

自动控制原理

第八章

根轨迹法

前七章课的简单回顾:

(1) 这门课是研究什么的?

重点研究机电工程的负反馈闭环控制系统。

(2) 用什么工具来研究?

拉普拉斯变换和反变换, 时间函数 \leftrightarrow 象函数。

(3) 研究系统的哪些东西?

快速性、稳定性、准确性。

(4) 如何设计与校正系统?

● 频率法

- 串联校正 (超前校正PD、滞后校正PI、滞后-超前校正PID)
- 反馈校正
- 最优模型 (二阶模型和高阶模型)

● 根轨迹法

- 闭环根轨迹的作图 (由开环传函求取闭环极点)
- 闭环零极点对系统性能的影响
- 闭环极点的配置 (扩展部分)

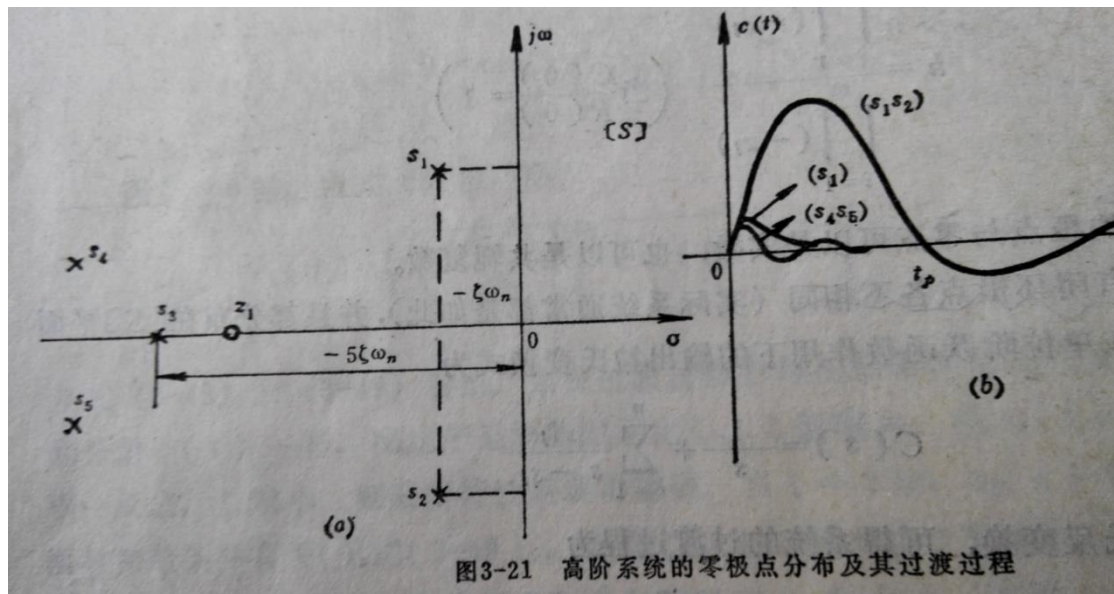


图3-21 高阶系统的零极点分布及其过渡过程

1. 最小相位系统：在S右半平面上既无极点又无零点的系统。
2. 闭环极点决定系统的稳定性，闭环零点和极点在S平面上的位置共同决定系统的稳态性能和动态性能。
3. 闭环零点的影响：减小峰值时间，使系统响应加快，但超调量增大，而且越靠近虚轴，这种作用越大。
4. 闭环极点的影响：增大峰值时间，使系统响应变慢，但超调量减小，而且越靠近虚轴，这种作用越大。
5. 闭环极点与闭环零点靠得很近时，它们对系统过渡过程的影响就会抵消，就会形成一对偶极子。
6. 如果系统除闭环主导极点外，没有其它的附加极点、零点，则峰值时间为 $t_p = \pi/\omega_d$

根轨迹法： 直接由开环传递函数求闭环特征根
(闭环极点) 的方法

❖ § 8-1 根轨迹与根轨迹方程

❖ § 8-2 绘制根轨迹的基本法则

❖ § 8-3 根轨迹图的绘制

❖ § 8-4 系统闭环零极点分布与性能指标

❖ 例题分析

❖ 课后习题

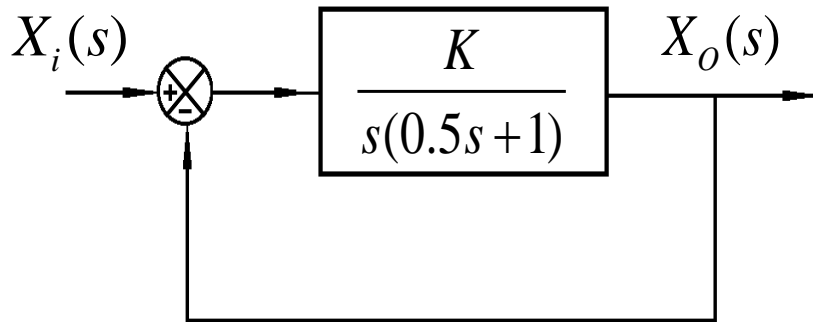
§ 8-1 根轨迹与根轨迹方程

一、根轨迹概念

所谓根轨迹，是指当系统某个参数（如开环增益 K ）由零到无穷大变化时，闭环特征根在复平面上移动的轨迹。

由已知的系统开环传递函数绘制根轨迹图，即可直观的表示出某参数变化时闭环特征根发生的变化，从而分析系统的动态性能。根轨迹图全面地描述参数对闭环特征根分布的影响。

例 8-1 如图所示，系统的开环传递函数为



$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{2K}{s(s+2)}$$

求根轨迹。

式中，令 $K^* = 2K$ ，称 K^* 为系统的**开环根轨迹增益**，它不等于开环增益 K 。

闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{x_o(s)}{x_i(s)} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$

闭环特征方程为 $D(s) = s^2 + 2s + 2K = 0$

可求得闭环特征根 $s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}$

$$s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$

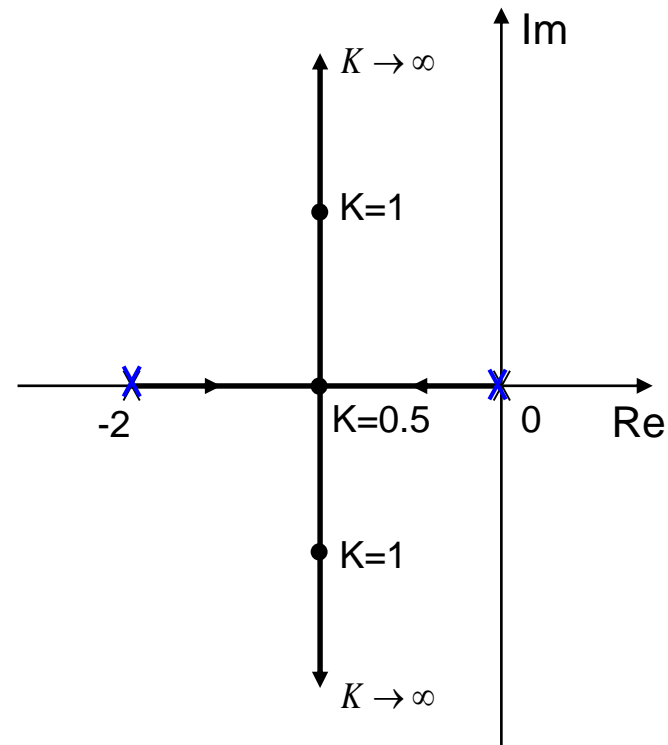
下面寻找系统开环增益 K 和系统闭环特征根的关系。

当 $K = 0$ 时 $s_1 = 0$, $s_2 = -2$

$K = 0.5$ 时 $s_1 = -1$, $s_2 = -1$

$K = 1$ 时 $s_1 = -1+j$, $s_2 = -1-j$

$K = \infty$ 时 $s_1 = -1+j\infty$, $s_2 = -1-j\infty$



K 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，可以用解析的方法求出闭环极点的全部数值，将这些数值标注在 $[S]$ 平面上，即闭环特征根在 $[S]$ 平面上移动的轨迹，称为系统的根轨迹，如下图如示

由根轨迹图，可对系统的动态性能进行如下分析：

- ❖ 开环增益 K 由 0 变化到无穷大时，根轨迹均在 $[S]$ 平面的左半部，因此，系统对所有的 K 值都是稳定的。
- ❖ 当 $0 < K < 0.5$ 时，闭环极点为负实根，系统呈过阻尼状态，阶跃响应为非周期过程。
- ❖ 当 $K = 0.5$ 时，闭环极点出现重根，系统阻尼比为 1 ，呈临界阻尼状态。
- ❖ 当 $K > 0.5$ 时，闭环特征根为共轭复根，系统呈欠阻尼状态。且由坐标原点做与负实轴夹角为 $\pm 45^\circ$ 的直线，与根轨迹交于根 $-1+j$ 和 $-1-j$ 。显然，这时有最佳阻尼比 0.707 ，此时 $K = 1$ 。
- ❖ 因为开环传递函数有一个位于坐标原点的极点，所以系统为 I 型系统，阶跃作用下的稳态误差 $e_{ss} = 0$ ，而静态误差系数可从根轨迹对应的 K 值求得。

二、根轨迹方程及相角、幅值条件

设系统的闭环传递函数为 $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

其特征方程为 $1+G(s)H(s) = 0$ ，即 $G(s)H(s) = -1$

该式称为**根轨迹方程**，满足该式的点必定是根轨迹上的点。由于 $G(s)H(s)$ 是复数向量，两个向量相等则相角、幅值分别相等。因此，根轨迹方程可写成两个方程，即

相角条件： $\angle[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ(2k+1), k = 0, 1, 2 \dots$

幅值条件： $|G(s)H(s)| = 1$

系统开环传递函数可写成 $G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$

z_1 、 z_2 、 \dots 、 z_m 为系统的 m 个开环零点；
 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_n 为系统的 n 个开环极点。

该传递函数的向量表达式为 $G(s)H(s) = K^* \frac{A_{z1} e^{j\theta_{z1}} \cdots A_{zm} e^{j\theta_{zm}}}{A_{p1} e^{j\theta_{p1}} \cdots A_{pn} e^{j\theta_{pn}}}$

其中， $A_{zi} = |(s - z_i)|$ $\theta_{zi} = \angle(s - z_i)$ $i = 1, 2, \dots, m$

$A_{pj} = |(s - p_j)|$ $\theta_{pj} = \angle(s - p_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$

因此相角条件、幅值条件可表示为：

$$\sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj} = \pm 180^\circ(2k+1) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$K^* \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}} = 1$$

由上两式可知，相角条件与增益 K^* 值无关，而幅值条件中含因子 K^* ，但 K^* 为零至无穷大。因此，复平面[**S**]上所有满足相角条件的点都是特征方程的根，这些点构成的曲线即根轨迹曲线。各个点所对应的增益 K^* 值则可由幅值条件确定。这就是求取根轨迹的原则。

利用以上原则求例 8-1 的根轨迹图：

已知开环极点为0， -2。首先应用相角条件， 即

$$-(\angle s + \angle(s + 2)) = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

用试探的方法可找出满足上述条件的 s 点。

由相角条件分析可知，实轴上根轨迹位于 $(-2, 0)$ 区间，实轴之外根轨迹为0， -2两点的中垂线。

用幅值条件可算出根轨迹上各点对应的 K^* 值。

如对 $(-1+j)$ 点，有

得 $K^* = 2$ $K = |s| * |s + 2| / 2 = (\sqrt{2} * \sqrt{2}) / 2 = 1$

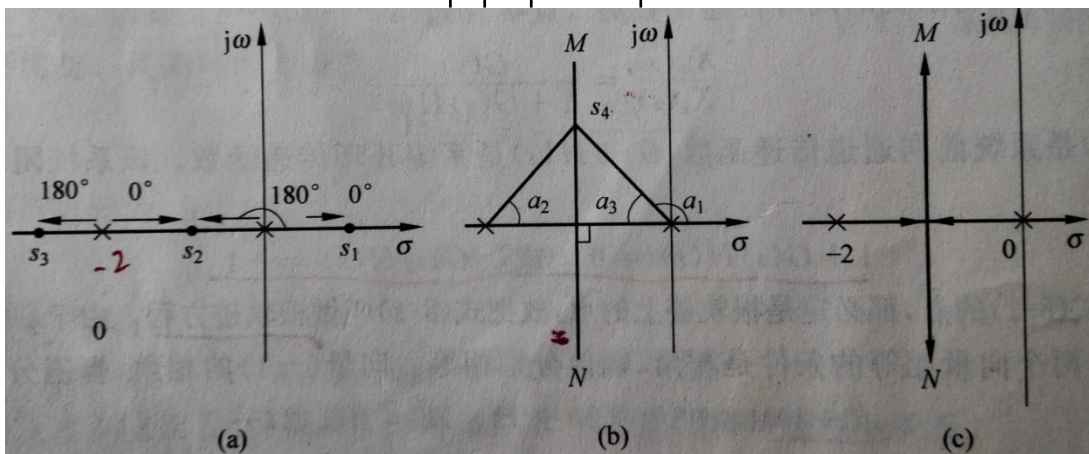


图 8-3 图 8-1 系统根轨迹的绘制

§ 8-2 绘制根轨迹的基本法则

➤ 1. 根轨迹的起点和终点

➤ 2. 根轨迹的分支数

➤ 3. 根轨迹的对称性

➤ 4. 实轴上的根轨迹

➤ 5. 根轨迹的渐近线

➤ 6. 根轨迹的起始角和终止角

➤ 7. 根轨迹的分离点和会合点

➤ 8. 根轨迹与虚轴的交点

➤ 9. 闭环特征方程根之和与根之积

! 绘制注意点

1) 实轴、虚轴相同的刻度

2) “ \times ”、“ \bigcirc ”

3) 加粗线及箭头

4) 关键点的标注

一、根轨迹的起点与终点

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点，如果开环零点数 m 小于开环极点数 n ，则有 $(n - m)$ 条根轨迹终止于无穷远处。

$K=0$ 时，根轨迹方程为 $(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)=0$
得根轨迹起点为 p_1, p_2, \dots, p_n

