第12章 稳恒磁场(3/4)

12.1 磁场 磁感应强度

一、磁现象→二、磁感应强度→三、磁感应线

12.2 毕奥－萨伐尔定律

一、毕奥-萨伐尔定律→二、毕-萨定律应用→三、运动电荷的磁场

12.3 磁场的高斯定理 安培环路定理

一、磁感线 磁通量→二、磁场的高斯定理→三、安培环路定理→四、安培环路定理应用

√ 12.4 磁场对电流与运动电荷的作用

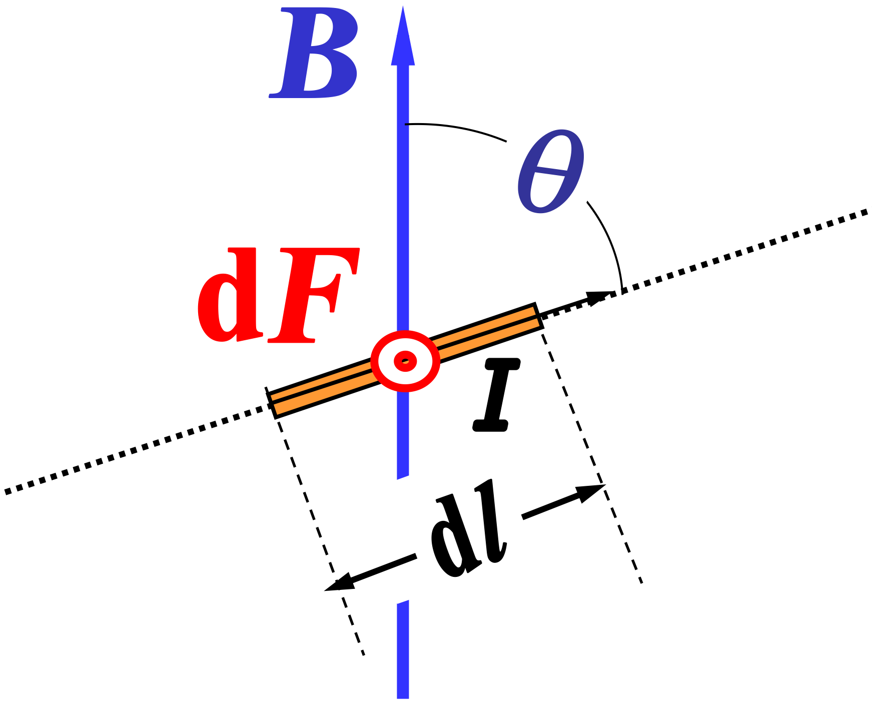
一、安培力(安培定律)→二、平行长直载流导线间的作用力→三、磁场对平面载流线圈的作用→四、磁力的功

12.5 带电粒子在电场和磁场中的运动

霍尔效应（洛伦兹力）

12.6 电场和磁场的统一性与相对性

一、安培定律(磁场对电流元的作用--安培力)



安培定律

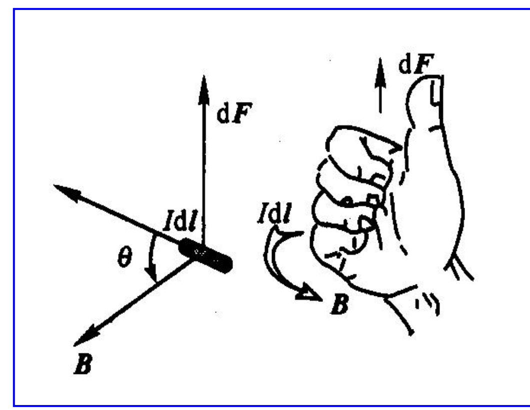
电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在磁场 $\vec{B}$ 中

受的作用力 $\mathrm{d}\vec{F}$（安培力）

大小 $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l B\sin\theta$

矢量式 $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

长度为 l 的载流导线在磁场中受的安培力 $\vec{F} = \int_l \mathrm{d}\vec{F} = \int_l I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$



若载流导线各电流元受力同向，合力大小 $F = \int_0^l IB\sin\theta\,\mathrm{d}l$

一、磁场对载流导线的作用力-----安培力：

安培力来源于洛仑兹力！

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

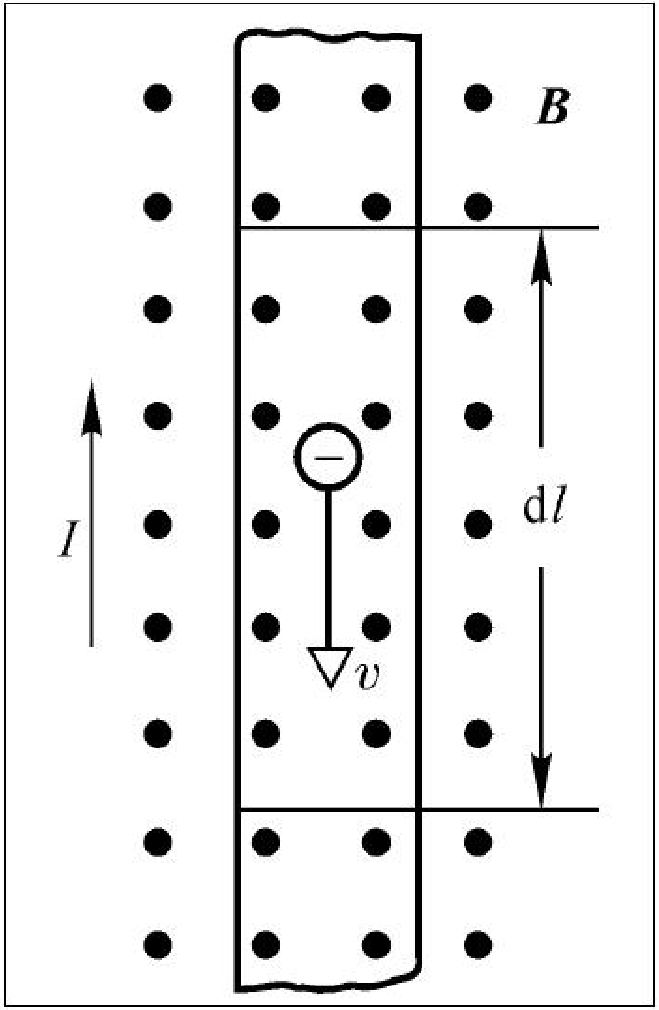
$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}N \cdot (-e\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= -nS\mathrm{d}l \cdot (e\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{j} = -en\vec{v} \qquad I = enSv$$

$$\mathrm{I}\mathrm{d}\vec{l} = -nS\mathrm{d}le\vec{v}$$

$$\therefore dF = Id\vec{l} \times \vec{B}$$



求安培力的基本步骤：

1.取一电流元 $d\vec{F}$

2. dF_x dF_y dF_z

3. $F_x = \int \mathrm{d}F_x$ $F_y = \int \mathrm{d}F_y$ $F_z = \int \mathrm{d}F_z$

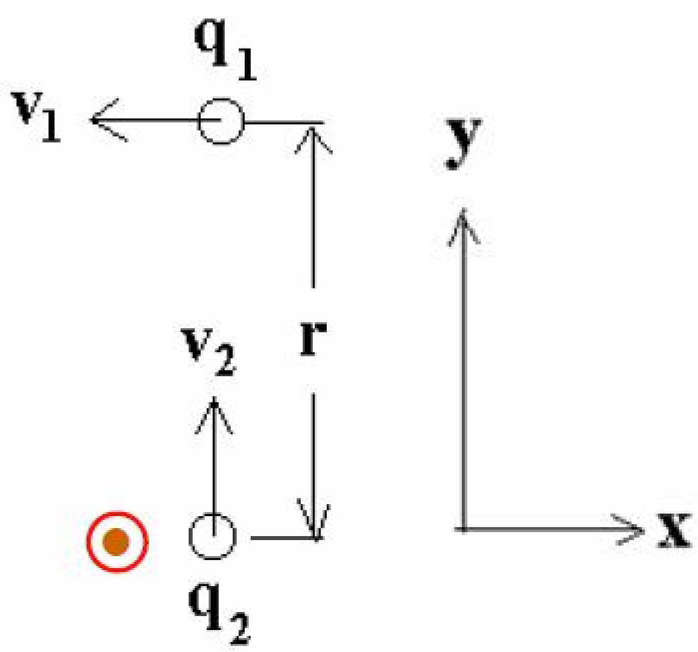
4. $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

