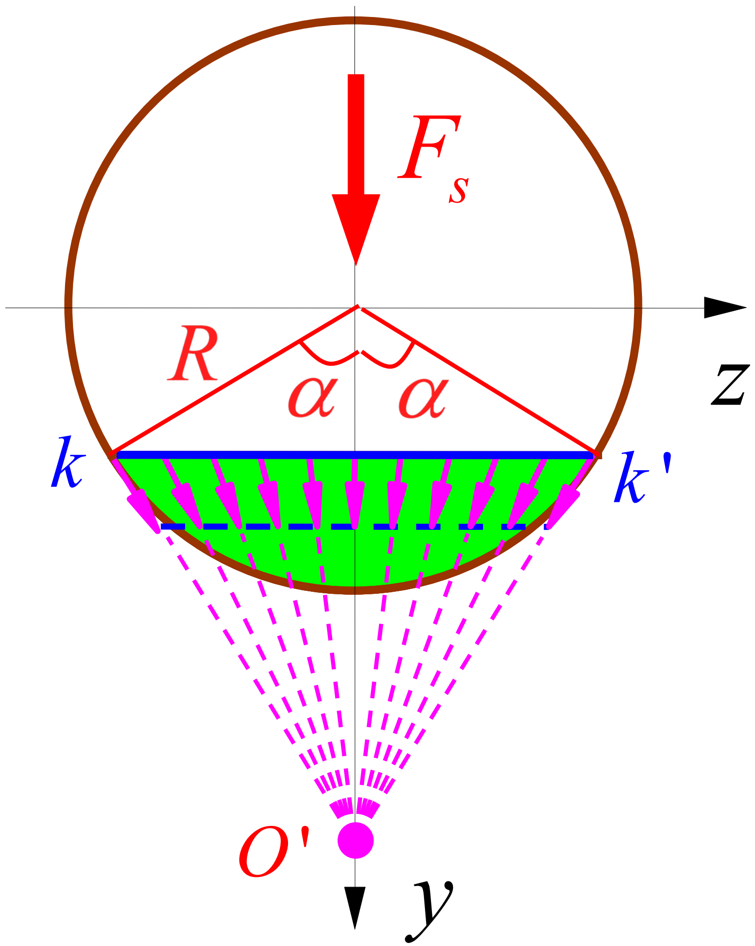
$$S_Z^* = S_{Z\text{扇形}}^* - S_{Z\text{三角形}}^*$$

$$= \frac{2R^3 \sin\alpha}{3} - \frac{2}{3}R^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$$

$$= \frac{2R^3 \sin\alpha}{3}(1-\cos^2\alpha) = \frac{2R^3}{3}\sin^3\alpha$$

$$b = 2R\sin\alpha$$

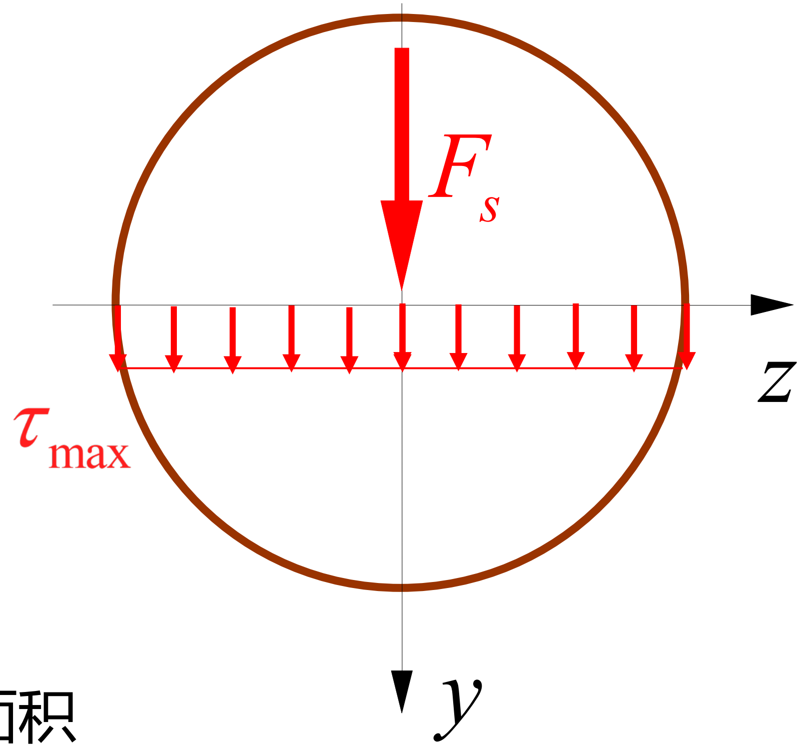
$$\boxed{\frac{S_Z^*}{b} = \frac{1}{3}R^2 \sin^2\alpha}$$



3、圆截面梁的切应力

最大切应力：

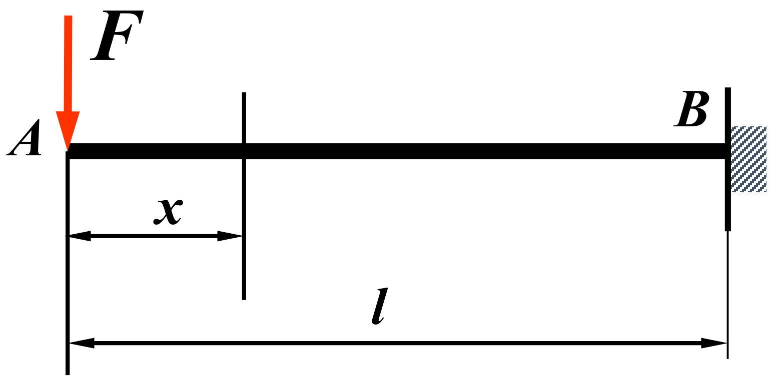
$$\tau_{\max} = \boxed{\frac{4}{3}\frac{F_s}{A}}$$