由根轨迹方程知，
$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{K^*}$$

$$K^* \rightarrow \infty \text{ 时, } s - z_i = 0$$

所以，根轨迹终止于开环零点。

又，若 $n > m$ ，则 $s \rightarrow \infty$ 时，上式可写成
即有 $(n-m)$ 条根轨迹趋向于无穷远处。

$$\frac{1}{s^{n-m}} \rightarrow 0$$

二、根轨迹的分支数

根轨迹[S]平面上的分支数等于闭环特征方程的阶数 n ，即分支数与闭环极点的数目相同。

这是因为特征方程阶数为 n 表明有 n 个特征根，这 n 个特征根随 K 变化必然会出现 n 条根轨迹。

三、根轨迹的对称性

因开环极点、零点与闭环极点都是实数或共轭复数，分布对称于实轴，故根轨迹对称于实轴。

二、根轨迹的分支数

根轨迹[S]平面上的分支数等于闭环特征方程的阶数 n ，即分支数与闭环极点的数目相同。

这是因为特征方程阶数为 n 表明有 n 个特征根，这 n 个特征根随 K 变化必然会出现 n 条根轨迹。

三、根轨迹的对称性

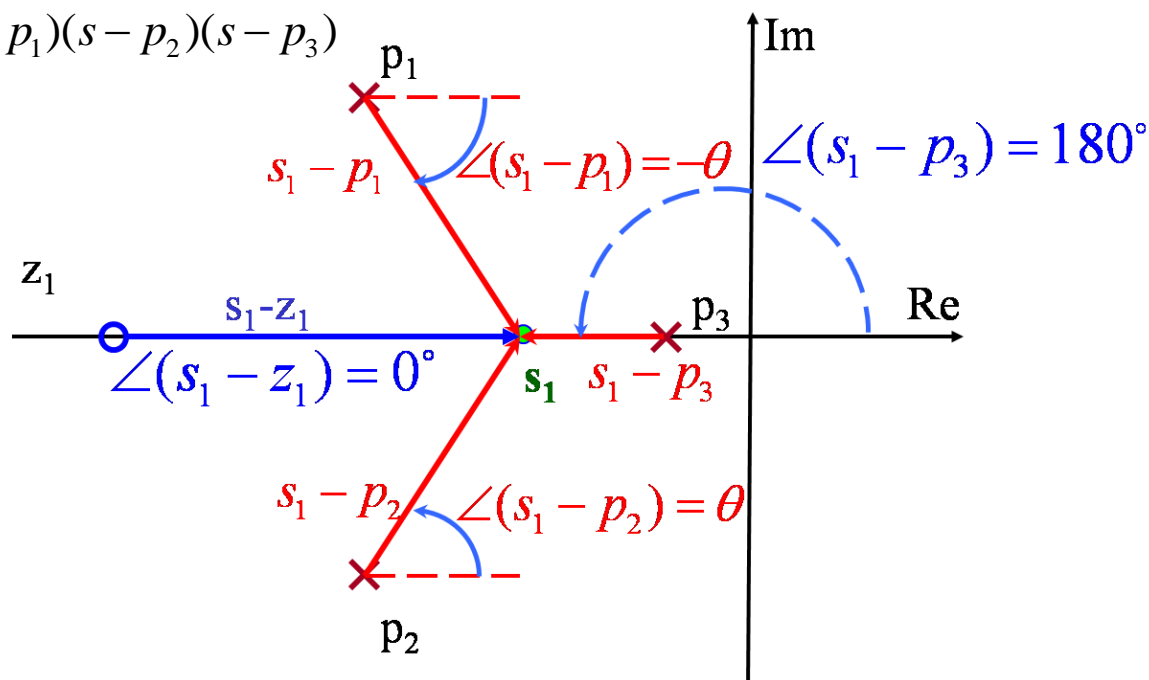
因开环极点、零点与闭环极点都是实数或共轭复数，分布对称于实轴，故根轨迹对称于实轴。

四、实轴上的根轨迹

实轴上根轨迹区段的右侧，开环零极点数目之和应为奇数。

即若实轴上某点右侧开环零、极点数和为奇数，则该点在根轨迹上；为偶数则不在根轨迹上。

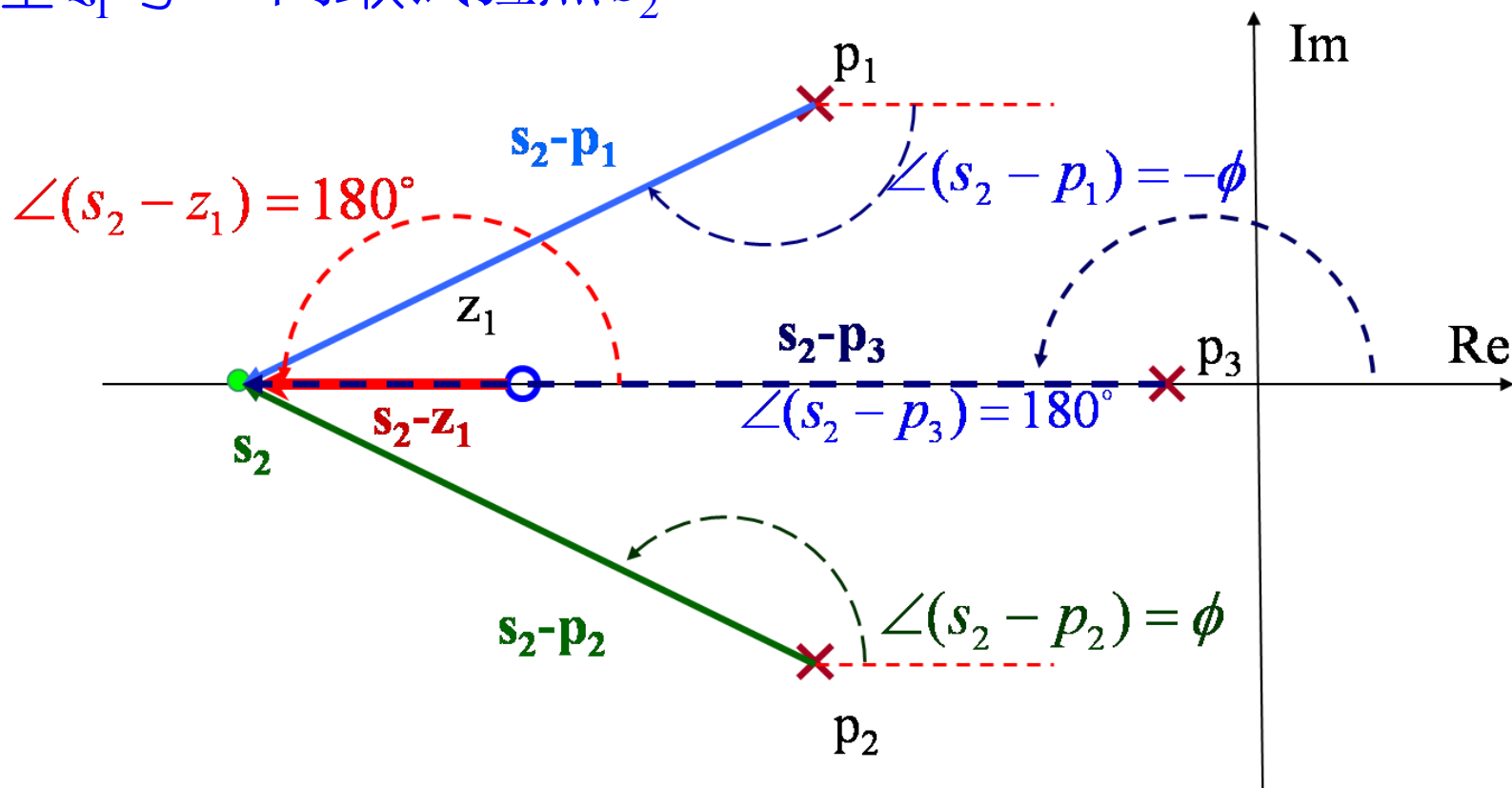
$$G(s)H(s) = \frac{k(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$



$\angle G(s_1)H(s_1) = 0^\circ - (-\theta) - \theta - 180^\circ = -180^\circ$ 满足相角条件

s_1 是根轨迹上的点，实轴上 z_1 与 p_3 间的点都在根轨迹上。

在 z_1 与 $-\infty$ 间取试验点 s_2



$$\begin{aligned}\angle G(s_2)H(s_2) &= \angle(s_2 - z_1) - \angle(s_2 - p_1) - \angle(s_2 - p_2) - \angle(s_2 - p_3) \\ &= 180^\circ - (-\phi) - \phi - 180^\circ = 0^\circ \quad \text{不满足相角条件}\end{aligned}$$

s_2 不是根轨迹上的点, $-\infty \sim z_1$ 一段负实轴上无根轨迹。

五、根轨迹的渐近线

如果开环零点数 m 小于开环极点数 n ，则 $K^* \rightarrow \infty$ 时，趋向无穷远处的根轨迹共有 $(n-m)$ 条，这些根轨迹趋向于无穷远处的方向角可由渐近线决定。

渐近线与实轴交点坐标公式

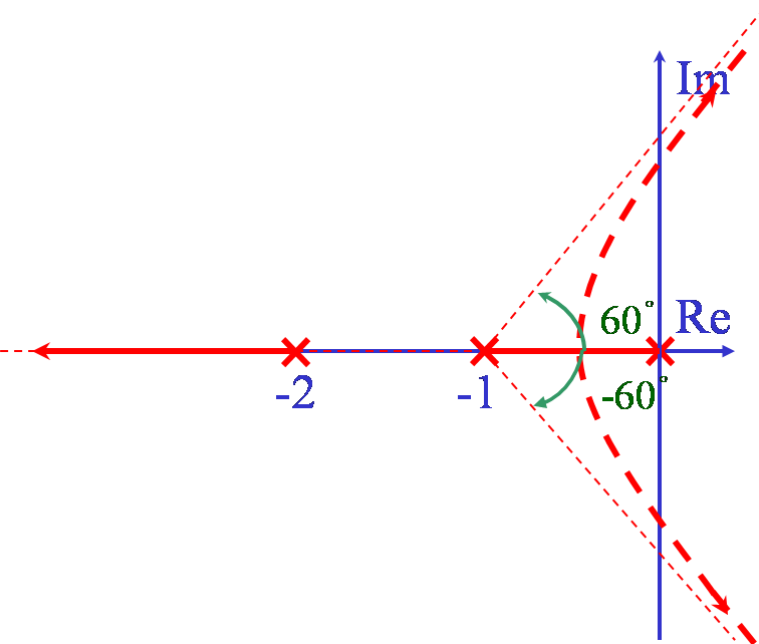
该式的分子是开环极点之和减零点之和，分母是开环极点数减零点数。

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

渐近线与实轴正方向夹角公式

式中 k 依次取 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 一直到获得 $(n-m)$ 个倾角为止。

$$\varphi_{\alpha} = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$



例8-2.1 某单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}, \text{ 求根轨迹渐近线}$$

解：开环传递函数有**3**个极点，没有零点。

即 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$

$$n - m = 3$$

故三条根轨迹趋向无穷远处，其渐近线与实轴交点的坐标为

$$\sigma_a = \frac{(0) + (-1) + (-2) - (0)}{3} = -1$$

渐近线与实轴正方向的夹角 $\varphi_\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{3}$

三条渐近线如图所示。

取 $k = 0, \varphi_\alpha = 60^\circ$

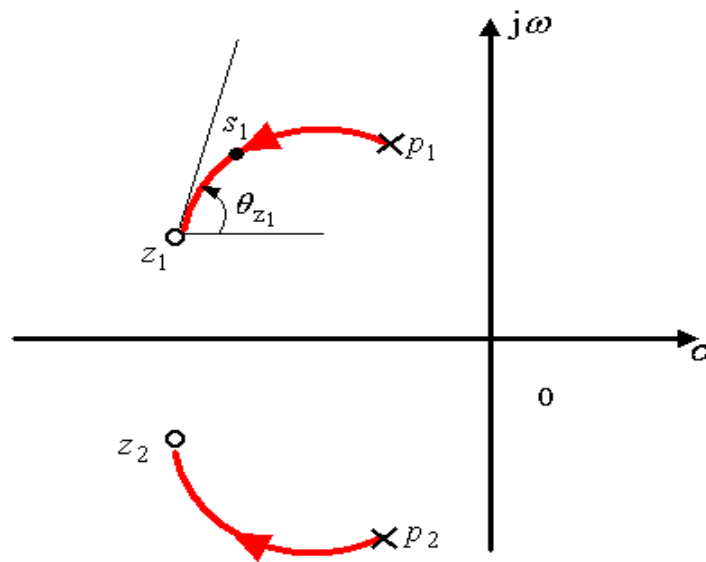
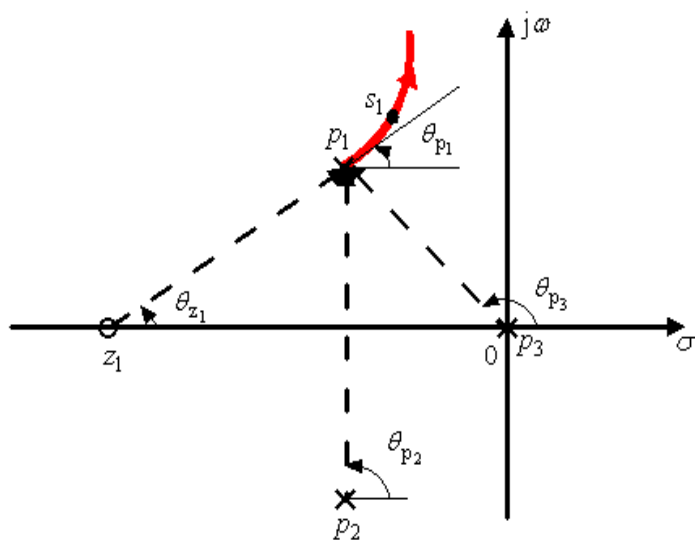
$k = 1, \varphi_\alpha = 180^\circ$