安培力（宏观）来源于洛仑兹力（微观）！

两个电流元之间的相互作用力，是否一定遵从牛顿第三定律？

不一定 ∵ **洛仑兹力不满足牛顿第三定律！**

例15 两正电荷q_1、q_2如图运动，求它们所受的电磁力。



解：

$$f_{1e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad B_1 = 0 \qquad f_{1m} = 0$$

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{j}$$

$$f_{2e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 \upsilon_1}{r^2}$$

$$f_{2m} = q_2 \upsilon_2 B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 \upsilon_1 v_2}{r^2}$$

$$\vec{f}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 \upsilon_1 v_2}{r^2}\vec{i} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{j}$$

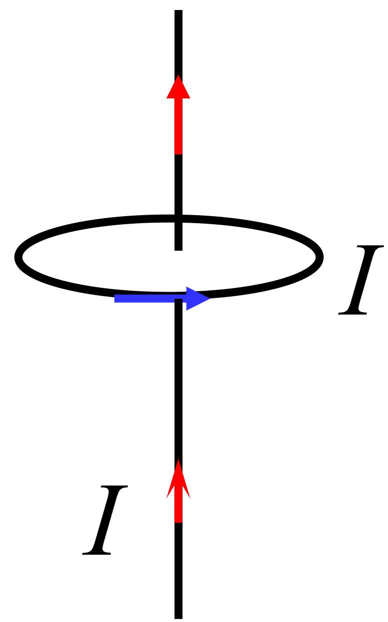
其中的磁力不满足牛顿第三定律

如果υ_2并不指向q_1、q_2连线，情况又如何？

例16 如图所示，长直导线过圆电流的中心且垂直圆电流平面，电流强度均为I，求：相互作用力

解： 在电流上任取电流元

(在哪个电流上取？)



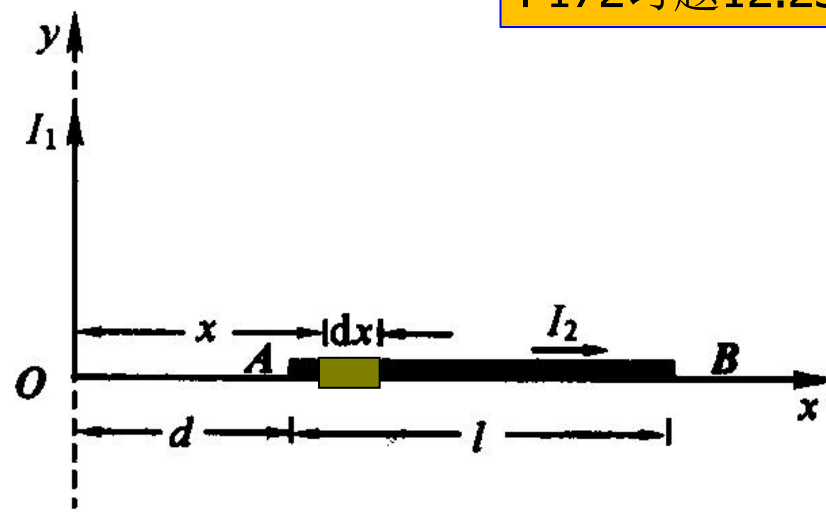
$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\left| d\vec{F} \right| = 0$$

$$\left| \int_{(l)} I d\vec{l} \times \vec{B} \right| = 0$$

例17 一长为l，载有电流 I_2 的直导线AB，置于通有电流I_1的无限长直导线附近，如图所示，求直导线AB 所受的安培力。

P172习题12.23



解： 建立坐标系，x 处的场强

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x},$$ 方向垂直纸面向里

线元 dx 所受安培力：

$$d\vec{F}=I_2 dx\times\vec{B}$$

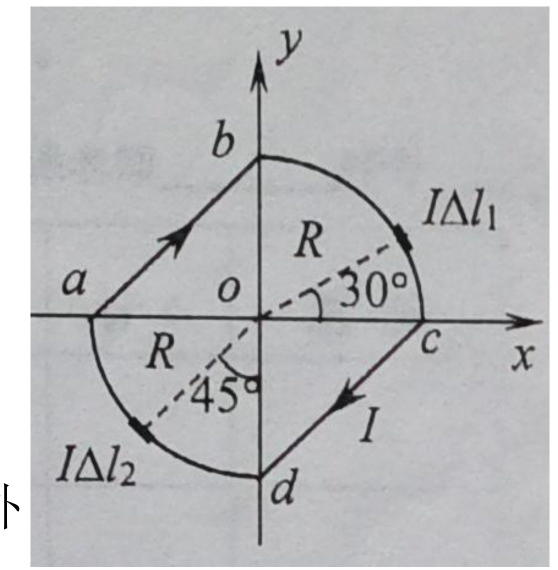
直导线AB所受安培力：

$$\vec{F}=\int_l d\vec{F}=\int_l I_2 dx\times\vec{B}$$

$$F=\int_l I_2 B dx=\int_d^{d+l}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2 dx=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+l}{d},$$ 方向沿 y轴正向

如何求AB导线所受安培力对o点的力矩？

补充例 如图所示，在xoy平面（即纸面）内有一载流线圈abcda，其中bc弧和da弧皆为以o为圆心半径R=20cm的1/4圆弧，ab、cd皆为直线，电流I=20A，其流向沿abcda的绕向；电流元$\Delta l_1=\Delta l_2=0.10$mm，位置如图。设该线圈处于磁感应强度$B=8.0\times10^{-2}$T的均匀磁场中，B的方向沿x轴正方向，试求以下电流元或载流导线在均匀磁场B中的受力：（1）电流元$I\Delta l_1$和$I\Delta l_2$所受安培力ΔF_1、ΔF_2的大小和方向；（2）直线段ab和cd所受到的安培力F_{ab}和F_{cd}的大小和方向；（3）圆弧段bc弧和da弧所受到安培力F_{bc}和F_{da}的大小和方向。



$$(1)\Delta F_1=I\Delta l_1 B\sin 60^o=1.39\times10^{-4}(N),\text{垂直纸面向外}$$

$$\Delta F_2=I\Delta l_2 B\sin 135^o=1.13\times10^{-4}(N),\text{垂直纸面向里}$$

$$(2)F_{ab}=I\overline{ab}B\sin 45^o=I\frac{R}{\sin 45^o}B\sin 45^o=IRB=0.32(N),\text{垂直纸面向里}$$