式中 $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ 为圆截面的面积

4、弯曲正应力与弯曲切应力比较

悬臂梁在自由端受集中载荷F作用，作此梁的剪力图和弯矩图。

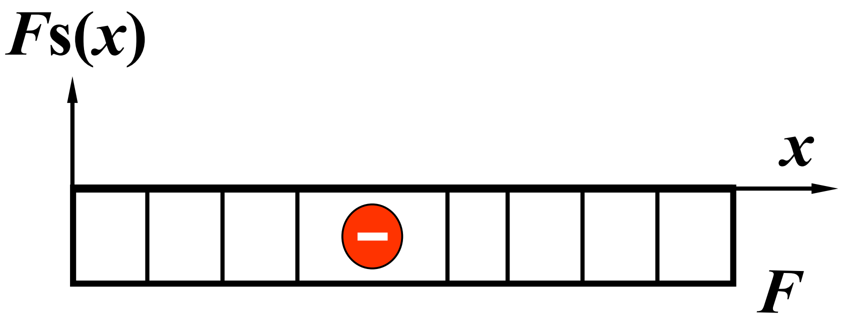


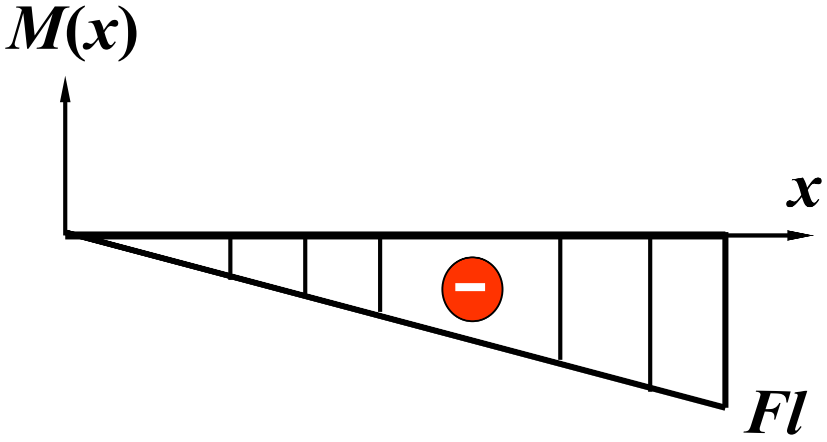
解：（1）坐标原点取在梁的左端，梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = -F \qquad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -Fx \qquad (0 \le x < l)$$

$$F_{S\max} = F \qquad M_{\max} = Fl$$





4、弯曲正应力与弯曲切应力比较

考虑直径为 d 的圆截面

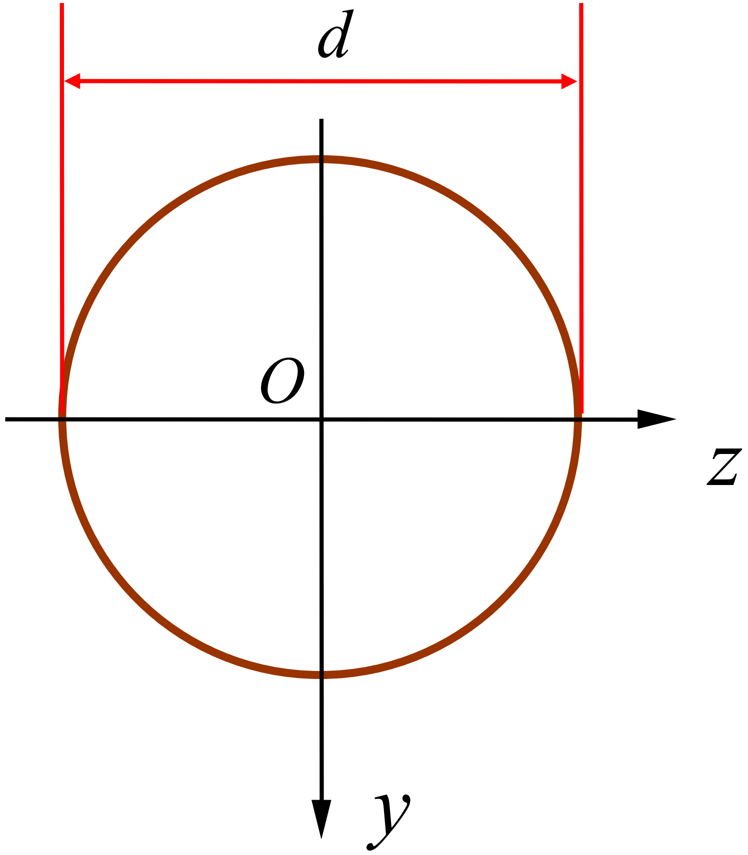
$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{8M_{\max}}{Ad}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4F_{S\max}}{3A}$$

$$F_{S\max} = F \qquad M_{\max} = Fl$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 6\frac{l}{d}$$



