浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第五讲 2022.3.25

机械系统动力学

Dynamics of Mechanical Systems

陈远流

Email: yuanliuchen@zju.edu.cn

Phone: 13486183967

浙江大学机械工程学院

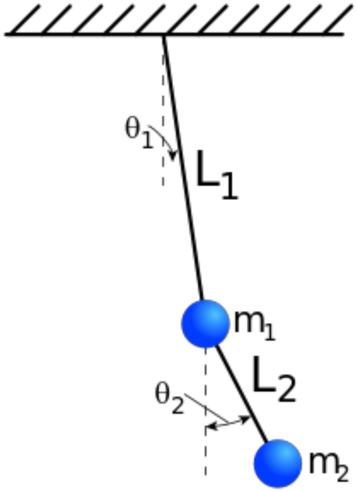
本讲内容

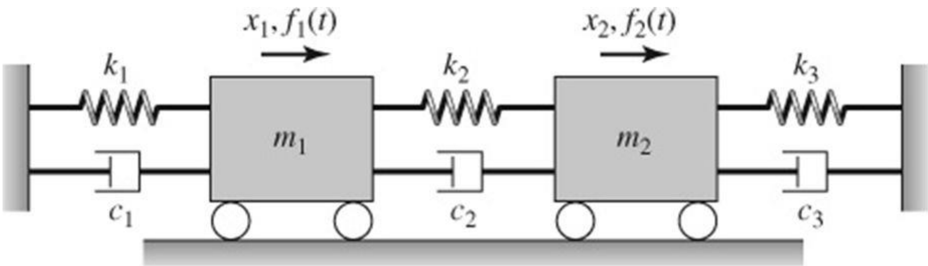
第4章内容回顾

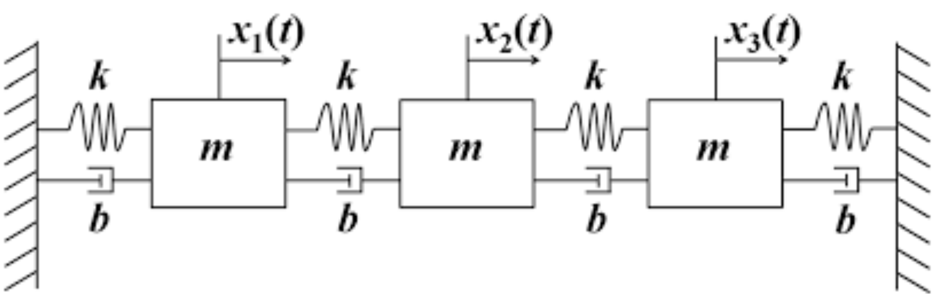
第5章　多自由度系统的振动

多自由度系统的振动

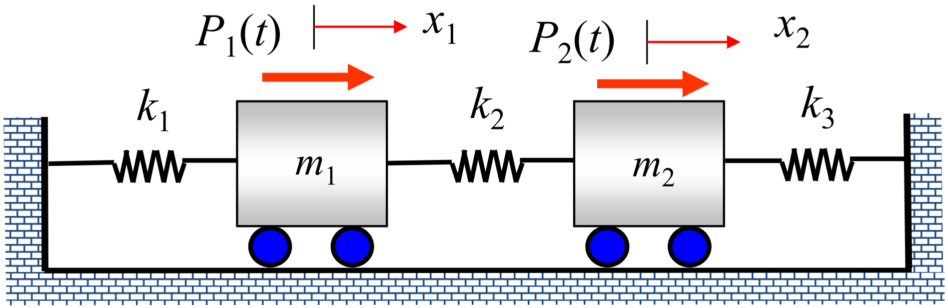
当系统的自由度数为*N*时，系统需要且仅需要有*N*个坐标来定义，这*N*个坐标称之为广义坐标







运动微分方程



建立方程：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = P_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) + k_3x_2 = P_2(t) \end{cases}$$

力量纲

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

坐标间的耦合项

运动微分方程

例1：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

例2：

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{\theta 1}+k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} \\ -k_{\theta 2} & k_{\theta 2}+k_{\theta 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}$$

可统一表示为： $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}(t)$ **作用力方程**

$\boldsymbol{M}$：质量矩阵

$\ddot{\boldsymbol{X}}$：加速度向量

$\boldsymbol{K}$：刚度矩阵

$\boldsymbol{X}$：位移向量

$\boldsymbol{P}(t)$：激励力向量

若系统有 n 个自由度，则各项皆为 n 维矩阵或列向量

刚度矩阵和质量矩阵

n 个自由度系统:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}(t)$$

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T\in R^n$$ 广义坐标列向量

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11}\ldots m_{1j}\ldots m_{1n} \\ m_{21}\ldots m_{2j}\ldots m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\ldots m_{nj}\ldots m_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11}\ldots k_{1j}\ldots k_{1n} \\ k_{21}\ldots k_{2j}\ldots k_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}\ldots k_{nj}\ldots k_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

质量矩阵第 j 列　　　刚度矩阵第 j 列

刚度矩阵和质量矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11}\dots k_{1j}\dots k_{1n} \\ k_{21}\dots k_{2j}\dots k_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{n1}\dots k_{nj}\dots k_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{bmatrix}$$

结论：刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

第j个坐标产生单位位移 $\xrightarrow{\text{确定}}$ **刚度矩阵第j列** $\xrightarrow{j=1\sim n}$ **系统刚度矩阵**

刚度矩阵和质量矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11}\cdots m_{1j}\cdots m_{1n}\\m_{21}\cdots m_{2j}\cdots m_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\m_{n1}\cdots m_{nj}\cdots m_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{1j}\\m_{2j}\\\vdots\\m_{nj}\end{bmatrix}$$

这组外力正是质量矩阵 M 的第 j 列

结论：质量矩阵 M 中的元素 m_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

第 j 个坐标单位加速度 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 质量矩阵第 j 列 $\xrightarrow{j=1\sim n}$ 系统质量矩阵

对于特定系统，刚度矩阵和质量矩阵具有唯一性

证明：对于某一振动系统，选择坐标系X后，存在质量矩阵M和刚度矩阵K，使得

$$M\ddot{X} + KX = P(t) \tag{1}$$

假设存在另一质量矩阵M_1和刚度矩阵K_1，使得

$$M_1\ddot{X} + K_1X = P(t) \tag{2}$$

并且$T_1 * K = K_1, T_1 \neq I, T_2 * M = M_1, T_2 \neq I.$
对于初始状态$X = [0 \dots 0]^T$,此时有

$$M\ddot{X}_1 = P(0) \tag{3}$$

$$M_1\ddot{X}_2 = P(0) \tag{4}$$

对于某一恒定振动系统，若输入条件相同，则系统状态相同$\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2$。所以式（4）

$$T_2M\ddot{X}_1 = P(0) \tag{5}$$

$$\Rightarrow T_2P(0) = P(0) \tag{6}$$

$$\Rightarrow (T_2 - \mathrm{I})\mathrm{P}(0) = 0 \tag{7}$$

对于任意初始输入P(0)均成立，故$T_2 - \mathrm{I} \equiv 0 \Longrightarrow T_2 = I$,与假设条件不符，所以假设不成立，即不存在另一质量矩阵M_1。
同理,可证不存在另一刚度矩阵K_1。

刚度矩阵和质量矩阵

刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

质量矩阵 M 中的元素 m_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

m_{ij}、k_{ij} 又分别称为**质量影响系数**和**刚度影响系数**。根据它们的物理意义可以直接写出系统质量矩阵 M 和刚度矩阵 K，从而建立作用力方程，这种方法称为**影响系数方法**

耦合与坐标变化

矩阵中非零的非对角元元素称为耦合项

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

质量矩阵中出现耦合项称为惯性耦合

刚度矩阵或柔度矩阵中出现耦合项称为弹性耦合

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

以两自由度系统为例

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

存在惯性耦合

$$\mathbf{M}'=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}$$

不存在惯性耦合

耦合与坐标变化

耦合 $M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$　　非耦合 $\mathbf{M}'=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}$

如果系统仅在第一个坐标上产生加速度　$\ddot{x}_1 \neq 0,\ \ddot{x}_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11}\ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11}\ddot{x}_1 \\ m_{21}\ddot{x}_1 \end{bmatrix}$$

不出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度只在该坐标上引起惯性力

出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度还会在别的坐标上引起惯性力

同理，不出现弹性耦合时，一个坐标上产生的位移只在该坐标上引起弹性恢复力；而出现弹性耦合时，一个坐标上产生的位移还会在别的坐标上引起弹性恢复力

耦合的表现形式取决于坐标的选择

耦合与坐标变化

问：能否找到这样一种坐标使得系统的运动微分方程既不出现惯性耦合，也不出现弹性耦合？

即：

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

若能够，则有：

$$m_{11}\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 = P_1 \qquad m_{22}\ddot{x}_2 + k_{22}x_2 = P_2$$

方程解耦，变成了两个单自由度问题

使系统运动微分方程的全部耦合项全部解耦的坐标称为主坐标

耦合与坐标变化

假设对同一个系统所选择的两种不同的坐标X和Y有如下的变换关系：

$$X = TY$$

其中T是非奇异矩阵，如果在坐标X下系统的运动微分方程为：

$$M\ddot{X} + KX = P$$

那么在坐标Y下的运动微分方程为：

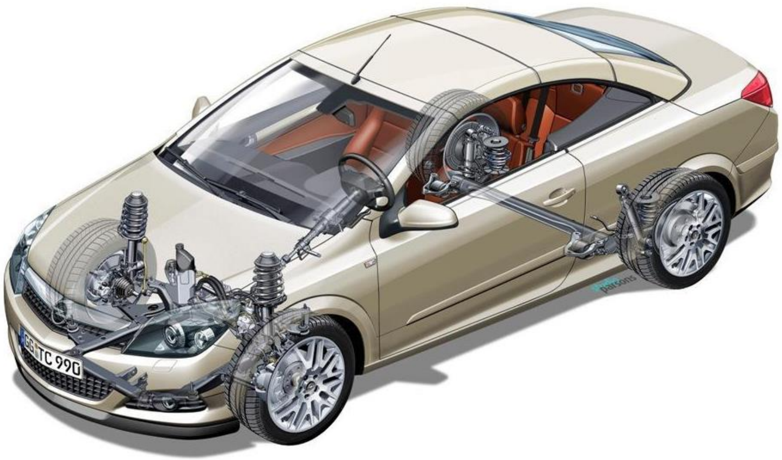
$$T^T M T \ddot{Y} + T^T K T Y = T^T P$$

