第六章　弯曲变形



回　顾

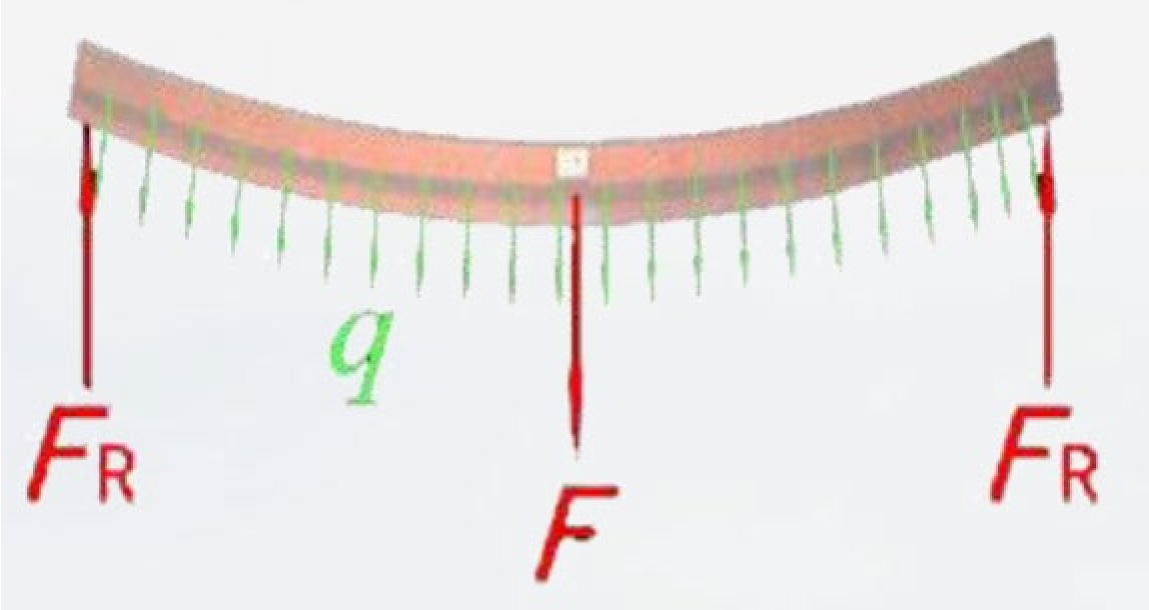
	第2章	第3章	第4/5/6章
内容	拉压	扭转	弯曲
内力	轴力F_N	扭矩T	剪力F_s / 弯矩M
内力图	轴力图	扭矩图	剪力图 / 弯矩图
应力类型	正应力	切应力	正应力 / 切应力
内力-应力	$\sigma=F_N/A$	$\tau_{max}=T/W_t$	$\sigma=\dfrac{My}{I_z}$ / $\tau=\dfrac{F_S S_z^*}{I_z b}$
载荷-变形	$\Delta l=F_N l/EA$	$\varphi=Tl/GI_p$	?

第六章 弯曲变形

§6.1 工程中的弯曲变形问题

弯曲的实例

起重机大梁



§6.2 **挠曲线**的微分方程

基本概念

什么是挠度、挠曲线、截面转角?

§6.2 挠曲线的微分方程

梁轴线变形后成为一条连续光滑的平面曲线，称为挠曲线。

建立坐标

x轴：变形前的梁轴线

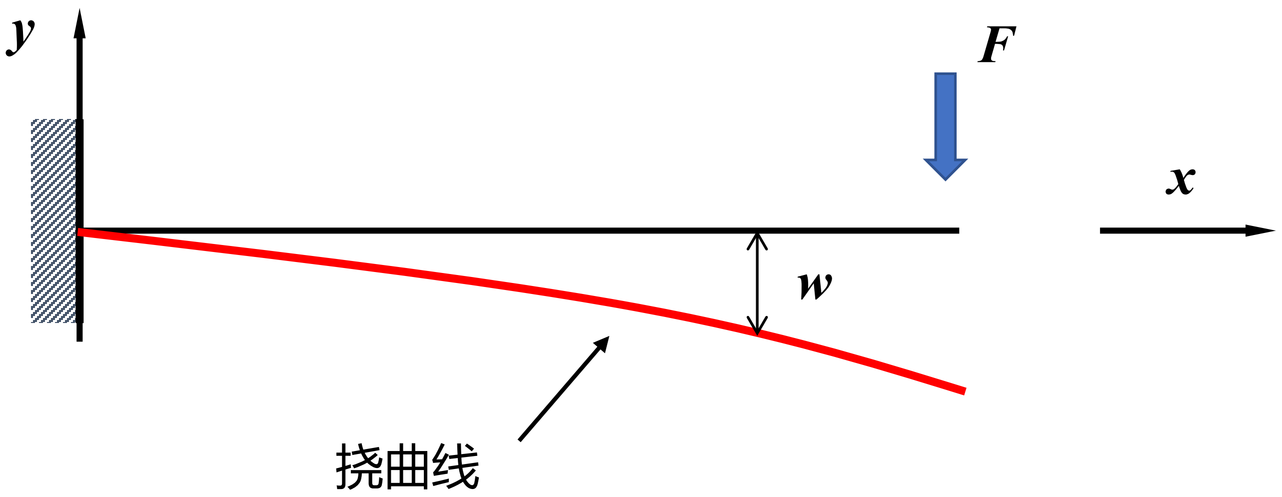
y轴：与x轴正交的轴

x-y平面：纵向对称面

Deflection

挠度w：挠曲线上任意点的纵坐标

(梁轴线任意点竖直方向的位移)