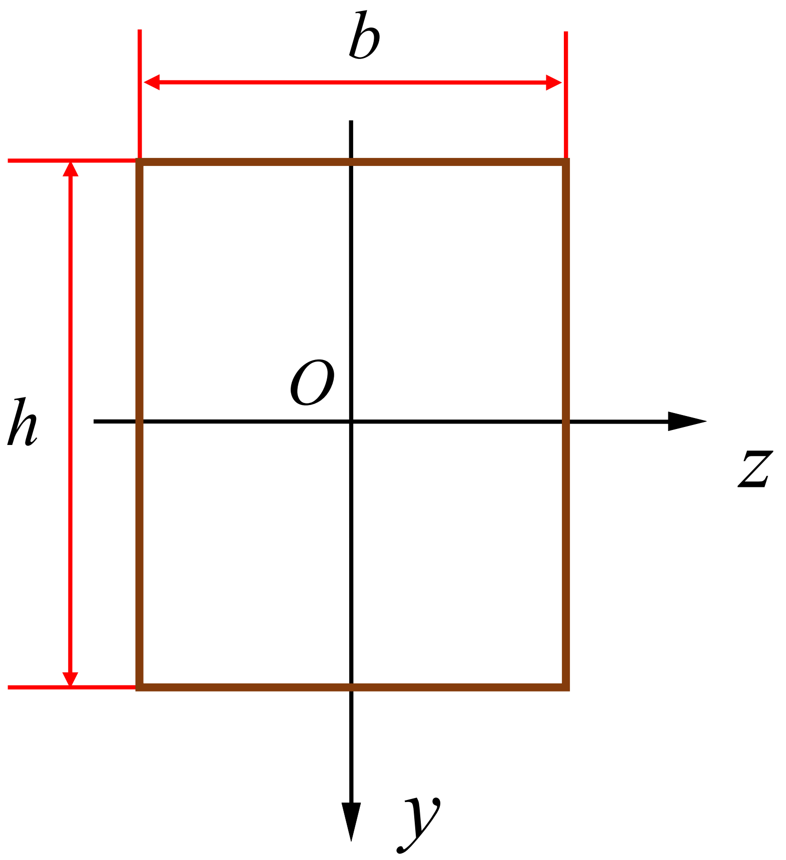
4、弯曲正应力与弯曲切应力比较

考虑宽b、高h的矩形截面

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6M_{\max}}{Ah}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3F_{\text{Smax}}}{2A}$$



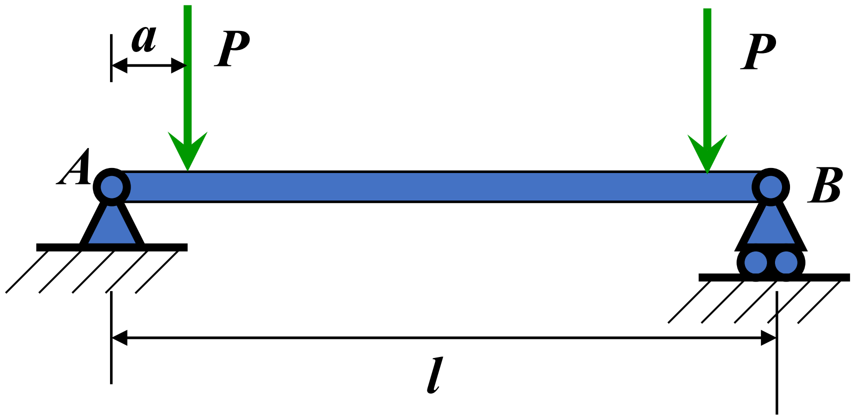
$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4\frac{l}{h}$$

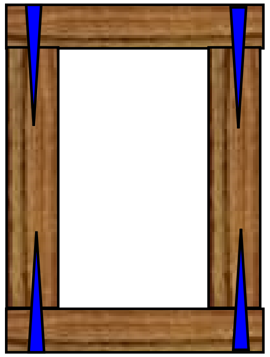
对于细长梁，切应力的影响可以忽略！

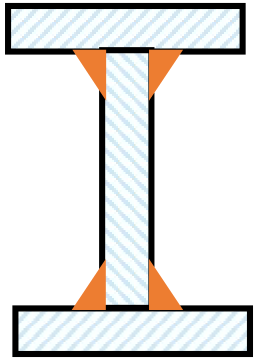
§5.4 弯曲切应力

哪些情况必需考虑切应力?

- 梁的跨度较短时（$l/h < 5$），切应力不可忽略;
- 在支座附近作用较大载荷（载荷靠近支座），弯矩小剪力大;
- 铆接、焊接、胶合的工字形或箱形梁







§5.4 弯曲切应力

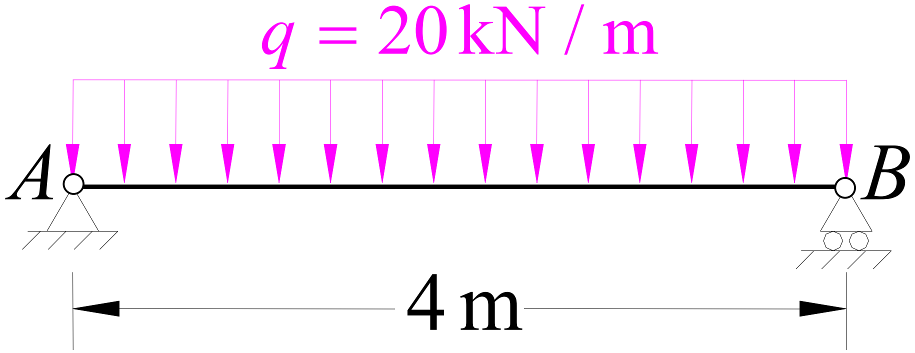
5、弯曲切应力强度准则

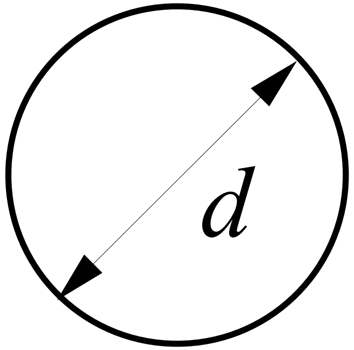
$$\tau_{\max} \le [\tau]$$

矩形等截面梁

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{F_{s,\max} S^{*}_{Z,\max}}{I_Z b} \le [\tau]}$$