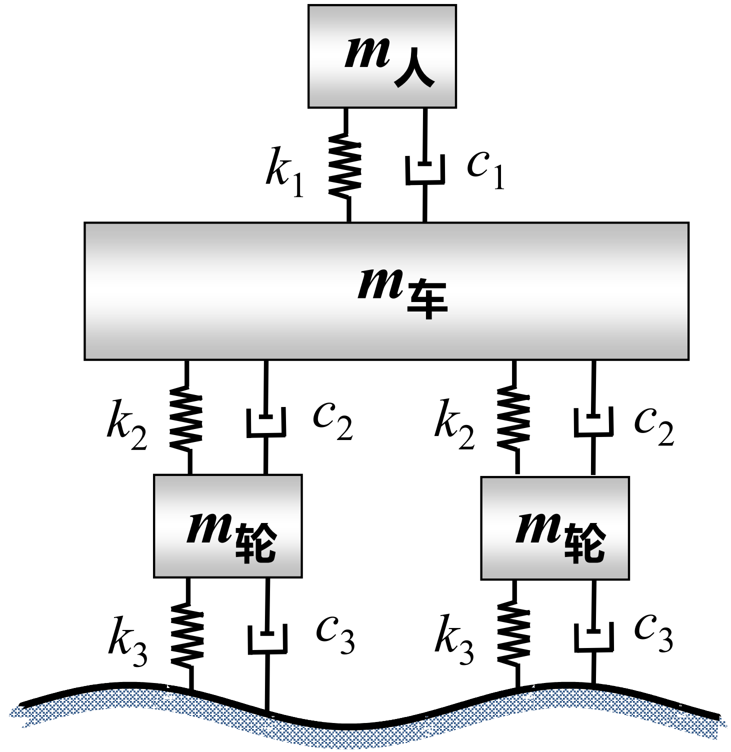
如果恰巧Y是主坐标： $T^T M T$ $T^T K T$ 对角阵

第5章 多自由度系统的自由振动

- 固有频率
- 模态
- 模态的正交性
- 主质量和主刚度
- 模态叠加法
- 模态截断法

多自由度系统的振动

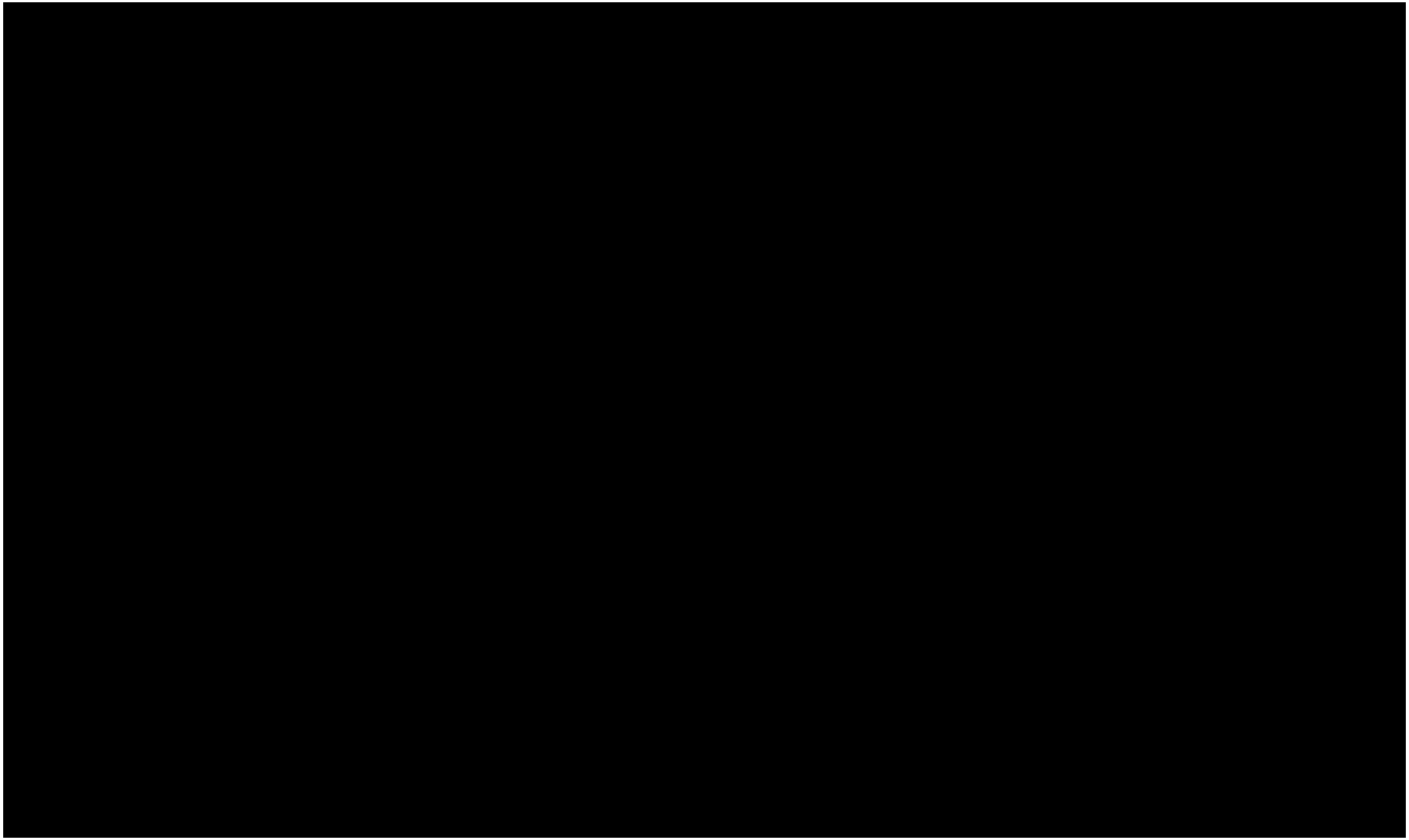




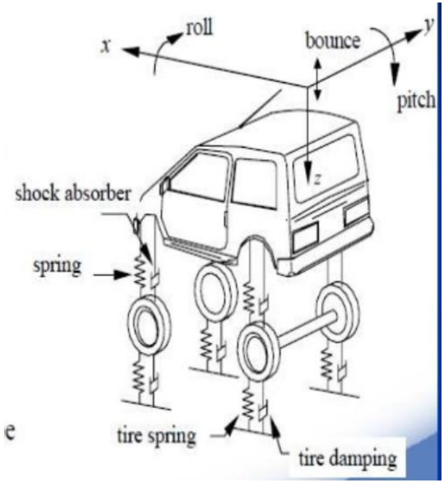
车、人、车轮的质量分别考虑，并考虑各自的弹性和阻尼

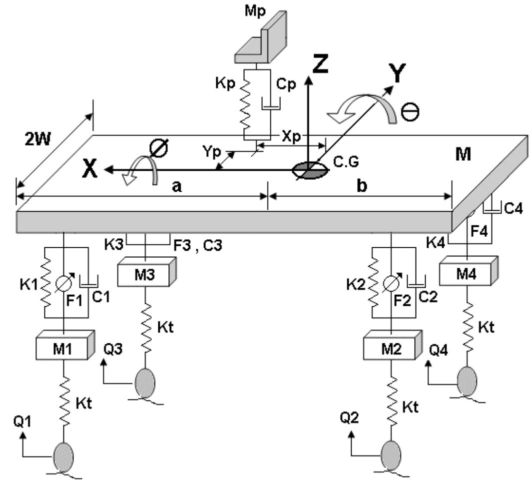
优点：分别考虑了人与车、车与车轮、车轮与地面之间的相互耦合，模型较为精确

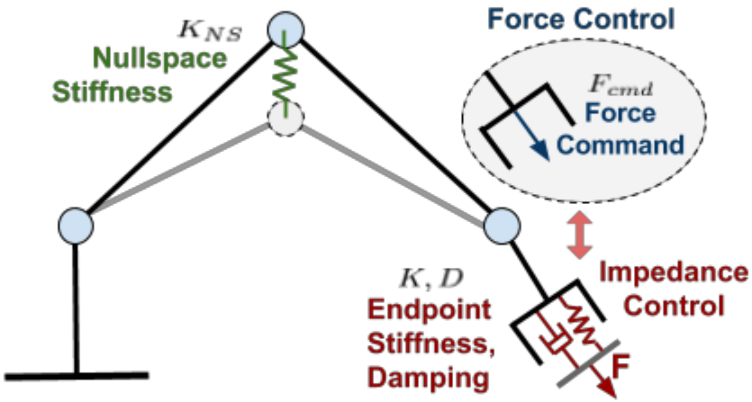
汽车振动多自由度试验平台



多自由度运动系统各个自由度之间相互耦合、如何求解与分析？







5.1 多自由度系统的自由振动

细绳（连续体、无穷多个自由度）的振动的形式

5.1 多自由度系统的自由振动

作用力方程： $M\ddot{X}+KX=P(\cancel{t})$ $X\in R^n$

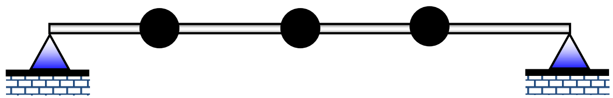
固有振动方程：（自由振动方程） $M\ddot{X}+KX=0$

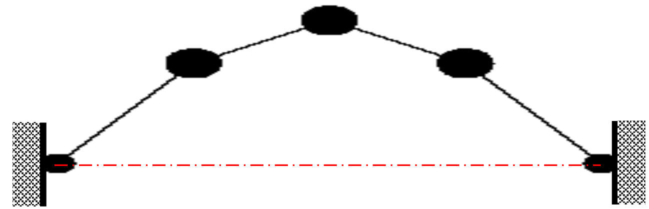
和单自由度系统一样，自由振动时系统将以固有频率为振动频率

在考虑系统的固有振动时，最感兴趣的是系统的同步振动，即系统在各个坐标上除了运动幅值不相同外，随时间变化的规律都相同的运动

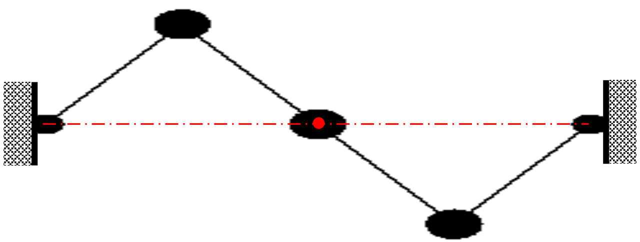
5.1 多自由度系统的自由振动

三自由度系统

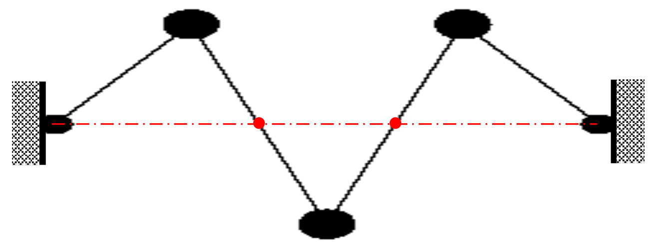




振动形式1



振动形式2



振动形式3

同步振动：系统在各个坐标上除了运动幅值不相同外，随时间变化的规律都相同的运动

5.1 多自由度系统的自由振动

作用力方程： $M\ddot{X}+KX=\cancel{P}(t)$ $X\in R^n$

固有振动方程：（自由振动方程） $M\ddot{X}+KX=\boldsymbol{0}$

和单自由度系统一样，自由振动时系统将以固有频率为振动频率

同步振动：系统在各个坐标上除了运动幅值不相同外，随时间变化的规律都相同的运动

运动规律的时间函数

$$X=\underline{\boldsymbol{\phi}}\ \underline{f(t)}$$

$f(t)\in R^1$

常数列向量 代表着振动的形状

$$\boldsymbol{X}=[x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n]^T$$

$$\boldsymbol{\phi}=[\phi_1\quad \phi_2\quad \cdots\quad \phi_n]^T$$

5.1 多自由度系统的自由振动

$\underline{M\ddot{X}+KX=0}$ $\quad$ $\underline{X=\phi f(t)}$ $\quad$ $X\in R^n$ $\quad$ $\phi\in R^n$

代入，并左乘 ϕ^T ： $\quad \phi^T M\phi\ddot{f}(t)+\phi^T K\phi f(t)=0$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=\boxed{\frac{\phi^T K\phi}{\phi^T M\phi}}=\lambda(\text{常数})=\omega^2\geq 0$$

令：

≥ 0

t 的函数 $\quad$ 与 t 无关

(W=0 ⇒ K半正定)

(W>0 ⇒ K、M 正定)

M 正定，K 正定或半正定

对于非零列向量 ϕ ：

$$\phi^T M\phi>0$$

$$\phi^T K\phi\geq 0$$

$$\frac{\phi^T K\phi}{\phi^T M\phi}\geq 0$$

对于正定系统： $\phi^T M\phi>0$，$\phi^T K\phi>0$ $\qquad \omega>0$

对于半正定系统： $\phi^T M\phi>0$，$\phi^T K\phi\geq 0$ $\qquad \omega\geq 0$

5.1 多自由度系统的自由振动

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=\frac{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\phi}}=\lambda=\omega^2 \Rightarrow \ddot{f}(t)+\omega^2 f(t)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(t)=a\sin(\omega t+\varphi), & \omega>0 \\ f(t)=at+b, & \omega=0 \end{cases}$$

a、b、φ 为常数

主振动

（1）正定系统 $\omega>0$

$X=\boldsymbol{\phi} f(t)$

只可能出现形如 $X=\boldsymbol{\phi}\,a\sin(\omega\,t+\varphi)$ 的同步运动

系统在各个坐标上都是按相同频率及初相位作简谐振动

（2）半正定系统 $\omega\geq 0$

可能出现形如 $X=\boldsymbol{\phi}\,a\sin(\omega\,t+\varphi)$ 的同步运动

也可能出现形如 $X=\boldsymbol{\phi}(at+b)$ 的同步运动 平动

（不发生弹性变形）

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

5.1 多自由度系统的自由振动

首先讨论正定系统的主振动 在 ω 下的振动

正定系统： $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{X}\in R^n$ $\boldsymbol{M}$ **正定，**$\boldsymbol{K}$ **正定**

主振动： $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\phi}a\sin(\omega t+\varphi)$ $\omega>0$ $\boldsymbol{\phi}=[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n]^T$

将常数 a **并入** $\boldsymbol{\phi}$ **中** $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\phi}\sin(\omega t+\varphi)$

代入系统运动微分方程，并消去**sin(*ωt*+*φ*)**

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}=0$$

$\boldsymbol{\phi}$ **有非零解的充分必要条件：** $\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=\boldsymbol{0}$ **特征方程**

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 m_{nn} \end{vmatrix}=0$$

5.1 多自由度系统的自由振动

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$\omega^{2n} + a_1\omega^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega^2 + a_n = 0$$

频率方程
或特征多项式

解出 n 个值，按升序排列为：

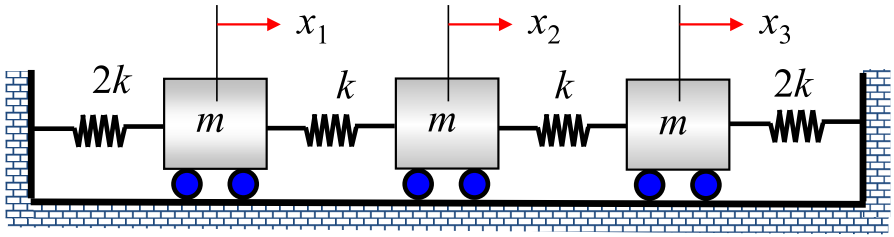
$$0 < \omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \cdots \le \omega_n^2$$

ω_i **：第 i 阶固有频率**　　ω_1 **：基频**

固有频率仅取决于系统本身的刚度、质量等物理参数

5.1 多自由度系统的自由振动

例：三自由度系统



$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 3k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left| \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \right| = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m}{k}\omega^2}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = 4$$

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \qquad \omega_2 = 1.732\sqrt{k/m} \qquad \omega_3 = 2\sqrt{k/m}$$

5.2 多自由度系统的模态

正定系统： $M\ddot{X} + KX = 0$ $\quad X \in R^n$

主振动： $X = \phi a \sin(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega > 0 \quad \phi \in R^n$

特征值问题： $(K - \omega^2 M)\phi = 0$

振动的形状

ω 特征值（固有频率） $\quad \phi$ 特征向量（模态）

n 自由度系统： $\omega_i \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \phi^{(i)}$ $\quad i = 1 \sim n$

$$\phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(i)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(i)} \end{bmatrix} \in R^{n\times 1}$$

ω_i、 $\phi^{(i)}$ 代入： $(K - \omega_i^2 M)\phi^{(i)} = 0$ 第i阶模态特征值问题

5.2 多自由度系统的模态

$$(\underline{\boldsymbol{K}}-\omega_i^2\underline{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{0}$$

$n\times n \quad n\times n$

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

n 个方程　　齐次方程组

当 ω_i不是特征多项式重根时，上式 n 个方程只有一个不独立

设最后一个方程不独立，把它划去，并且把含有$\phi^{(i)}$的某个元素（例如 $\phi_n^{(i)}$）的项全部移到等号右端

$$\begin{bmatrix} k_{11}-\omega_i^2 m_{11} & k_{12}-\omega_i^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega_i^2 m_{1n} \\ k_{21}-\omega_i^2 m_{21} & k_{22}-\omega_i^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega_i^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}-\omega_i^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega_i^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega_i^2 m_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(i)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2 多自由度系统的模态

$$(\underline{\boldsymbol{K}} - \omega_i^2 \underline{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{\phi}^{(i)} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\phi}^{(i)} = [\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

$n\times n \quad n\times n$

***n* 个方程　　齐次方程组**

当 ω_i 不是特征多项式重根时，上式 *n* 个方程只有一个不独立

设最后一个方程不独立，把它划去，并且把含有 $\phi^{(i)}$ 的某个元素（例如 $\phi_n^{(i)}$）的项全部移到等号右端

$$\begin{cases} (k_{11}-\omega_i^2 m_{11})\phi_1^{(i)} + \ldots + (k_{1,n-1}-\omega_i^2 m_{1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)} = -(k_{1n}-\omega_i^2 m_{1n})\underline{\phi_n^{(i)}} \\ \vdots \\ (k_{n-1,1}-\omega_i^2 m_{n-1,1})\phi_1^{(i)} + \ldots + (k_{n-1,n-1}-\omega_i^2 m_{n-1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)} = -(k_{n-1,n}-\omega_i^2 m_{n-1,n})\underline{\phi_n^{(i)}} \end{cases}$$

***n* -1个方程　　非齐次方程组**

若这个方程组左端的系数行列式不为零，则可解出用 $\phi_n^{(i)}$ 表示的 $\phi_1^{(i)}$，$\phi_2^{(i)}$，…，$\phi_{n-1}^{(i)}$

否则应把含 $\phi^{(i)}$ 的另一个元素的项移到等号右端，再解方程组

5.2 多自由度系统的模态

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\phi}^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

