材料力学

第七章

应力和应变分析 强度理论

李德昌
Email: dcli@zju.edu.cn
西溪校区教学主楼553

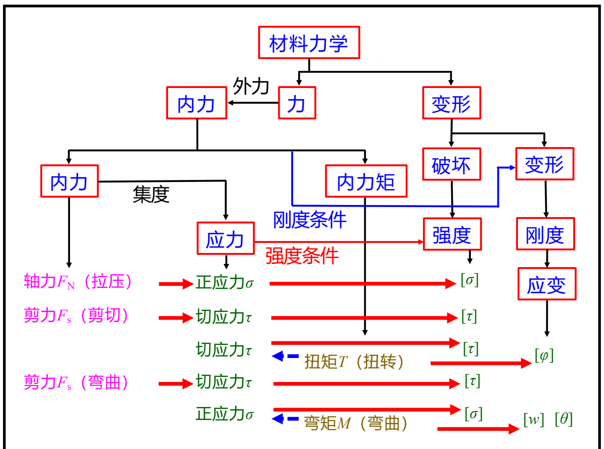
1

材料力学

基本变形复习

李德昌
Email: dcli@zju.edu.cn
西溪校区教学主楼553

2



3

	拉压	扭转	弯曲
内力	轴力F_N	扭矩T	剪力F_s 弯矩M
内力图	轴力图	扭矩图	剪力图 弯矩图
应力类型	正应力	切应力	正应力 切应力
载荷-应力	$\sigma=F_N/A$	$\tau=T\rho/I_p$	$\sigma=My/I_z$ $\tau=F_sS^*_z/bI_z$
应力-应变	$\sigma=E\varepsilon$	$\tau=G\gamma$	
载荷-变形	$\Delta l=Fl/EA$	$\varphi=Tl/GI_p$	$w''=M/EI_z$ $\theta=w'$

4

课程体系的补充说明

第2章 拉伸、压缩与剪切
↓
第3章 扭转
↓
第4章 弯曲内力
↓
第5章 弯曲应力
↓
第6章 弯曲变形
↓
第7章 应力和应变分析、强度理论
↓
第8章 组合变形

15

第七章

应力和应变分析 强度理论

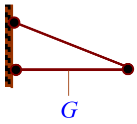
18

第七章 应力和应变分析 强度理论

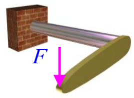
19

§7.1 应力状态概述

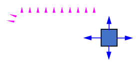
1、工程实际问题



弯+压



弯+扭



双向拉伸

一般情况下，一点处的某一平面上的应力既有正应力又有切应力。

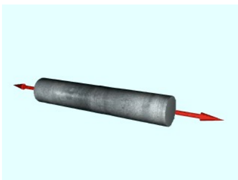
如何处理?

20

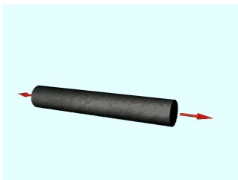
§7.1 应力状态概述

1、工程实际问题

低碳钢与铸铁的拉伸



低碳钢



铸铁

塑性材料拉伸时为什么会出现滑移线?

21

§7.1 应力状态概述

1、工程实际问题

低碳钢与铸铁的扭转

低碳钢

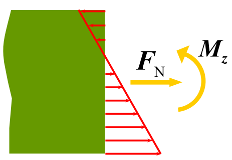
铸铁

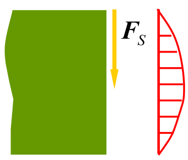
为什么脆性材料扭转时沿着45°螺旋面断开?

22

§7.1 应力状态概述

2、应力的点和面





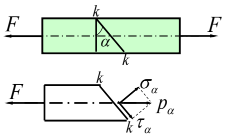
横截面上正应力和切应力分析的结果表明：同一面上不同点的应力各不相同，此即应力的点的概念。