例题5.4 圆形截面梁受力如图所示。已知材料的许用应力$[\sigma]=160\ \text{MPa}$，$[\tau]=100\ \text{MPa}$，试求最小直径$d_{\min}$。

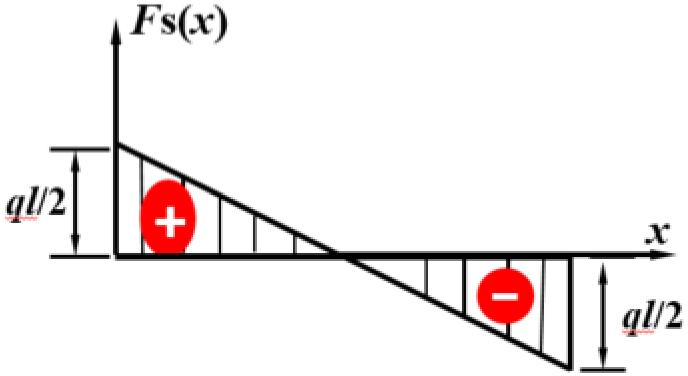




解：

$$F_{s\max}=40\,\text{kN},$$

$$M_{\max}=\tfrac{1}{8}ql^2=40\text{kN}\cdot\text{m}$$



由正应力强度条件：

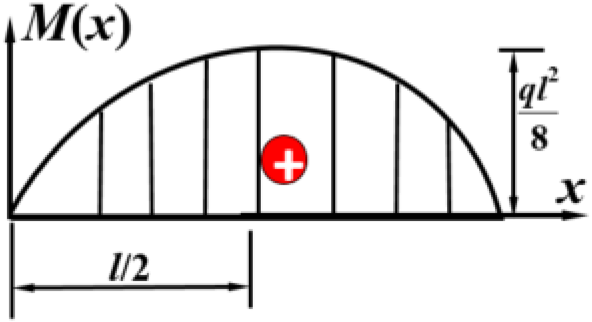
$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$$

$$\Rightarrow\quad d\ge 137\text{mm}$$

由切应力强度条件：

$$\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F_{s\max}}{A}\le[\tau]$$

$$\Rightarrow\quad d\ge 26.1\text{mm}$$



§5.6 提高弯曲强度的措施

梁的合理设计

限制梁的承载能力的主要因素是弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

以此作为梁设计的主要依据。

如何提高梁的承载能力?