当 ω_i不是特征多项式的重根时，上式的 n 个方程中有且只有一个不独立

设最后一个方程不独立，把它划去，并且把含有$\phi^{(i)}$的某个元素（例如 $\phi_n^{(i)}$）的项全部移到等号右端

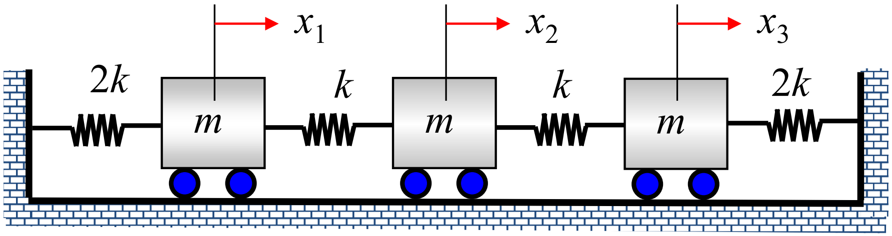
$$\begin{cases}(k_{11}-\omega_i^2 m_{11})\phi_1^{(i)}+\ldots+(k_{1,n-1}-\omega_i^2 m_{1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)}=-(k_{1n}-\omega_i^2 m_{1n})\phi_n^{(i)}\\ \vdots \\ (k_{n-1,1}-\omega_i^2 m_{n-1,1})\phi_1^{(i)}+\ldots+(k_{n-1,n-1}-\omega_i^2 m_{n-1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)}=-(k_{n-1,n}-\omega_i^2 m_{n-1,n})\phi_n^{(i)}\end{cases}$$

为使计算简单，令： $\phi_n^{(i)}=1$

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\begin{bmatrix}\phi_1^{(i)} & \phi_2^{(i)} & \cdots & \phi_{n-1}^{(i)} & 1\end{bmatrix}^T$$

5.2 多自由度系统的模态

例：三自由度系统



$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}=0$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 3k-m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=0$$

$$\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=\boldsymbol{0}$$

$$\alpha_1=1 \quad \alpha_2=3 \quad \alpha_3=4$$

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=0 \qquad \alpha=\frac{m}{k}\omega^2$$

$$\omega_1=\sqrt{k/m} \quad \omega_2=1.32\sqrt{k/m} \quad \omega_3=2\sqrt{k/m}$$

5.2 多自由度系统的模态

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 3 \qquad \alpha_3 = 4$$

以 $\alpha_1 = 1$ 为例进行说明

将 $\alpha_1 = 1$ 代入，有：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2\phi_1 - \phi_2 = 0 \\ \underline{-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0} \\ -\cancel{\phi_2 + 2\phi_3 = 0} \end{cases}$$

$$\phi_3 = 0.5\phi_2 \longrightarrow -\phi_1 + \phi_2 - 0.5\phi_2 = 0 \xrightarrow{\text{整理}} 2\phi_1 - \phi_2 = 0$$

与第一个方程相同

方程组中有一式不独立

例如，将第三个方程去掉

$$\begin{cases} 2\phi_1 - \phi_2 = 0 \\ -\phi_1 + \phi_2 = \phi_3 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

若令 $\phi_3 = 1 \longrightarrow \phi_1 = 1 \qquad \phi_2 = 2$

5.2 多自由度系统的模态

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\phi}^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

$$\begin{cases}(k_{11}-\omega_i^2 m_{11})\phi_1^{(i)}+\ldots+(k_{1,n-1}-\omega_i^2 m_{1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)}=-(k_{1n}-\omega_i^2 m_{1n})\phi_n^{(i)} \\ \vdots \\ (k_{n-1,1}-\omega_i^2 m_{n-1,1})\phi_1^{(i)}+\ldots+(k_{n-1,n-1}-\omega_i^2 m_{n-1,n-1})\phi_{n-1}^{(i)}=-(k_{n-1,n}-\omega_i^2 m_{n-1,n})\phi_n^{(i)}\end{cases}$$

令： $\phi_n^{(i)}=1$ **解得：** $\boldsymbol{\phi}^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \phi_2^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_{n-1}^{(i)} \quad 1]^T$

$\phi_n^{(i)}$ **的值也可以取任意非零常数** a_i **将解得** $a_i\boldsymbol{\phi}^{(i)}$

也为特征向量

在特征向量中规定某个元素的值以确定其他各元素的值的过程称为归一化

5.2 多自由度系统的模态

正定系统： $M\ddot{X}+KX=0 \qquad X\in R^n$

主振动： $X=\phi a\sin(\omega t+\varphi) \qquad \omega>0 \qquad \phi\in R^n$

将 $\omega=\omega_i$、 $\phi=a_i\phi^{(i)}$代入主振动方程　　并将 φ 改为 φ_i

第 i 阶主振动： $X^{(i)}=\phi^{(i)}a_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)$

$$X^{(i)}=[x_1^{(i)} \quad \cdots \quad x_n^{(i)}]^T$$

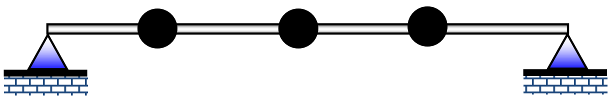
$$\phi^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

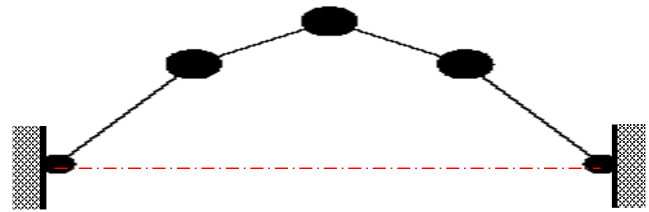
$$\begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(i)} \end{bmatrix} a_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)$$

系统在各个坐标上都将以第 i 阶固有频率w_i 做简谐振动，并且同时通过静平衡位置

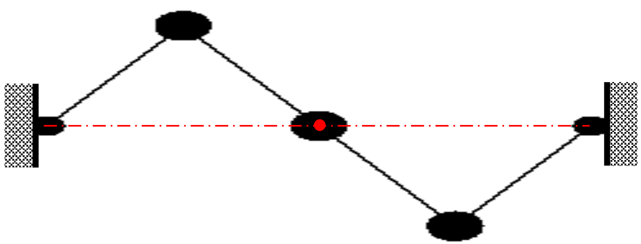
5.2 多自由度系统的模态

三自由度系统

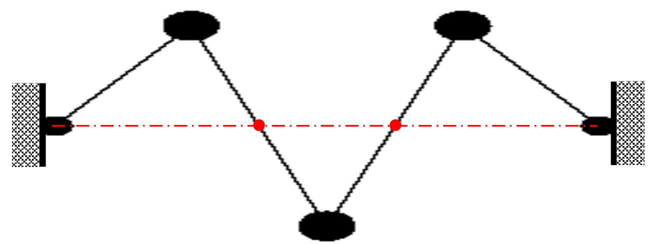




第一阶主振动 w_1



第二阶主振动 w_2



第三阶主振动 w_3

系统在各个坐标上都将以第 i 阶固有频率 w_i 做简谐振动，并且同时通过静平衡位置

5.2 多自由度系统的模态

第 i 阶主振动 ：$\boldsymbol{X}^{(i)}=\boldsymbol{\phi}^{(i)}a_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)$

$$\boldsymbol{X}^{(i)}=[x_1^{(i)} \quad \cdots \quad x_n^{(i)}]^T \qquad \boldsymbol{\phi}^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

$$\frac{x_1^{(i)}}{\phi_1^{(i)}}=\frac{x_2^{(i)}}{\phi_2^{(i)}}=\dots\dots=\frac{x_n^{(i)}}{\phi_n^{(i)}}$$

第 i 阶特征向量 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 中的一列元素，就是系统做第 i 阶主振动时各个坐标上位移（或振幅）的相对比值

$\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 描述了系统做第 i 阶主振动时具有的**振动形态**，称为**第 i 阶主振型，或第 i 阶模态**

虽然各坐标上振幅的精确值并没有确定，但是所表现的系统振动形态已确定

主振动仅取决于系统的 M 阵、K 阵等物理参数，这一重要概念是单自由度系统所没有的

5.2 多自由度系统的模态

正定系统： $M\ddot{X}+KX=0$ $\quad M、K\in R^{n\times n}$

第 i 阶主振动： $X^{(i)}=\phi^{(i)}a_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)$ $\quad i=1\sim n$

$$X^{(i)}=[x_1^{(i)} \quad \cdots \quad x_n^{(i)}]^T \qquad \phi^{(i)}=[\phi_1^{(i)} \quad \cdots \quad \phi_n^{(i)}]^T$$

系统的固有振动：

$$X(t)=\phi^{(1)}a_1\sin(\omega_1+\varphi_1)+\phi^{(2)}a_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\ldots+\phi^{(n)}a_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\phi^{(i)}a_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)$$