23

§7.1 应力状态概述

2、应力的点和面

直杆拉伸



$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

直杆拉伸应力分析结果表明：即使同一点不同方向面上的应力也是各不相同的，此即应力的面的概念。

24

§7.1 应力状态概述

2、应力的点和面

- 拉中有剪，剪中有拉；
- 不仅横截面上存在应力，斜截面上也存在应力；
- 同一面上不同点的应力各不相同；
- 同一点不同方向面上的应力也是各不相同。

应力

哪一个面上？哪一点？

哪一点？哪个方向面？

25

§7.1 应力状态概述

3、应力状态

过一点不同方向面上应力的情况，称之为这一点的应力状态，亦指该点的应力全貌。

4、学习应力状态的目的

各截面上的应力如何计算？ ➡ 应力状态理论

强度条件怎么提？ ➡ 强度理论

26

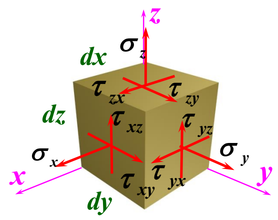
§7.1 应力状态概述

5、应力状态的研究方法

(1) 单元体

无穷小正六面体， dx， $dy, dz \rightarrow 0$

一般情况六面体各面上皆有应力分量（正应力，切应力）



27

§7.1 应力状态概述

5、应力状态的研究方法

(2) 单元体的应力特征

- 单元体的尺寸无限小，每个面上应力均匀分布
- 任意一对平行平面上的应力相等

一点可以用无穷个微元表示，找出之间应力的关系，称为应力状态分析。

(3) 主单元体：各侧面上切应力均为零的单元体

(4) 主平面：切应力为零的截面

(5) 主应力：主平面上的正应力

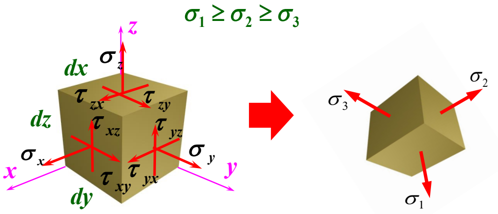
28

§7.1 应力状态概述

5、应力状态的研究方法

一点处必定存在这样的一个主应力单元体， 其中三个相互垂直的面均为主平面，三个互相垂直的主应力分别记为σ_1、σ_2、σ_3且规定按代数值大小的顺序来排列，即

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



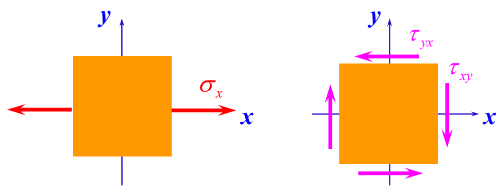
主应力单元体

29

§7.1 应力状态概述

6、应力状态的分类

两种简单的应力状态



单向应力状态　　纯剪应力状态

30

§7.1 应力状态概述

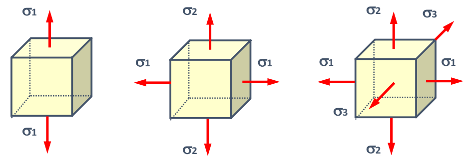
6、应力状态的分类

(1) 单向应力状态：三个主应力中只有一个不为零

(2) 平面应力状态：三个主应力中有两个不为零

(3) 空间应力状态：三个主应力都不等于零

平面应力状态和空间应力状态统称为复杂应力状态。

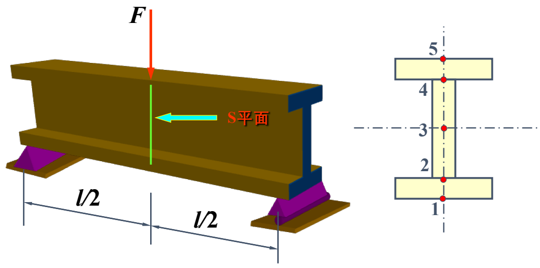


31

§7.2 二向和三向应力状态的实例

例题7.1

画出如图所示梁S截面的应力状态单元体。

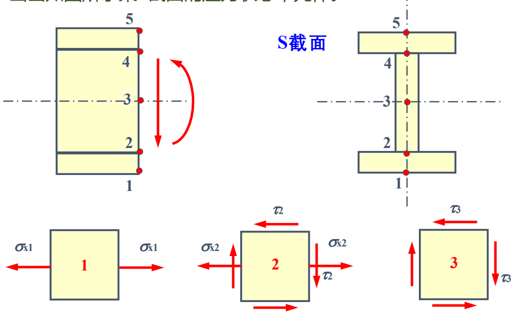


32

§7.2 二向和三向应力状态的实例

例题7.1

画出如图所示梁S截面的应力状态单元体。

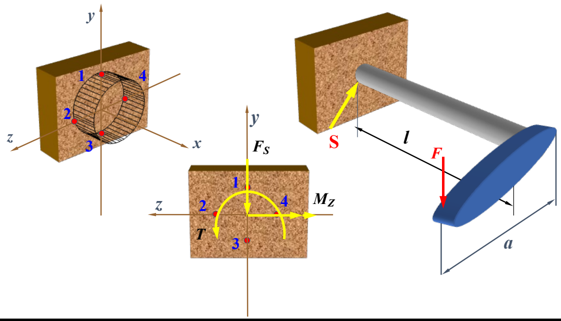