挠度 w 向上为正

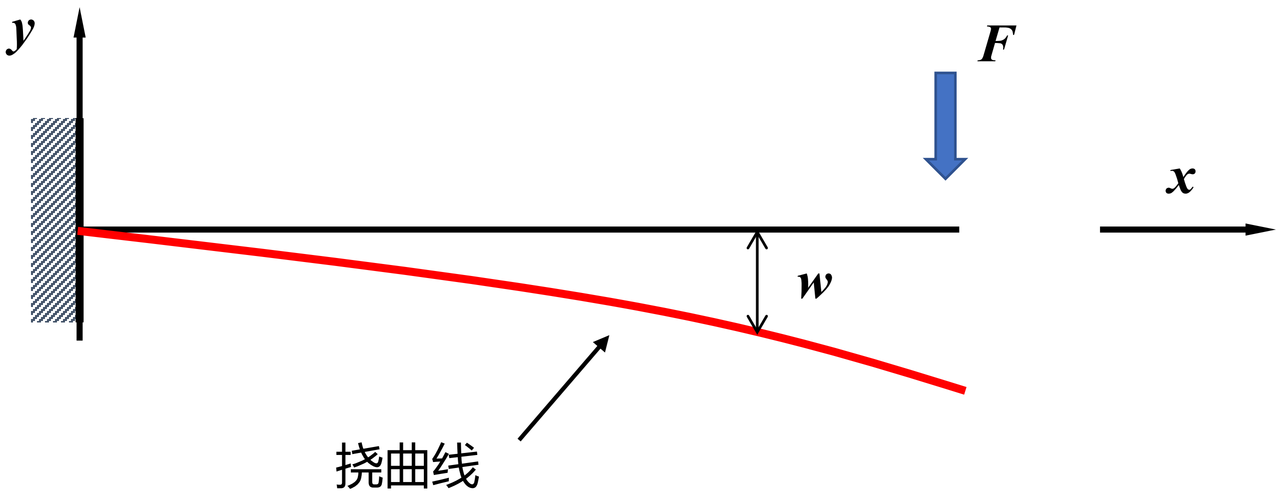
§6.2 挠曲线的微分方程

挠曲线的方程

$$w = w(x)$$

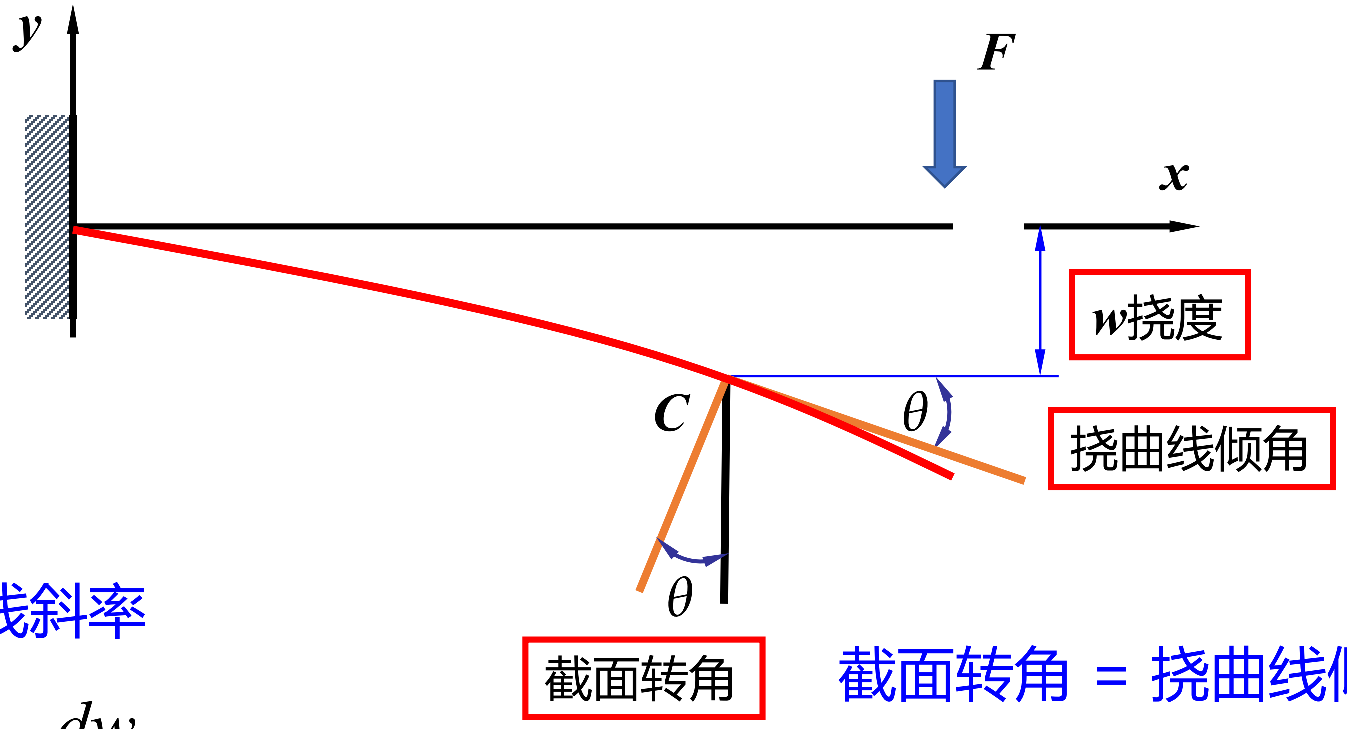
x 为梁变形前轴线上任一点的横坐标

w 为该点的挠度



§6.2 挠曲线的微分方程

横截面对其原来位置的角位移，称为截面转角，用 θ 表示。



挠曲线斜率

$$\tan\theta = \frac{dw}{dx} = w'$$

截面转角 = 挠曲线倾角

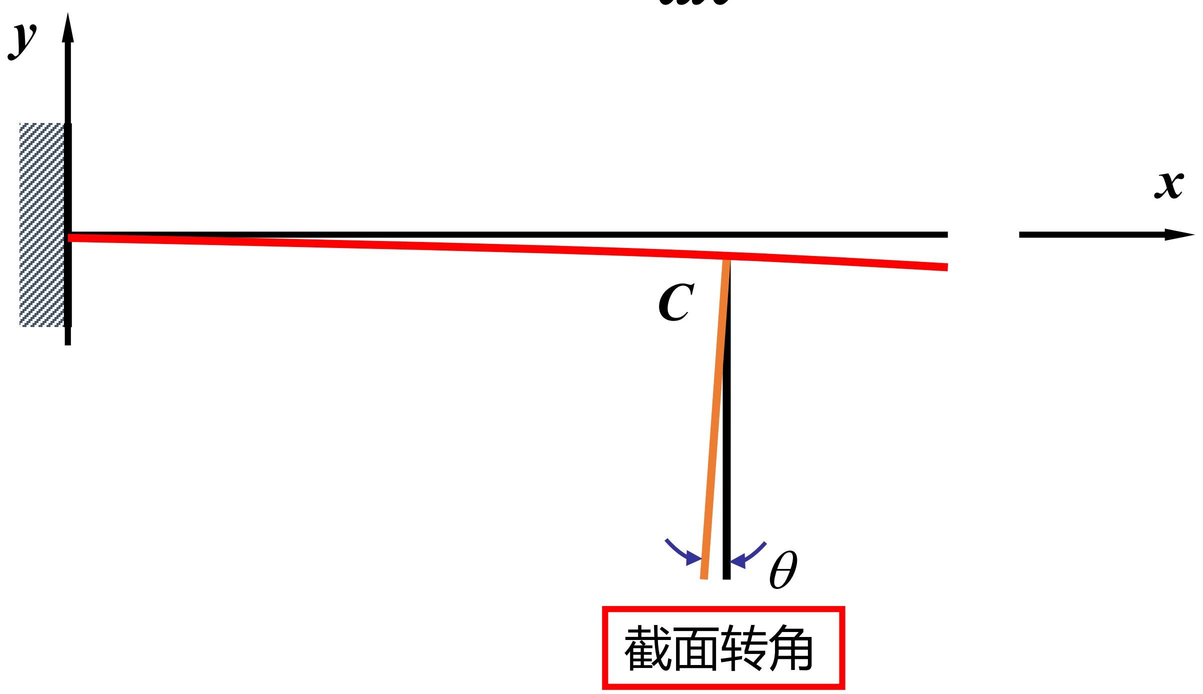
截面转角 θ 逆时针为正

§6.2 挠曲线的微分方程

小变形情况下，挠度很小，截面转角也非常小，挠曲线很平坦

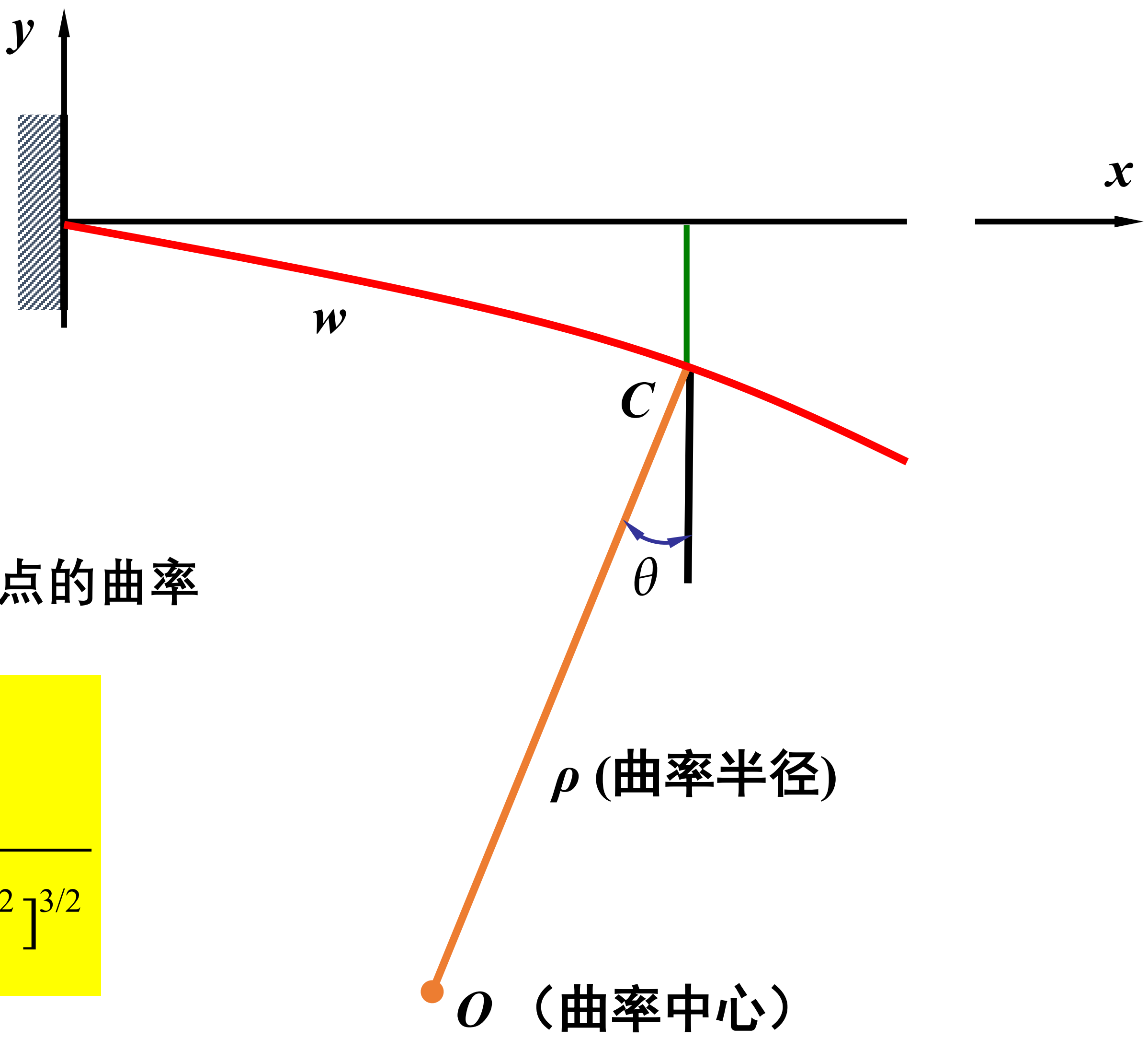
小变形时，挠度与截面转角的近似关系

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dw}{dx} = w'$$



1、公式的推导

从数学的角度



平面曲线w在任意点的曲率

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\left|\frac{d^2w}{dx^2}\right|}{[1+(\frac{dw}{dx})^2]^{3/2}}$$

§6.2 挠曲线的**微分方程**

1、公式的推导

从力学的角度

几何	$\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$
物理	$\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$
平衡	$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z}$