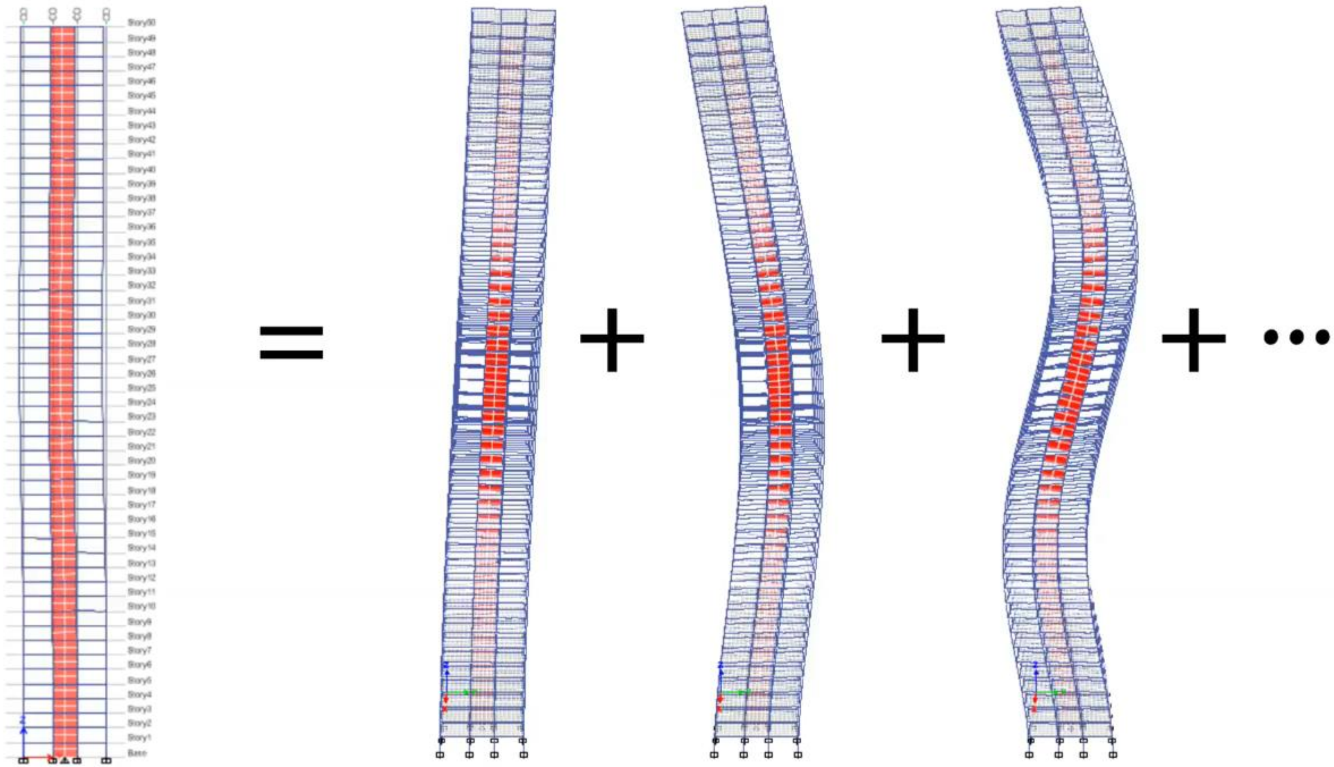
$a_i,\varphi_i(i=1\sim n)$: **初始条件决定**

n个主振动的叠加 **模态叠加法**

由于各个主振动的固有频率不相同，多自由度系统的固有振动一般不是简谐振动，甚至不是周期振动

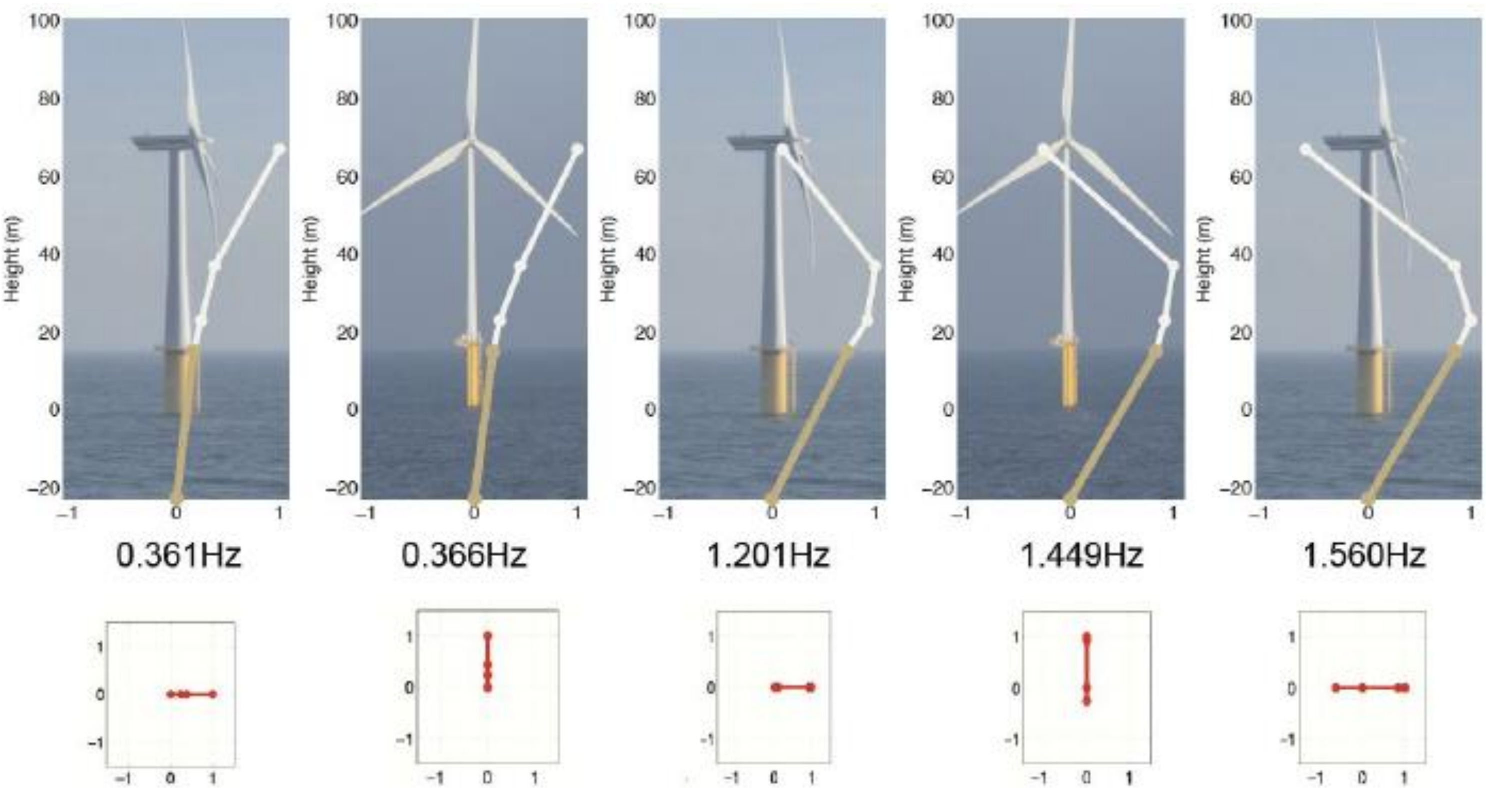
5.2 多自由度系统的模态

高层建筑的模态叠加



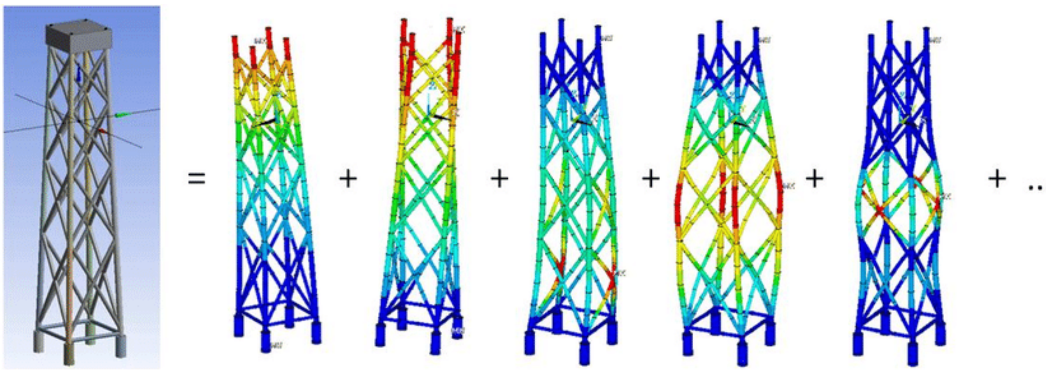
5.2 多自由度系统的模态

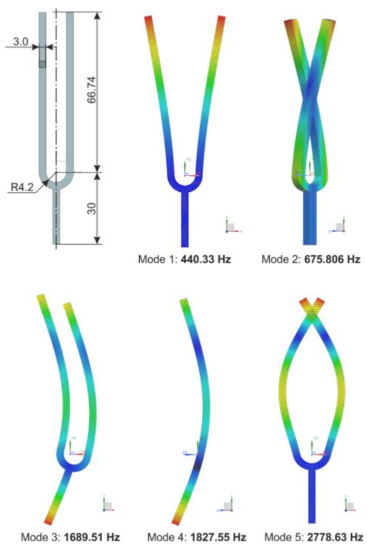
风力发电设备的模态叠加

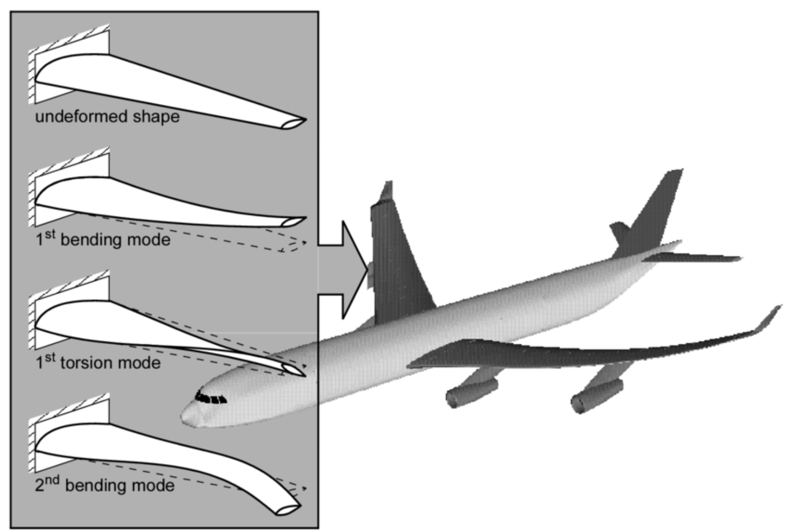


5.2 多自由度系统的模态

典型机械构件的模态叠加

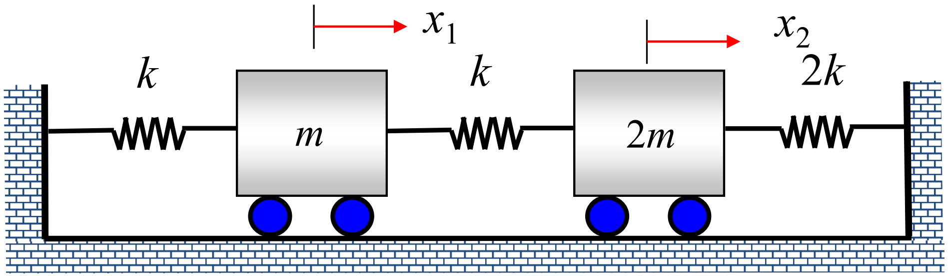






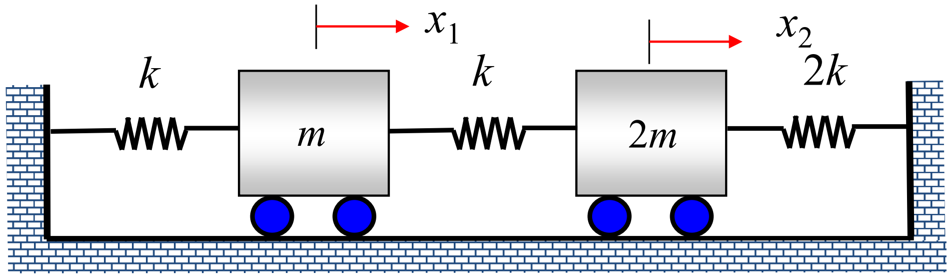
5.2 多自由度系统的模态

例：两自由度弹簧 - 质量系统



求：固有频率和主振型

5.2 多自由度系统的模态



解：

动力学方程： $$\overset{M}{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \overset{K}{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ （上一讲）

令主振动： $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi)$$ **或直接用** $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$

得： $$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 3k - 2m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2 多自由度系统的模态

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 3k-2m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令 $\alpha=\dfrac{m}{k}\omega^2$

$$\begin{bmatrix} 2-\alpha & -1 \\ -1 & 3-2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

特征方程： $\begin{vmatrix} 2-\alpha & -1 \\ -1 & 3-2\alpha \end{vmatrix}=2\alpha^2-7\alpha+5=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1=1,\quad \alpha_2=2.5$

为求主振型，先将$\alpha=\alpha_1=1$**代入 ：** $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}},\quad \omega_2=1.581\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\begin{cases} \phi_1-\phi_2=0 \\ -\phi_1+\phi_2=0 \end{cases}$$

令 $\phi_2=1$

则 $\phi_1=1$

第一阶主振型：$\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

一个独立

$\alpha=\alpha_2=2.57$ **代入**

令 $\phi_2=1$

则 $\phi_1=-2$

第二阶主振型：$\boldsymbol{\phi}^{(2)}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

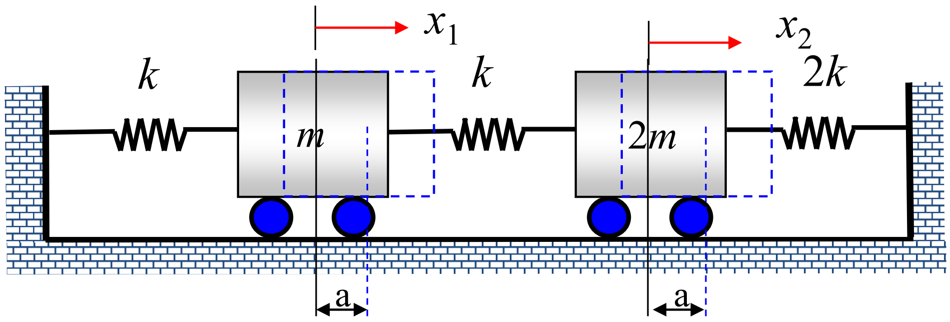
5.2 多自由度系统的模态

$\omega_1 = \sqrt{k/m}$

第一阶主振型： $\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\omega_2 = 1.581\sqrt{k/m}$

第二阶主振型： $\phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



画图：

横坐标表示静平衡位置，纵坐标表示主振型中各元素的值

第一阶主振动:

同向运动

两个质量以w_1为振动频率，同时经过各自的平衡位置，方向相同，而且每一时刻的位移量都相同

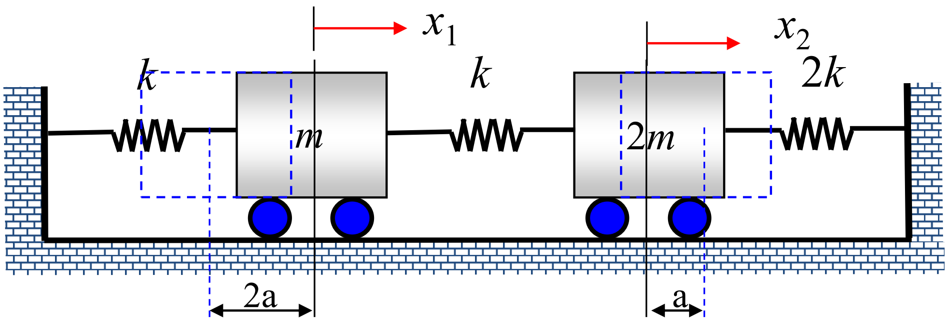
5.2 多自由度系统的模态

$\omega_1 = \sqrt{k/m}$

第一阶主振型： $\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\omega_2 = 1.581\sqrt{k/m}$

第二阶主振型： $\phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

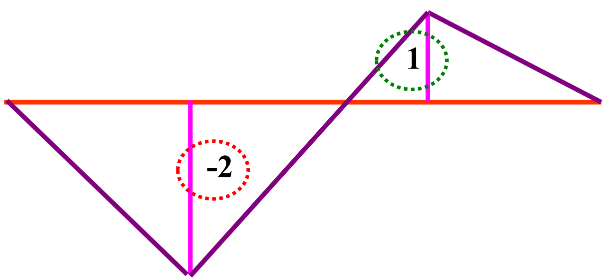


画图：

横坐标表示静平衡位置，纵坐标表示主振型中各元素的值

第二阶主振动:

异向运动



两个质量以w_2为振动频率，同时经过各自的平衡位置，方向相反，每一时刻第一个质量的位移都第二个质量的位移的两倍

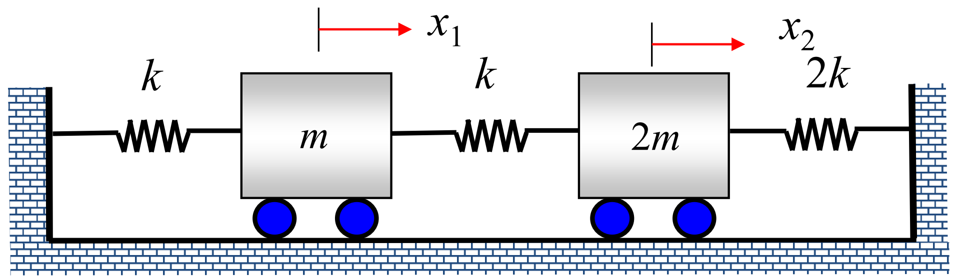
5.2 多自由度系统的模态

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}$$

第一阶主振型： $\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\omega_2 = 1.581\sqrt{k/m}$$

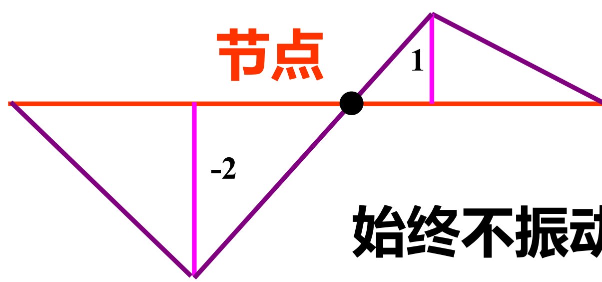
第二阶主振型： $\boldsymbol{\phi}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



第一阶主振动:
同向运动　无节点

如果传感器放在节点位置，则测量的信号中将不包含有第二阶模态的信息

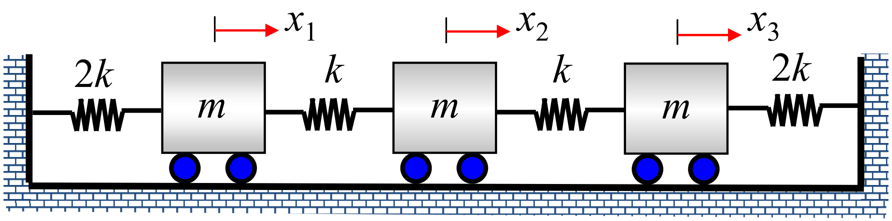
第二阶主振动:
异向运动　一个节点



始终不振动点

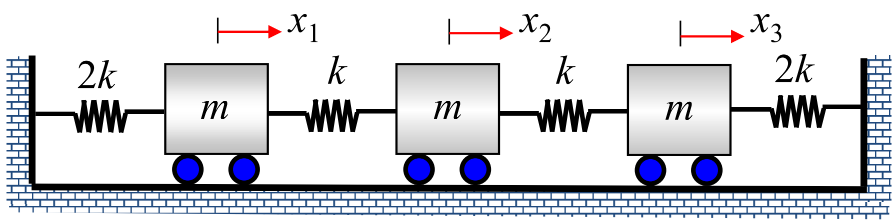
5.2 多自由度系统的模态

例：三自由度弹簧－质量系统



求：固有频率和主振型

5.2 多自由度系统的模态



解：

M

动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

主振动：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi)$$

或 $$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -1 & 3k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2 多自由度系统的模态

$$\begin{bmatrix} 3k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -1 & 3k-m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{令 } \alpha=\frac{m}{k}\omega^2} \begin{bmatrix} 3-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