33

§7.2 二向和三向应力状态的实例

例题7.2

画出如图所示梁危险截面危险点的应力状态单元体。

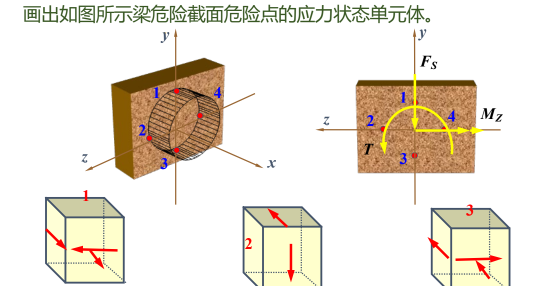


34

§7.2 二向和三向应力状态的实例

例题7.2

画出如图所示梁危险截面危险点的应力状态单元体。



$\tau_1 = \frac{T}{W_t}$ $\sigma_{x1} = \frac{M_z}{W_z}$ $\tau_2 = \frac{T}{W_t} + \frac{4F_S}{3A}$ $\sigma_{x3} = \frac{M_z}{W_z}$ $\tau_3 = \frac{T}{W_t}$

35

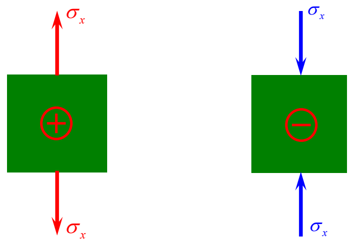
第七章 应力和应变分析 强度理论

36

§7.3 二向应力状态分析——解析法

1、应力状态的回顾

正应力正负号规定：拉为正, 压为负



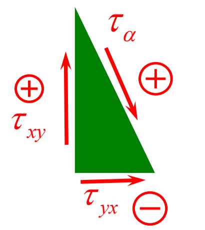
37

§7.3 二向应力状态分析——解析法

1、应力状态的回顾

切应力正负号规定：

使微元顺时针转动为正，反之为负。



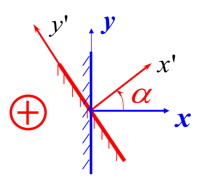
38

§7.3 二向应力状态分析——解析法

1、应力状态的回顾

α角正负号规定：

由x轴逆时针转到x'轴（斜截面外法线）为正，反之为负

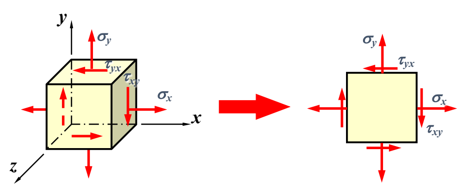


39

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

单元体上有σ_x，τ_{xy}和σ_y，τ_{yx}



40

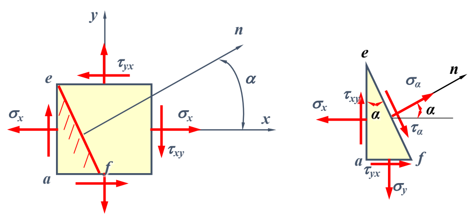
§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(1) 截面法

假想地沿斜截面ef将单元体截开，留下左边部分的单体元eaf作为研究对象

(2) 确定各应力及角度的符号

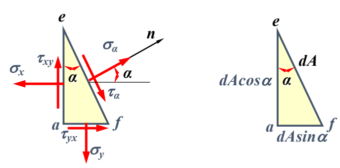


41

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(3) 任意斜截面的应力



设斜截面的面积为dA, ae的面积为$dA\cos\alpha$，af的面积为$dA\sin\alpha$。对研究对象列n和t方向的平衡方程得

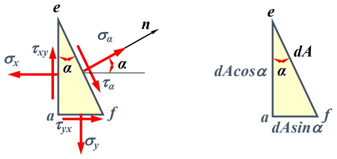
$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha dA + (\tau_{xy} dA\cos\alpha)\sin\alpha - (\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha + (\tau_{yx} dA\sin\alpha)\cos\alpha - (\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