横力弯曲时，略去剪力的影响（细长梁）

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

M 和 ρ 都是 x 的函数。

§6.2 挠曲线的**微分方程**

1、公式的推导

力学 $$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

数学 $$\frac{1}{\rho}=\frac{|w''|}{[1+(w')^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|w''|}{[1+(w')^2]^{3/2}}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

§6.2 挠曲线的**微分方程**

1、公式的推导

$$\frac{w''}{[1+(w')^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

小变形时，$(w')^2 << 1$，故上式可近似为

$$\boldsymbol{w'' = \frac{M(x)}{EI_z}}$$

EI_z：抗弯刚度

挠曲线的近似微分方程

近似：（1）略去了剪力的影响

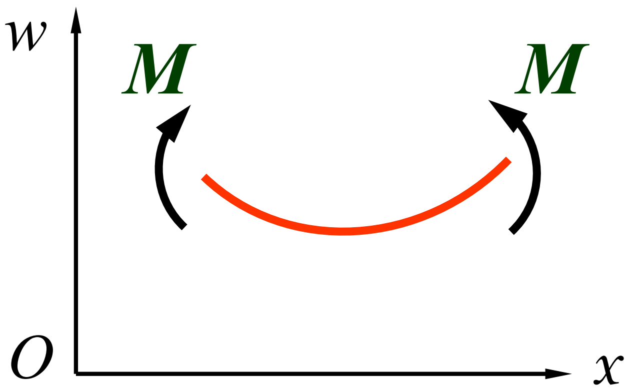
（2）略去了$(w')^2$

（3）$\theta \approx \mathbf{tan}\theta = w'$

§6.2 挠曲线的**微分方程**

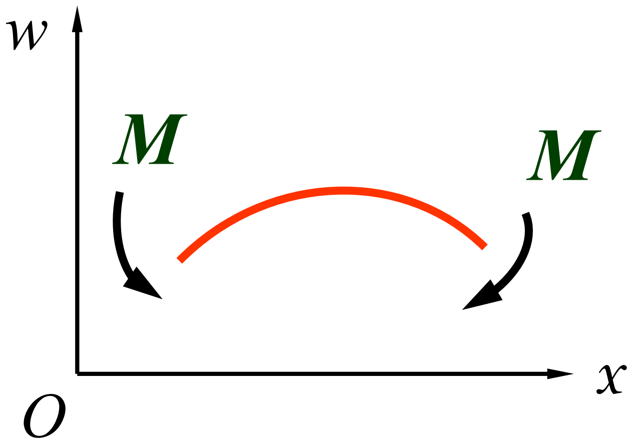
挠曲线开口朝上

$$w'' > 0, \qquad M > 0$$



挠曲线开口朝下

$$w'' < 0, \qquad M < 0$$



w”与 M 的正负号相同!