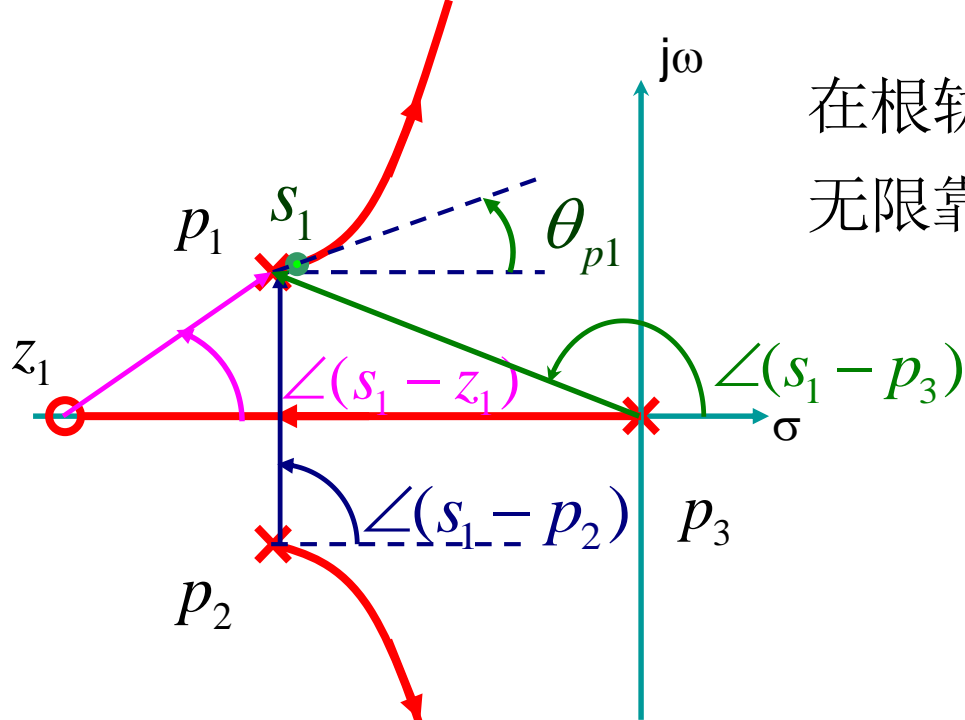
$k = -1, \varphi_\alpha = -60^\circ$

六、根轨迹的起始角与终止角

起始角是指根轨迹在起点处的切线与水平线正方向的夹角。

终止角是指根轨迹在终点处的切线与水平线正方向的夹角。





在根轨迹上取一试验点 s_1 , 使其无限靠近 p_1 , 则 $\theta_{p1} = \angle(s_1 - p_1)$

根据相角条件

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) = \pm 180^\circ$$

考虑到 $s_1 \approx p_1$ 及 $\angle(s_1 - p_1) = \theta_{p1}$, 上式可写成

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \angle(p_1 - z_1) - \theta_{p1} - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) = \pm 180^\circ$$

于是初射角 θ_{p1} 为

$$\theta_{p1} = \mp 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3)$$

由此得出起始角公式

$$\theta = \pm 180^\circ(2k+1) + \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq a}}^n \theta_j$$

其中： $\varphi_i = \angle(p_a - z_i)$; $\theta_j = \angle(p_a - p_j)$

同理可得复数零点 z_b 处的终止角（入射角）公式

$$\varphi = \pm 180^\circ(2k+1) + \sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq b}}^m \varphi_i$$

其中： $\theta_j = \angle(z_b - p_j)$; $\varphi_i = \angle(z_b - z_i)$

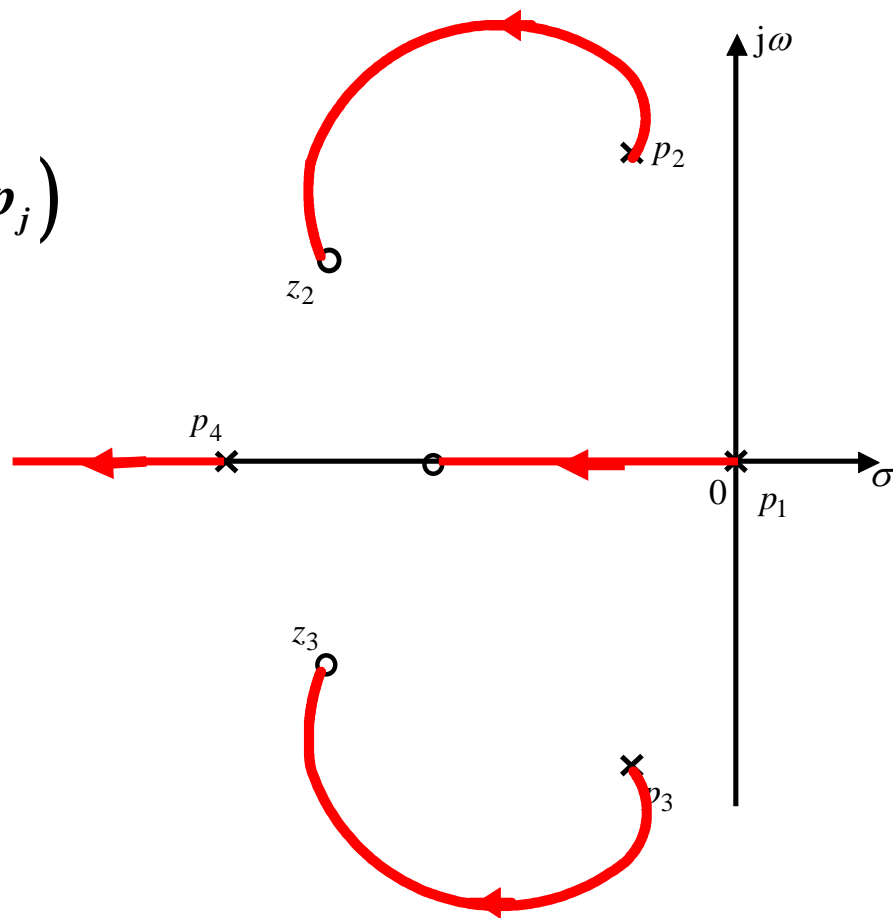
例8.3 已知系统开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+1.5j)(s+0.5-1.5j)}$$

求闭环系统大致根轨迹

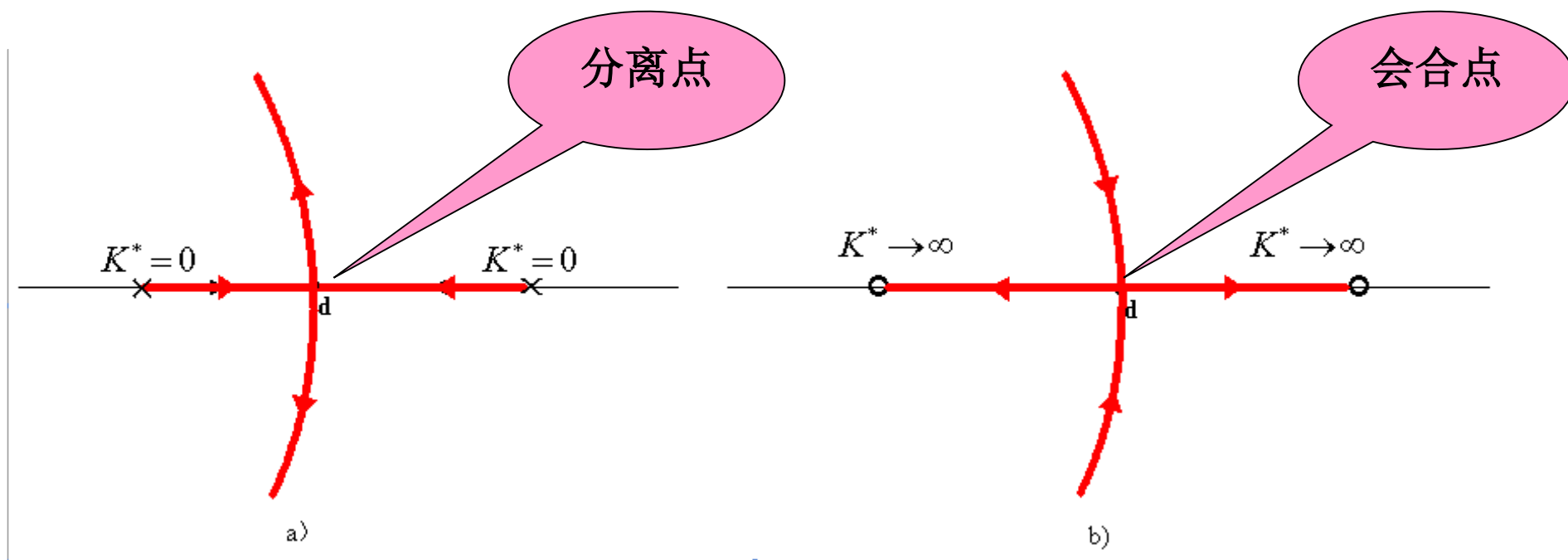
$$\theta_{p_2} = \sum_{i=1}^3 \angle(p_2 - z_i) - \sum_{j=1, j \neq 2}^4 \angle(p_2 - p_j) - (2k+1)\pi = 79^\circ$$

$$\begin{aligned} \theta_{z_2} &= \sum_{j=1}^4 \angle(z_2 - p_j) \\ &\quad - \sum_{i=1, i \neq 2}^3 \angle(z_2 - z_i) \\ &\quad + (2k+1)\pi \\ &= 149.5^\circ \end{aligned}$$



七、分离点及汇合点的坐标

几条根轨迹在s平面上相遇后又分开(或分开又相遇)的点, 称为根轨迹的
分离点(会合点)



方法一：重根法

分离点(会合点)是特征方程的重根，可利用求重根的方法确定其位置。

开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K^* N(s)}{D(s)}$

闭环特征方程 $K^* N(s) + D(s) = 0$

设汇合分离点s是特征方程的2重根.

对代数方程 $f(x) = 0$,其二重根s必满足 $f(s) = f'(s) = 0$

则重根满足
$$\begin{cases} K^* N(s) + D(s) = 0 \\ K^* N'(s) + D'(s) = 0 \end{cases}$$

消去 K^* 得到: $D(s)N'(s) - D'(s)N(s) = 0$

即
$$\frac{d[1+G(s)H(s)]}{ds} = \frac{d[G(s)H(s)]}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{K^* N(s)}{D(s)} \right] = 0$$

由该微分方程解出重根 s' 的值，舍去不合理的根，则可由获得的 s' 反求会合点处的K。

例8-2.2 求例 8-2.1中汇合分离点的坐标。

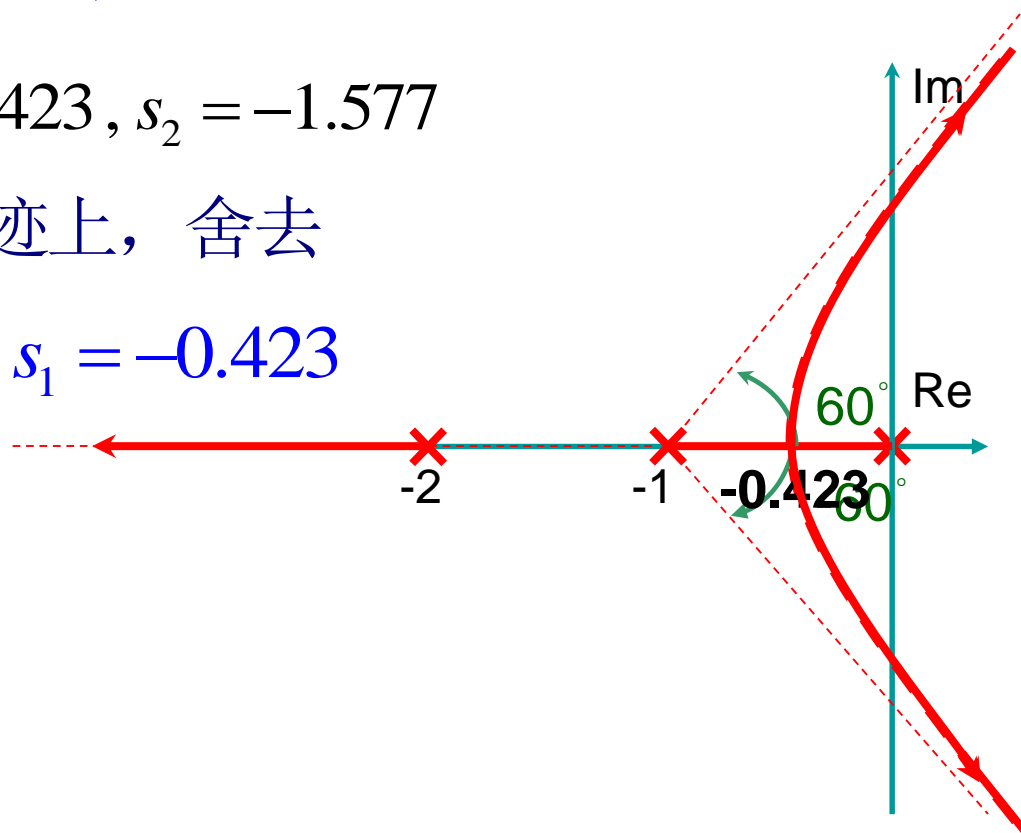
$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)} \quad \text{无零点}$$

解: $\frac{d}{ds}[s(s+1)(s+2)] = 0$ 即 $3s^2 + 6s + 2 = 0$

得 $s_1 = -0.423, s_2 = -1.577$

s_2 不在根轨迹上, 舍去

汇合分离点 $s_1 = -0.423$



方法二、d坐标法

若已知系统的开环极点和零点，可用下式解得

分离点的坐标方程

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i}$$

其中， p_j 为开环极点， z_i 为开环零点， d 为分离点坐标。

若开环零极点全部在实轴上交错排列，则根轨迹无分离点。

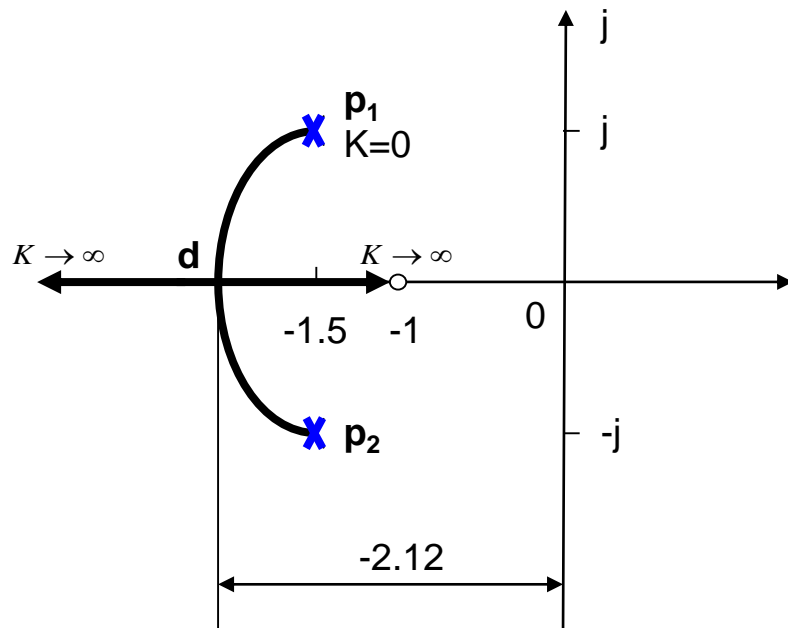
方法三、极值点法

由 $\frac{dK^*}{ds} = 0$ 解出

例8-3 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2 + 3s + 3.25}$$

试求系统闭环根轨迹的分离点坐标。



解:
$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+1.5+j)(s+1.5-j)}$$

由分离点坐标公式得:
$$\frac{1}{d+1.5+j} + \frac{1}{d+1.5-j} = \frac{1}{d+1}$$

解此方程得 $d_1 = -2.12$, $d_2 = 0.12$ (舍去)