行列式 = 0

$$\alpha_1=1,\quad \alpha_2=3,\quad \alpha_3=4$$

单根 $(3-\alpha)(\alpha^2-5\alpha+4)=0$

可用伴随矩阵求振型

$$\omega_1=\sqrt{k/m},\quad \omega_2=1.732\sqrt{k/m},\quad \omega_3=2\sqrt{k/m}$$

$$adj\begin{bmatrix} 3-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3-\alpha)(2-\alpha)-1 & 3-\alpha & 1 \\ 3-\alpha & (3-\alpha)^2 & 3-\alpha \\ 1 & 3-\alpha & (3-\alpha)(2-\alpha)-1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})adj\boldsymbol{B}(\omega_i)=0$$

特征矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}$

5.2 多自由度系统的模态

$$adj\begin{bmatrix}3-\alpha & -1 & 0\\ -1 & 2-\alpha & -1\\ 0 & -1 & 3-\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3-\alpha)(2-\alpha)-1 & 3-\alpha & 1\\ 3-\alpha & (3-\alpha)^2 & 3-\alpha\\ 1 & 3-\alpha & (3-\alpha)(2-\alpha)-1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1=1,\quad \alpha_2=3,\quad \alpha_3=4$$ 分别代入

$$\phi^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

第二阶模态有 1 个节点，第三阶模态有 2 个节点，这由主振型内元素符号变号的次数可以判断出

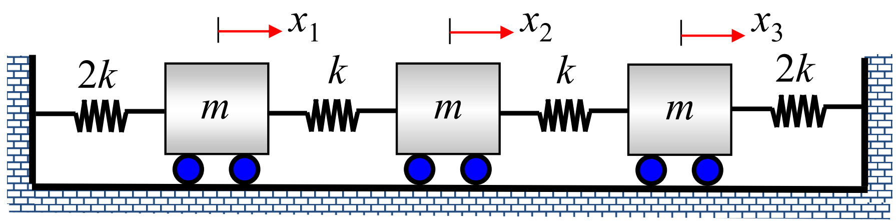
5.2 多自由度系统的模态

$$w_1 = \sqrt{k/m}$$

$$w_2 = 1.732\sqrt{k/m}$$

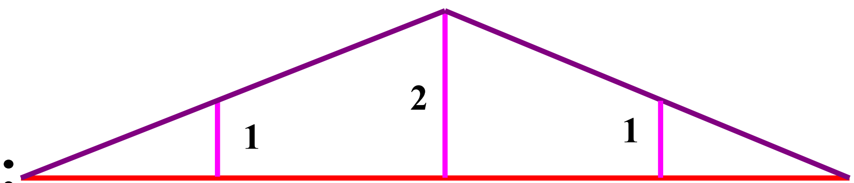
$$w_3 = 2\sqrt{k/m}$$

$$\phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



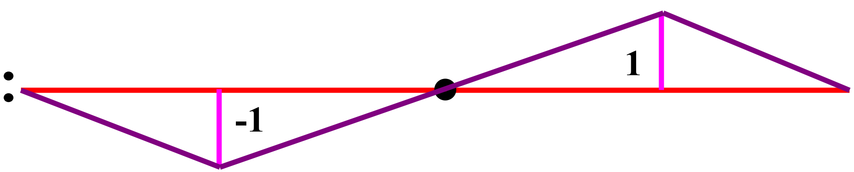
模态图形：

第一阶模态：



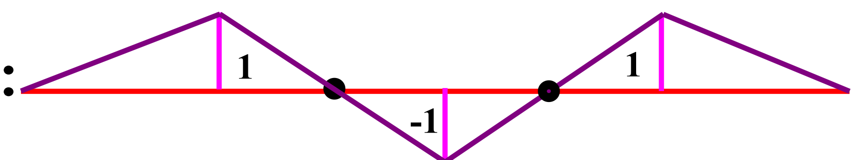
无节点

第二阶模态：



一个节点

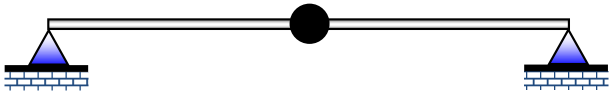
第三阶模态：



两个节点

5.2 多自由度系统的模态

单自由度系统

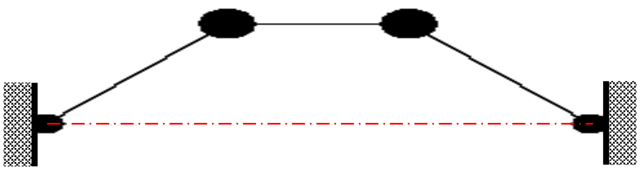


5.2 多自由度系统的模态

两自由度系统

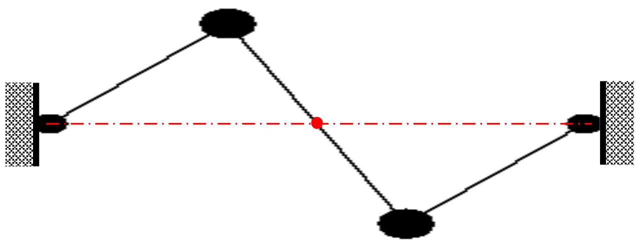
• 节点位置

第一阶模态



无节点

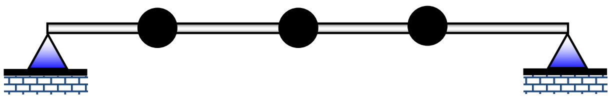
第二阶模态



一个节点

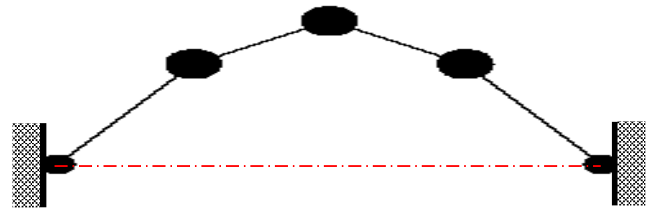
5.2 多自由度系统的模态

三自由度系统



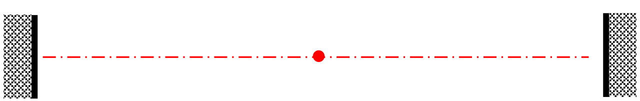
• 节点位置

第一阶模态



无节点

第二阶模态



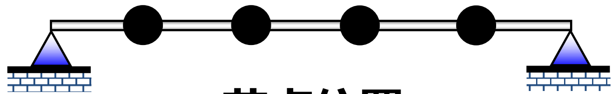
一个节点

第三阶模态

两个节点

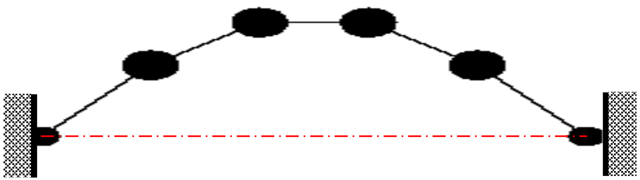
5.2 多自由度系统的模态

四自由度系统



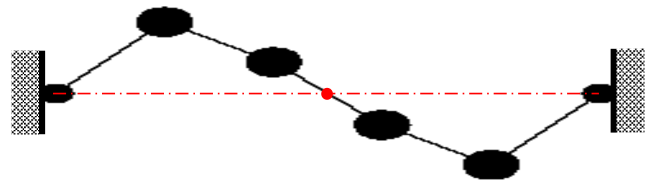
• 节点位置

第一阶模态



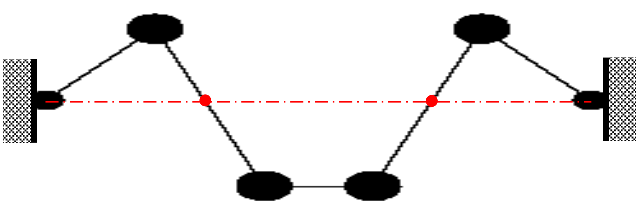
无节点

第二阶模态



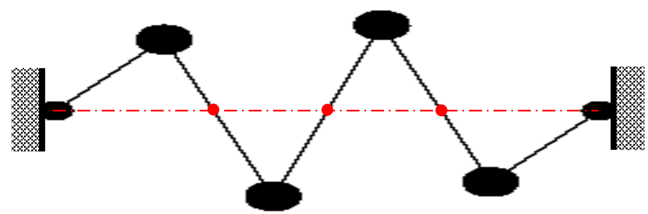
一个节点

第三阶模态



两个节点

第四阶模态



三个节点

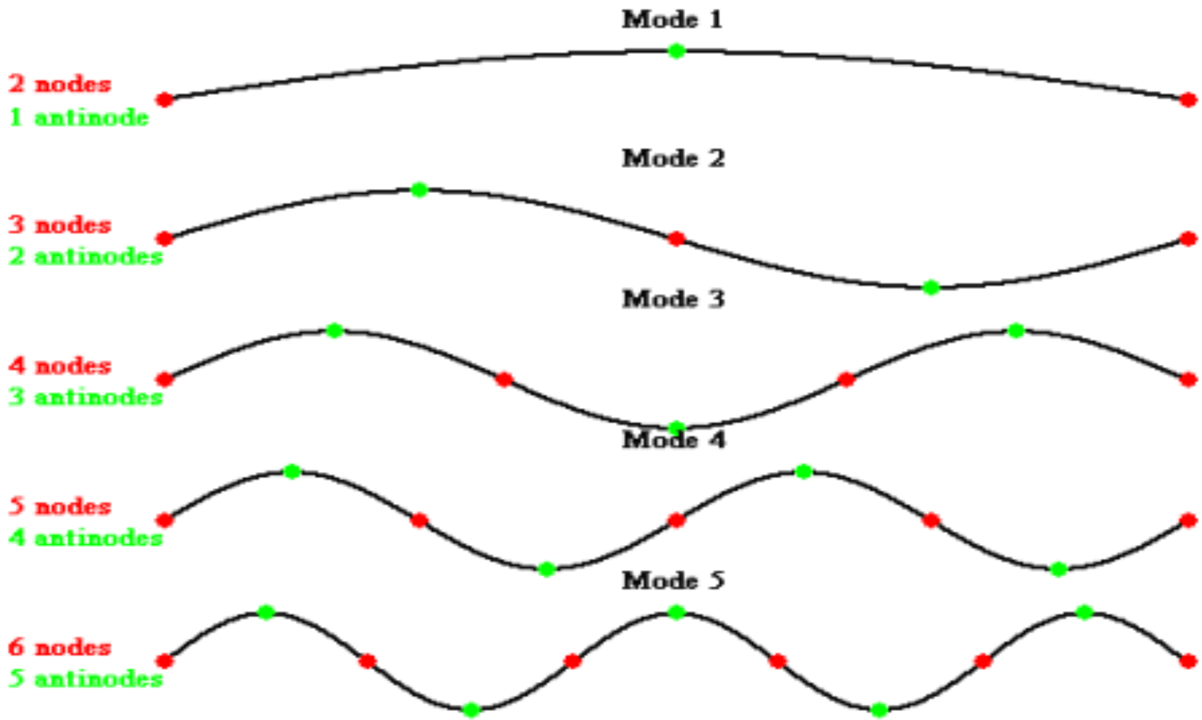
小结：

- n自由度系统有n个固有频率和n个模态，由特征值方程求出

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{0}$$

- 固有频率按**升序排列**，最低阶固有频率称为**基频**
- 当w_i不是重特征根时，也可以通过 B 的伴随矩阵$adjB$求得相应的主振型
- 模态的节点

每个振型（模态）之间有什么样的关系？



isvr

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

正定系统：$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ $\quad(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}=0$

$\omega_i \leftrightarrow \boldsymbol{\phi}^{(i)}$ $\quad \omega_j \leftrightarrow \boldsymbol{\phi}^{(j)}$ $\quad$ 均满足：

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\omega_i^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)} \xrightarrow{\text{转置右乘 } \boldsymbol{\phi}^{(j)}} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\omega_i^2\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\omega_j^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \xrightarrow{\text{左乘 } \boldsymbol{\phi}^{(i)^T}} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\omega_j^2\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \end{cases}$$

两式相减：$(\omega_i^2-\omega_j^2)\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0 \longrightarrow \boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0$

若 $i\neq j$ 时，$\omega_i\neq\omega_j$ 恒成立

模态关于质量的正交性

$\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0$

模态关于刚度的正交性

当 $i=j$ 时

$\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=m_{pi}$ 第 i 阶模态主质量

$\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=k_{pi}$ 第 i 阶模态主刚度

$\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 第 i 阶主模态

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

当 $i \neq j$ 时 $\begin{cases} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = 0 \\ \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = 0 \end{cases}$

模态关于质量的正交性

模态关于刚度的正交性

由于主振型的正交性，不同阶的主振动之间不存在动能的转换，或者说不存在惯性耦合。不同阶固有振动之间也不存在势能的转换，或者说不存在弹性耦合。

对于每一个主振动来说，它的动能和势能之和是个常数。在运动过程中，每个主振动内部的动能和势能可以互相转化，但各阶主振动之间不会发生能量的传递。

从能量的观点看，各阶主振动是互相独立的，这就是主振动正交性的物理意义。

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

当 $i \neq j$ 时

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = 0 \\ \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = 0 \end{cases}$$

模态关于质量的正交性

模态关于刚度的正交性

当 $i = j$ 时　**主质量** $\boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(i)} = m_{pi}$　**主刚度** $\boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(i)} = k_{pi}$

利用 Kronecker 符号：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = \delta_{ij} m_{pi} \\ \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = \delta_{ij} k_{pi} \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\boxed{\text{第 } i \text{ 阶固有频率：} \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_{pi}}{m_{pi}}} \quad (i = 1 \ldots n)}$$

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

多自由度系统： $M\ddot{X} + KX = 0 \qquad X \in R^n \qquad M、K \in R^{n\times n}$

主模态： $i = 1 \sim n$

$\phi^{(i)}$ —— $m_{pi} = \phi^{(i)T} M \phi^{(i)}$ —— $k_{pi} = \phi^{(i)T} K \phi^{(i)}$

第 i 阶主模态　　第 i 阶模态主质量　　第 i 阶模态主刚度

另一种模态：**正则模态 $\phi_N^{(i)}$**

$i = 1 \sim n$

定义：全部主质量皆为1的主模态

$$m_{pi} = \phi_N^{(i)T} M \phi_N^{(i)} = 1$$

令： $\phi_N^{(i)} = c_i \phi^{(i)}$

$$\phi_N^{(i)T} M \phi_N^{(i)} = c_i^2 \phi^{(i)T} M \phi^{(i)} = c_i^2 m_{pi} = 1$$

$$\boxed{c_i = \frac{1}{\sqrt{m_{pi}}}}$$

正则模态和主模态之间的关系：

$$\boxed{\phi_N^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{m_{pi}}} \phi^{(i)}}$$