§6.3 用积分法求弯曲变形

1、挠曲线微分方程的积分

$$\boxed{w'' = \frac{M(x)}{EI_z}}$$

- 确定弯矩方程，两端积分
- 若为等截面直梁，其抗弯刚度EI_z为一常量。

（1）积分一次：转角方程

$$\theta = w' = \int \frac{M}{EI_z} dx + C$$

（2）积分两次：挠曲线方程

$$w = \int \left(\frac{M}{EI_z} dx \right) dx + Cx + D$$

C 和 D 为积分常数

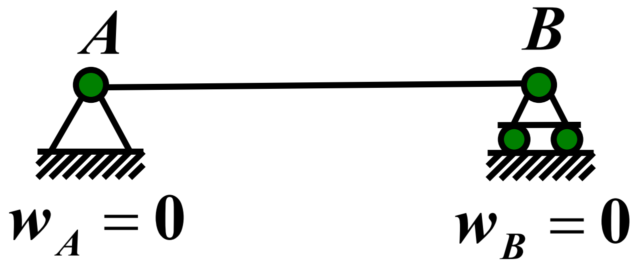
2、积分常数的确定

$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

$$w = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dxdx + Cx + D$$

1. **位移边界条件**
2. **光滑连续条件**

（1）在简支梁中, 左右两铰支座处的挠度w_A和w_B都等于0。



位移边界条件

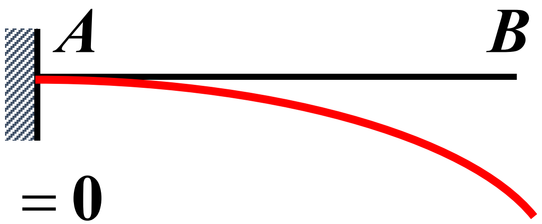
2、积分常数的确定

$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

$$w = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dxdx + Cx + D$$

1. **位移边界条件**
2. **光滑连续条件**

（2）在悬臂梁中，固定端处的挠度 w_A 和转角 θ_A 都等于0。



$w_A = 0$

$\theta_A = 0$

位移边界条件

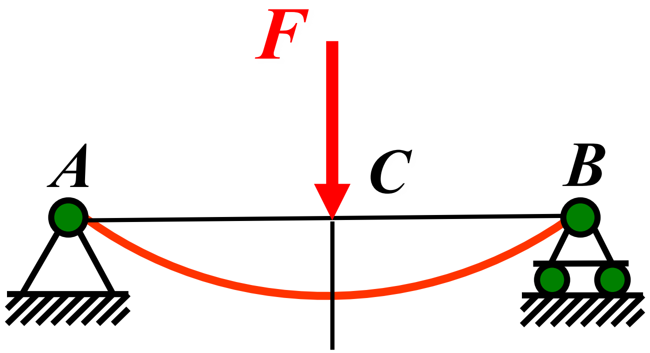
2、积分常数的确定

$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

$$w = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dxdx + Cx + D$$

1. 位移边界条件
2. 光滑连续条件

（3）在弯曲变形的对称点上，转角应等于零



$$\theta_C = 0$$

光滑连续条件

2、积分常数的确定

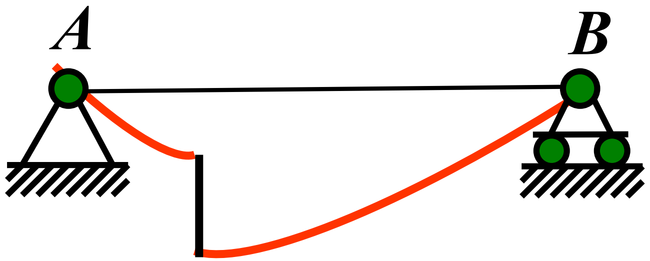
$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

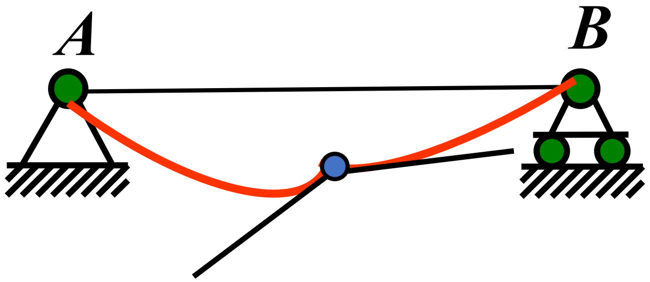
$$w = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dxdx + Cx + D$$

1. 位移边界条件

2. 光滑连续条件

(4) 挠曲线必须是连续且光滑的平面曲线，在挠曲线的任一点上，有唯一确定的挠度和转角

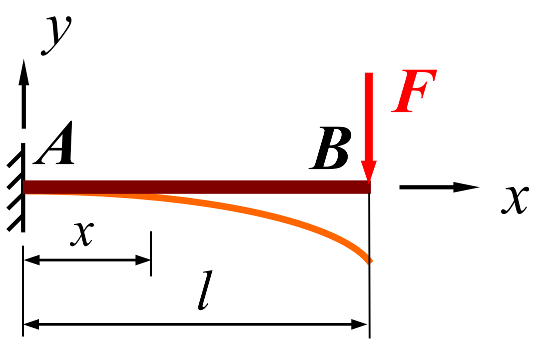




光滑连续条件

§6.3 用积分法求弯曲变形

例题1　求梁的转角方程和挠度方程，并求截面B的转角和挠度，梁的EI已知。



解：（1）由梁的整体平衡分析可得

$$F_{Ax}=0,\quad F_{Ay}=F(\uparrow),\quad M_A=Fl(\circlearrowleft)$$

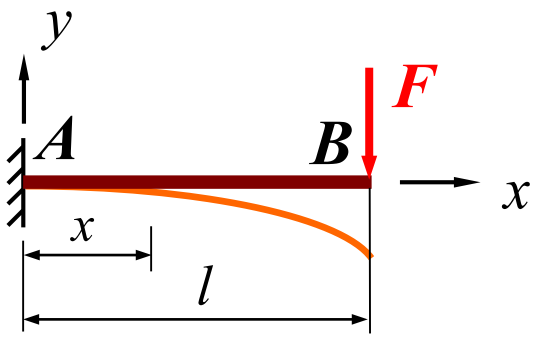
（2）写出x截面的弯矩方程

$$M(x)=-F(l-x)=F(x-l)$$

（3）挠曲线近似微分方程

$$EIw''=M(x)=F(x-l)$$

例题1　求梁的转角方程和挠度方程，并求截面B的转角和挠度，梁的EI已知。



解：　（3）挠曲线近似微分方程

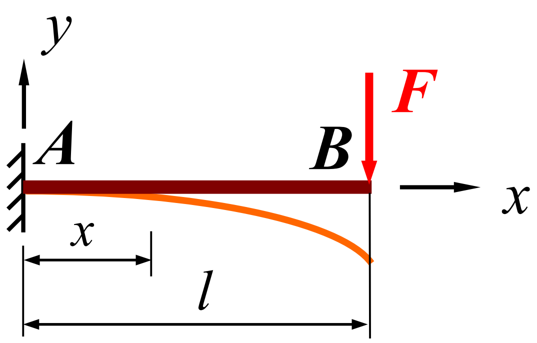
$$EIw''=M(x)=F(x-l)$$

（4）积分得到转角和挠度方程

积分一次　$$EIw'=EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2+C$$

再积分一次　$$EIw=\frac{1}{6}F(x-l)^3+Cx+D$$

例题1　求梁的转角方程和挠度方程，并求截面B的转角和挠度，梁的EI已知。



解：（5）由位移边界条件确定积分常数

$$\begin{cases} x=0, & \theta_A=0 \\ x=0, & w_A=0 \end{cases} \Rightarrow C=-\frac{1}{2}Fl^2, \quad D=\frac{1}{6}Fl^3$$