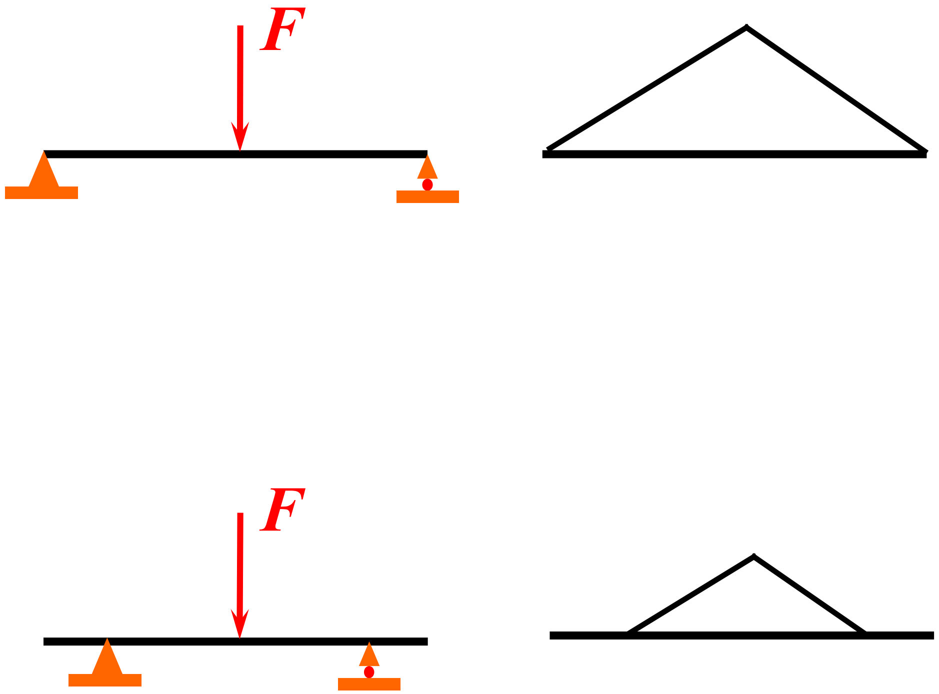
（1）合理安排梁的受力，使$M_{\max}$尽可能地小；

（2）合理设计截面，使W_Z尽可能地大。

§5.6 提高弯曲强度的措施

1、降低M_{max}

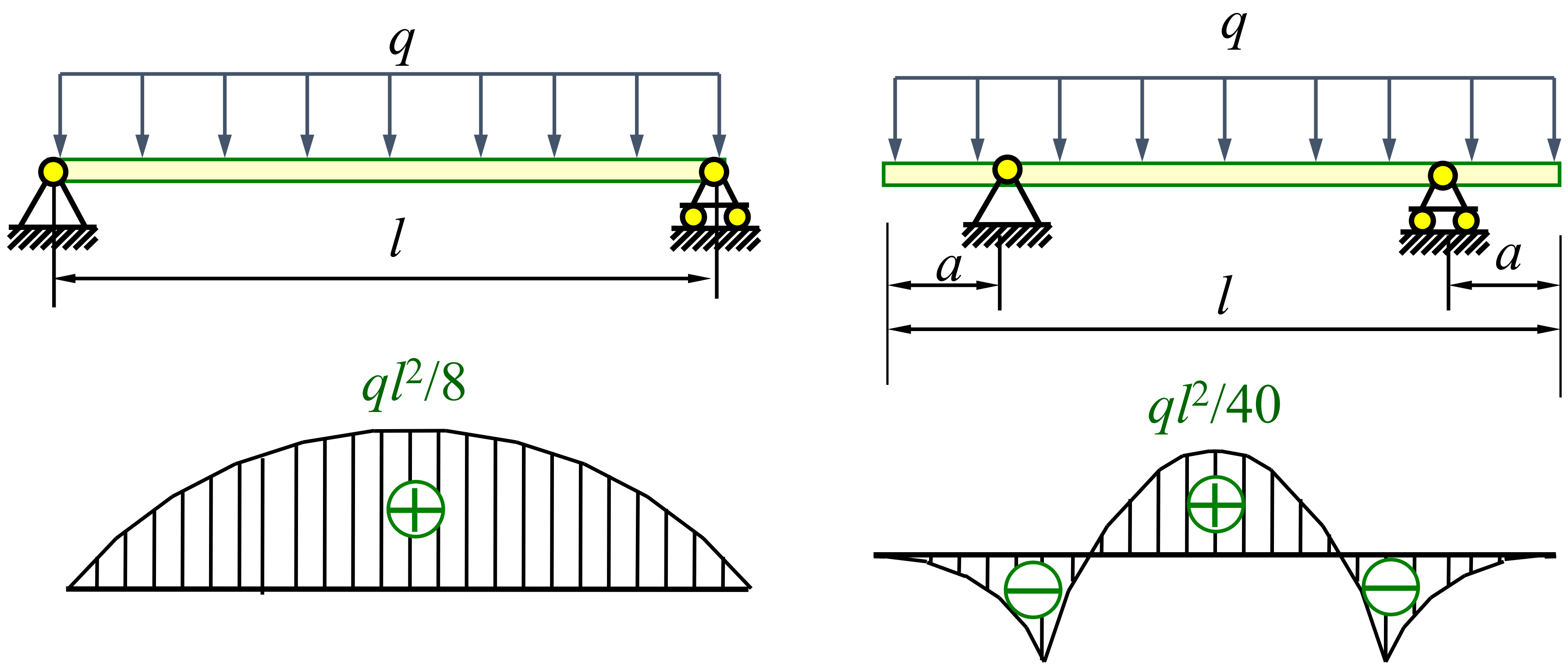
合理安排支座



§5.6 提高弯曲强度的措施

1、降低M_{max}

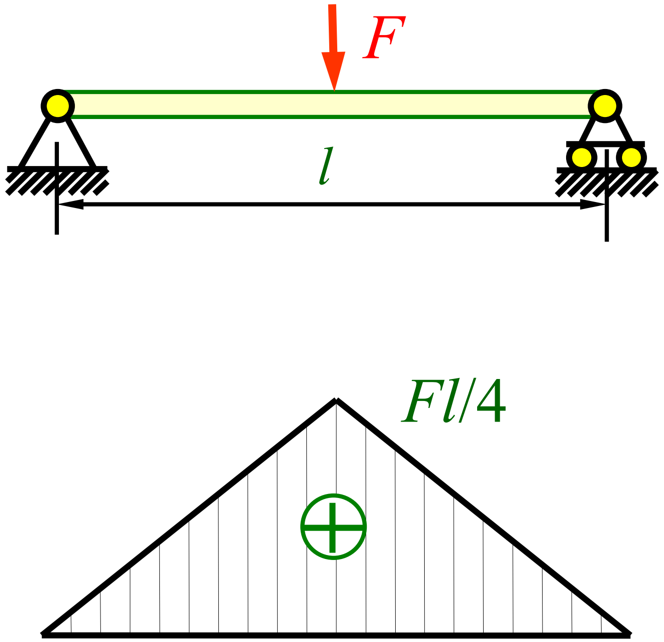
合理安排支座

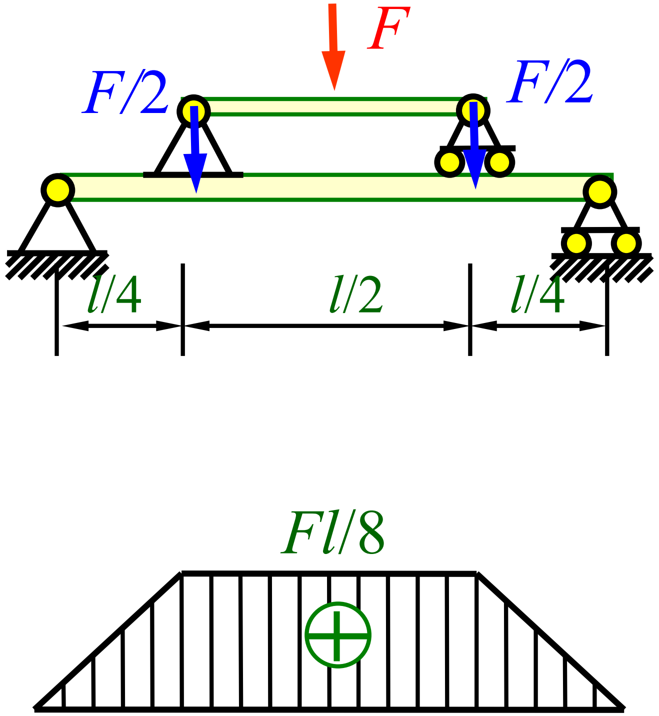


当两端支座分别向跨中移动 a $(0.2l)$ 时

1、降低M_{max}

合理安排支座





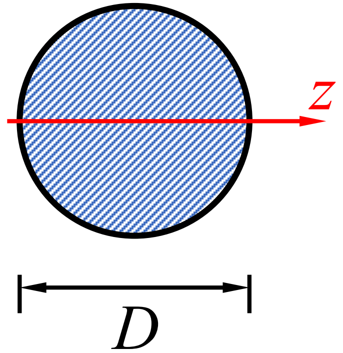
2、增大W_z

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_Z}\le[\sigma]$$

合理设计截面

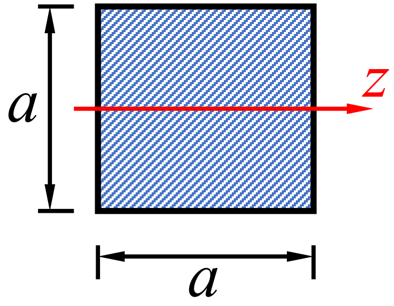