42

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(3) 任意斜截面的应力



设斜截面的面积为dA, ae的面积为$dA\cos\alpha$，af的面积为$dA\sin\alpha$。对研究对象列n和t方向的平衡方程得

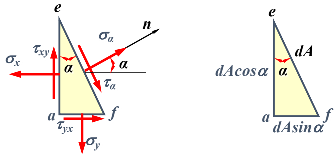
$$\sum F_t=0 \Rightarrow \tau_\alpha dA-(\tau_{xy}dA\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha+(\tau_{yx}dA\sin\alpha)\sin\alpha+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

43

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(3) 任意斜截面的应力



$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad \tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

不难看出 $\sigma_\alpha+\sigma_{\alpha+90^\circ}=\sigma_x+\sigma_y$ $\qquad \tau_\alpha+\tau_{\alpha+90^\circ}=0$

即两相互垂直面上的正应力之和保持一个常数

44

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(4) 斜截面的最大正应力及方位

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

最大正应力的方位

令 $\dfrac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=-2[\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha]=0$

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_0\\ \alpha_0+90^\circ\end{cases}$$

α_0和α_0+90°确定两个互相垂直的平面，一个是最大正应力所在的平面，另一个是最小正应力所在的平面。

45

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(4) 斜截面的最大正应力及方位

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

最大正应力

将α_0和α_0+90°代入公式

得到σ_{max}和σ_{min}（主应力）

$$\begin{cases}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{cases}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

下面还必须进一步判断α_0是σ_x与哪一个主应力间的夹角

46

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(4) 斜截面的最大正应力及方位

约定$|\alpha_0|<45^\circ$，即α_0取值在$\pm45^\circ$范围内，确定主应力方向的具体规则如下:

- 当$\sigma_x>\sigma_y$时，α_0是σ_x与σ_{max}之间的夹角；
- 当$\sigma_x<\sigma_y$时，α_0是σ_x与σ_{min}之间的夹角；
- 当$\sigma_x=\sigma_y$时，$\alpha_0=45^\circ$，主应力的方向可由单元体上切应力情况直观判断出来

47

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(5) 斜截面的最大切应力及方位

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

注意：正应力最大时

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \Rightarrow \tau_{\alpha 0}=0$$

α_0和α_0+90°所确定的正应力所在的两个互相垂直的平面，切应力为0，符合主应力的定义。

48

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(5) 斜截面的最大切应力及方位

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

最大切应力的方位

令 $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha] = 0$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ\end{cases}$$

α_1和$\alpha_1+90°$确定两个互相垂直的平面，一个是最大切应力所在的平面，另一个是最小切应力所在的平面。

49

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、二向应力状态的普遍形式

(5) 斜截面的最大切应力及方位

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

最大切应力

将α_1和$\alpha_1+90°$代入公式

得到τ_{max}和τ_{min} $\begin{cases}\tau_{max} \\ \tau_{min}\end{cases} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$

比较 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ 和 $\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

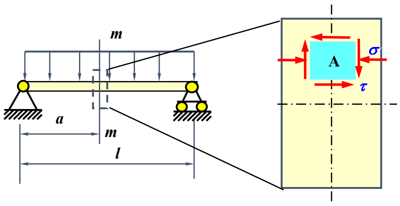
可见 $\tan 2\alpha_0 = -\frac{1}{\tan 2\alpha_1}$ $\quad 2\alpha_1 = 2\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, $\boxed{\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{4}}$

50

§7.3 二向应力状态分析——解析法

例题7.3

简支梁如图所示。已知m-m截面上A点的弯曲正应力和切应力分别为$\sigma = -70$ MPa，$\tau = 50$ MPa。确定A点的主应力及主平面的方位。



51

§7.3 二向应力状态分析——解析法

例题7.3

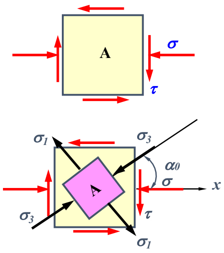
简支梁如图所示。已知m-m截面上A点的弯曲正应力和切应力分别为$\sigma = -70$ MPa，$\tau = 50$ MPa。确定A点的主应力及主平面的方位。

解：把从A点处截取的单元体放大如图

$\sigma_x = -70, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 50$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\times 50}{(-70)-0} = 1.429$$

$\alpha_0 = 27.5^\circ$ 或-62.5°



52

§7.3 二向应力状态分析——解析法

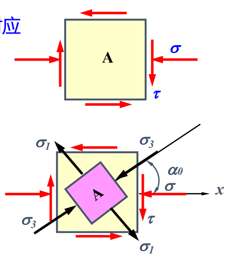
例题7.3

简支梁如图所示。已知m-m截面上A点的弯曲正应力和切应力分别为$\sigma = -70$ MPa，$\tau = 50$ MPa。确定A点的主应力及主平面的方位。