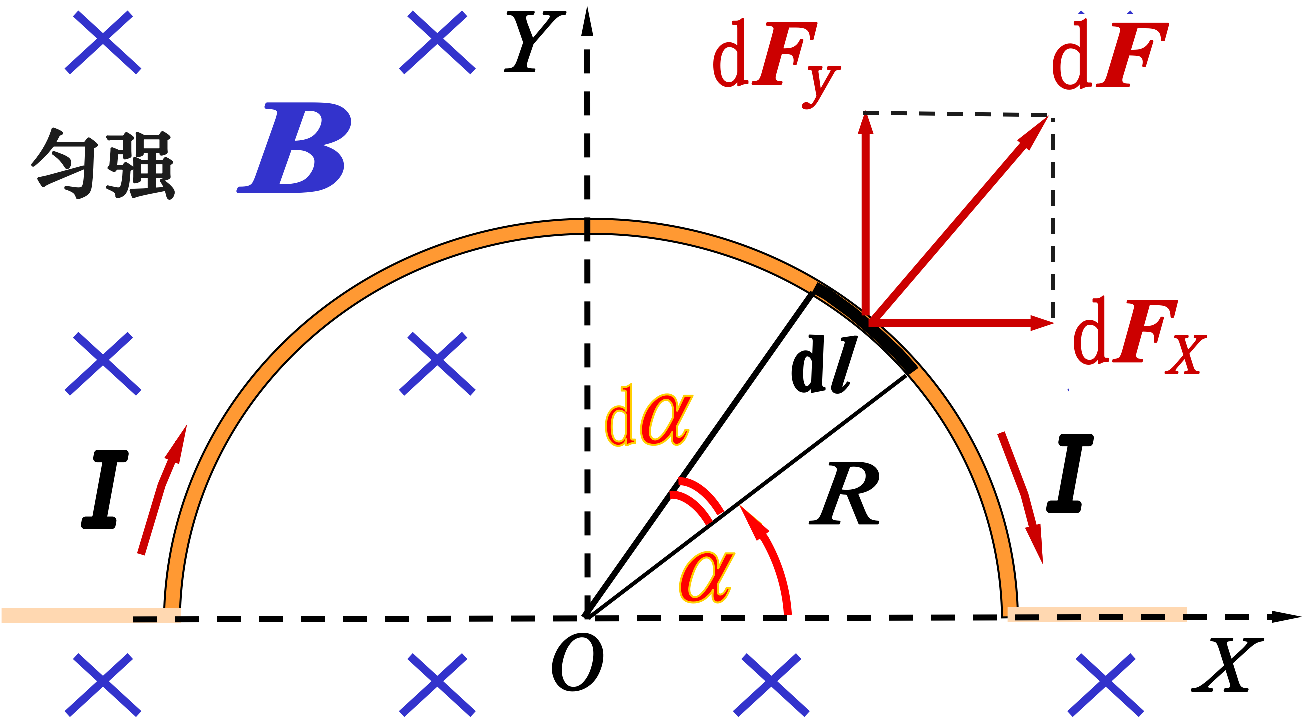
$$F_{cd}=IRB=0.32(N),\text{垂直纸面向外}$$

$$(3)Idl=IRd\theta \qquad F_{bc}=\int_0^{\pi/2}IRB\cos\theta d\theta=IRB=0.32(N),\text{垂直纸面向外}$$

$$F_{da}=IRB=0.32(N),\text{垂直纸面向里}$$

例18 求下图半圆电流所受的安培力

类P142例12.4



解

$$\mathrm{d}F = IB\sin\theta\,\mathrm{d}l$$

任一电流元均与$\vec{B}$正交

$$\theta = \pi/2$$

$$\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}F_X = \mathrm{d}F\cos\alpha$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\sin\alpha$$

$$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\alpha$$

$$F_X = 0$$

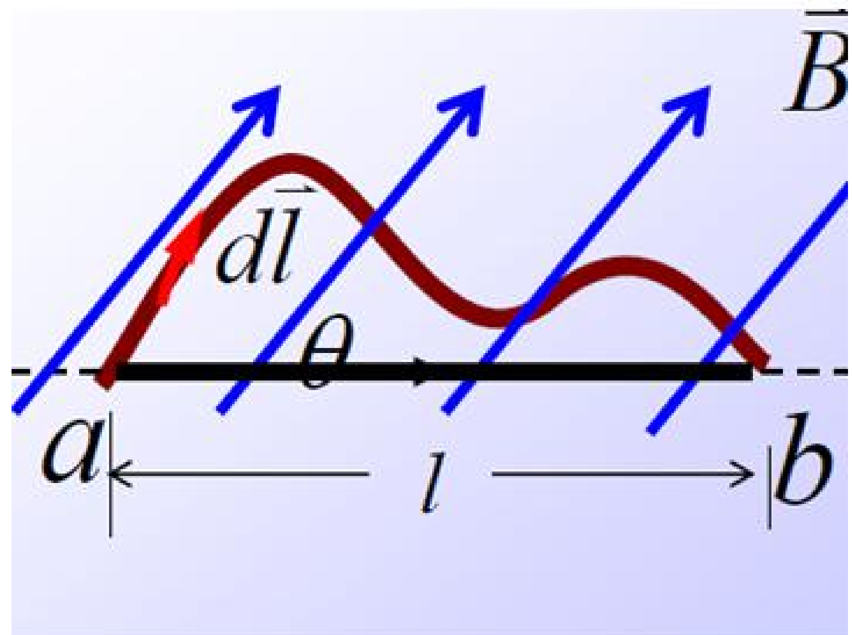
$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = \int \mathrm{d}F\sin\alpha = \int_0^l IB\,\mathrm{d}l\sin\alpha = \int_0^\pi IBR\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2IBR$$

故，合力 $F = F_y = 2IBR$ 方向沿Y轴正向

半圆形载流导线所受安培力与其两个端点相连的直导线所受力相等!

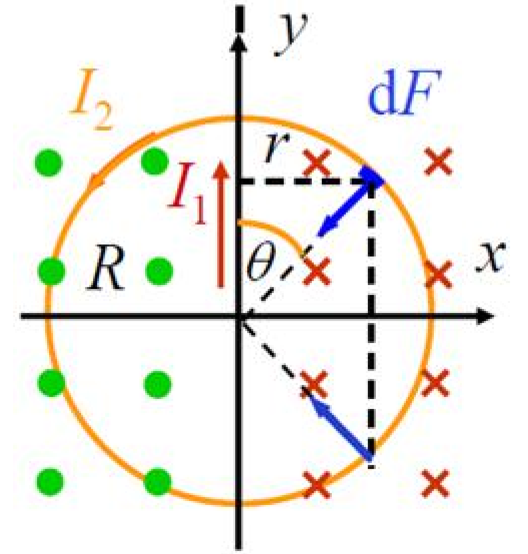
结论* P172习题12.22

1. 在**均匀磁场**中，两定点间任意形状的载流（稳恒电流）导线所受的磁力可由两定点间的等效直流线来代替。
2. 在**均匀磁场**中，任意闭合电流（稳恒电流）线所受磁力等于零。



例19 如图，半径为R的圆线圈中通有电流I_2，在沿直径y轴上有载流I_1的无限长直导线。求圆线圈所受的作用力。

解: 在$x>0$的右半部取电流元$I_2dl=I_2Rd\theta$，受力$dF=I_2Bdl$，方向指向圆心，电流元处磁场B为

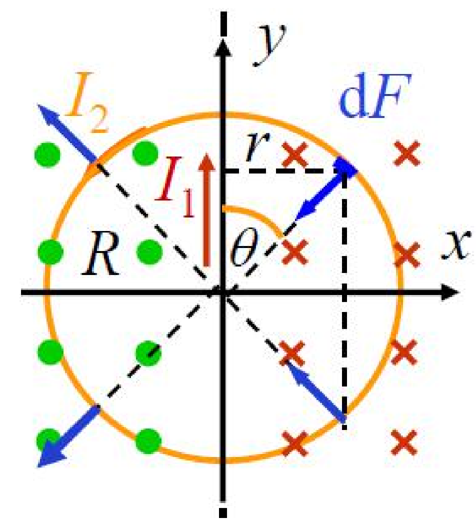


$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta}$$

dF 在y方向上的分量相互抵消。

$$F_x=\int \mathrm{d}F\sin\theta=\int I_2 B\sin\theta \mathrm{d}l$$ 方向沿x负向

$$=\int_0^{\pi} I_2\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta}\cdot\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$$



$x<0$的左半线圈受力与前一样，则

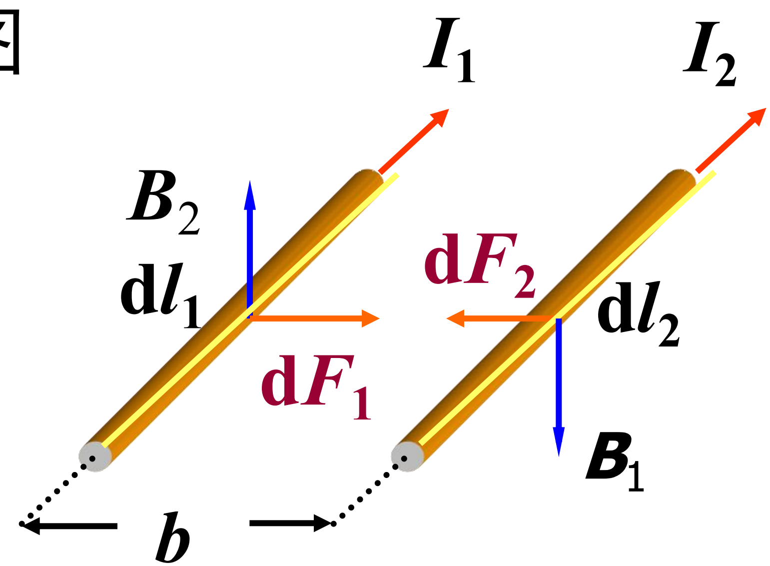
$$F=2F_x=\mu_0 I_1 I_2$$

二、两平行电流间的相互作用力---安培力的定义

(教材p144)