根轨迹如图所示。

解: 令 $s^2 + 3s + 3.25 = 0$, 求得开环极点 $p_{1,2} = -1.5 \pm j$, $n = 2$

$s + 1 = 0$, 求得开环零点 $z_1 = -1$, $m = 1$

根轨迹2条, 起始于 p_1 和 p_2 , 终止于 z_1 及无穷远处。

渐近线 $n - m = 2 - 1 = 1$ 条, 与实轴正方夹角 180° 。

实轴上的根轨迹 $(-\infty, -1)$

求会合点, 令 $\frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 + 3s + 3.25}{s + 1} \right]_{s=\alpha} = 0$ ✗ p_1



即 $s^2 + 2s + 3.25 = 0$ 解得 $s_1 = -2.12, s_2 = 0.12$

会合点 -2.12

↑ ✗ p_2
不在实轴根轨迹上, 舍去。

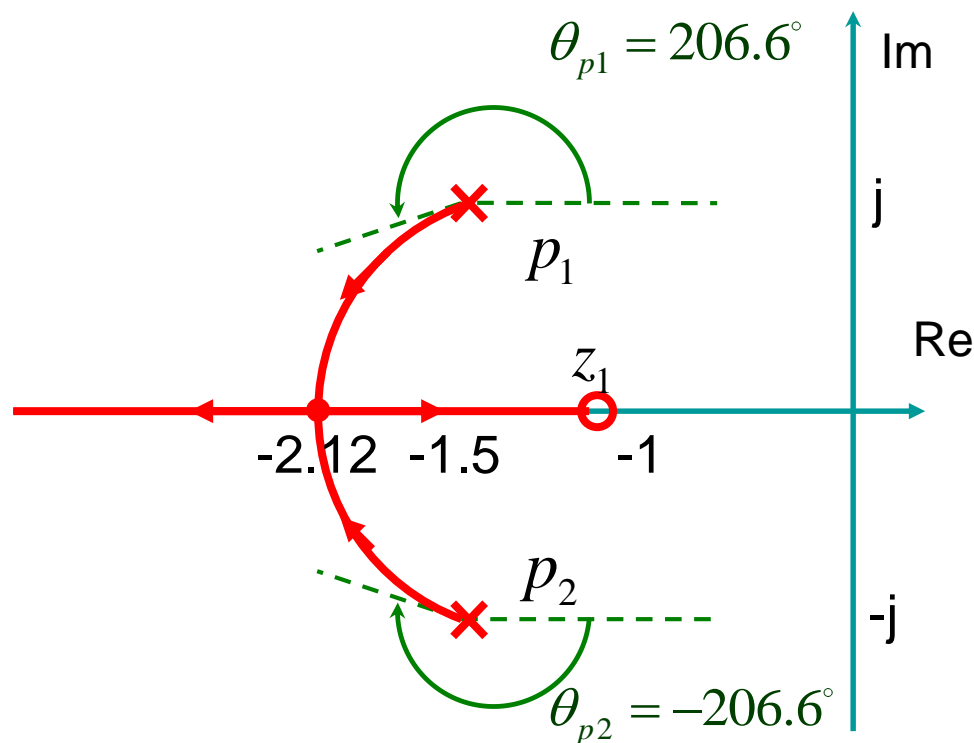
求出射角 $\theta_{p1} = \pm 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2)$

$$= \pm 180^\circ + \angle[-1.5 + j - (-1)] - \angle[-1.5 + j - (-1.5 - j)]$$

$$= \pm 180^\circ + \angle(-0.5 + j) - \angle 2j$$

$$= \pm 180^\circ + 116.6^\circ - 90^\circ = 206.6^\circ$$

$$\theta_{p2} = -206.6^\circ$$



八、实轴上分离点的分离角恒为 $\pm 90^\circ$

根轨迹离开分离点时，轨迹切线的倾角称分离角。实轴上分离点的分离角恒为 $\pm 90^\circ$ 。

实轴上会合点的会合角也恒为 $\pm 90^\circ$ 。

九、根轨迹与虚轴的交点

若根轨迹与虚轴相交，表明闭环极点中有一部分位于虚轴上，即闭环特征方程有纯虚根 $\pm j\omega$ ，系统临界稳定。将 $s = j\omega$ 代入特征方程中得

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

或 $\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] + \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ，令下两式成立

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

则可解出 ω 值及对应的临界开环增益 K^* 及 K 。

例 8-2.3 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

求根轨迹与虚轴的交点。

解：系统闭环特征方程为

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

令 $s = j\omega$ ，代入上式得

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K^* = 0$$

即

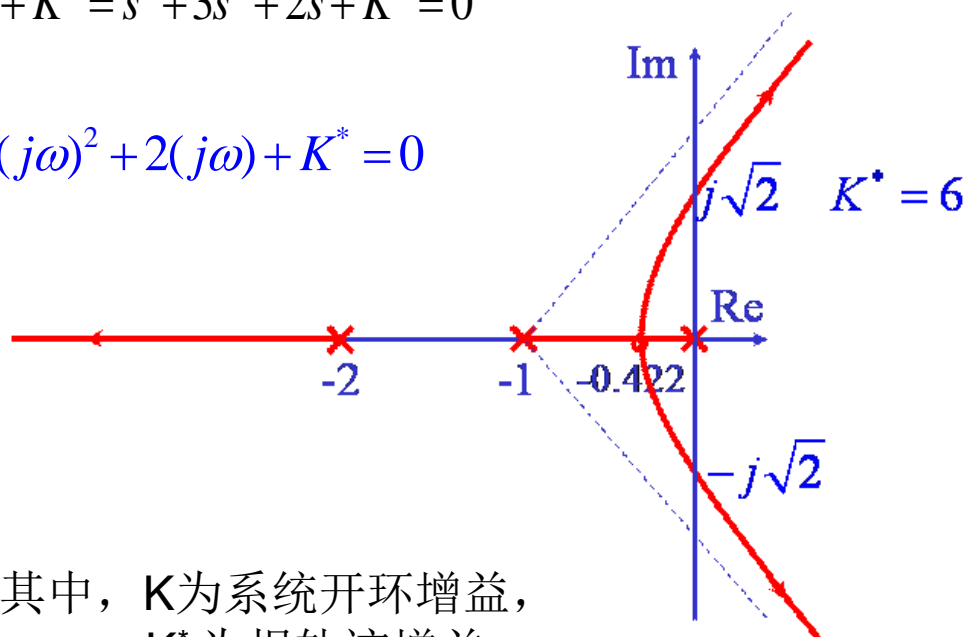
$$\begin{cases} -3\omega^2 + K^* = 0 \\ -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases}$$

联立得：

$$\omega_1 = 0, K^* = 0$$

$$\begin{cases} \omega_{2,3} = \pm 1.414 \\ K^* = 6, K = 3 \end{cases}$$

其中， K 为系统开环增益， K^* 为根轨迹增益。



十、系统闭环极点之和为常数

将系统开环传递函数的分子、分母展开，得 $G(s)H(s) = K^* \frac{s^m - (\sum_{i=1}^m z_i s^{m-1} + \dots)}{s^n - (\sum_{j=1}^n p_j s^{n-1} + \dots)}$

若系统满足 $n-m \geq 2$ ，则特征方程为

$$s^n + \sum_{j=1}^n (-p_j) s^{n-1} + \dots + [\prod_{j=1}^n (-p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (-z_i)] = 0$$

由代数方程根与系数的关系知，系统闭环极点之和 = $\sum_{j=1}^n p_j$

结论：当 $n-m \geq 2$ 时，系统闭环极点之和等于开环极点之和。

通常把 $(\sum_{j=1}^n p_j)/n$ 称作极点的**重心**。可知当 K^* 变化时，极点重心保持不变。

这个性质可用来确定极点位置及相应的 K^* 值

注解：

特征方程 $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$

$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = 0$ 其中 s_i 闭环极点

根据代数方程根与系数的关系 $\sum_{i=1}^n s_i = -a_{n-1}$, $\prod_{i=1}^n (-s_i) = a_0$

十一、系统闭环极点之积

$$\text{闭环极点之积} = \prod_{j=1}^n (-p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (-z_i)$$

易知，若系统开环具有等于零的极点，则闭环极点积 $= K^* \prod_{i=1}^m (-z_i)$

例8-2.4 已知系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

根轨迹与虚轴相交时两个极点为 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$

注意：此时 $K^*=6$

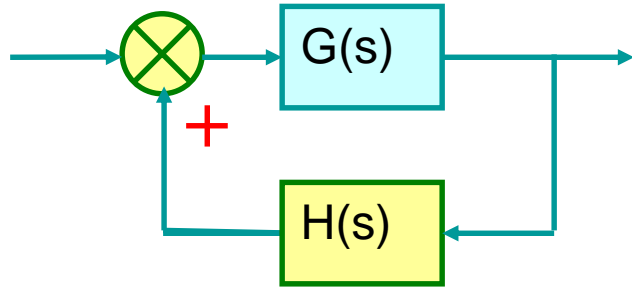
求第三个极点.

$$\text{解: } D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = -a_{n-1} = -3$$

$$s_3 = -3 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2} = -3$$

正反馈系统根轨迹



特征方程 $1 - G(s)H(s) = 0$

或写成 $G(s)H(s) = +1$

$$|G(s)H(s)| e^{j\angle G(s)H(s)} = 1 \cdot e^{j2l\pi} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

幅值条件 $|G(s)H(s)| = 1$

相角条件 $\angle G(s)H(s) = 2k\pi = k360^\circ \quad k = 0, 1, 2, \dots$

与负反馈系统根轨迹绘制的条件相比，幅值条件没变，相角条件变了。

绘制正反馈根轨迹要改变的规则

规则4. 若 $m < n$,当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $n-m$ 条根轨迹沿着 $n-m$ 条渐近线趋于 s 平面无穷远处。

渐近线与实轴正方向的夹角为

$$\Phi = \frac{2k\pi}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

规则5. 实轴上的根轨迹只能是其右侧开环实数零、极点总数为偶数的线段。

规则7. 起始于开环复数极点 p_1 处的出射角为

$$\theta_{p_1} = \mp 2k\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_1 - z_i) - \sum_{j=2}^n \angle(p_1 - p_j)$$

终止于开环复数零点 z_1 处的入射角为

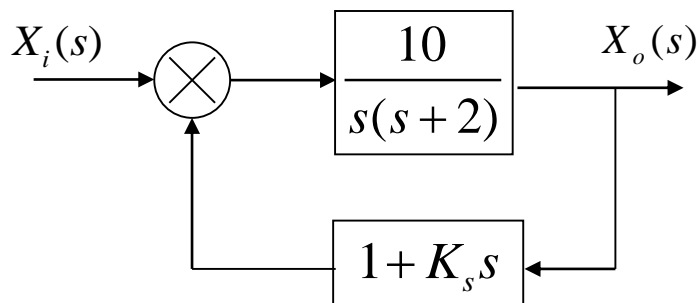
$$\theta_{z_1} = \pm 2k\pi + \sum_{j=1}^n \angle(z_1 - p_j) - \sum_{i=2}^m \angle(z_1 - z_i)$$

规则8.根轨迹与虚轴交点 $j\omega$ 和相应的 k 值由下列方程解得:

$$\text{Re}[1-G(j\omega)H(j\omega)]=0$$

$$\text{Im}[1-G(j\omega)H(j\omega)]=0$$

参量根轨迹的绘制



例8-4 如图，分析 K_s 对系统性能的影响

可绘制以 K_s 为参数的根轨迹图，称参量根轨迹图。

(1) 系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_s s)}{s(s+2)}$$

其特征方程为： $s^2 + 2s + 10K_s + 10 = 0$

以特征方程中不含 K_s 的各项 ($s^2 + 2s + 10$) 除特征方程，得 $\frac{10K_s s}{s^2 + 2s + 10} + 1 = 0$

令 $\frac{10K_s s}{s^2 + 2s + 10} = G'(s)H'(s)$ ，可以看作是以 K_s 为根轨迹增益的等效开环传递函数。

由此，绘制 $G'(s)H'(s)$ 的根轨迹图，即 K_s 的参量根轨迹图。

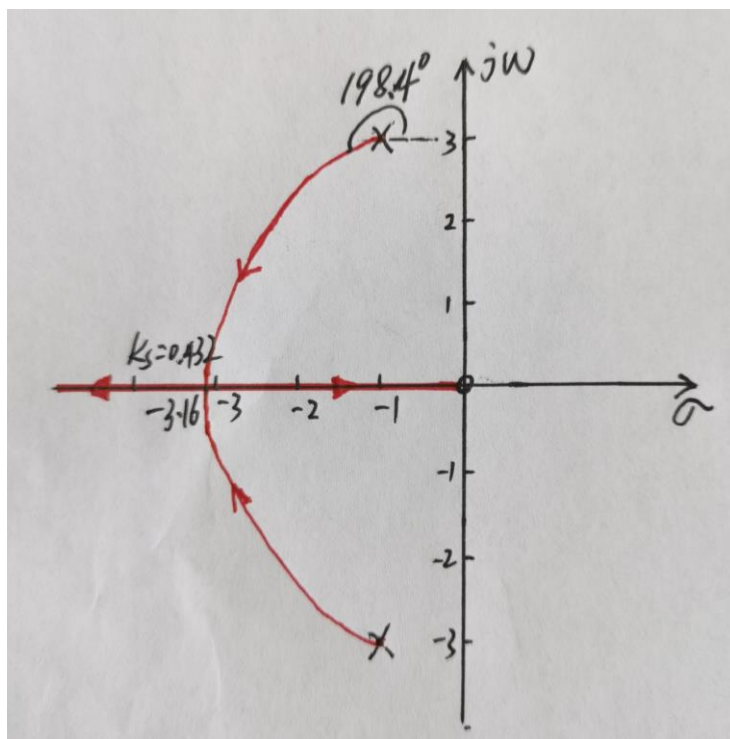
(2) 由 $G'(s)H'(s)$ 可知 $m=1, n=2$, 所以根轨迹有两条分支, 起于极点 $(-1 \pm j3)$, 终于原点及无穷远。

(3) 根轨迹在实轴上的分布: 原点的左侧实轴。

(4) 汇合点: 因为 $K_s = (s^2 + 2s + 10)/10s$, 由 $dK_s/ds = 0$

得到 $s_1 = -3.16, s_2 = 3.16$ (舍去), 此时 $K_s = 0.432$

(5) 起始角: $\theta = 180^\circ - 90^\circ + \arctan(-3) = 198.4^\circ$



参量根轨迹（补充）

- 变化的参数不是开环根轨迹增益 K^* 的根轨迹叫参数根轨迹。
- 将开环传函变形，让变化的参数处于开环增益的位置，就可以采用绘制常规根轨迹时的法则。

• 例: 已知系统 $G(s)H(s) = \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s + 1)}$, 求 T_a 由 $0 \rightarrow \infty$ 的闭环根轨迹。