面积相等时，选择抗弯截面系数大的截面

1、圆：$W_{z1}=\dfrac{\pi D^3}{32}$



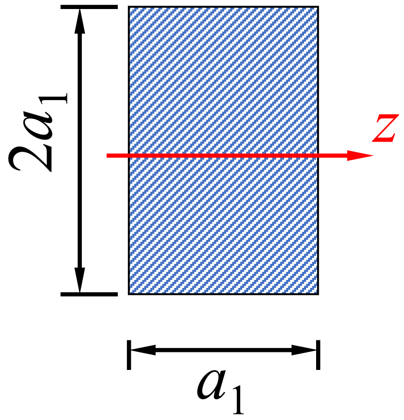
2、正方形：$\dfrac{\pi D_1^2}{4}=a^2,a=\sqrt{\pi}(D_1/2)$

$$W_{z2}=\frac{bh^2}{6}=\frac{(\sqrt{\pi}R)^3}{6}=1.18W_{z1}$$



3、长方形：$\dfrac{\pi D_1^2}{4}=2a_1^2,a_1=\sqrt{2\pi}D_1$

$$W_{z3}=\frac{bh^2}{6}=\frac{4a_1^3}{6}=1.67W_{z1}$$



2、增大W_z

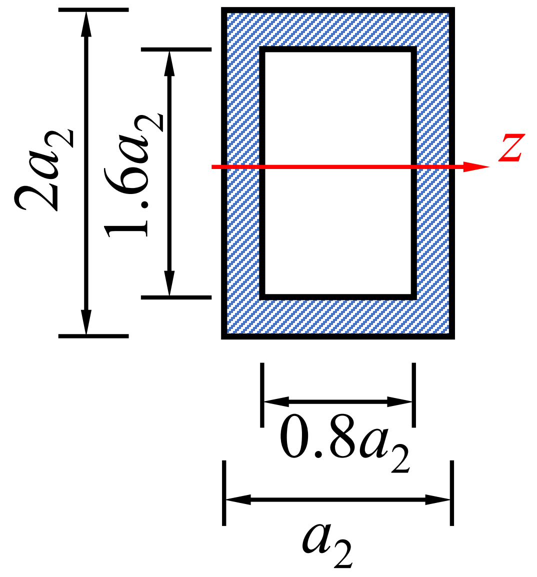
合理设计截面

面积相等时，选择弯曲截面系数大的截面

4、框形：

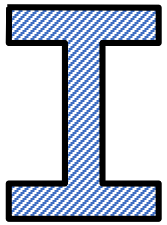
$$\frac{\pi D_1^2}{4}=2a_2^2-0.8\times1.6a_2^2,a_2=1.05D_1$$