解：因为$\sigma_x<\sigma_y$，所以α_0=27.5°与σ_{min}对应

$$\begin{cases}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases}26 \text{ MPa} \\ -96 \text{ MPa}\end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_1 = 26$ MPa, $\quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96$ MPa

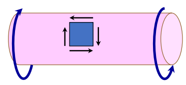


53

§7.3 二向应力状态分析——解析法

2、平面纯剪切状态

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \to -\infty$$

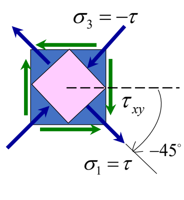


$\alpha_0 = -45^\circ$ 或 -135°

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{Bmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\sigma_{max} = \sigma_1 = \tau_{xy}$

$\sigma_{min} = \sigma_3 = -\tau_{xy}$



此现象称为纯剪切

54

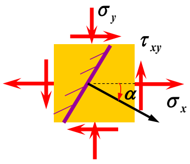
§7.3 二向应力状态分析——解析法

例题7.4

一点处的平面应力状态如图所示。已知 $\sigma_x=60\text{MPa}$, $\tau_{xy}=-30\text{MPa}$, $\sigma_y=-40\text{MPa}$, $\alpha=-30^\circ$时

试求：（1）α 斜面上的应力；（2）主应力、主平面；（3）绘出主应力单元体。

解：（1）α斜面上的应力



$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_{xy}\sin2\alpha$$
$$=\frac{60-40}{2}+\frac{60+40}{2}\cos(-60^\circ)+30\sin(-60^\circ)$$
$$=9.02\text{MPa}$$
$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_{xy}\cos2\alpha$$
$$=\frac{60+40}{2}\sin(-60^\circ)-30\cos(-60^\circ)=-58.3\ \text{MPa}$$

55

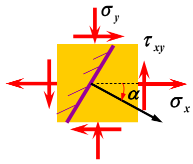
§7.3 二向应力状态分析——解析法

例题7.4

一点处的平面应力状态如图所示。已知 $\sigma_x=60\text{MPa}$, $\tau_{xy}=-30\text{MPa}$, $\sigma_y=-40\text{MPa}$, $\alpha=-30^\circ$时

试求：（1）α 斜面上的应力；（2）主应力、主平面；（3）绘出主应力单元体。

解：（2）主应力、主平面



$$\sigma_{\max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$
$$=68.3\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$
$$=-48.3\ \text{MPa}$$
$$\sigma_1=68.3\ \text{MPa},\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=-48.3\ \text{MPa}$$

56

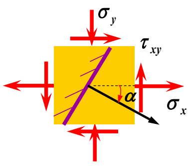
§7.3 二向应力状态分析——解析法

例题7.4

一点处的平面应力状态如图所示。已知 $\sigma_x=60\text{MPa}$, $\tau_{xy}=-30\text{MPa}$, $\sigma_y=-40\text{MPa}$, $\alpha=-30^\circ$时

试求：（1）α 斜面上的应力；（2）主应力、主平面；（3）绘出主应力单元体。

解：（3）主平面的方位



$$\tan2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=-\frac{-60}{60+40}=0.6$$
$$\alpha_0=15.5^\circ,\quad \alpha_0=15.5^\circ+90^\circ=105.5^\circ$$

主应力σ_1方向: $\alpha_0=15.5^\circ$

主应力σ_3方向: $\alpha_0=105.5^\circ$

57

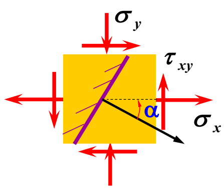
§7.3 二向应力状态分析——解析法

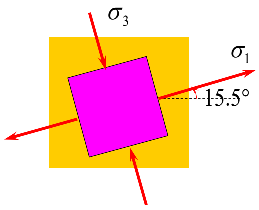
例题7.4

一点处的平面应力状态如图所示。已知 $\sigma_x=60\text{MPa}$, $\tau_{xy}=-30\text{MPa}$, $\sigma_y=-40\text{MPa}$, $\alpha=-30^\circ$时

试求：（1）α 斜面上的应力；（2）主应力、主平面；（3）绘出主应力单元体。

解：（4）主应力单元体





58

作业：7.2

59