设两导线间距b，电流I_1、I_2，方向如图。在导线I_2上取电流元$I_2\mathrm{d}l_2$，所受安培力为$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_1$为导线$I_1$在导线$I_2$处产生的磁感应强度。

则 $$\mathrm{d}F_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\mathrm{d}l_2$$ 方向如图



单位长度所受力为 $$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l_2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}$$

同理 $$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}l_1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}$$

电流强度单位“安培”的定义

电流强度的单位“安培”是利用平行电流间的相互作用来定义的。真空中两无限长载流细导线相距1m、电流I相等，若导线每米长受力为2×10^{-7}N，则导线上的电流强度I定义为1安培（A）。

由此可得真空中的磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$（N/A^2），因此μ_0是导出量。

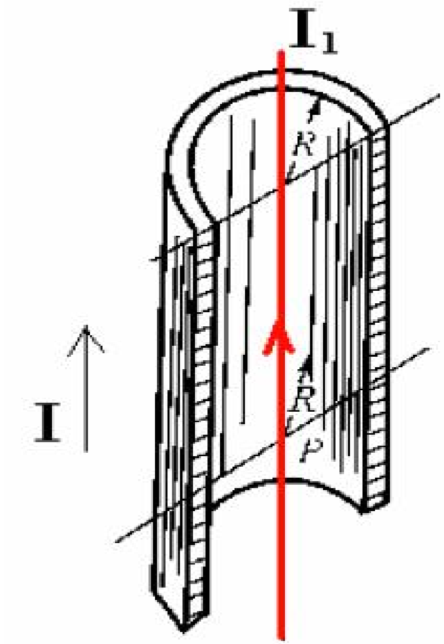
补充例　电流秤是一种测量电流的装置。在电流秤中，应用一导线对另一导线单位长度上施加的作用力，可以通过对该条导线上施加机械力，使其与所受磁力平衡的原理进行测量。假设两长直导线相距15.0 mm，当两者载有相同的电流I时，若对其中一条导线的一段上每单位长度施加的平衡力为7.11×10^{-6} N/m，试求电流之值。

解　导线上每单位长度所受安培力为 $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}$$

它与外界施加的单位长度上的平衡力大小相等。

于是有 $$I=\sqrt{\frac{dF}{dl}\cdot\frac{2\pi b}{\mu_0}}=\sqrt{7.11\times10^{-6}\cdot\frac{2\pi\times15\times10^{-3}}{4\pi\times10^{-7}}}=0.730\ \mathrm{A}$$

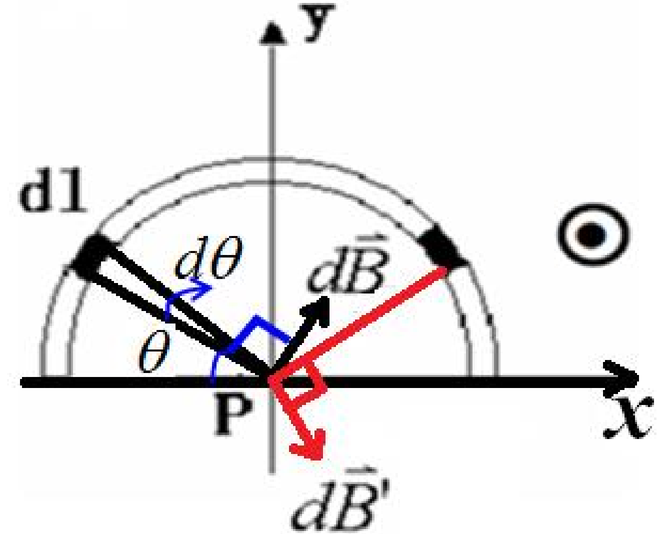
例20 如图所示，求轴线上的载流导线单位长度所受磁力。



解：由例4（教材p169习题12.8）结果知：

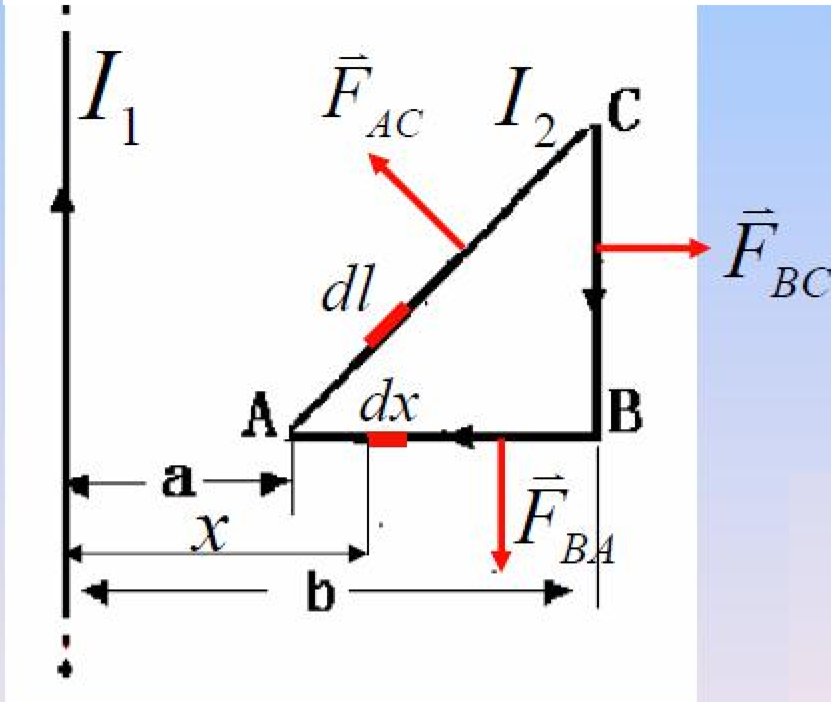
轴线上磁场分布为：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}$

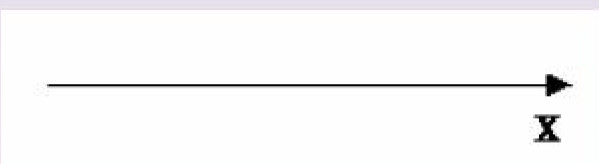
轴线上一电流元 $I_1 dl$所受安培力为：$dF=I_1\cdot B\cdot dl$



$$\therefore \frac{d\vec{F}}{dl}=\frac{\mu_0 I I_1}{\pi^2 R}\vec{j}$$

例21 真空中一无限长载流直导线与一载流的等腰直角三角形共面，如图所示，求载流三角形回路所受的安培力





解：

$$F_{BC}=BI_2(b-a)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}I_2(b-a)$$

$$dF_{BA}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2 dx$$

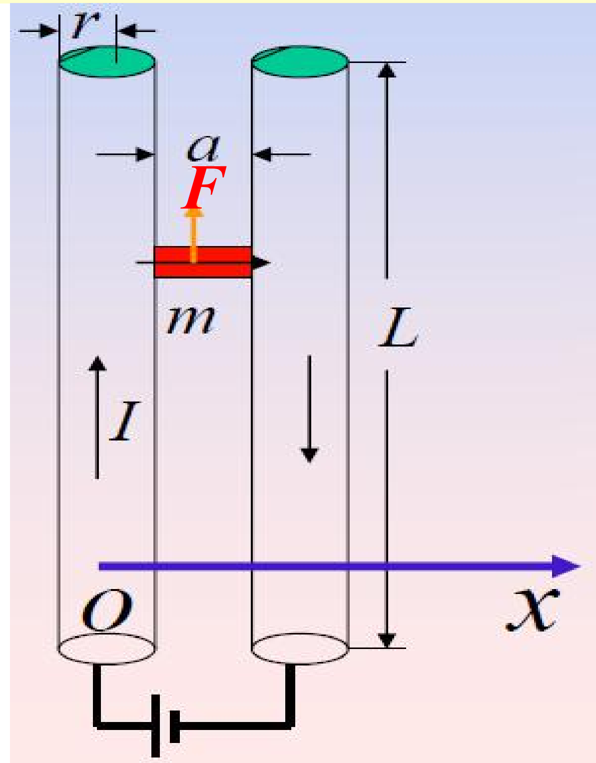
$$F_{BA}=\int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2 dx=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$dF_{AC}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2 dl=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2\sqrt{2}dx$$

$$F_{AC}=\int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}I_2\sqrt{2}dx=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