• 解: 原系统的闭环特征方程为

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = s(5s + 1) + 5(T_a s + 1) = 0,$$

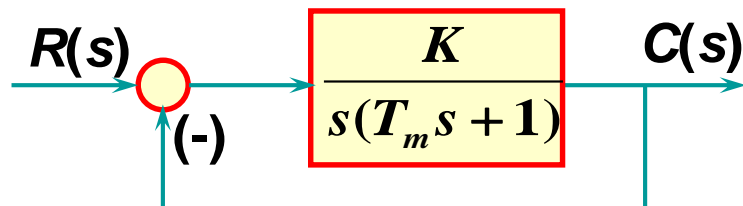
将和参数有关的各项归并在一起，上式可写为

$$5s^2 + s + 5 + 5T_a s = 0$$

所以 $\frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$ 就是新的开环传函，而 $5T_a$ 相当于新的开环增益。

- 解题关键:** 要将开环传函变形，将非开环增益的参数变换到开环增益的地位。

例：求 T_m 从 $0 \rightarrow \infty$ 时的根轨迹



原系统的闭环特征方程为

$$T_m s^2 + s + K = 0$$

整理可得等效开环传函

$$\frac{T_m s^2}{(s + K)} + 1 = 0 \quad (\text{即 } G'(s)H'(s) = -1)$$

或：由 $s^2 + s/T_m + K/T_m = 0$

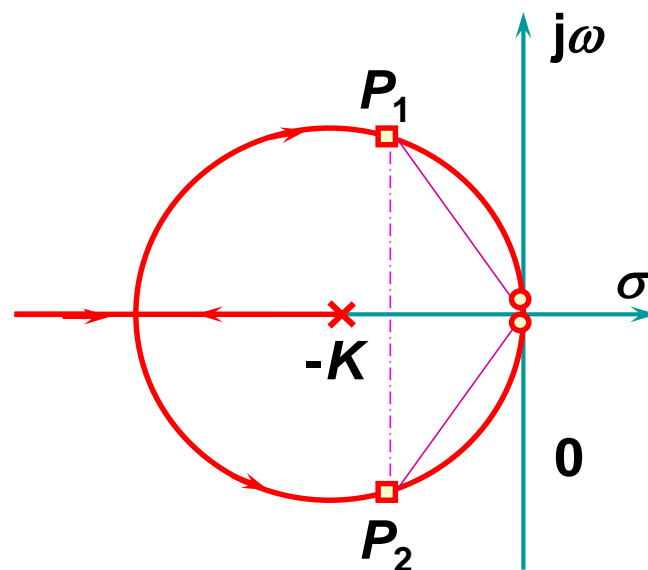
得新的特征方程为

$$s^2 + (s + K)/T_m = 0$$

则新的等效开环传函为

$$\frac{(s + K)/T_m}{s^2}$$

(即 $G'(s)H'(s) = -1$)



P289 例8-6, 8-7
深入理解!

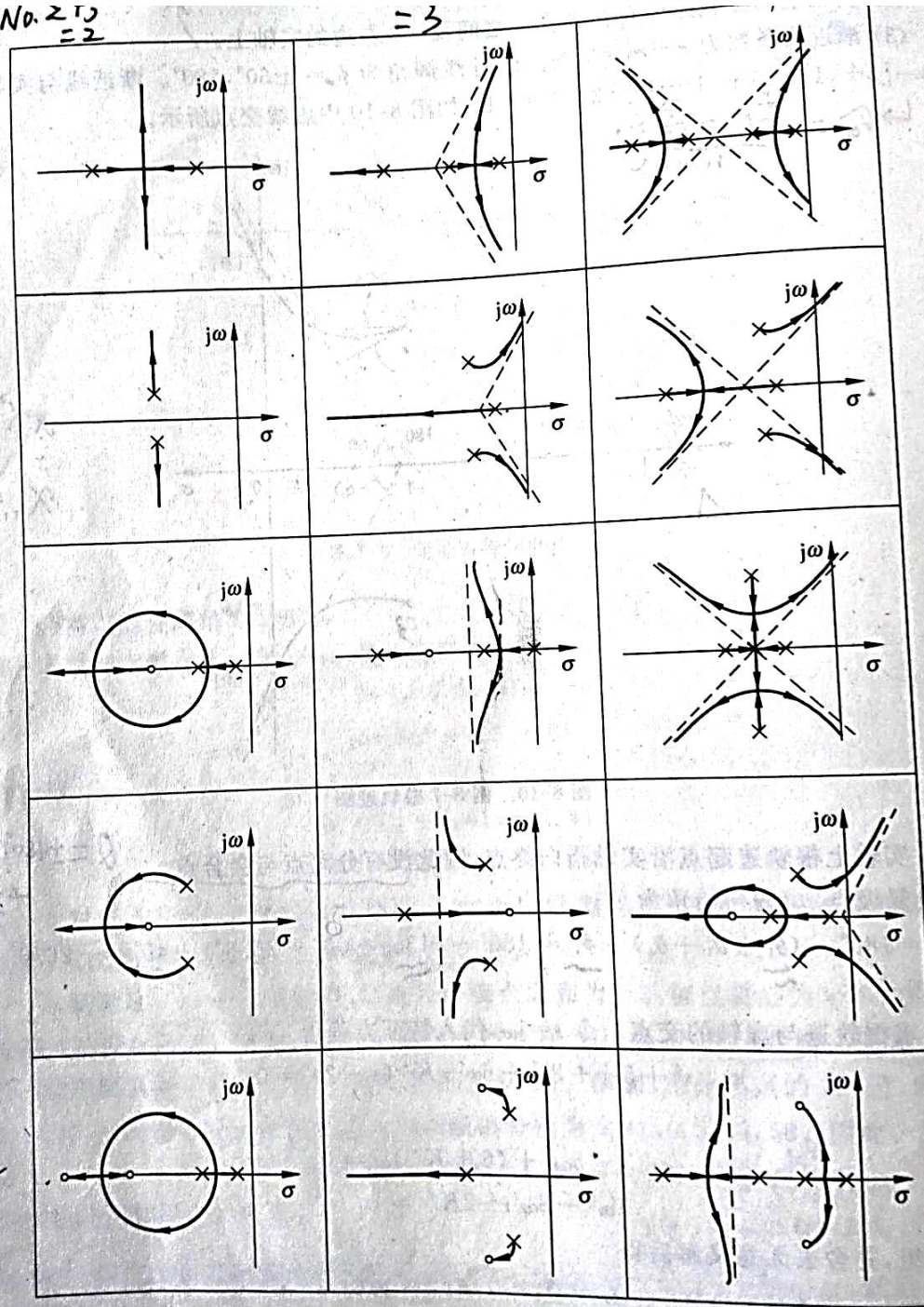
图. No. 212

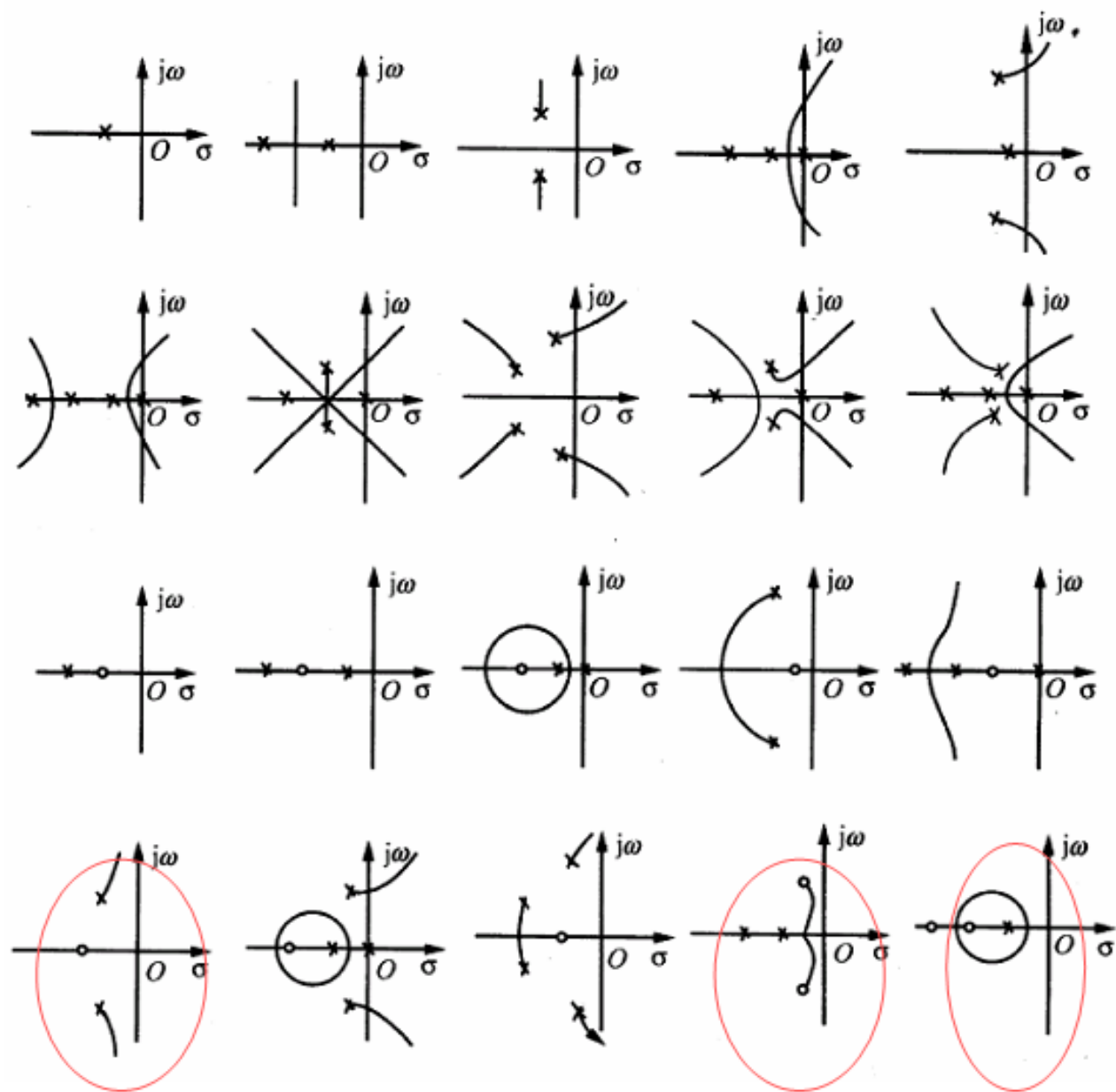
= 3

21

= 1

2






➤开环零点和极点对根轨迹的影响

增加开环极点的影响 \leftrightarrow 增加一个惯性环节 $1/(s - p_c)$

增加开环零点的影响 \leftrightarrow 加入一阶微分环节 $(s - z_c)$


增加一对开环零极点的影响 \leftrightarrow 加入环节 $(s - z_c)/(s - p_c)$

开环传递函数上增加极点


$$\phi_a = \pm (2k+1)180^\circ / (n-m)$$

渐近线与实轴倾角随着
 n 数增大而减小

根轨迹向右方向弯曲

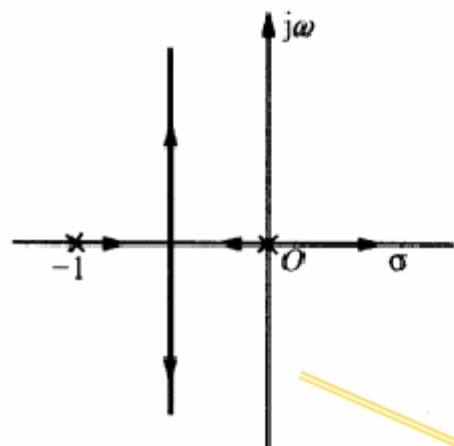

$$\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i) / (n-m)$$

渐近线与实轴交点随着 p_c 增大
(p_c 点在实轴上向右移)
而右移, 故更靠近原点。

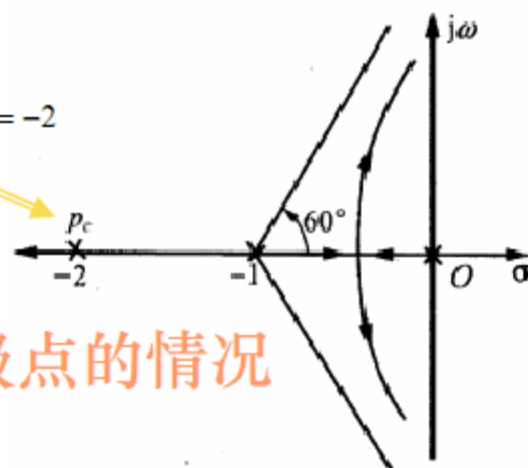
向右弯曲趋势随着所增加的
极点移近原点而加剧

降低了系统的相对稳定性

增加开环极点的影响



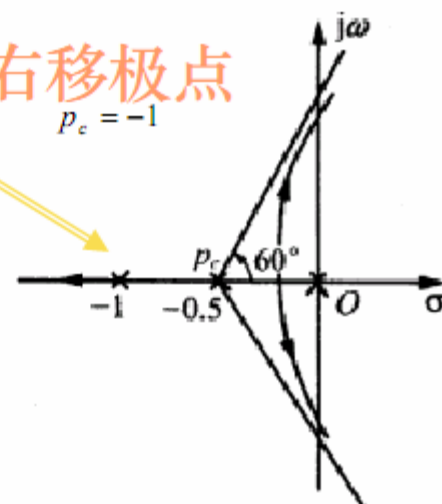
$p_c = -2$

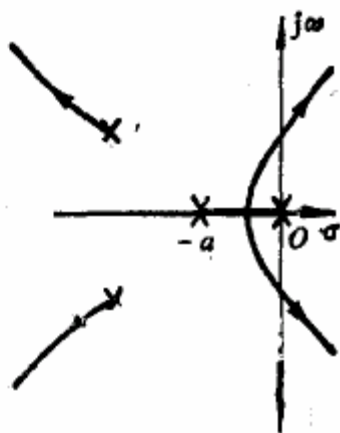
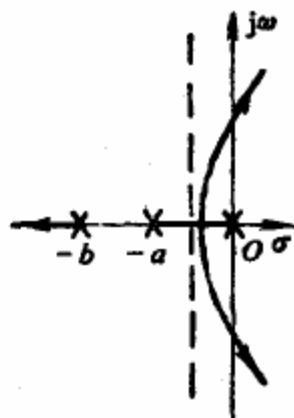
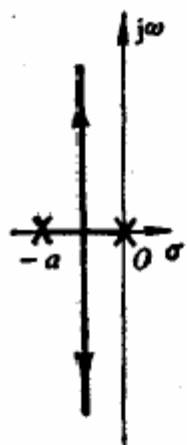