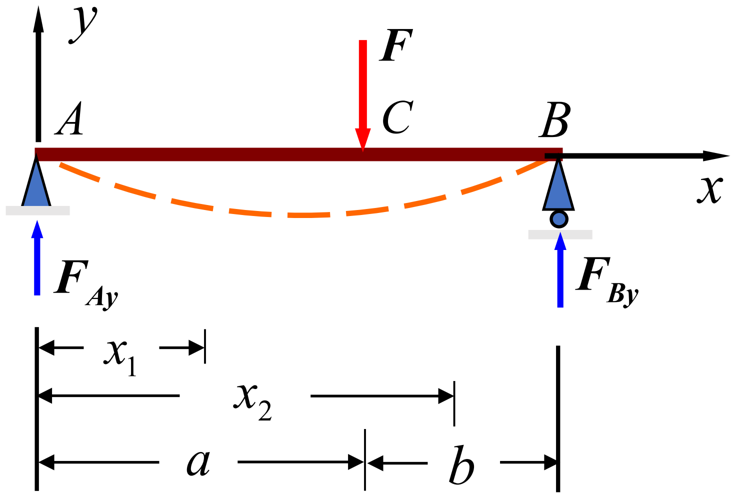
（6）确定转角方程和挠度方程

$$EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2-\frac{1}{2}Fl^2 \qquad EIw=\frac{1}{6}F(x-l)^3-\frac{1}{2}Fl^2x+\frac{1}{6}Fl^3=\frac{Fx^2}{6}(x-3l)$$

（7）截面B的转角和挠度

$$x=l, \quad \theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI} \qquad w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$$

例题2　求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解：（1）支座反力

$$F_{Ay}=\frac{Fb}{l},F_{By}=\frac{Fa}{l}$$

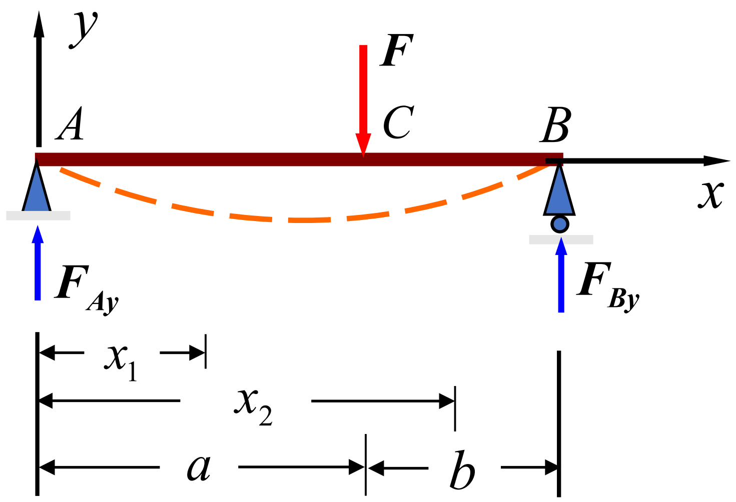
（2）分段列出弯矩方程

AC段：
$$M\left(x_1\right)=F_{Ay}x_1=\frac{Fb}{l}x_1,\ 0\le x_1\le a$$

CB段：
$$M\left(x_2\right)=F_{Ay}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a),\ a\le x_2\le l$$

§6.3 用积分法求弯曲变形

例题2 求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解：（3）列挠曲线近似微分方程并积分

AC段：

$$0 \le x_1 \le a$$

$$\boxed{EIw_1'' = M(x_1) = \frac{Fb}{l}x_1}$$

$$EIw_1' = EI\theta(x_1) = \frac{Fb}{2l}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$$

CB段：

$$a \le x_2 \le l$$

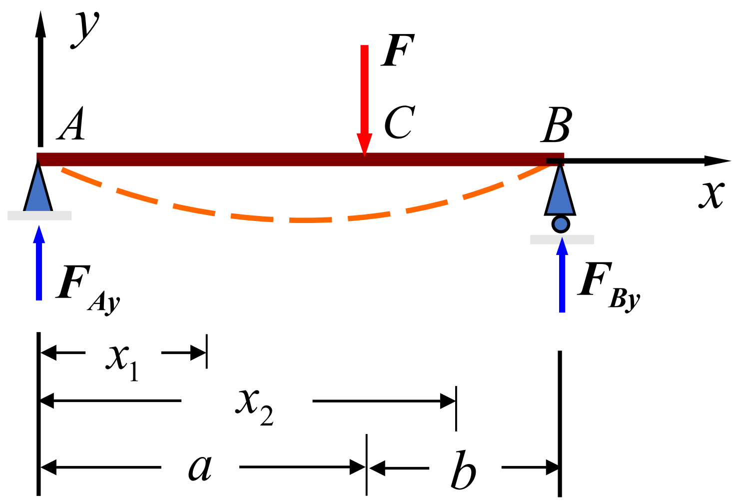
$$\boxed{EIw_2'' = M(x_2) = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a)}$$

$$EIw_2' = EI\theta(x_2) = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 + C_2$$

$$EIw_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 + C_2x_2 + D_2$$

对$(x\text{-}a)$积分时，将$(x\text{-}a)$项作为积分变量，简化运算

例题2　求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解：（4）确定积分常数

位移边界条件

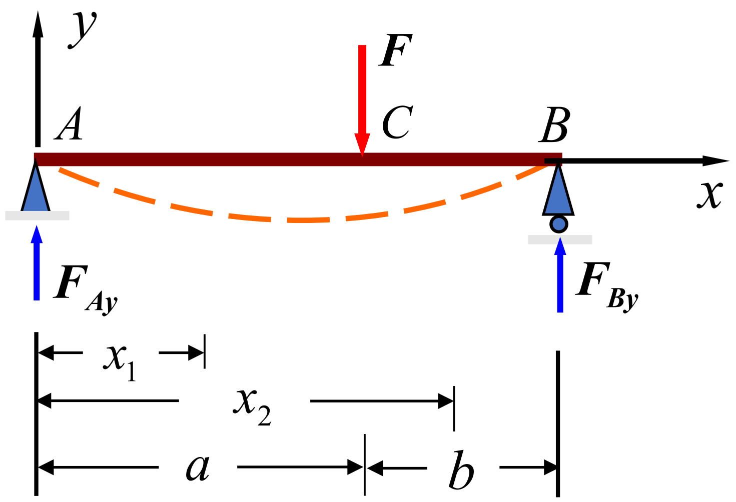
$$\begin{cases} x_1 = 0, & w_1 = 0 \\ x_2 = l, & w_2 = 0 \end{cases}$$

光滑连续条件

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = a, & \theta_1 = \theta_2 \\ x_1 = x_2 = a, & w_1 = w_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2 = -\dfrac{Fb}{6l}\left(l^2 - b^2\right) \\ D_1 = D_2 = 0 \end{cases}$$