相对于 $\phi_N^{(i)}$ 的主刚度：

$$\phi_N^{(i)T} K \phi_N^{(i)} = \frac{1}{m_{pi}} \phi^{(i)T} K \phi^{(i)} = \boxed{\frac{k_{pi}}{m_{pi}} = \omega_i^2}$$

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

正则模态的正交性条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_N^{(j)} = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_N^{(j)} = \delta_{ij} \omega_i^2 \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

主模态的正交性条件：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = \delta_{ij} m_{pi} \\ \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(j)} = \delta_{ij} k_{pi} \end{cases}$$

主模态： $i = 1 \sim n$

$\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ —— $m_{pi} = \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(i)}$ —— $k_{pi} = \boldsymbol{\phi}^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}^{(i)}$

第 i 阶主模态　　第 i 阶模态主质量　　第 i 阶模态主刚度

正则模态： $i = 1 \sim n$

$\boldsymbol{\phi}_N^{(i)}$ —— $\boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)} = 1$ —— $\boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)} = \omega_i^2$

第 i 阶正则模态　　主质量为1　　固有频率的平方

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

多自由度系统： $M\ddot{X}+KX=0$　　$X\in R^{n}$　　M、$K\in R^{n\times n}$

主模态　**正交性条件：** $\begin{cases}\boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\delta_{ij}m_{pi}\\ \boldsymbol{\phi}^{(i)^T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\delta_{ij}k_{pi}\end{cases}$　　$i=1\sim n$

将 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}(i=1\sim n)$ **组成矩阵**　$\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\phi}^{(1)}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\phi}^{(n)}]\in R^{n\times n}$

模态矩阵

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M\Phi}=diag(m_{p1},\cdots,m_{pn})=\boldsymbol{M}_p\\ \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K\Phi}=diag(k_{p1},\cdots,k_{pn})=\boldsymbol{K}_p\end{cases}$$

主质量矩阵

主刚度矩阵

对角阵

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

推导： $$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = diag(m_{p1}, \cdots, m_{pn}) = \boldsymbol{M}_p$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}^{(n)}]^T \boldsymbol{M} [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}^{(n)}]$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{(1)T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^{(n)T} \end{bmatrix} \boldsymbol{M} [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}^{(n)}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{(1)T} \boldsymbol{M} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^{(n)T} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}^{(n)}]$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{(1)T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{\phi}^{(1)T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^{(n)T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{\phi}^{(n)T} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}^{(n)} \end{bmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} m_{p1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{pn} \end{bmatrix}}^{M_p}}_{\text{对角阵}}$$

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

多自由度系统： $M\ddot{X}+KX=0 \qquad X\in R^{n} \qquad M、K\in R^{n\times n}$

正则模态　正交性条件：
$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} M \boldsymbol{\phi}_N^{(j)} = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\phi}_N^{(i)^T} K \boldsymbol{\phi}_N^{(j)} = \delta_{ij}\omega_i^2 \end{cases} \qquad i=1\sim n$$

将 $\phi_N^{(i)}(i=1\sim n)$ 组成矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_N=[\boldsymbol{\phi}_N^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_N^{(n)}]\in R^{n\times n}$

正则模态矩阵

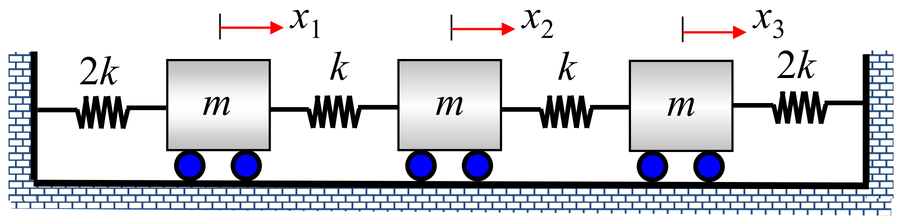
$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_N^T M \boldsymbol{\Phi}_N = I & \text{单位矩阵} \\ \boldsymbol{\Phi}_N^T K \boldsymbol{\Phi}_N = \Lambda & \text{谱矩阵} \end{cases}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

例：三自由度系统

$$\phi^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$



模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}=[\phi^{(1)},\phi^{(2)},\phi^{(3)}]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

谱矩阵：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{K}_p=\begin{bmatrix}\frac{k}{m}&0&0\\0&\frac{3k}{m}&0\\0&0&\frac{4k}{m}\end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2=\frac{3k}{m}$$

$$\omega_3^2=\frac{4k}{m}$$

主质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6m&0&0\\0&2m&0\\0&0&3m\end{bmatrix}$$

主刚度矩阵：

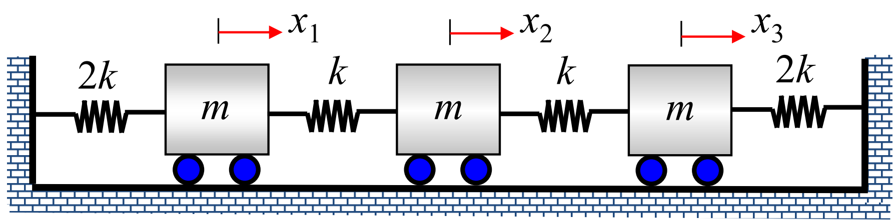
$$\boldsymbol{K}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6k&0&0\\0&6k&0\\0&0&12k\end{bmatrix}$$

K_p、M_p非对角线项等于零说明主振型是关于刚度阵及质量阵相互正交的

5.3 模态的正交性、主质量和主刚度

模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}=\left[\phi^{(1)},\phi^{(2)},\phi^{(3)}\right]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



主刚度矩阵：

$$\boldsymbol{K}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6k & 0 & 0\\ 0 & 6k & 0\\ 0 & 0 & 12k\end{bmatrix}$$

主质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & 3m\end{bmatrix}$$

谱矩阵：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{K}_p=\begin{bmatrix}\frac{k}{m} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3k}{m} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4k}{m}\end{bmatrix}$$

不难验证，有：

$$\boldsymbol{\Phi}_N^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}_N=\boldsymbol{\Lambda}\qquad\boldsymbol{\Phi}_N^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}_N=\boldsymbol{I}$$

正则模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}_N=\left[\frac{\phi^{(1)}}{\sqrt{m_{p1}}},\frac{\phi^{(2)}}{\sqrt{m_{p2}}},\frac{\phi^{(3)}}{\sqrt{m_{p3}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

正则模态和主模态之间的关系： $\boldsymbol{\phi}_N^{(i)}=\dfrac{1}{\sqrt{m_{pi}}}\boldsymbol{\phi}^{(i)}$

5.4 模态叠加法

模态 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}\ (i=1\sim n)$ 相互正交

表明它们是线性独立的，可用于构成 n 维空间的基

系统的任意 n 维自由振动可唯一地表示为各阶模态的线性组合

$$X=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\phi}^{(i)}x_{pi} \qquad X\in R^{n} \qquad \boldsymbol{\phi}^{(i)}\in R^{n\times 1}$$

即系统的振动为 n 阶主振动的叠加　**模态叠加法**

$X=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ **物理坐标**　　$X_p=[x_{p1} \quad \cdots \quad x_{pn}]^T$ **主模态坐标**

坐标关系：$X=\boldsymbol{\Phi}X_p$　　$\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}^{(n)}]\in R^{n\times n}$ **模态矩阵**

$$\boldsymbol{\Phi}^T M\boldsymbol{\Phi}=M_p \qquad \boldsymbol{\Phi}^T K\boldsymbol{\Phi}=K_p$$

5.4 模态叠加法

另一种模态坐标：正则模态坐标 $\boldsymbol{X}_N$

$$\boldsymbol{X}_N = [x_{N1} \quad \cdots \quad x_{Nn}]^T$$

系统响应： $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{X}_N = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)} x_{Ni}$

$$\boldsymbol{X} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

物理坐标

$$\boldsymbol{\Phi}_N = [\boldsymbol{\phi}_N^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_N^{(n)}] \in R^{n \times n}$$

正则模态矩阵

$$\boldsymbol{X}_N = [x_{N1} \quad \cdots \quad x_{Nn}]^T$$

正则模态坐标

$$\boldsymbol{\Phi}_N^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_N = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_N^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi}_N = \boldsymbol{\Lambda}$$

5.4 模态叠加法

小结：

多自由度系统： $M\ddot{X}+KX=0 \qquad X\in R^{n} \qquad M、K\in R^{n\times n}$

可采用两类模态坐标进行描述

主模态坐标

$$X_p=[x_{p1} \quad \cdots \quad x_{pn}]^T$$

$$X=\Phi X_p=\sum_{i=1}^{n}\phi^{(i)}x_{pi}$$

$$\Phi=[\phi^{(1)} \quad \cdots \quad \phi^{(n)}]$$

$$\Phi^T M\Phi=M_p$$

$$\Phi^T K\Phi=K_p$$

正则模态坐标

$$X_N=[x_{N1} \quad \cdots \quad x_{Nn}]^T$$

$$X=\Phi_N X_N=\sum_{i=1}^{n}\phi_N^{(i)}x_{Ni}$$

$$\Phi_N=[\phi_N^{(1)} \quad \cdots \quad \phi_N^{(n)}]$$

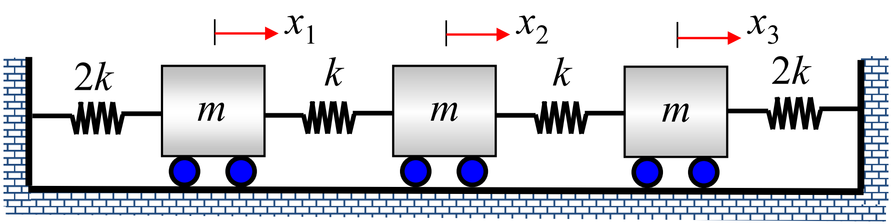
$$\Phi_N^T M\Phi_N=I$$

$$\Phi_N^T K\Phi_N=\Lambda$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

例：三自由度弹簧—质量系统

$$\boldsymbol{X}_0 = [2 \quad 2 \quad 0]^T \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$



求：系统在初始条件下的响应

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

可分别采用两类模态坐标进行求解

首先采用主模态坐标

自由振动方程： $\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0,\ \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{X} \in R^n \quad \boldsymbol{M}、\boldsymbol{K} \in R^{n\times n}$

$$\boldsymbol{X}_0 = [x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0)]^T \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_0 = [\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \cdots, \dot{x}_n(0)]^T$$

坐标变换： $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_p$ $\quad \boldsymbol{X}_p$ **：主模态坐标** $\quad \boldsymbol{\Phi}$ **：主模态矩阵**

代入，并左乘 $\boldsymbol{\Phi}^T$**：** $\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\boldsymbol{X}}_p + \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{M}_p\ddot{\boldsymbol{X}}_p + \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{0}$

模态坐标初始条件： $\boldsymbol{X}_p(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{X}_0 \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_p(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}_0$

$$\boldsymbol{X}_{p0} = [x_{p1}(0), x_{p2}(0), \cdots, x_{pn}(0)]^T \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_{p0} = [\dot{x}_{p1}(0), \dot{x}_{p2}(0), \cdots, \dot{x}_{pn}(0)]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{M}_p \qquad \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{K}_p$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

自由振动方程：$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0, \quad \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{X} \in R^n \quad \boldsymbol{M}、\boldsymbol{K} \in R^{n\times n}$

坐标变换：$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_p$ $\quad \begin{cases} \boldsymbol{M}_p\ddot{\boldsymbol{X}}_p + \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_p(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{X}_0, \quad \dot{\boldsymbol{X}}_p(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{X}_{p0} = [x_{p1}(0), x_{p2}(0)\cdots x_{pn}(0)]^T \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_{p0} = [\dot{x}_{p1}(0), \dot{x}_{p2}(0)\cdots \dot{x}_{pn}(0)]^T$$

$$m_{pi}\ddot{x}_{pi} + k_{pi}x_{pi} = 0, \qquad (i = 1 \sim n)$$

$$x_{pi} = x_{pi}(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{x}_{pi}(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t, \qquad (i = 1 \sim n)$$

在求得 $x_{pi}(i = 1 \sim n)$ **后，可利用** $X = \Phi X_p$ **式求得原系统的解**

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

采用正则模态坐标

自由振动方程： $\begin{cases} M\ddot{X}+KX=0 \\ X(0)=X_0,\ \ \dot{X}(0)=\dot{X}_0 \end{cases}$ $\quad X\in R^n \quad M、K\in R^{n\times n}$

$$X_0=[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)]^T \qquad \dot{X}_0=[\dot{x}_1(0),\dot{x}_2(0),\cdots,\dot{x}_n(0)]^T$$

坐标变换：$X=\Phi_N X_N$ $\quad X_N$ **：正则模态坐标** $\quad \Phi_N$ **：正则模态矩阵**

代入，并左乘 Φ_N^T **：** $\Phi_N^T M\Phi_N\ddot{X}+\Phi_N^T K\Phi_N X=0 \Rightarrow I\ddot{X}_N+\Lambda X_N=0$

模态坐标初始条件： $X_N(0)=\Phi_N^{-1}X_0 \qquad \dot{X}_N(0)=\Phi_N^{-1}\dot{X}_0$

$$X_{N0}=[x_{N1}(0),x_{N2}(0),\cdots,x_{Nn}(0)]^T \quad \dot{X}_{N0}=[\dot{x}_{N1}(0),\dot{x}_{N2}(0),\cdots,\dot{x}_{Nn}(0)]^T$$

$$\Phi_N^T M\Phi_N=I \qquad \Phi_N^T K\Phi_N=\Lambda$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

自由振动方程： $\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0, \ \dot{\boldsymbol{X}}(0) = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{X} \in R^n \quad \boldsymbol{M}、\boldsymbol{K} \in R^{n \times n}$

坐标变换： $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{X}_N$ $\quad \begin{cases} \boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{X}}_N + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\boldsymbol{X}_0, \ \dot{\boldsymbol{X}}_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{X}_{N0} = [x_{N1}(0), x_{N2}(0), \cdots, x_{Nn}(0)]^T \quad \dot{\boldsymbol{X}}_{N0} = [\dot{x}_{N1}(0), \dot{x}_{N2}(0), \cdots, \dot{x}_{Nn}(0)]^T$$

$$\ddot{x}_{Ni} + \omega_i^2 x_{Ni} = 0, \qquad (i = 1 \sim n)$$

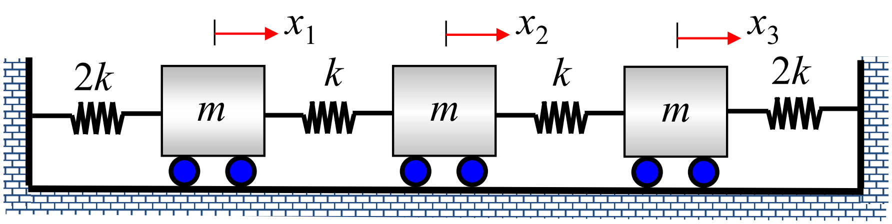
$$x_{Ni} = x_{Ni}(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{x}_{Ni}(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t, \qquad (i = 1 \sim n)$$