增加一个极点的情况

右移极点

$p_c = -1$





开环传递函数上增加零点

$$\phi_a = \pm (2k + 1)180^\circ / (n - m)$$

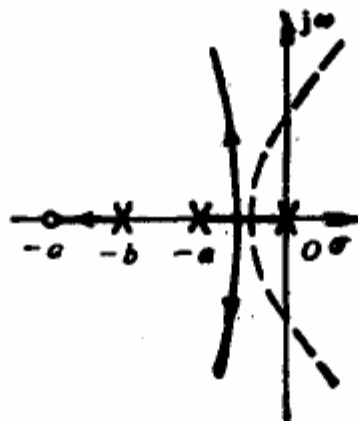
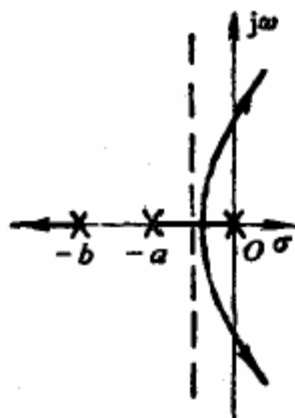
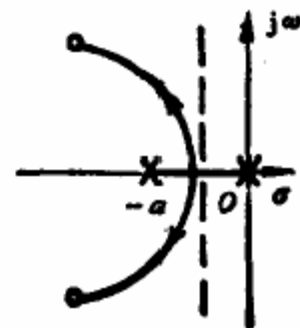
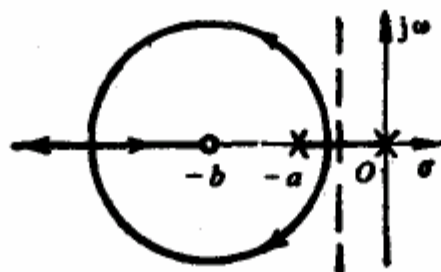
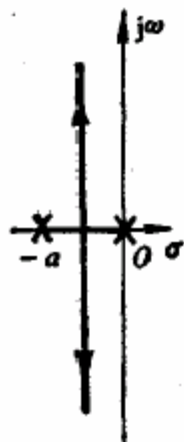
渐近线与实轴倾角随着
 m 数增大而增加

根轨迹向左方向弯曲

$$\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i) / (n - m)$$

渐近线与实轴交点随着
 Z_c 增大 (Z_c 点在实轴上
向右移) 而左移

提高了系统的相对稳定性



§ 8-5 系统闭环零点、极点分布与性能指标

闭环零点、极点分布与阶跃响应的定性关系

- ❖ 若要系统稳定，则闭环极点必须全部在s左半平面上。
- ❖ 要求快速性好的系统，其阶跃响应衰减要较快，应使闭环极点远离虚轴；要求平稳性好的系统，其复数极点最好设置在复平面中与负实轴成 $\pm 45^\circ$ 夹角的直线以内。

由第三章内容，若二阶系统共轭极点位于 $\pm 45^\circ$ 线上，则对应最佳阻尼比**0.707**，其稳定性、快速性较好。

- ❖ 远离虚轴的闭环极点对瞬态响应影响很小。若某一极点比其它极点距虚轴远**4-6**倍，则可忽略其对瞬态响应的影响。
- ❖ 若要求动态过程尽快消失，应增大闭环极点间距，并使零点 z_j 靠近极点 P_j 。
因零点总少于极点，应使零点靠近距虚轴较近、影响较大的极点，以削弱其影响，提高快速性。

一对靠得很近的零极点称为**偶极子**。在系统中适当设计偶极子，可以使系统的动态过程获得改善。

例8-8: 闭环传递函数 $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{(0.67s+1)(0.01s^2+0.16s+1)}$

$$= \frac{150}{(s+1.5)(s+8-j6)(s+8+j6)}$$

得到闭环极点: $s_1 = -1.5$, $s_{2,3} = -8 \pm j6$

由于 $s_{2,3}$ 与虚轴的距离是 s_1 的5倍以上, 所以 s_1 为主导极点
故, 闭环传递函数可近似为:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{150}{(s+1.5)(s+8-j6)(s+8+j6)}$$

$$\approx \frac{150}{(s+1.5)(8-j6)(8+j6)} = \frac{1}{0.67s+1}$$

例8-9: 系统闭环传递函数 $\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{\cancel{0.62s+1}}{\cancel{(0.67s+1)}(0.01s^2 + 0.08s+1)}$

试估算系统的性能指标。

解： 闭环零点： $z_1 = -1.6$

闭环极点： $p_1 = -1.5, p_{2,3} = -4 \pm j9.2$

显然 z_1 和 p_1 构成一对偶极子，系统的主导极点是 $p_{2,3}$

$$\therefore \frac{X_0(s)}{X_i(s)} \approx \frac{1}{0.01s^2 + 0.08s+1}$$

系统的阻尼比 $\xi=0.4$, $\omega_n = 10 \text{ rad} / s$

对应的性能指标为 $M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 25\%$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.75 \text{ s} \quad (\Delta = \pm 5\% \text{ 时})$$

例8-10: 系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K^*(s+4)}{s(s+2)}$, 试画出当 K^* 由 $0 \rightarrow \infty$

时的闭环根轨迹, 并分析对系统动态过程的影响。

解: 开环零点: $z_1 = -4$

开环极点: $p_1 = 0, p_2 = -2$

分离点: $d_1 = -1.17, d_2 = -6.83$

在 d_1 处的根轨迹增益为 $K^* = \frac{|d_1||d_1+2|}{|d_1+4|}$

系统的阻尼比 $\xi = 0.4, \omega_n = 10 \text{ rad/s}$

对应的性能指标为 $M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 25\%$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.75 \text{ s} \quad (\Delta = \pm 5\% \text{ 时})$$

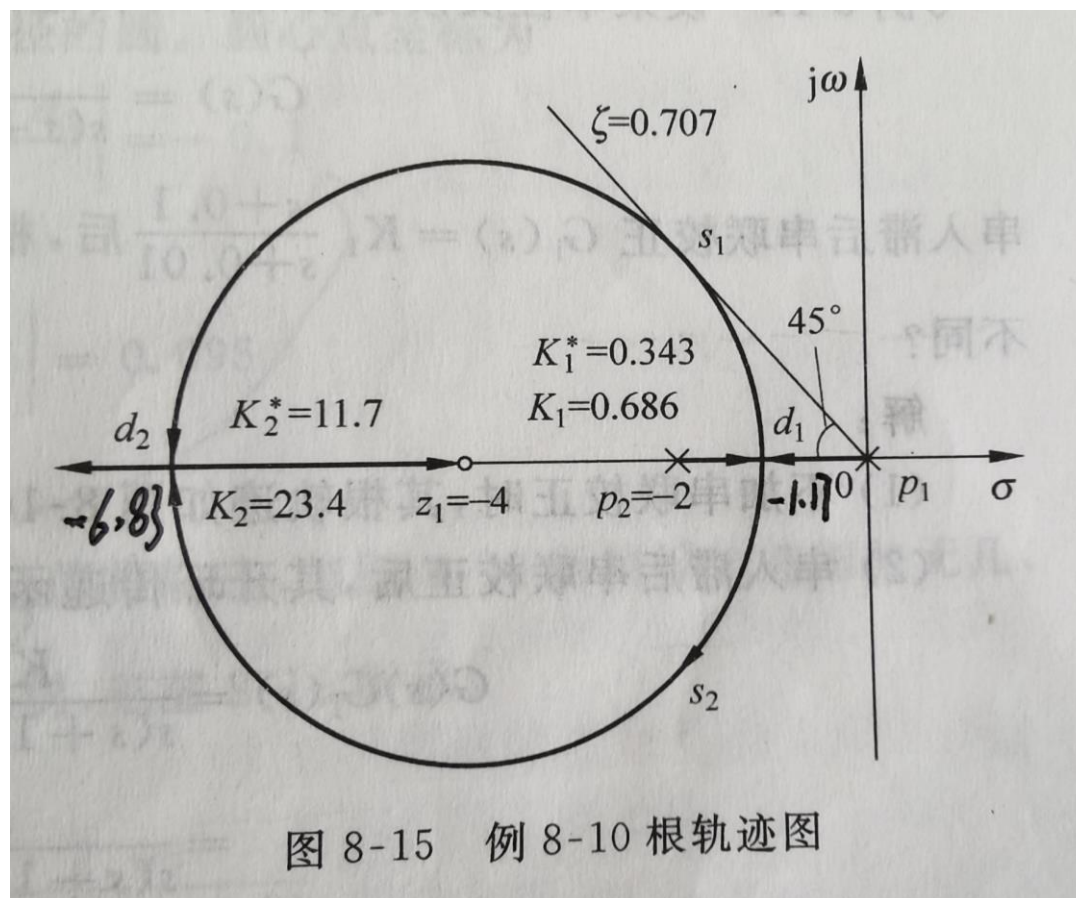
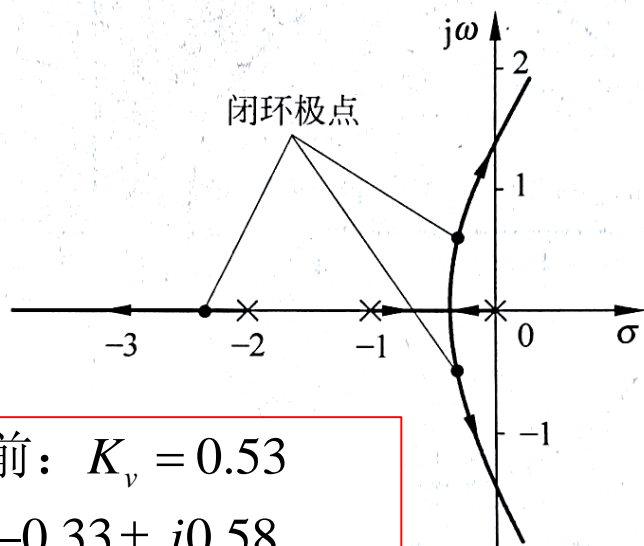


图 8-15 例 8-10 根轨迹图

例8-11: $G_0(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$, $G_j(s) = K_1 \frac{s+0.1}{s+0.01}$



$$G_j(s) = K_1 \frac{(s - z_c)}{(s - p_c)}$$

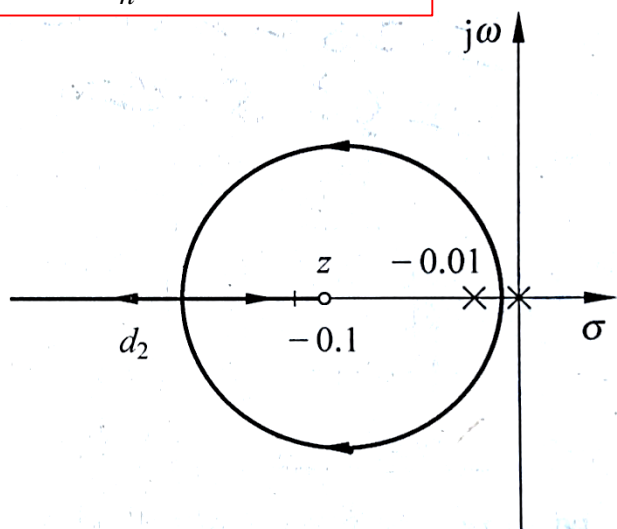


校正前: $K_v = 0.53$

$$s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$$

$$\xi = 0.5, \omega_n = 0.67 \text{ rad/s}$$

根轨迹图



校正后: $K_v = 4.9$
 $s_{1,2} = -0.28 \pm j0.51$

图 8-18 加串联滞后校正后
例 8-11 根轨迹图

图 8-17 原点处根轨迹图

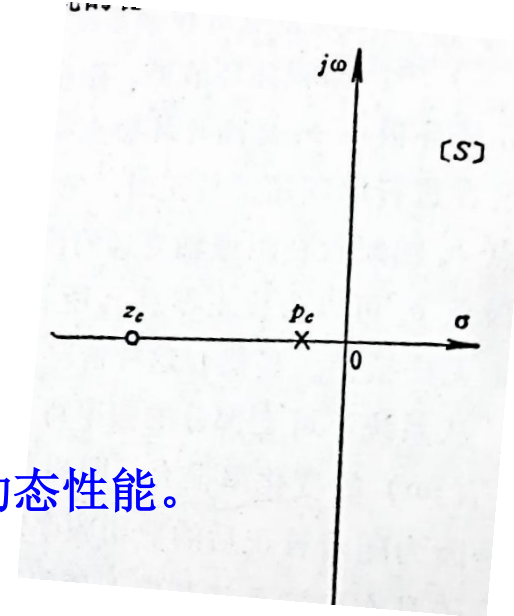
补充知识：基于根轨迹法设计校正环节

(1) 基于根轨迹法确定滞后校正参数

$$G_c(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} = \frac{(s - z_c)}{\beta(s - p_c)} \quad (\beta > 1)$$

$$\text{这里 } p_c = -1/\beta T, \quad z_c = -1/T$$

用于改善系统的稳态性能，并尽量不影响系统原有的动态性能。



校正零点配置技巧：

假如系统在 p_c 和 z_c 间的负实轴再无其它开环极点，则在它们之间必然将有闭环极点出现。因此，在应用滞后校正时，总是希望介于 p_c 和 z_c 间的闭环极点被闭环零点 z_c 完全补偿或近似完全补偿。

一般总是使零点 z_c 配置在[S]平面上的原点附件，从而达到补偿的目的，此时 $|s - p_c| / |s - z_c| \approx 1$ 。

$$G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{(s-z_c)}{\beta(s-p_c)} \cdot \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

那么对主导极点 $s_{1,2}$ ，系统校正后的根轨迹增益为：

$$K^*{}' = \frac{\beta|s_1-p_c|}{|s_1-z_c|} \cdot \frac{|s_1-p_1|\cdot|s_1-p_2|\cdots|s_1-p_n|}{|s_1-z_1|\cdot|s_1-z_2|\cdots|s_1-z_m|} \approx \beta K^*$$

注：一般应将滞后校正的滞后相角 $\phi_c = \angle(s_I - z_c) - \angle(s_I - p_c)$ 控制在 $5^\circ \sim 10^\circ$ 之内，即校正零点 z_c 与极点 p_c 配置得紧靠在一起，且此时通常取 $\beta \approx 10$ 倍。

校正步骤:

1. 绘制校正前系统的根轨迹图，根据给定的性能指标要求，确定控制系统的闭环主导极点在图中的位置。
2. 根据根轨迹方程的幅值条件，计算与闭环主导极点对应的开环放大系数在校正后应提高的倍数 β 。
3. 确定校正零点 z_c 与校正极点 p_c 在[s]平面上的布局，通常将它们配置在原点附近。需要注意的是校正前后的系统根轨迹图应该无明显变化。
4. 绘制出校正后系统的根轨迹图，并在新的根轨迹图上按性能指标找出系统的闭环主导极点。再按幅值条件计算相应的开环放大系数，并校核性能指标。

例题： 设单位负反馈系统不可变部分的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{800K}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

试确定满足下列各项性能指标时的串联滞后校正参数：

- (1) 开环放大系数 $K_v \geq 12 \text{秒}^{-1}$;
- (2) 过渡过程时间 $t_s \leq 2.5 \text{秒}$ (稳态误差5%时) ;
- (3) 超调量 $M_p \leq 20\%$;
- (4) 系统带宽 $\omega_b \leq 5 \text{弧度/秒}$ 。

解： 1) $G_0(s)$ 根轨迹图如右图, $K_v \geq 12 \text{秒}^{-1}$ 时系统不稳定。

2) $t_s \leq 2.5 \text{秒}$ 时, $|Res_I| = \xi \omega_n \geq 3 / t_s = 1.2$

取 $Res_I = -1.25$, 则 $Im s_I = +j2.16$

计算得对应的 $\omega_n = 2.5$, $\xi = 0.5$

此时 $M_p = 17.5\%$, 再根据

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2} + 1 - 2\xi^2} \quad (0 \leq \xi \leq 0.707)$$

求得 $\omega_b = 1.27\omega_n = 3.2 \text{rad/s}$

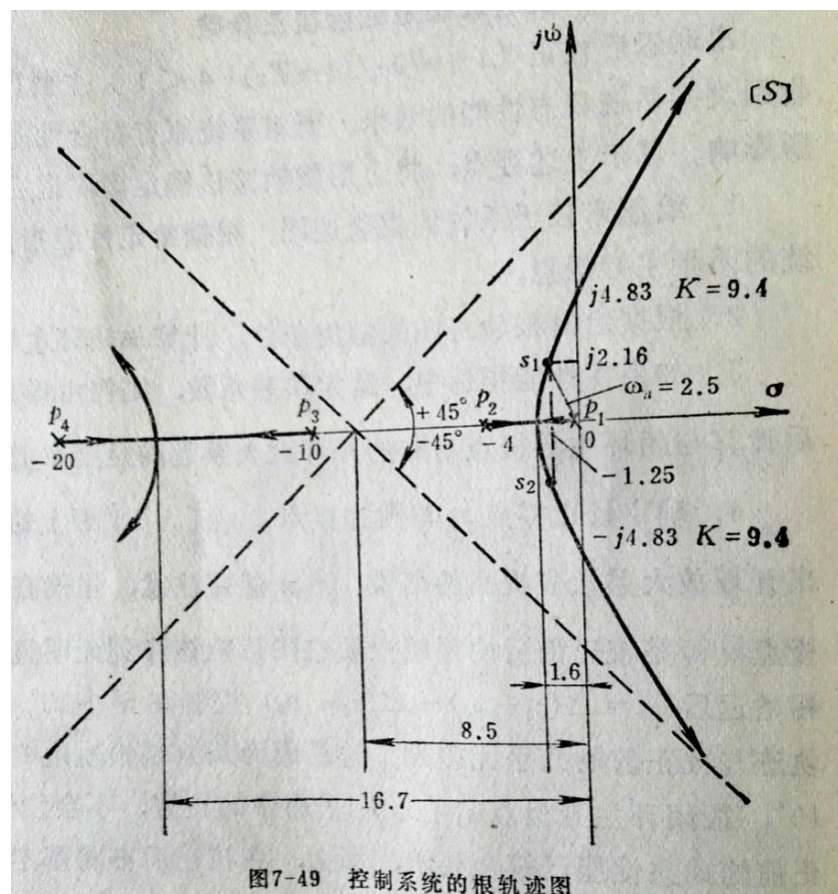


图7-49 控制系统的根轨迹图

则校正前闭环主导极点 $s_1=-1.25+j2.16$ 对应的开环放大系数:

$$K = \frac{|s_1| \cdot |s_1 + 4| \cdot |s_1 + 10| \cdot |s_1 + 20|}{800} \approx 1.85 \text{秒}^{-1}$$

3) 设滞后校正环节为 $G_c(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s-z_c}{s-p_c} (\beta > 1)$

$$\text{这里 } p_c = -1/\beta T, \quad z_c = -1/T$$

为使 $K_v \geq 12$ (即 $K \geq 12$) , 则开环增益须提高的倍数为:

$$\beta \approx 12/1.85 = 6.5$$

4) 确定滞后校正环节的参数 T 。

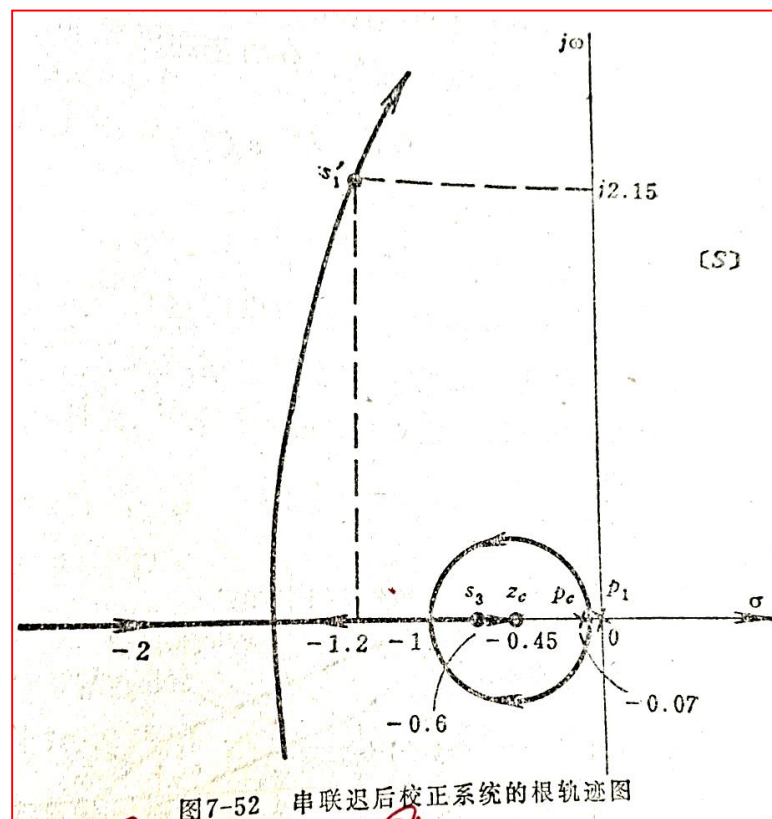
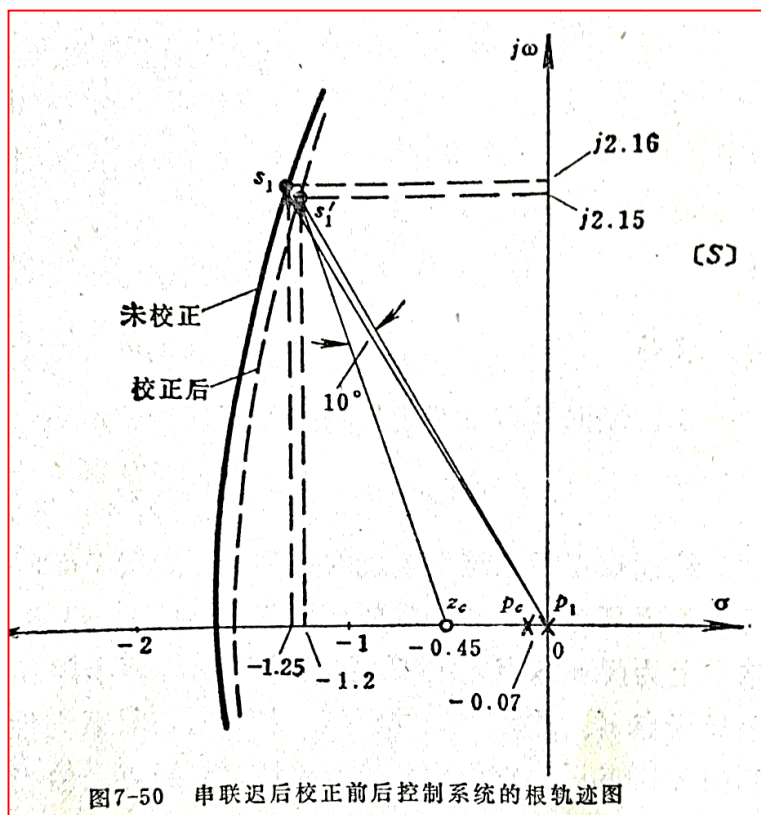
$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{800K}{\beta} \frac{1}{s(s+4)(s+10)(s+20)} \cdot \frac{(s-z_c)}{(s-p_c)}$$

取新主导极点为 $s_1'=-1.2 \pm j2.15$, 将 $K=12 \text{秒}^{-1}$, $\beta=6.5$ 代入上式, 因此 $T=2.22 \text{秒}$, 故 $z_c=-0.45$, $p_c=-0.07$

$$G_c(s) = \frac{s+0.45}{6.5(s+0.07)} = \frac{2.2s+1}{14.3s+1}$$

5) 串联滞后校正后的系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1480(s + 0.45)}{s(s + 0.07)(s + 4)(s + 10)(s + 20)}$$



(2) 基于根轨迹法确定超前校正参数

假设超前校正环节的衰减已为系统的放大器所补偿，则其传递函数

$$G_c(s) = \frac{Ts + 1}{aTs + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/aT} = \frac{1}{a} \cdot \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

$$\text{式中 } z_c = -\frac{1}{T}, p_c = -\frac{1}{aT}, 0 < a < 1$$

校正步骤:

- 1) 按照给定性能指标的要求，确定闭环主导极点 s_1 、 s_2 在[S]平面上位置。
- 2) 再根据根轨迹方程的相角条件，求取超前相角。
- 3) 合理配置校正零点 z_c 的位置，最后由幅值条件确定 α 、 p_c 的值。

例题 设单位负反馈系统不可变部分的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K^*}{s(s+5)(s+20)}$$

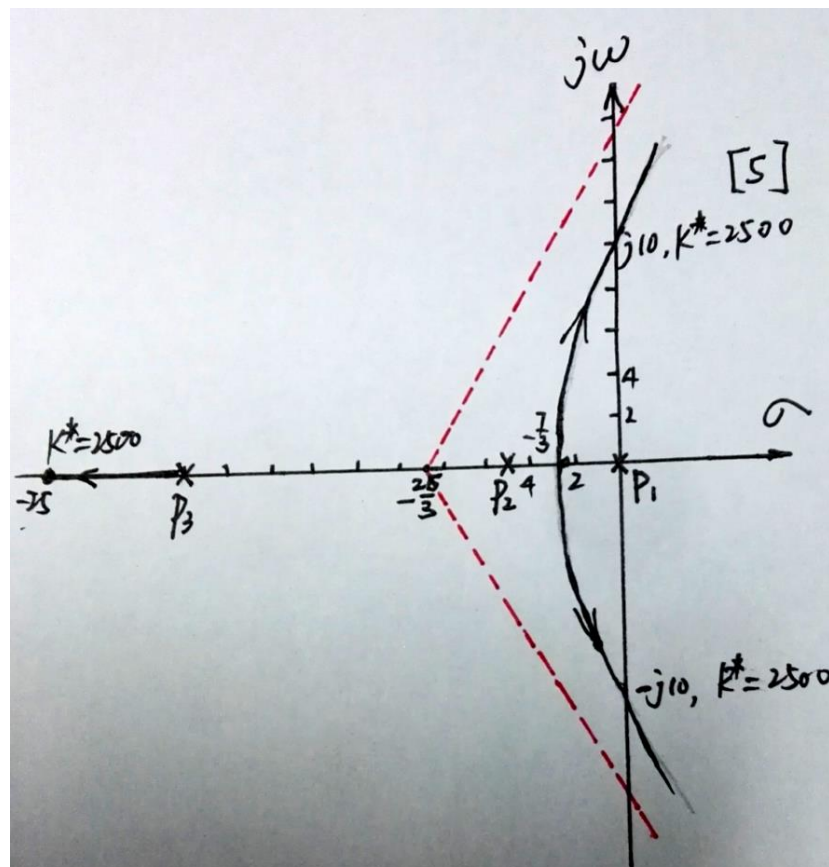
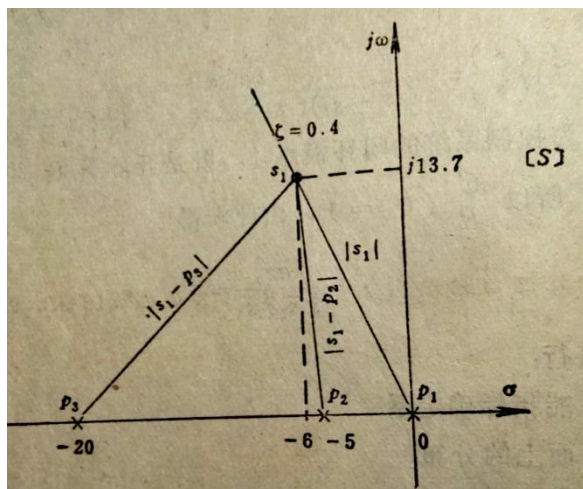
要求过渡过程时间 $t_s \leq 0.7$ 秒（稳态误差2%时），超调量 $M_p \leq 25\%$ ；
开环放大系数 $K_v \geq 12$ 秒⁻¹。试用根轨迹法设计串联超前校正元件。

解 (1) 系统校正前 $G_0(s)$ 的根轨迹图如下：

由给定性能指标要求可知

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 25\%, \xi = 0.4$$

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.7, \omega_n \approx 15 \text{ rad/s}$$



根据 ξ 、 ω_n 确定系统的闭环主导极点 s_1 、 s_2 在[S]平面上的位置为：

$$s_{1,2} = -6 \pm j13.7$$

(2) 因此要求串联超前校正补偿的超前相角 ϕ 为

$$\begin{aligned}\phi &= -180^\circ - \angle G_0(s) = -180^\circ + \angle(s_1 - p_1) + \angle(s_1 - p_2) + \angle(s_1 - p_3) \\ &= -180^\circ + 113.5^\circ + 94.2^\circ + 45^\circ = 72.7^\circ\end{aligned}$$