AC与BA的y方向分力抵消，∴合力 $\vec{F}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{b-a}{b}-\ln\frac{b}{a}\right)\vec{i}$

例22 电磁炮是已研制成的新型武器之一，一种高速抛射弹体的装置。电磁饱的主要原理是利用电磁相互作用力把被发射的物体加速到相当高的速度，最后发射出去。装置如图所示。(1)证明炮弹受的磁力近似地可表示为 $F=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{a+r}{r}$ （2）设导轨长度L=5.0m，a=1.2cm，r=6.7cm，炮弹质量m=317g，导轨电流I=4.1x10^{6}A。求发射速度。



解：

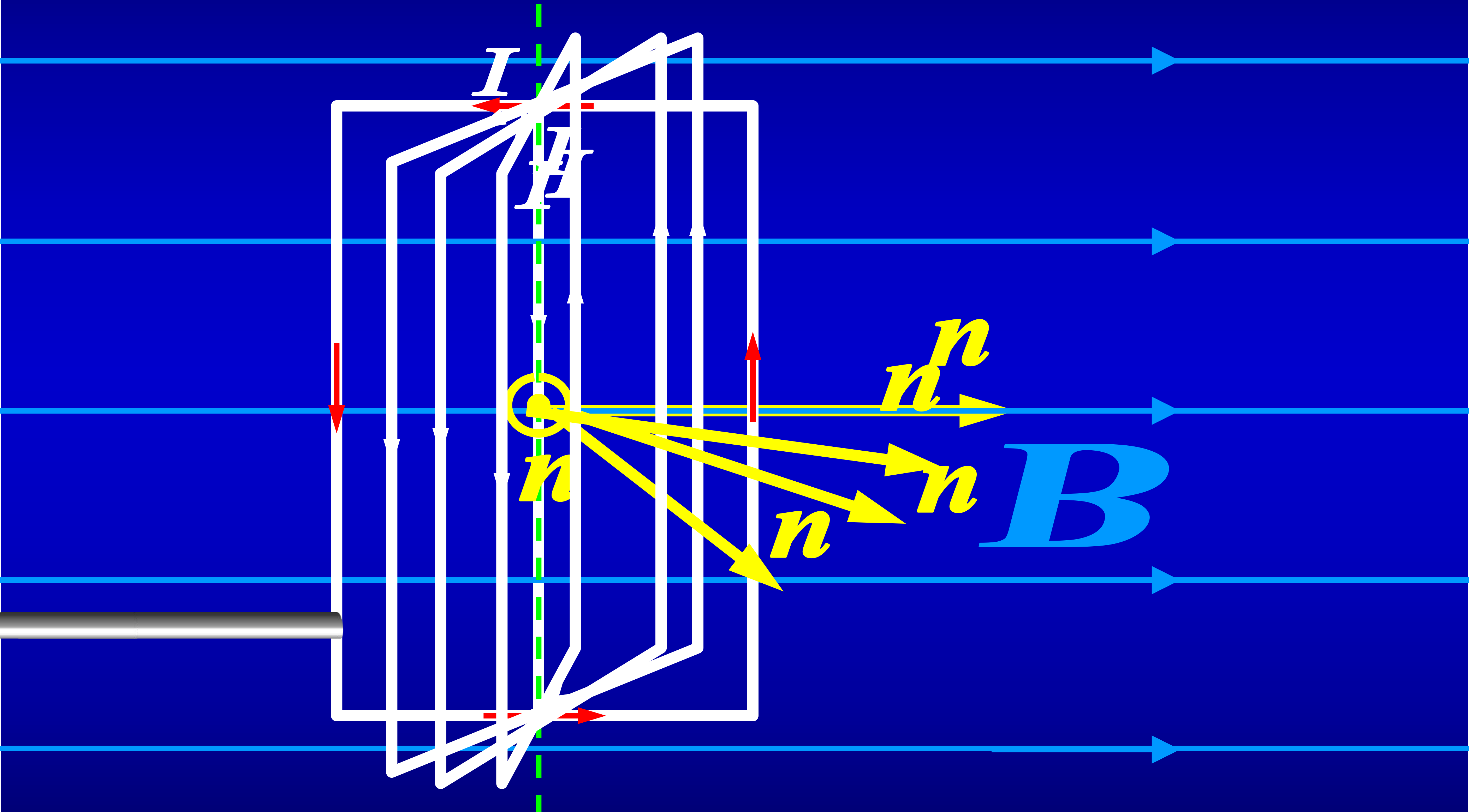
$$B(x)=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}+\frac{\mu_0 I}{4\pi(2r+a-x)}$$

$$dF=B(x)Idx=[\frac{\mu_0 I^2}{4\pi x}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi(2r+a-x)}]dx$$

$$F=\int_r^{a+r}[\frac{\mu_0 I^2}{4\pi x}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi(2r+a-x)}]dx=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{a+r}{r}$$