在求得 $x_{Ni}(i = 1 \sim n)$ **后，可利用** $X = \boldsymbol{\Phi}_N X_N$ **式求得原系统的解**

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

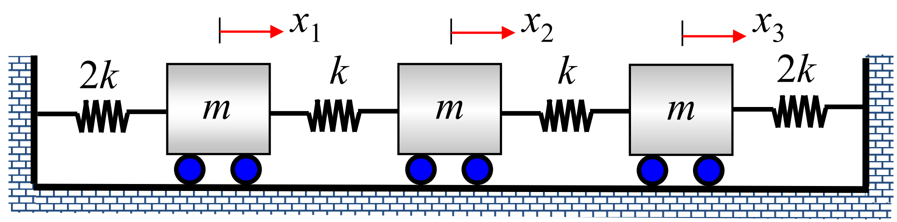
例：三自由度弹簧—质量系统

$$X_0 = [2 \quad 2 \quad 0]^T \qquad \dot{X}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$



求：系统在初始条件下的响应

$$\phi^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \phi^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$



模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}=[\phi^{(1)},\phi^{(2)},\phi^{(3)}]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

主质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6m&0&0\\0&2m&0\\0&0&3m\end{bmatrix}$$

主刚度矩阵：

$$\boldsymbol{K}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6k&0&0\\0&6k&0\\0&0&12k\end{bmatrix}$$

谱矩阵：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{K}_p=\begin{bmatrix}\frac{k}{m}&0&0\\0&\frac{3k}{m}&0\\0&0&\frac{4k}{m}\end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}$$

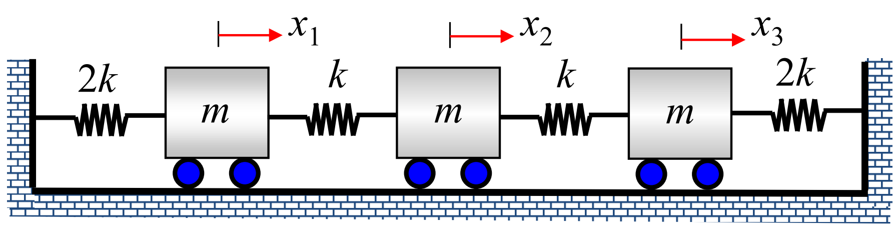
$$\omega_2^2=\frac{3k}{m}$$

$$\omega_3^2=\frac{4k}{m}$$

$\boldsymbol{K}_p$、$\boldsymbol{M}_p$非对角线项等于零说明主振型是关于刚度阵及质量阵相互正交的

模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}=\left[\phi^{(1)},\phi^{(2)},\phi^{(3)}\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$



主刚度矩阵：

$$\boldsymbol{K}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6k&0&0\\0&6k&0\\0&0&12k\end{bmatrix}$$

主质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}_p=\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}6m&0&0\\0&2m&0\\0&0&3m\end{bmatrix}$$

谱矩阵：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{K}_p=\begin{bmatrix}\frac{k}{m}&0&0\\0&\frac{3k}{m}&0\\0&0&\frac{4k}{m}\end{bmatrix}$$

不难验证，有：

$$\boldsymbol{\Phi}_N^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}_N=\boldsymbol{\Lambda}\qquad\boldsymbol{\Phi}_N^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}_N=\boldsymbol{I}$$

正则模态矩阵：

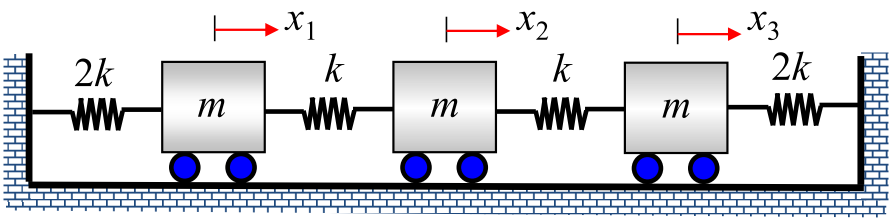
$$\boldsymbol{\Phi}_N=\left[\frac{\phi^{(1)}}{\sqrt{m_{p1}}},\frac{\phi^{(2)}}{\sqrt{m_{p2}}},\frac{\phi^{(3)}}{\sqrt{m_{p3}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&0&-\sqrt{2}\\1&\sqrt{3}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

正则模态和主模态之间的关系： $\boldsymbol{\phi}_N^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{m_{pi}}}\boldsymbol{\phi}^{(i)}$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

$$\boldsymbol{X}_0 = [2 \quad 2 \quad 0]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$



解： 动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

固有频率：

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{k/m}$$

正则模态矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}_N = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

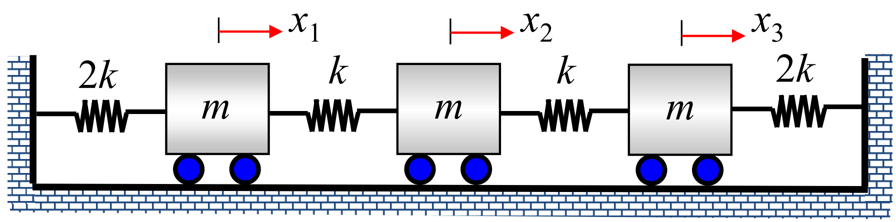
模态初始条件：

$$X_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\boldsymbol{X}_0 = \sqrt{m/6}\begin{bmatrix} 6 \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}$$
$$\omega_2 = \sqrt{3k/m}$$
$$\omega_3 = 2\sqrt{k/m}$$



$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_N = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\boldsymbol{X}_0 = \sqrt{m/6}\,[\underline{6} \quad \underline{-2\sqrt{3}} \quad \underline{0}]^T \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_N(0) = \boldsymbol{\Phi}_N^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}_0 = [\underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}]^T$$

模态坐标响应：

$$\boldsymbol{X}_N = \begin{bmatrix} \underline{x_{N1}} \\ \underline{x_{N2}} \\ \underline{x_{N3}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{6}}\begin{bmatrix} 6\cos\omega_1 t \\ -2\sqrt{3}\cos\omega_2 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{Ni} = x_{Ni}(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{x}_{Ni}(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \qquad \omega_2 = \sqrt{3k/m} \qquad \omega_3 = 2\sqrt{k/m}$$

$$\boldsymbol{X}_N = \begin{bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ x_{N3} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{6}} \begin{bmatrix} 6\cos\omega_1 t \\ -2\sqrt{3}\cos\omega_2 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_N = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

原系统响应：

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{X}_N = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times \sqrt{\frac{m}{6}} \begin{bmatrix} 6\cos\omega_1 t \\ -2\sqrt{3}\cos\omega_2 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t \\ 2\cos\omega_1 t \\ \cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t \end{bmatrix}$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

$$\boldsymbol{X}_N=\begin{bmatrix}x_{N1}\\x_{N2}\\x_{N3}\end{bmatrix}=\sqrt{\frac{m}{6}}\begin{bmatrix}6\cos\omega_1 t\\-2\sqrt{3}\cos\omega_2 t\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\Phi}_N=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\\2 & 0 & -\sqrt{2}\\1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{X}_N=\begin{bmatrix}\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t\\2\cos\omega_1 t\\\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t\end{bmatrix}$$

也可展开求解：

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{X}_N=[\phi_N^{(1)}\quad\phi_N^{(2)}\quad\phi_N^{(3)}]\begin{bmatrix}x_{N1}\\x_{N2}\\x_{N3}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\phi}_N^{(i)}x_{Ni}=\boldsymbol{\phi}_N^{(1)}x_{N1}+\boldsymbol{\phi}_N^{(2)}x_{N2}+\boldsymbol{\phi}_N^{(3)}x_{N3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\sqrt{\frac{m}{6}}\cdot 6\cos\omega_1 t+\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{bmatrix}\sqrt{\frac{m}{6}}\cdot(-2\sqrt{3}\cos\omega_2 t)+\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}\sqrt{\frac{m}{6}}\cdot 0$$

合并后结果完全一样

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

分析：

$$\boldsymbol{\Phi}_N = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_N = \begin{bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ x_{N3} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{6}}\begin{bmatrix} 6\cos\omega_1 t \\ -2\sqrt{3}\cos\omega_2 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{X}_N = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\phi}_N^{(i)} x_{Ni} = \boldsymbol{\phi}_N^{(1)} x_{N1} + \boldsymbol{\phi}_N^{(2)} x_{N2} + \boldsymbol{\phi}_N^{(3)} x_{N3}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{第1阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot 6\cos\omega_1 t}_{\text{第1阶模态响应}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\text{第2阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot (-2\sqrt{3}\cos\omega_2 t)}_{\text{第2阶模态响应}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{第3阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot 0}_{\text{第 3 阶模态响应}}$$

5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

分析：

（以w_1为振动频率）　　（以w_2为振动频率）　　（以w_3为振动频率）

第1阶模态主振动　　第2阶模态主振动　　第3阶模态主振动

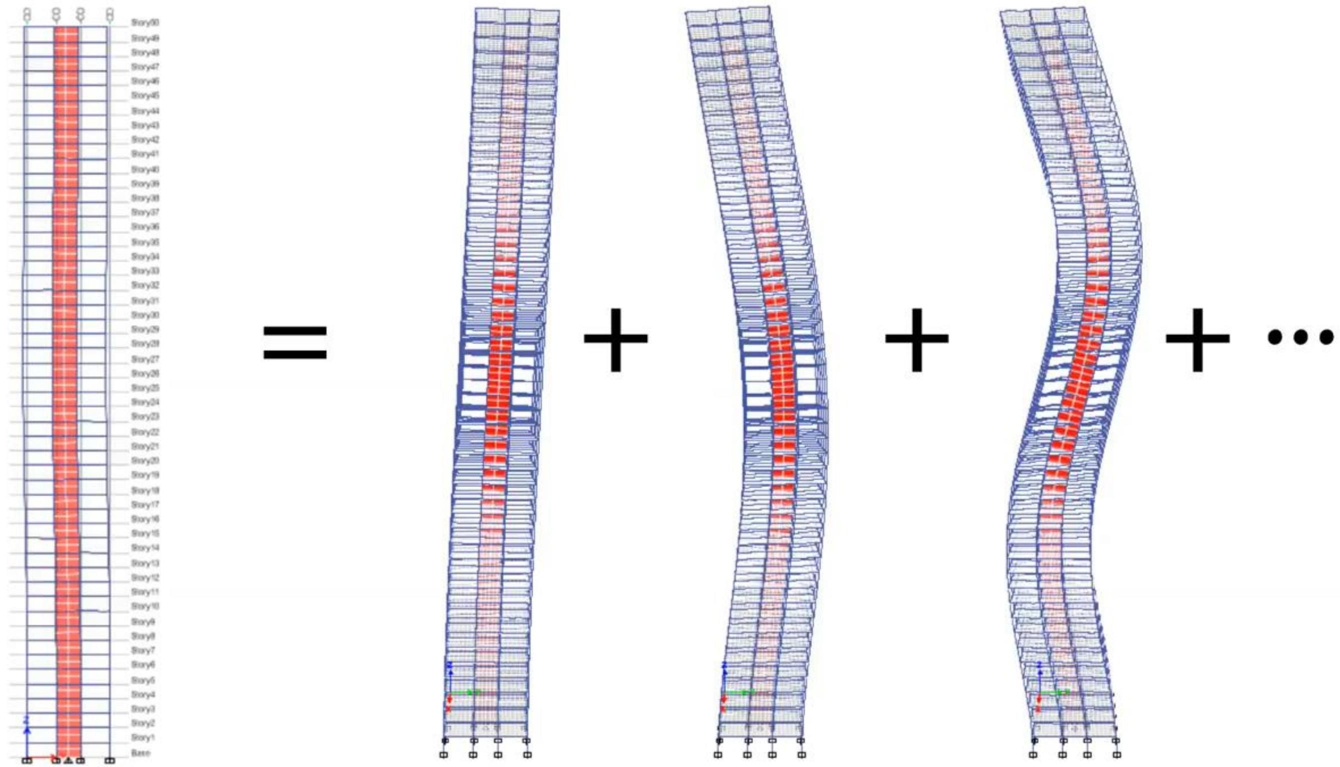
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{第1阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot 6\cos\omega_1 t}_{\text{第1阶模态响应}}}^{\text{第1阶模态主振动}} + \overbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\text{第2阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot (-2\sqrt{3}\cos\omega_2 t)}_{\text{第2阶模态响应}}}^{\text{第2阶模态主振动}} + \overbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{第3阶模态}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{6}} \cdot 0}_{\text{第3阶模态响应}}}^{\text{第3阶模态主振动}}$$