例题2　求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解：（5）转角方程和挠度方程

AC段：$0 \le x_1 \le a$

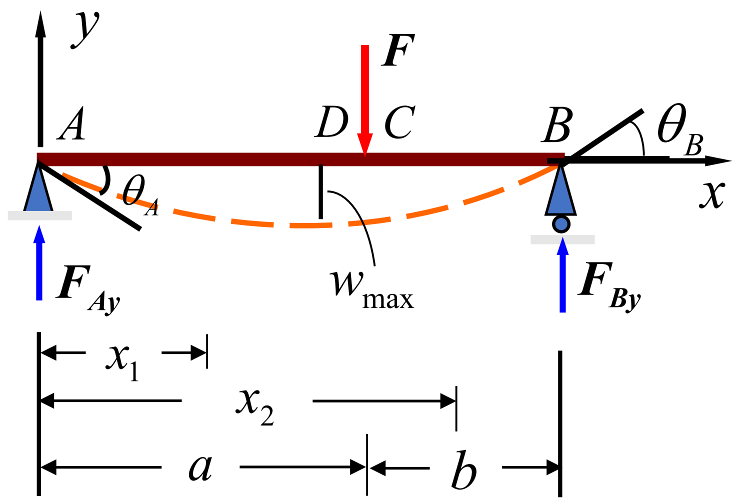
$$EI\theta_1 = -\frac{Fb}{6l}\left(l^2 - b^2 - 3x_1^2\right) \qquad EIw_1 = -\frac{Fbx_1}{6l}\left(l^2 - b^2 - x_1^2\right)$$

CB段：$a \le x_2 \le l$

$$EI\theta_2 = -\frac{Fb}{6l}\left[(l^2 - b^2 - 3x_2^2) + \frac{3l}{b}(x_2 - a)^2\right]$$

$$EIw_2 = -\frac{Fb}{6l}\left[(l^2 - b^2 - x_2^2)x_2 + \frac{l}{b}(x_2 - a)^3\right]$$

例题2　求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解：（6）确定最大转角（倾角最大处）

$$x_1=0,\quad \theta_A=-\frac{Fab}{6EIl}(l+b)$$

$$x_2=l,\ \theta_B=\frac{Fab}{6EIl}(l+a)$$

确定最大挠度（倾角为零处）

$$x_1=a,\quad \theta_C=\frac{Fab}{3EIl}(a-b)>0$$

$$w_1'=0 \qquad x_D=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$$

$$\Rightarrow w_{max}=w_1(x_D)=-\frac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}$$

§6.3 用积分法求弯曲变形

积分法的优缺点

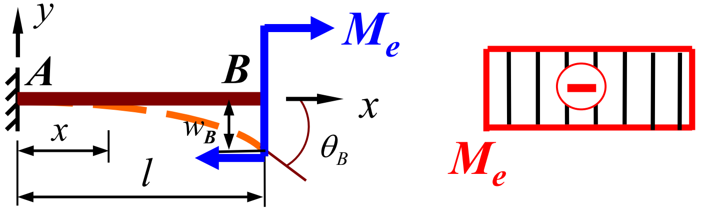
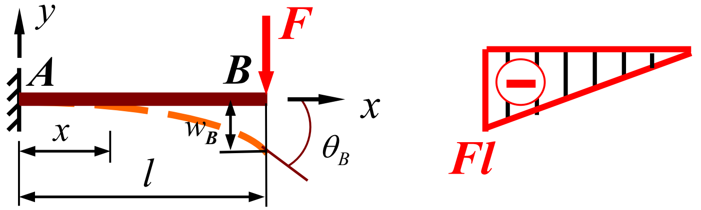
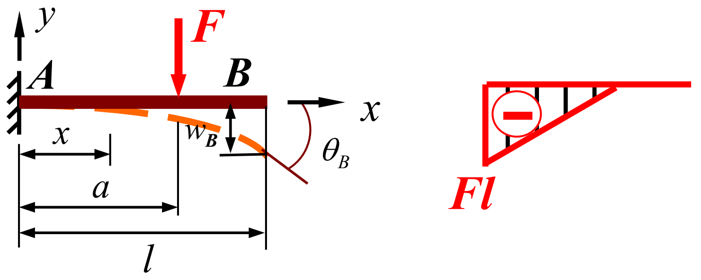
优点：（1）可以计算得到全梁的挠度和转角；

（2）可以了解全梁的变形情况。

缺点： 载荷复杂时，需要分段考虑，确定积分常数十分复杂。

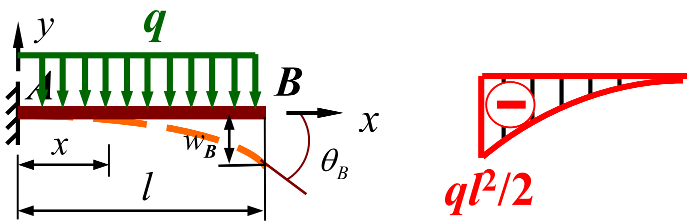
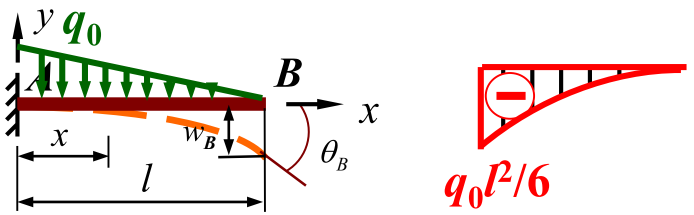
1. 先用积分法确定简单载荷下的变形
2. 再运用叠加法，解决复杂情况下的变形

常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
1		$w=-\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B=-\frac{M_e l}{EI}$ $w_B=-\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI}$ $w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x) \quad (0\le x\le a)$ $w=-\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a) \quad (a\le x\le l)$	$\theta_B=-\frac{Fa^2}{2EI}$ $w_B=-\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

悬臂梁

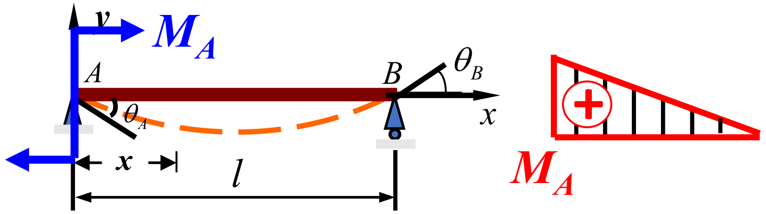
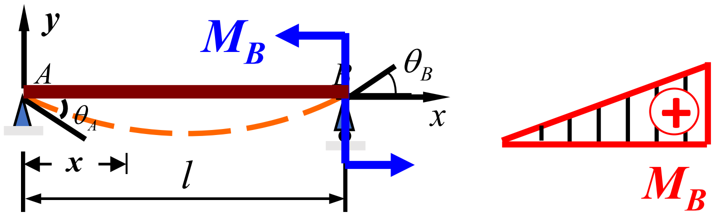
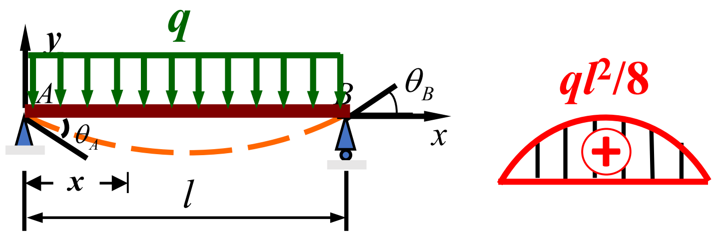
常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
4		$w=-\frac{qx^2}{24EI}\left(x^2-4lx+6l^2\right)$	$\theta_B=-\frac{ql^3}{6EI}$ $w_B=-\frac{ql^4}{8EI}$
5		$w=-\frac{q_0x^2}{120EIl}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$	$\theta_B=-\frac{q_0l^3}{24EI}$ $w_B=-\frac{ql^4}{30EI}$