$$W_{z4}=4.57W_{z1}$$



5、工字形：

工字形截面与框形截面类似。

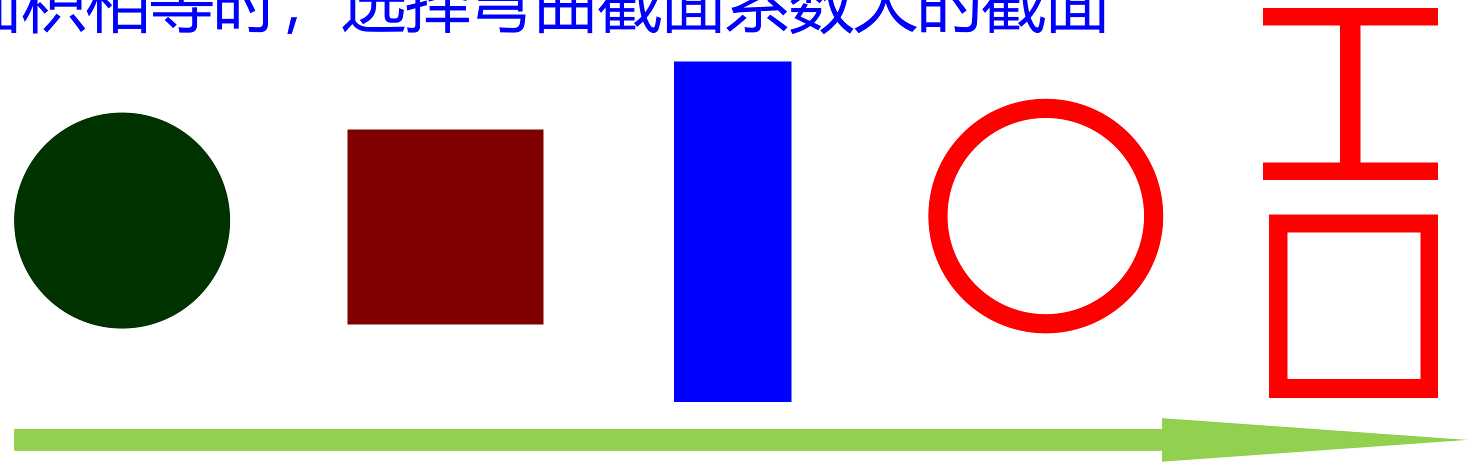


§5.6 提高弯曲强度的措施

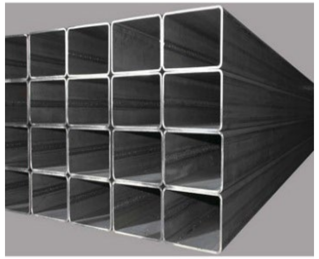
2、增大W_z

合理设计截面

面积相等时，选择弯曲截面系数大的截面



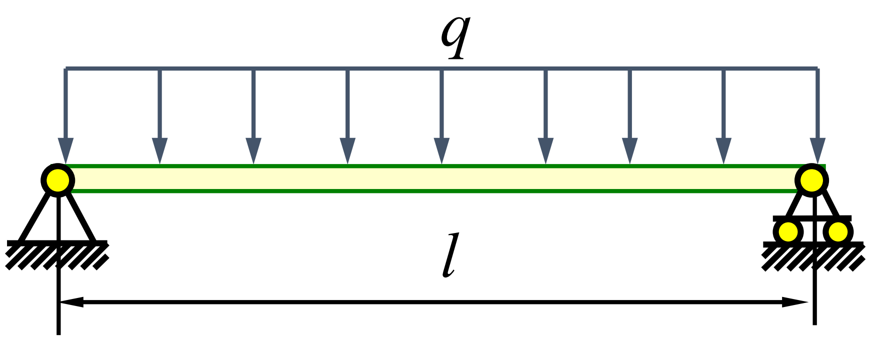
截面的优化方向

§5.6 提高弯曲强度的措施

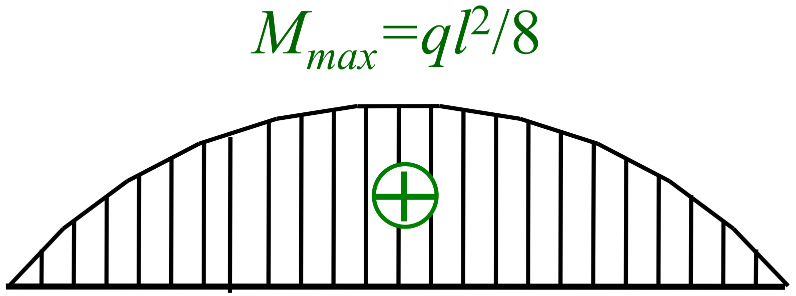
等截面梁的最大正应力

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_Z}$$



等截面梁的正应力强度准则

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_Z}\leq[\sigma]$$



等截面梁材料没有充分利用。

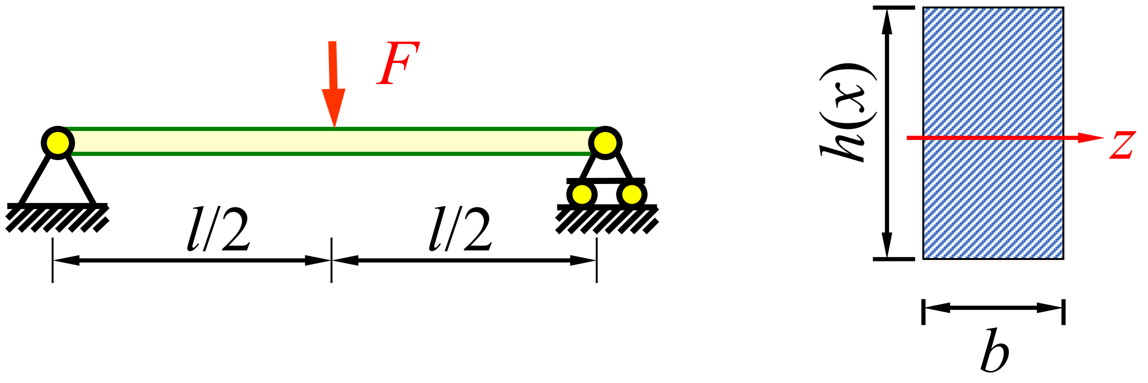
设计变截面梁（W_z），使梁上各处最大正应力相等。

$$\sigma_{max}(x)=\frac{M(x)}{W_Z(x)}=Const.$$

3、等强度梁

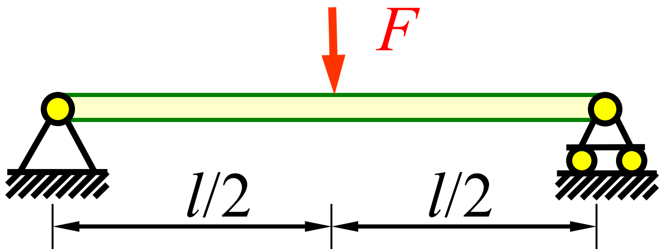
梁各横截面上可承受的最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力，则称为等强度梁。