第1阶模态 → 决定各质量每一时刻位移的相对比值

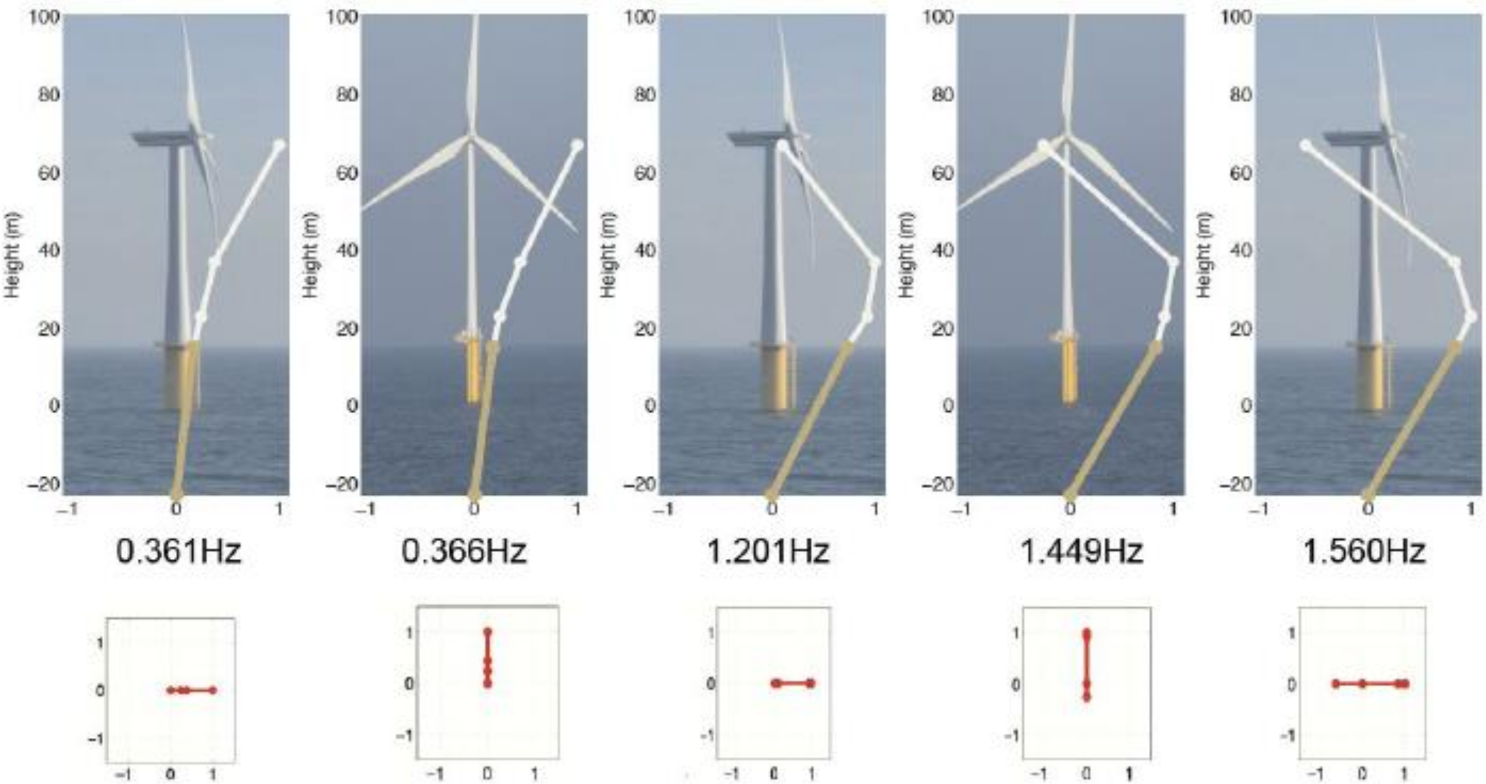
系统响应为各阶模态响应的叠加

多自由度系统模态叠加法的本质原因

高层建筑的模态叠加



风力发电设备的模态叠加



5.5 无阻尼系统对初始条件的响应

模态叠加法小结：

物理空间 耦合

$M\ddot{X}+KX=0$

$X=\Phi X_p$

主模态空间 解耦

$m_{pi}\ddot{x}_{pi}+k_{pi}x_{pi}=0$

$X=\Phi X_p$

物理空间 耦合

$M\ddot{X}+KX=0$

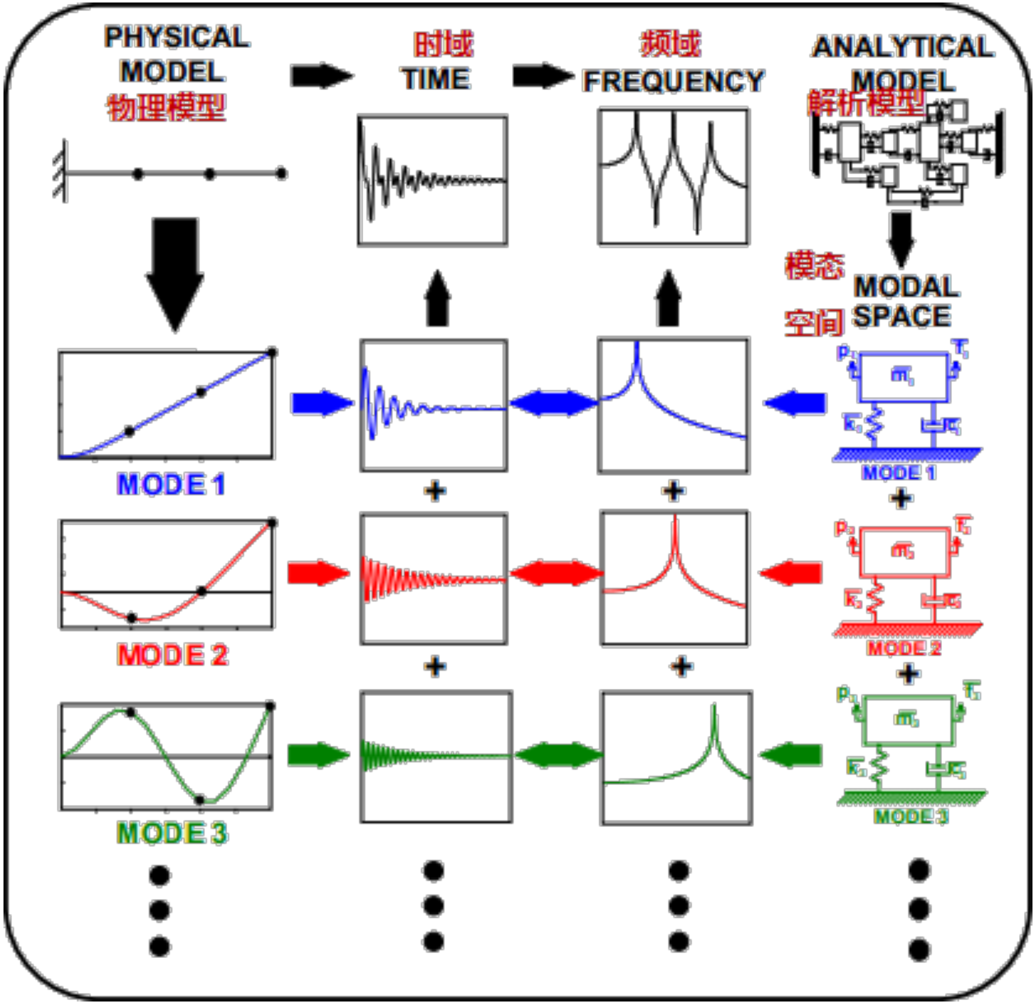
$X=\Phi_N X_N$

正则模态空间 解耦

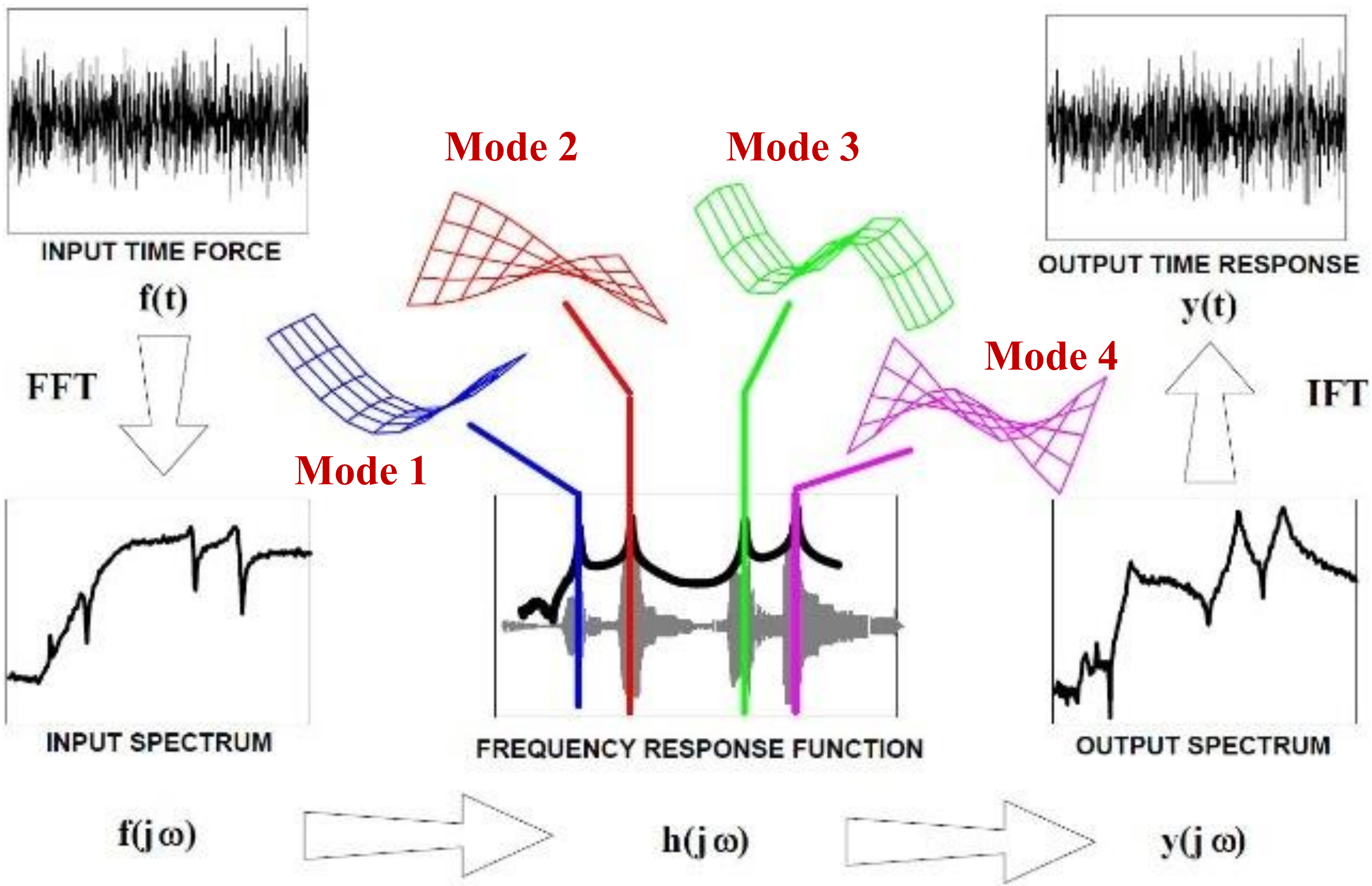
$\ddot{x}_{Ni}+\omega_i^2 x_{Ni}=0$

$X=\Phi_N X_N$

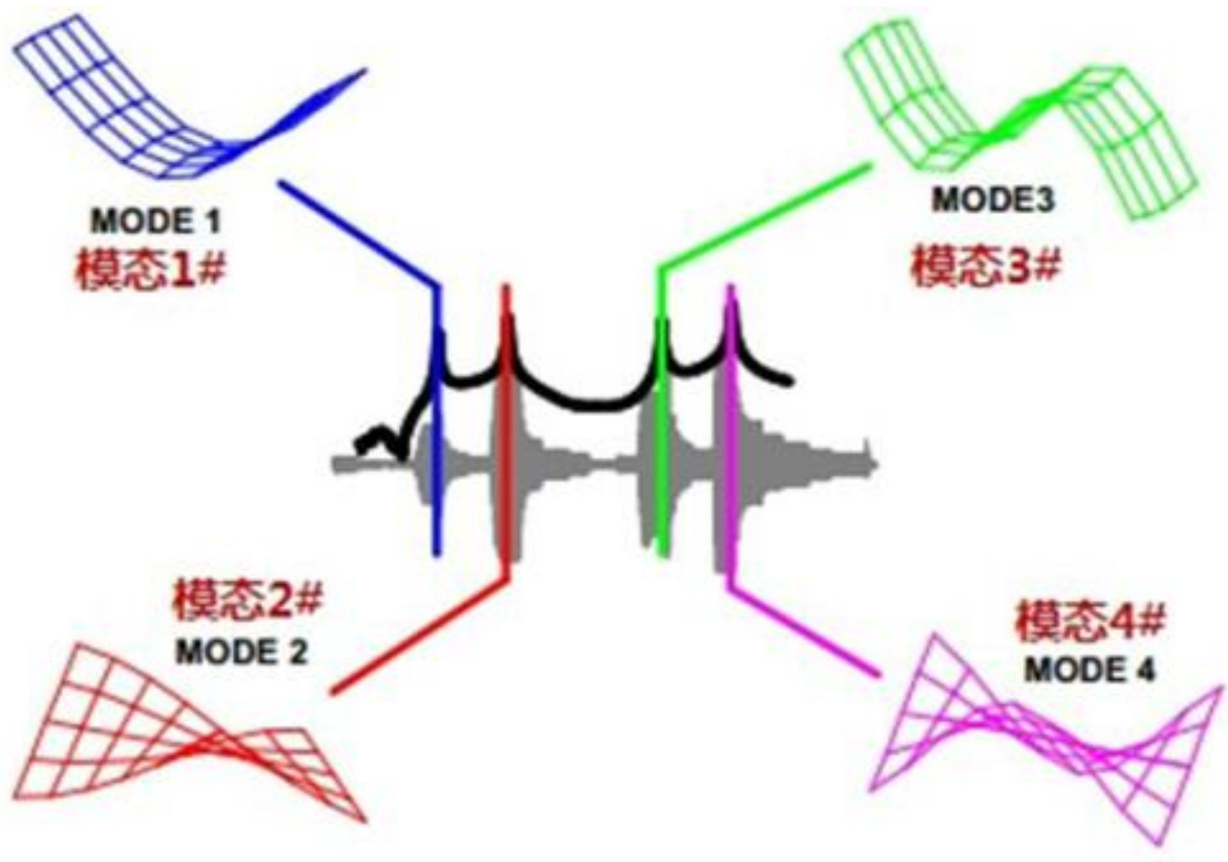
时域、频域、模态空间三者的关系？



时域、频域、模态空间三者的关系？

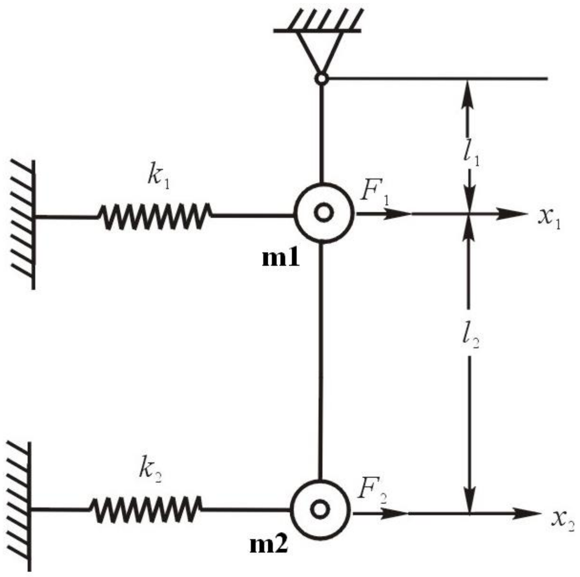


时域、频域、模态空间三者的关系？



第五讲作业

作业1：下图是一个带有附有质量 和 上的约束弹簧双摆，采用质量的微小水平平动 和 为坐标，写出系统运动的作用力方程（参考第4讲内容）



第五讲作业

作业2：如图所示2自由度系统。（1）求系统固有频率和模态矩阵，并画出各阶主振型图形；（2）当系统存在初始条件 和 时，试采用模态叠加法求解系统响应