(3) 设校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{1}{a} \frac{s - z_c}{s - p_c} \cdot \frac{K^*}{s(s+5)(s+20)}$$

$$\text{式中 } z_c = -\frac{1}{T}, p_c = -\frac{1}{aT}, \frac{1}{a} = \frac{|p_c|}{|z_c|} (0 < a < 1)$$

当 $K_v=12\text{秒}^{-1}$ 时，可得

$$K^* = K_v \times \frac{5 \times 20}{1} = 1200$$

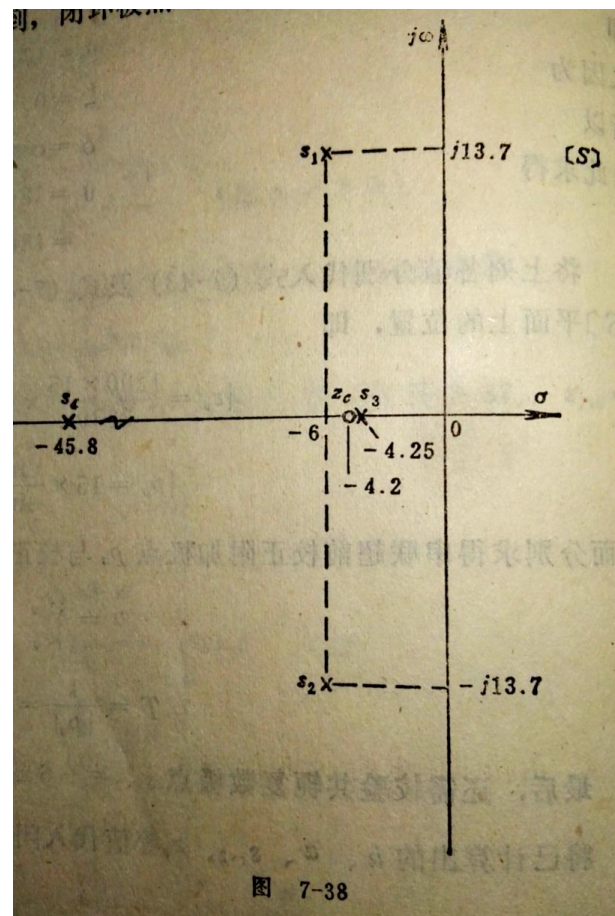
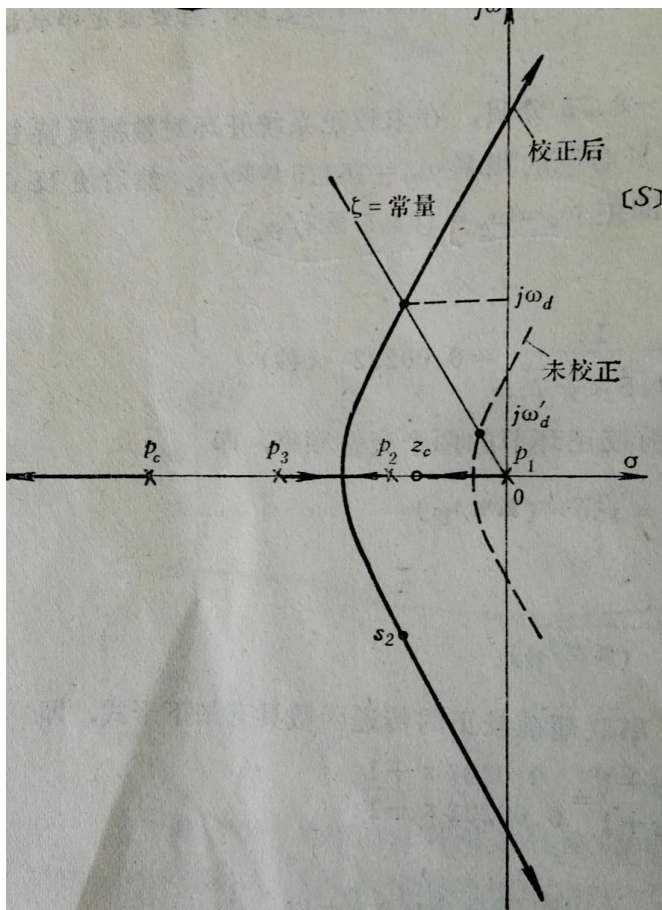
$$\text{要求 } K_{New}^* = \frac{|s_1 - p_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdot |s_1 - p_3|}{1}$$

$$= |s_1 - 0| \cdot |s_1 - (-5)| \cdot |s_1 - (-20)| \approx 4000$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a} \frac{|s_1 - z_c|}{|s_1 - p_c|} = \frac{K_{New}^*}{K^*} \approx 3.33 \end{aligned} \right\}$$

(4) 校正零点的配置

配置原则： 将校正零点 z_c 配置于开环极点 p_2 与 p_1 的之间，且紧挨着 p_2 ，校正极点 p_c 置于远离虚轴的位置上。这样，对系统控制性能起主导作用的将是距虚轴最近的一对共轭复数极点 s_1 、 s_2 。



[S]

- ①取 $z_c=-4.5$, 则 $\alpha=0.12$, $p_c=-37$;
- ②取 $z_c=-3$, 则 $\alpha=0.28$, $p_c=-10.7$ (舍弃)
- ③取 $z_c=-2.5$, 则 $\alpha=0.3$, $p_c=-8.3$ (舍弃)

$$\therefore G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{s - z_c}{s - p_c} = \frac{8.2(s + 4.5)}{(s + 37)} = \frac{0.22s + 1}{0.026s + 1}$$

另外两个闭环极点 s_3 、 s_4 在 $[S]$ 平面上的位置

$$s_3 = -4.37, \quad s_4 = -45.6$$

不难看出：闭环极点 s_3 可以近似认为被闭环零点 z_c 所补偿，闭环极点 s_4 距离虚轴甚远，所以共轭复数极点 s_1 、 s_2 是闭环主导极点。

开环零点配置技巧：

在一般情况下，通常将超前校正零点 z_c 配置在距虚轴最近的开环极点附近，但不完全补偿。不过，二者如果完全补偿，可以发现其校正效果与不完全补偿时的基本相同。因此，进行串联超前校正时，超前零点 z_c 并非一定必须完全补偿距虚轴最近的第一个开环负实数极点。

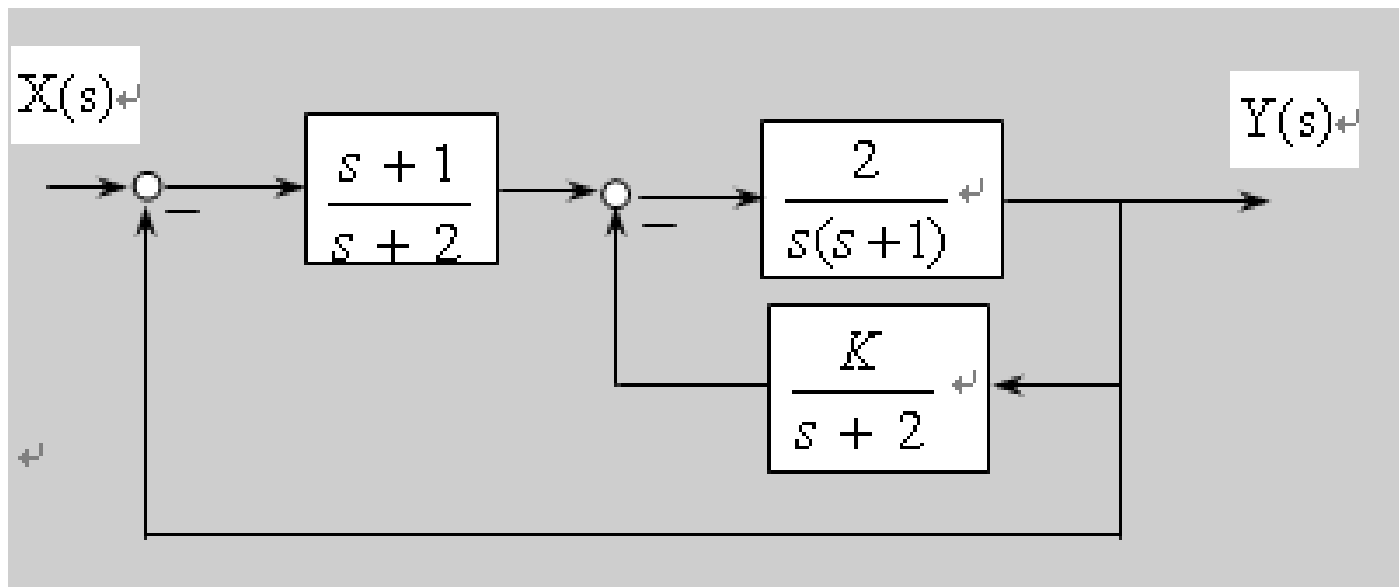
一般来说，如果第二个开环负实数极点距离虚轴的距离与第一个开环负实数极点距虚轴的距离相比较，大得很多时，则只要把校正零点 z_c 配置在靠近第一个开环负实数极点附近，便可得到较好的校正效果。

小 结

- ❖ 根轨迹的概念
- ❖ 根轨迹方程，相角条件，幅值条件
- ❖ 绘制根轨迹的法则、过程
- ❖ 零极点分布与动态性能，偶极子

第八章习题

1. 系统结构如图所示，画出根轨迹图（写出详细步骤），求出系统稳定的K值范围。



2. $G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_s s)}{s(s+2)}$ ，绘制以 Ks 为参量的根轨迹图（必须列出详细步骤）。

第1题答案

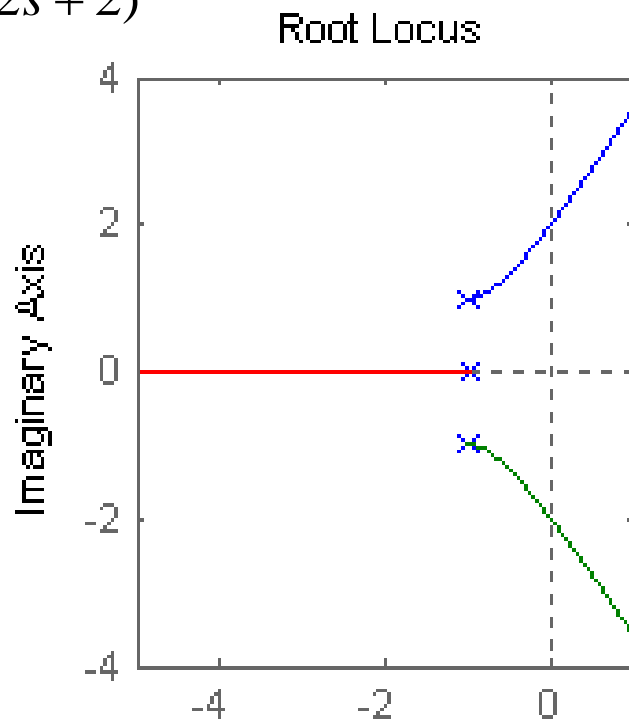
系统的开环传递函数为：
$$G(s)H(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2 + 3s + 2) + 2K}$$

等效开环传递函数：
$$G^*(s) = \frac{2K}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

由此可画出系统的根轨迹图。

开环极点： -1 ， $-1+j$ ， $-1-j$ ；无零点；

- (1) 实轴上根轨迹 $(-\infty, -1]$
 - (2) 趋向无穷远处根轨迹数为： $3-0=3$ ，渐近线角度： $\pm 60^\circ$ ； -180°
 - (3) 根轨迹与虚轴的交点为： $w = -2j$ ， $+2j$ ； $K=5$
 - (4) 从根轨迹图可见，使系统稳定的 K 值范围为： $K>0$ 。
- 根轨迹图如右图所示。



第2题答案

特征方程 $1+G(s)H(s) = 0$

得 $s^2 + 2s + 10 + 10K_s s = 0$

等效开环传递函数 $G^*(s) = \frac{10K_s s}{s^2 + 2s + 10} = \frac{K_s^* s}{s^2 + 2s + 10}$

(1) 开环零点：0； 开环极点： $-1 \pm j3$

(2) 趋向无穷远处根轨迹数为： $2-1=1$ ，渐近线角度 180°

(3) 部分根轨迹是以开环零点为圆心，开环零点到开环极点 ($-1 \pm j3$) 距离为半径的圆弧。根轨迹与实轴的交点 d 满足：

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j}, \text{得 } d = \sqrt{10}$$

(4) 出射角 $\phi_{p1} = 180^\circ + (\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + 90^\circ) - 90^\circ = 198.43^\circ = -161.57^\circ$

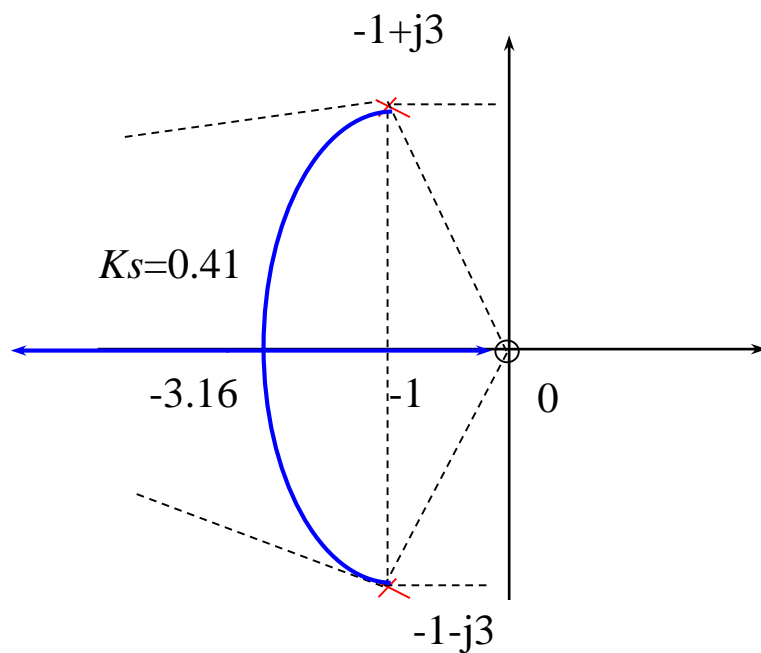
$$\phi_{p2} = 180^\circ + (\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}) - 90^\circ = 161.57^\circ$$

(5) 实轴交点处的 K_s^* :

$$K_s^* = 10K_s = \frac{\sqrt{3^2 + (3-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (3-1)^2}}{\sqrt{10}} = 4.11 \text{ (幅值定理)}$$

故: $K_s=0.41$

综上, 得根轨迹草图如右



课后习题

❖ **MatLab: 3, 6**

❖ **4, 6, 7 (选做)**