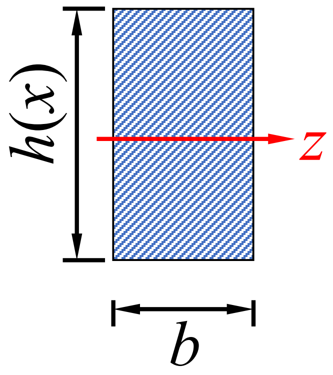
例如，矩形截面简支梁，宽度b保持不变，高度可变化。试将其设计成等强度梁。



$$\sigma_{\max}=[\sigma]$$

3、等强度梁





$$M(x)=\frac{F}{2}x$$

$$W_z(x)=\frac{1}{6}bh^2(x)$$

梁任一横截面上最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{(F/2)x}{(1/6)bh^2(x)}=[\sigma] \Rightarrow h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}$$

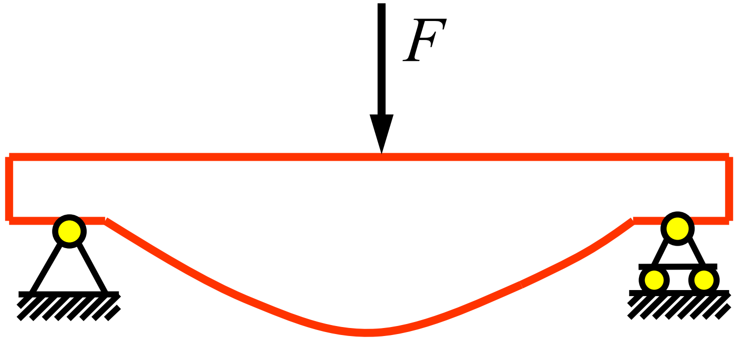
应按切应力强度准则确定截面的最小高度 h_{min}

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_S}{A}=\frac{3}{2}\frac{F/2}{bh_{\min}}=[\tau] \Rightarrow h_{\min}=\frac{3F}{4b[\tau]}$$

3、等强度梁

$$h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}} \qquad h_{\min}=\frac{3F}{4b[\tau]}$$

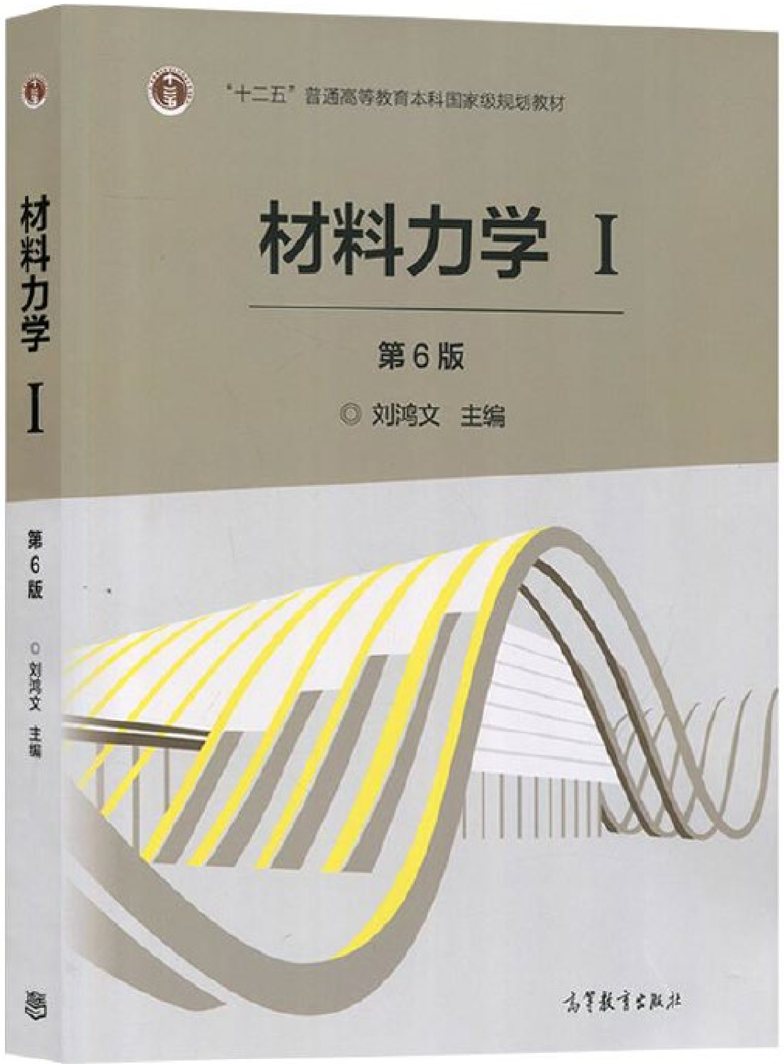
按上式确定的梁的外形，就是厂房建筑中常用的鱼腹梁。



3、等强度梁

鱼腹式吊车梁

作业



5.27 （校核强度）

4.23日(周二）之前交