由$FL=\frac{1}{2}mv^2$得：$v=\sqrt{\frac{2FL}{m}}=4.2km/s$

三、均匀磁场对载流线圈的作用



$F_4 = F_3$ 两力抵消

$= I l_1 B \sin\alpha$

$F_2 = F_1$ 两力形成一力偶

$= I l_2 B \sin\frac{\pi}{2} = I l_2 B$

载流线圈受磁力矩*

$M = F_2 l_1 \sin\theta$

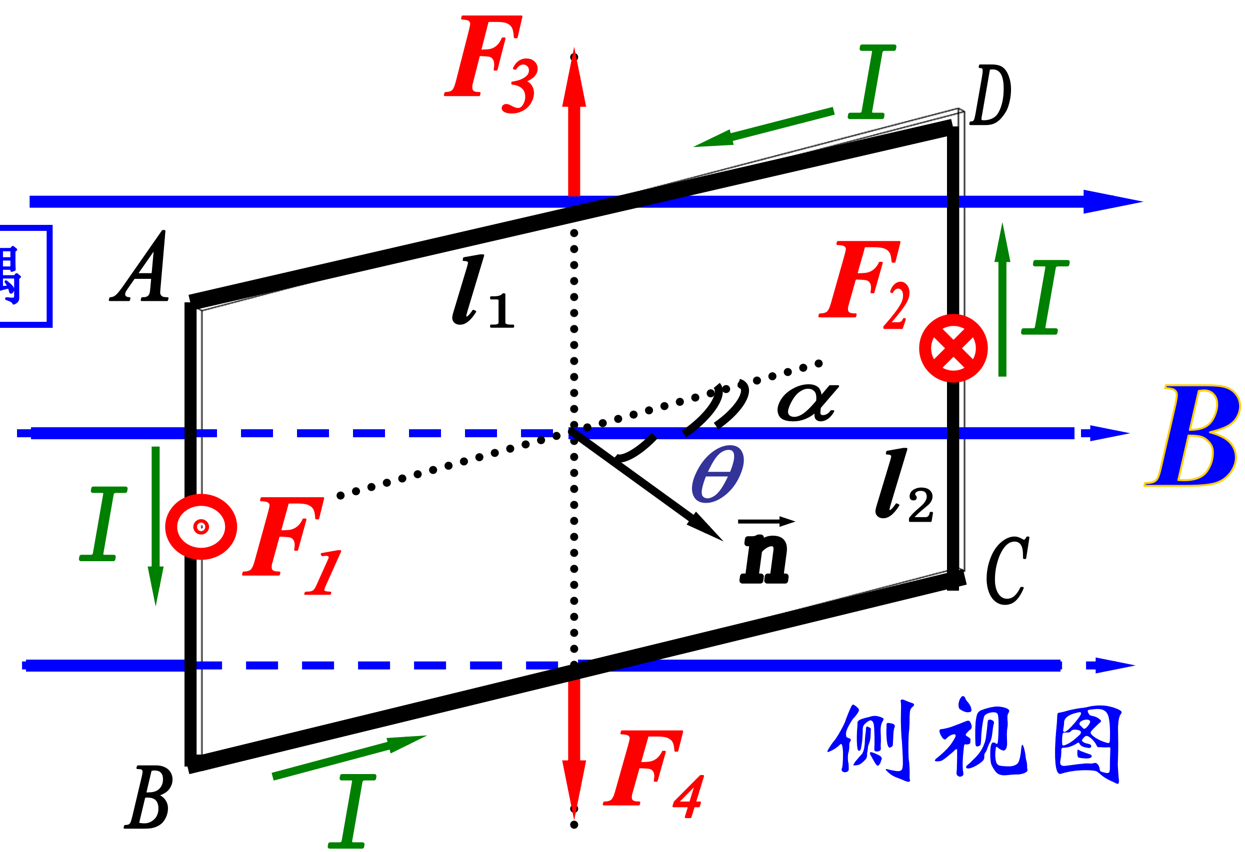
$= I l_2 B l_1 \sin\theta$

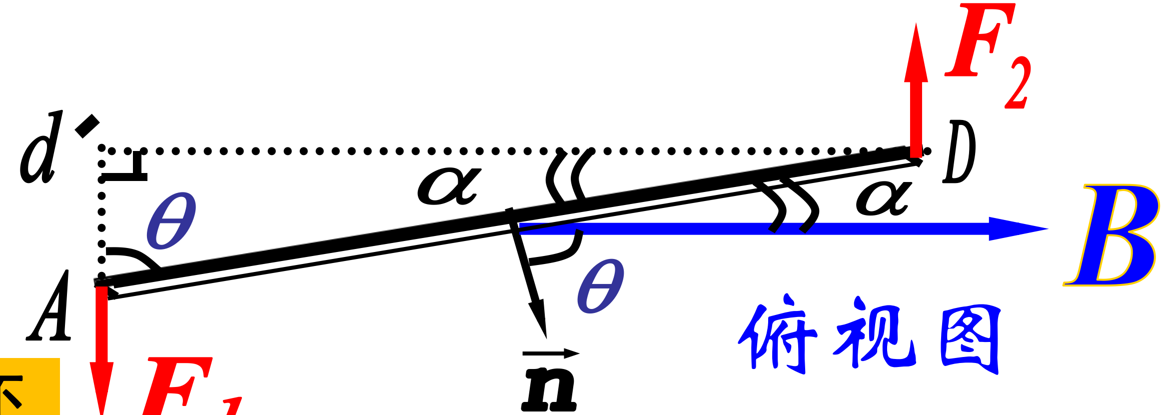
$= I S B \sin\theta$

或 $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$ (12.24.b)

其中载流线圈的磁矩

$\vec{P}_m = I S \vec{n}$





载流线圈的单位法线

*平面线圈在匀强磁场中的磁力矩会不会随转轴平移而改变？(@习题12.28)

磁场对载流线圈的作用(磁力矩)

$$\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B} \quad (12.24.b)$$

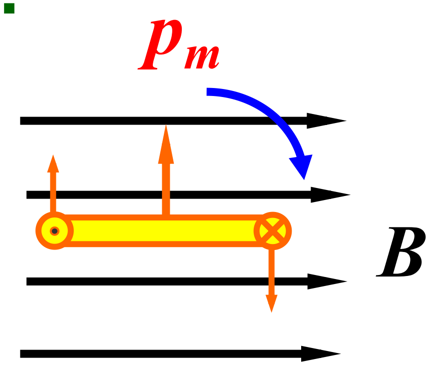
其中载流线圈的磁矩

$$\vec{P}_m=IS\vec{n}$$

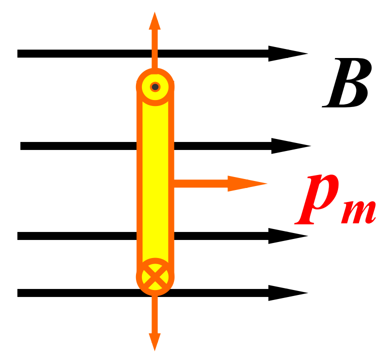
适用于求任意形状平面线圈在匀强磁场中的磁力矩*

*在(12.24.b)式适用情况下，磁力矩会不会随转轴平移而改变？

讨论 载流线圈在磁场中的几种特殊情况：

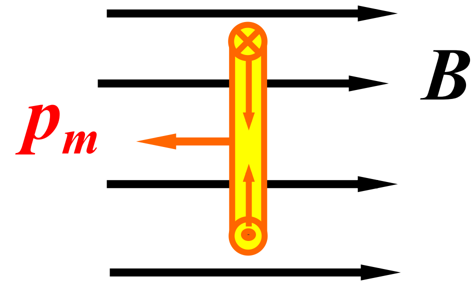


（1）$\vec{p}_m$ 与 $\vec{B}$ 的夹角 $\theta=\pi/2$ 时，所受力矩M最大，$M_m=p_mB$，其结果使 $\vec{p}_m$ 转向$\vec{B}$ ；



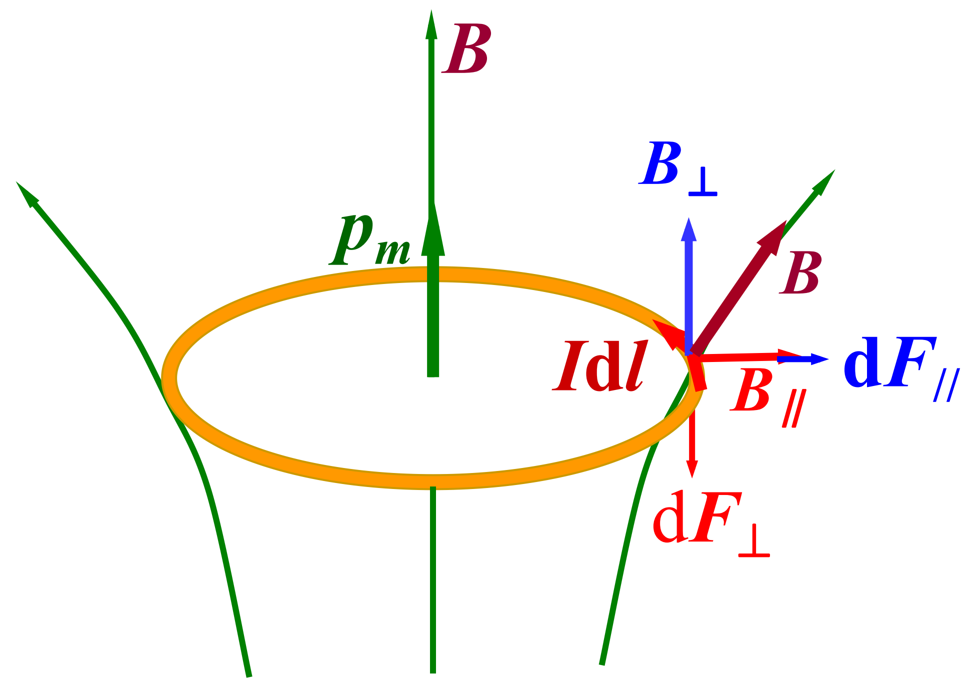
（2）$\theta=0$，$M=0$，稳定平衡状态，线圈所受各个方向的力平衡；