悬臂梁

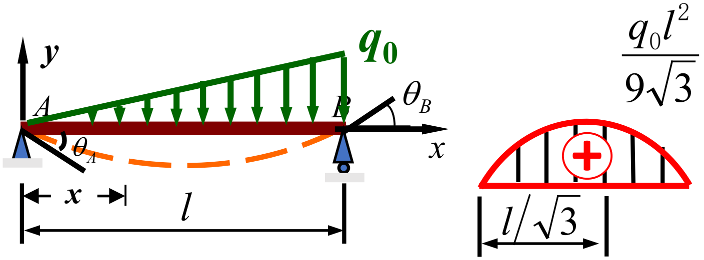
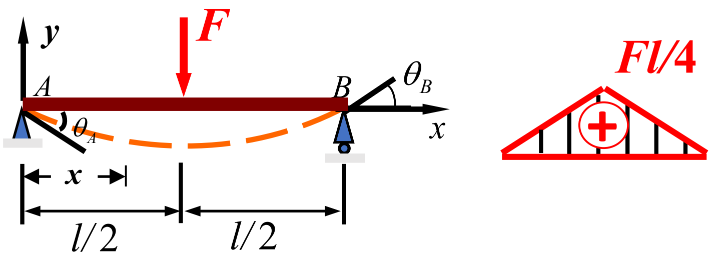
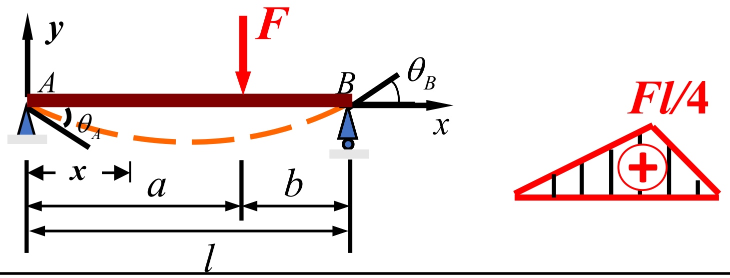
§6.3 用积分法求弯曲变形

常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
1		$w=-\frac{M_A x}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{M_A l}{3EI}$, $\theta_B=\frac{M_A l}{6EI}$ $w_C=-\frac{M_A l^2}{16EI}$ $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ $w_{\max}=-\frac{M_A l^2}{9\sqrt{3}EI}$
2		$w=-\frac{M_B x}{6EIl}\left(l^2-x^2\right)$	$\theta_A=-\frac{M_B l}{6EI}$, $\theta_B=\frac{M_B l}{3EI}$ $w_C=-\frac{M_B l^2}{16EI}$ $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ $w_{\max}=-\frac{M_B l^2}{9\sqrt{3}EI}$
3		$w=-\frac{qx}{24EI}\left(l^3-2lx^2+x^3\right)$	$\theta_A=-\frac{ql^3}{24EI}$, $\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}$ $w_{\max}=-\frac{5ql^4}{384EI}$

简支梁

常见载荷下梁的挠度与转角（P195，表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	端截面转角与最大挠度
4		$w=-\frac{q_0 x}{360EIl}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$	$\theta_A=-\frac{7q_0 l^3}{360EI}$, $\theta_B=\frac{q_0 l^3}{45EI}$ $w_{\max}=-\frac{5q_0 l^4}{768EI}$
5		$w=-\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)\quad\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=-\frac{Fl^2}{16EI}$, $\theta_B=\frac{Fl^2}{16EI}$ $w_{\max}=-\frac{Fl^3}{48EI}$
6		$w=-\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)\quad(0\le x\le a)$ $w=-\frac{Fb}{6EIl}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]\quad(a\le x\le l)$	$\theta_A=-\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$, $\theta_B=\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$ $w_C=-\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$ $(x=\frac{l}{2}$, 当$a\ge b$时) $w_{\max}=-\frac{Fb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl}$ $(x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$, 当$a\ge b$时)