（3）$\theta=\pi$，$M=0$，非稳定平衡状态，稍有扰动，线圈将偏转；



（4）一般情况，$\vec{p}_m$ 与 $\vec{B}$ 成 θ 角，受合力为零，但受力矩 $\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$ 作用，使 $\vec{p}_m$ 偏向 $\vec{B}$ 。

（5）**在非均匀磁场中，**受合力和合力矩可能都≠0，这样除转动外，还要平动。例如磁矩为 p_m 的线圈在辐射形磁场中，电流元受磁场 $B_\perp$ 的作用力 $dF_{//}$ 被抵消，而受 $B_{//}$ 的作用力 $dF_\perp$ 竖直向下，线圈将向磁场较强处移动。



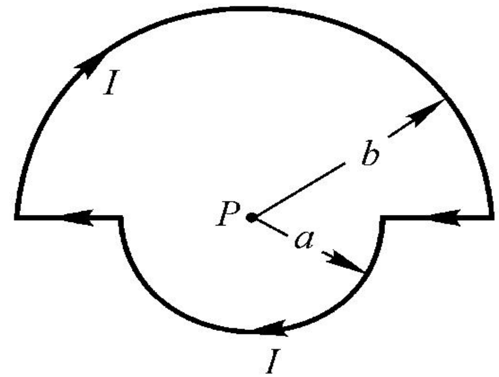
如何求非匀强磁场中的力矩？

1.先求每个电流元的 $\mathrm{d}\vec{F}$

2. $\mathrm{d}\vec{M} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$

3. $\vec{M} = \int \mathrm{d}\vec{M}$

例23 如图，一闭合回路由半径为 a和 b的两个同心半圆连成，载有电流I，(1)求圆心P点处磁感应强度的大小和方向；(2) 将回路置于水平向右的匀强磁场B中，求回路所受力矩的大小。 **教材P174习题12.30**

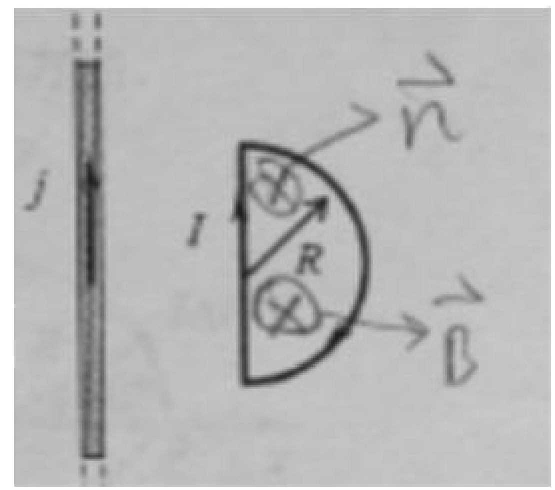


解：(1) $B_P = \dfrac{\mu_0 I}{4a} + \dfrac{\mu_0 I}{4b}$ $\otimes$

(2) $\boxed{\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}}$ $M = I \cdot \dfrac{\pi(a^2+b^2)}{2} \cdot B$

$\vec{S} \Rightarrow \otimes$ $\vec{B} \Rightarrow$ 向右 $\therefore$ $\vec{M} \Rightarrow$向下

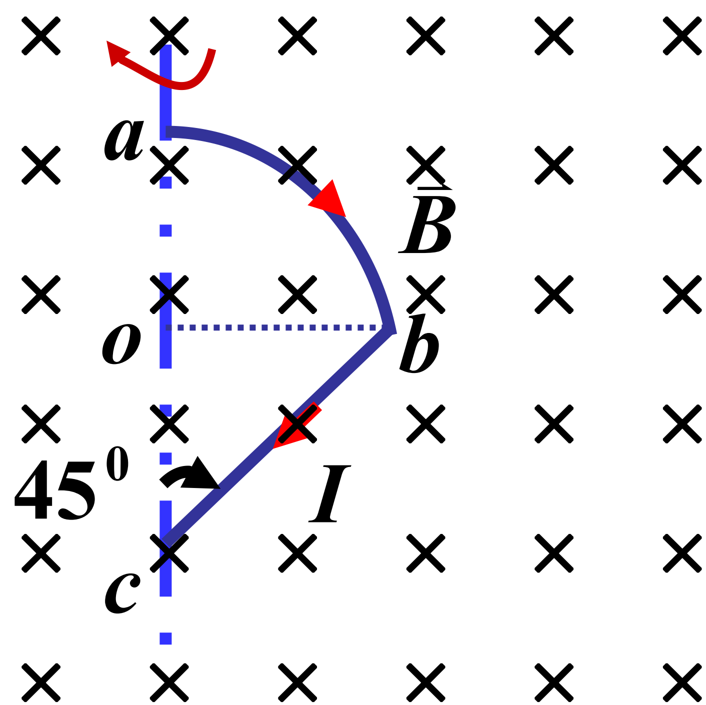
补充例 如图所示，在电流密度为j的均匀载流无限大平板附近，有一载流为I、半径为R的半圆形刚性线圈，其线圈平面与载流大平面垂直，线圈所受磁力矩为 (2018期中题) 。



$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = p_m B \sin 0^o = 0$$

例24 均匀磁场中有如图形状的载流导线，其中ab为半径为*R*的1/4圆弧，导线上电流如图所示。若abc可绕ac轴转动，则该导线在转动过程中受到的**对ac轴**的最大力矩为多少？

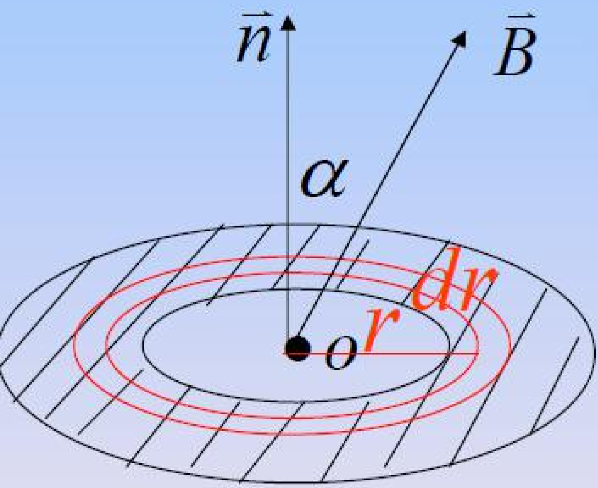
$$M_{\max}=BI\left(\frac{1}{4}\pi R^2+\frac{1}{2}R^2\right)$$



最大力矩的方向：沿ac转轴向上（由图示位置转过90^0时）或向下（由图示位置转过270^0时，）

例25 (1) 一内外半径分别为R_1和R_2，带电量为q的均匀带电圆环，绕通过O点且垂直于环面的轴以角速度ω转动，求$\vec{B}_0=?$ 教材P174习题12. 31

解：取一半径为r,宽度为dr的同心小圆环 $dq=\sigma 2\pi r dr$



$$\sigma=\frac{q}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$$

等效电流 $dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\omega\sigma r dr$

$$dB_0=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}dr$$

$$B_0=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}dr=\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}(R_2-R_1)=$$

(2) 若此转动圆盘放入如图所示的均匀磁场，求圆环受到的磁力矩？

该圆电流的磁矩 $dP_m=\pi r^2 dI=\pi\omega\sigma r^3 dr$

总磁矩 $P_m=\int_{R_1}^{R_2}\pi\omega\sigma r^3 dr=\frac{\omega q(R_1^2+R_2^2)}{4}$

根据 $\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}$ $M=P_m B\sin\alpha=\frac{\omega qB(R_1^2+R_2^2)}{4}\sin\alpha$

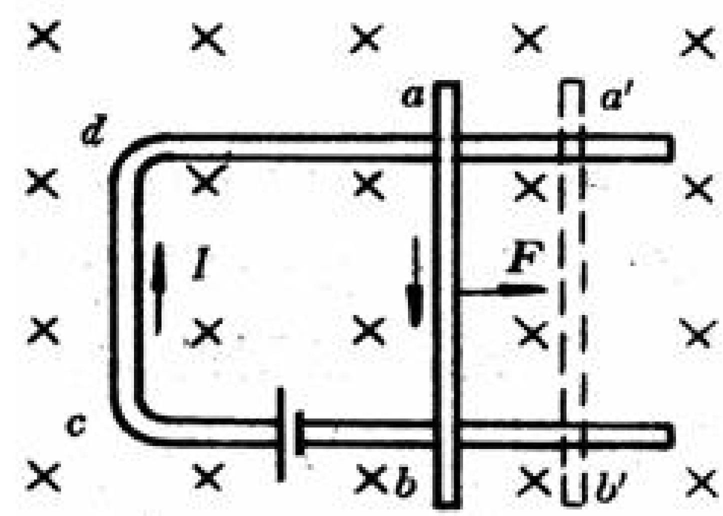
四、磁力的功

(教材p147)

载流线圈在磁场中运动时

$$A = F \cdot aa' = IBl \cdot aa'$$

$$= IB\Delta S = I\Delta\Phi$$



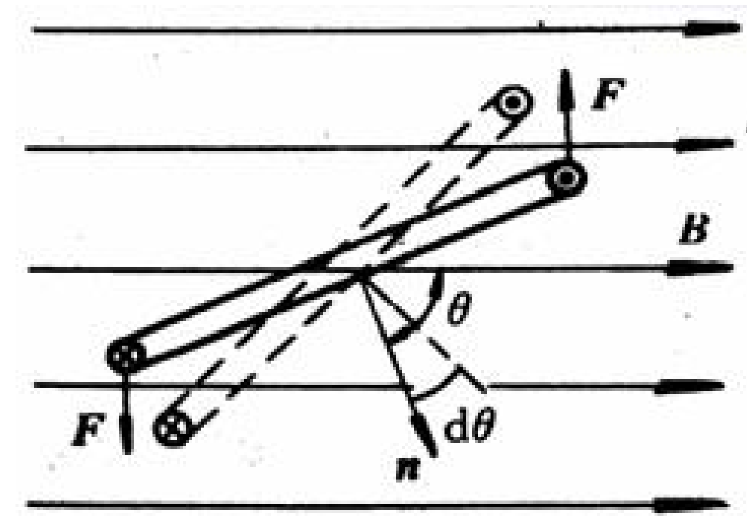
载流线圈在磁场中转动时

$$M = IBS\sin\theta$$

$$\underline{dA} = -Md\theta = -IBS\sin\theta d\theta$$

$$= Id(BS\cos\theta) = \underline{Id\Phi}$$

$$A = \int_{\phi_1}^{\phi_2} Id\phi \Rightarrow A = I\Delta\phi$$



注意上述结论的适用条件是**闭合载流回路**及**回路电流保持不变**！

例：2016大物甲2期中卷，填空题10

问：磁力真的能做功吗？ (教材p210)

有关洛仑兹力和安培力的区别和联系：

(1) 安培力的起源是洛仑兹力；

(2) 洛仑兹力不对运动电荷做功；

(3) 安培力对于导线做功，能量来源是电源；

(4) 包含电场力的广义洛仑兹力的电场部分会对带电粒子做功。

例26 磁电式电表 磁电式电表是根据载流线圈在磁场中受力矩作用绕轴旋转的原理制造的。已知扭转常数k，线圈N匝，面积S，磁感应强度B。（1）当线圈中通以恒定电流I，求线圈达到平衡时转过的角度；（2）设转子的转动惯量为J，当有一持续时间为τ的脉冲电流通过线圈时，通过电表的总电量为q，求线圈转过的最大角度。

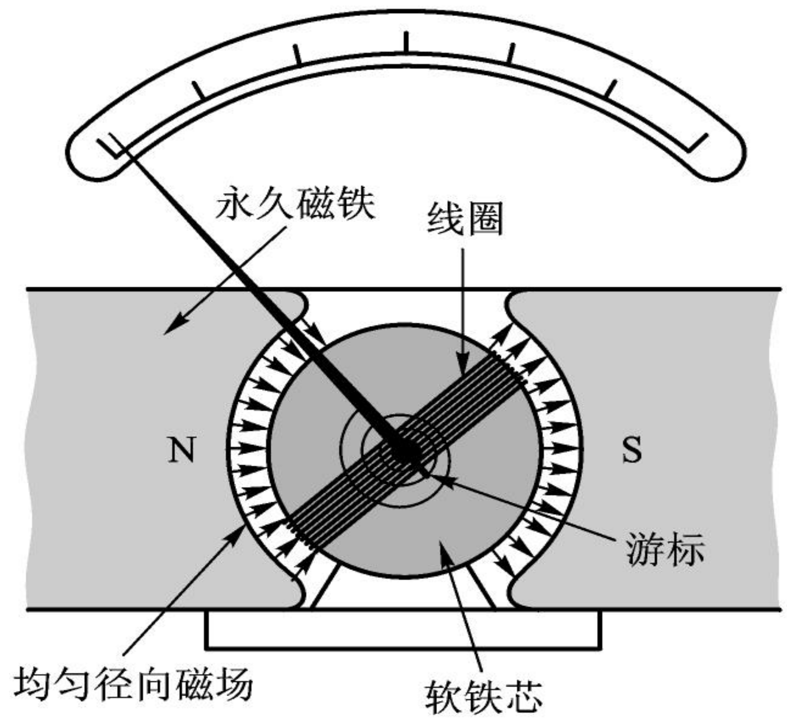
解 （1） $$M = NISB = k\theta$$

$$\theta = \frac{NSB}{k} I$$

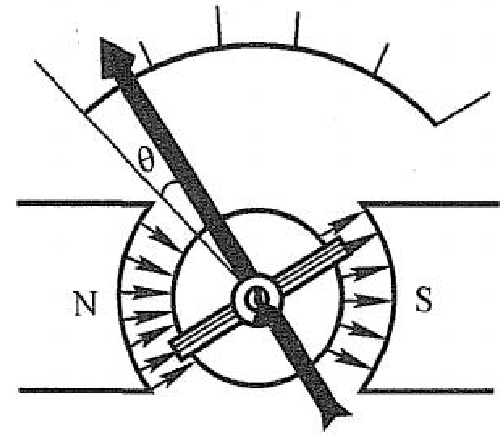
（2） $$\int M\mathrm{d}t = \int_0^{\tau} NSBI\,\mathrm{d}t = NSBq$$

$$\int M\mathrm{d}t = J\omega,\quad \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}k\theta_{\mathrm{m}}^2$$

解得 $$\theta_{\mathrm{m}} = \frac{NSBq}{\sqrt{kJ}}$$



补充例 如图所示，磁表式电流计线圈共有250匝，线圈长为2cm，宽为1cm，线圈所在处B=0.2T。当线圈偏转θ角时，游丝（即弹簧）产生的扭力矩M=Cθ。设扭转系数C=3.3x10^{-8}Nm/deg，当线圈中通以电流后，线圈偏转30°。问流过的电流多大？



类P149例题12.6

解 由题图可知，线圈在任一位置受到的磁力矩为 $M=NBIS$。平衡时 $NBIS=C\theta$

$$\therefore \quad I=\frac{C\theta}{NBS}=\frac{3.3\times10^{-8}\times30}{250\times0.2\times0.02\times0.01}=9.9\times10^{-5}(\mathrm{A})$$

若在电流计中通一脉冲电流，电流计怎样偏转？

设脉冲持续时间t_0，线圈将受一冲量矩作用：

$$G=\int_0^{t_0} M\mathrm{d}t=\int_0^{t_0} NBIS\mathrm{d}t=NBS\int_0^{t_0} I\mathrm{d}t=NBSq$$

$\int_0^{t_0} I\mathrm{d}t=q$ 为脉冲电流通过时的总电量。

由于t_0极短，脉冲通过时，线圈获得一角速度ω_0，按角动量原理： $G=J\omega_0$

$$\frac{1}{2}k\theta^2=\frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad q=\frac{\sqrt{kJ}}{NBS}\theta$$

此即冲击电流计的工作原理

作　业

第12章

第3次

P168

26、28

30、31

作　业

第12章全部

P168

3、8、9、11、

13、16、17、20、

26、28、30、

31、38、

（9）次