简支梁

§6.4 用叠加法求弯曲变形

1、叠加原理

梁的弯曲变形很小，且梁在线弹性范围内工作时，

梁在多种不同的载荷（集中力、集中力偶或分布力）同时作用下的变形（挠度和转角），

等于每一载荷单独作用下的变形（挠度和转角）的叠加（即挠度和转角的代数和）。

当梁上同时作用几个载荷时，各个载荷所引起的变形是各自独立的，互不影响。

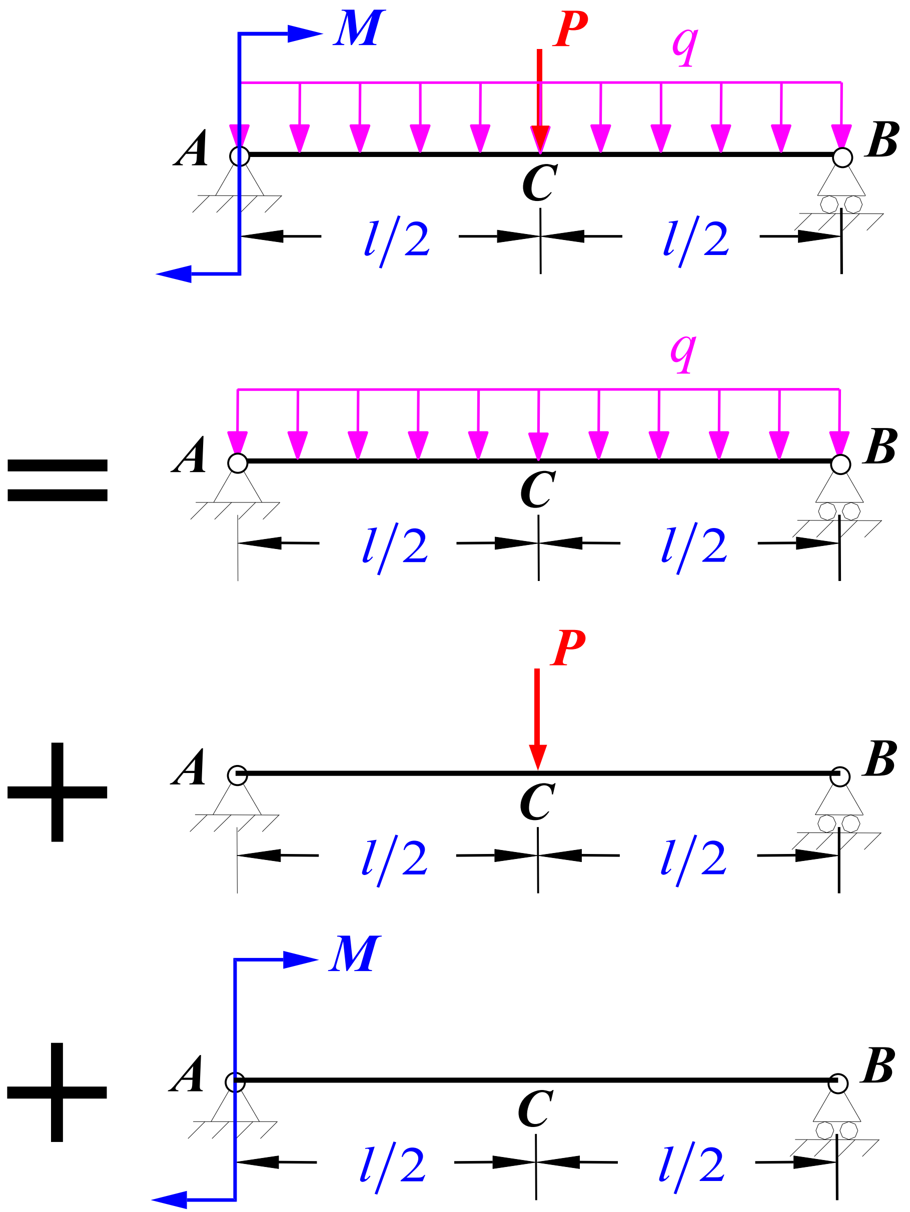
§6.4 用叠加法求弯曲变形

例题3 用叠加法求 w_C、θ_A、θ_B

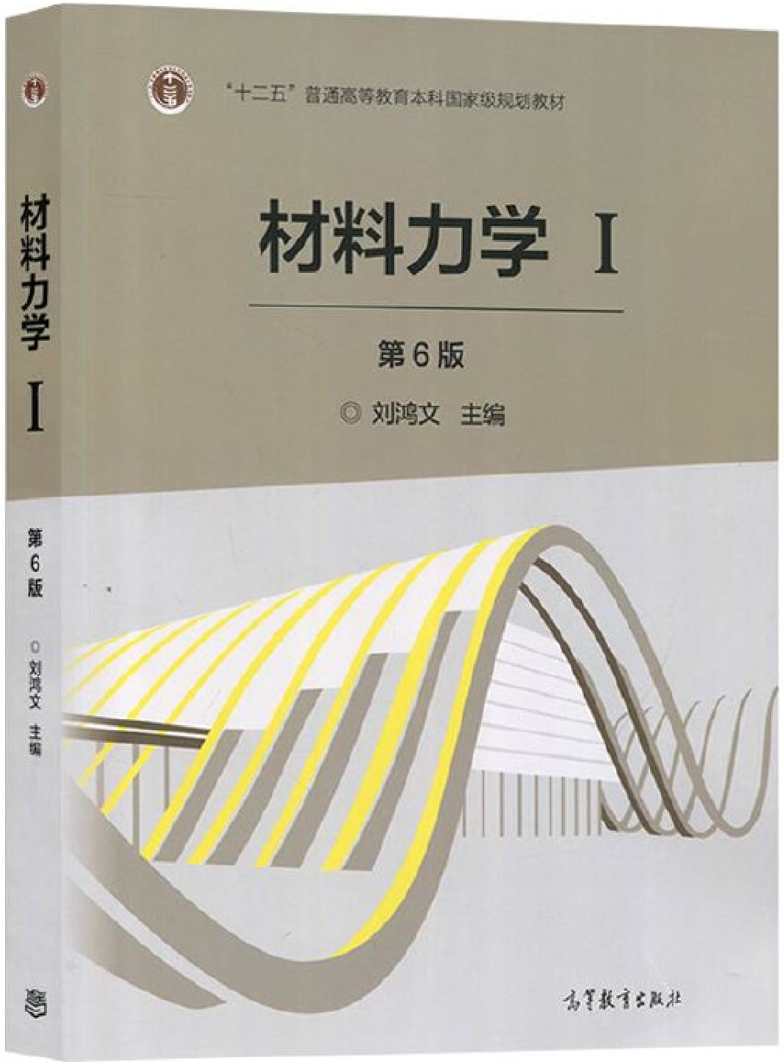
$$w_C = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Ml^2}{16EI}$$

$$\theta_A = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Ml}{3EI}$$

$$\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI} + \left(-\frac{Pl^2}{16EI}\right) + \left(-\frac{Ml}{6EI}\right)$$



作业

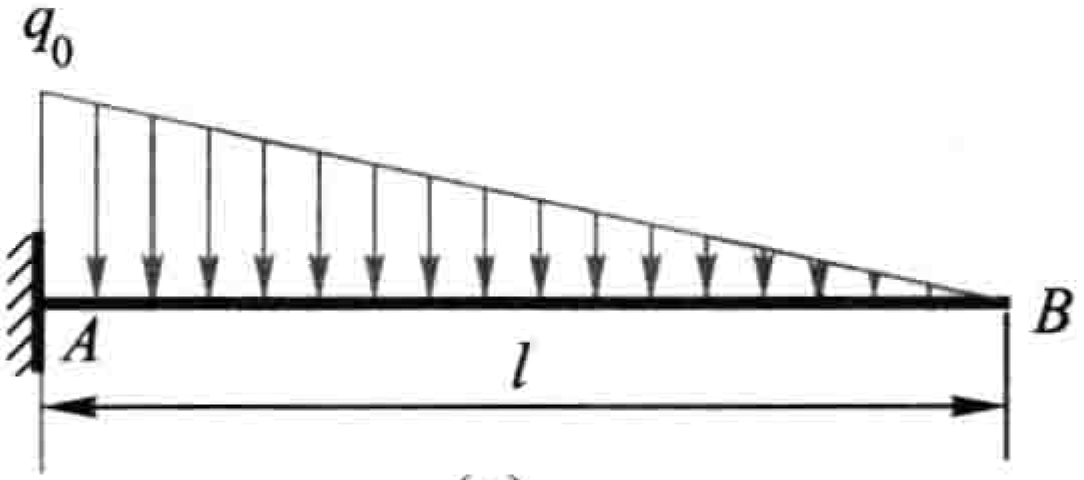


6.3 a-b （积分法求挠曲线方程）

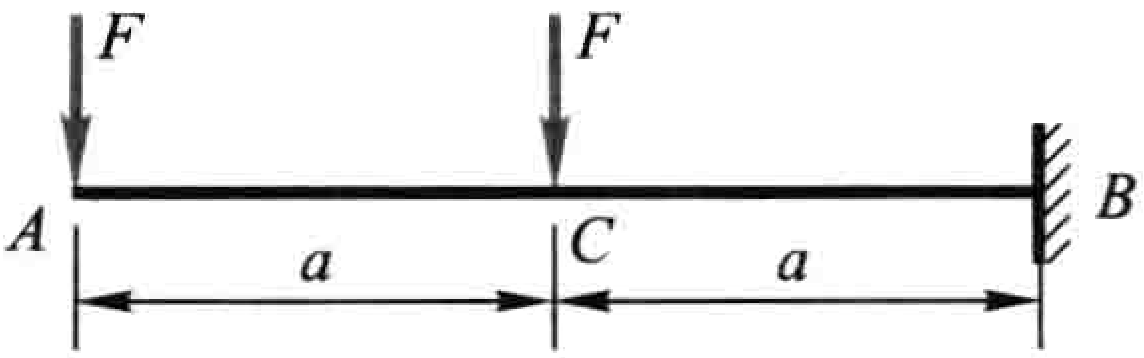
4.23日(周二）之前交

作业

6.3 用积分法求图示各梁的挠曲线方程及自由端的挠度和转角。设 EI 为常量。



(a)



(b)