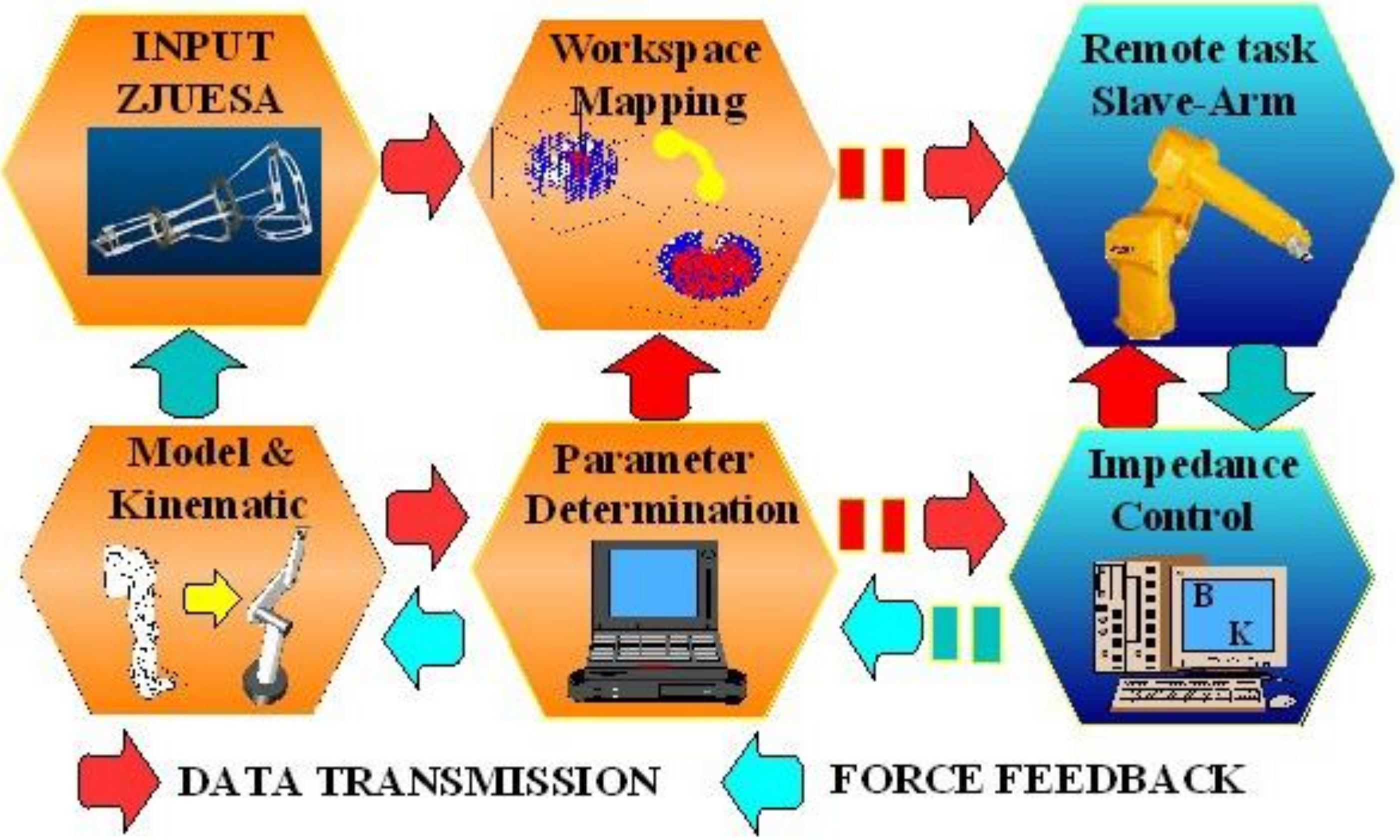
第2章 线性方程组-1

苏 芮
srhello@zju.edu.cn
开物苑4-202

外骨骼机械手--- ZJUESA

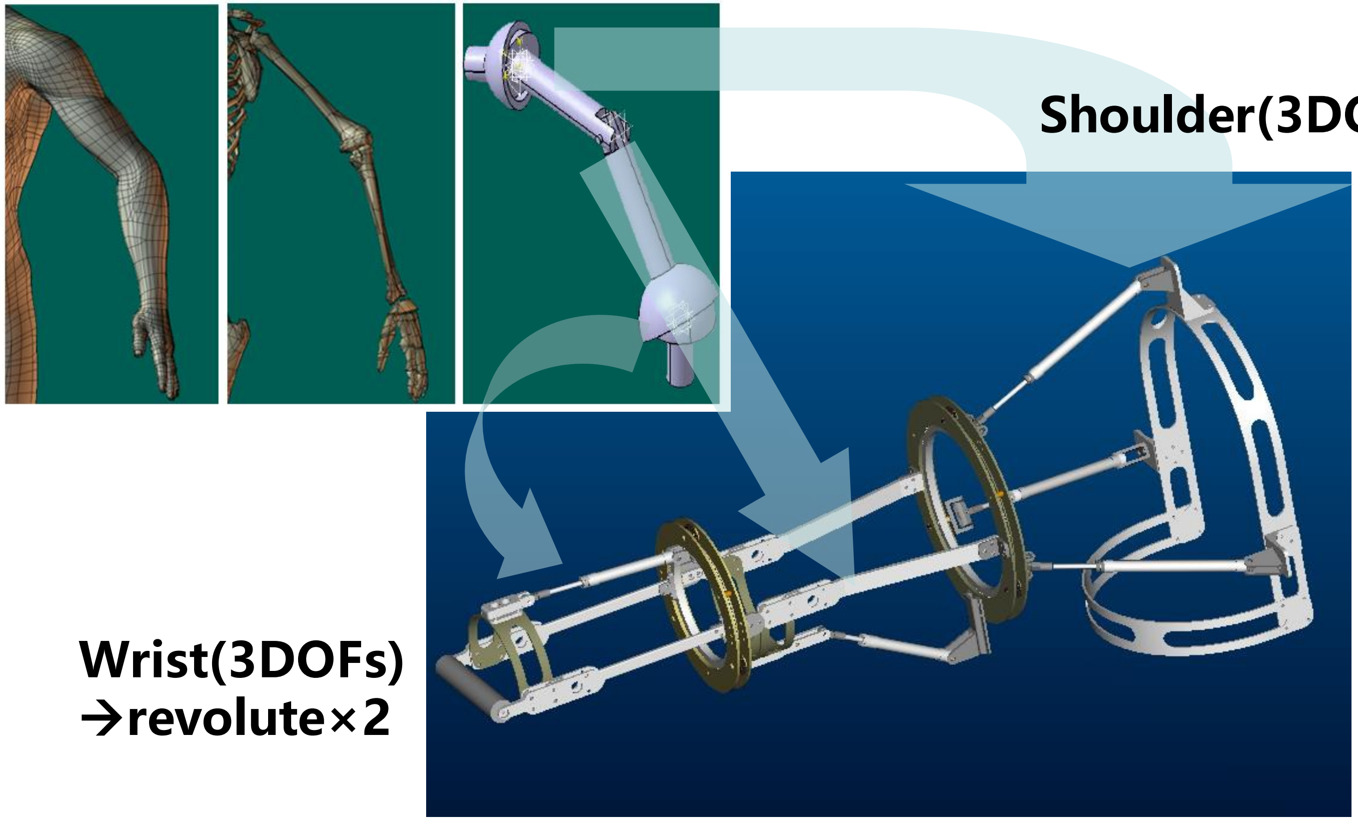
- A novel wearable Exoskeleton Arm for robot master-slave control with force feedback



外骨骼机械手--- ZJUESA

- **Mechanism of the ZJUESA**

Designing based on the anatomy of human upper-limb.



Shoulder(3DOFs)→3RPS+ revolute

Wrist(3DOFs) →revolute×2

Elbow(1DOF) →revolute

线性方程组的应用

根据营养成分表，给出满足需求的营养餐配方.

营养成分表(每100g)

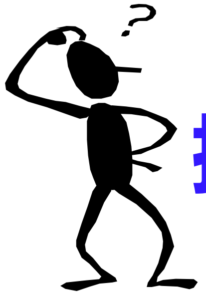
营养 \ 食物	大米	豆腐	牛肉	油菜	萝卜	需求
蛋白质(g)	8.3	7.4	20.1	2.6	1.4	24.2
脂肪(g)	2.5	3.5	10.2	0.4	0.2	9
碳水化合物(g)	74.2	2.7	1.2	2.0	8.8	60.3
钙(mg)	14	277	7.2	106	32	389
铁(mg)	2.3	1.9	4.4	1.2	1.5	8.7

如何配餐? x1 x2 x3 x4 x5

线性方程组的应用

设五种食物的用量分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 个单位，则

$$\begin{aligned}
8.3x_1+7.4x_2+20x_3+2.6x_4+1.4x_5&=24.2\\
2.5x_1+3.2x_2+10.2x_3+0.4x_4+0.2x_5&=9\\
74.2x_1+2.7x_2+1.7x_3+2.0x_4+8.8x_5&=60.3\\
14x_1+277x_2+7.2x_3+106x_4+32x_5&=389\\
2.3x_1+1.9x_2+4.4x_3+1.2x_4+1.5x_5&=8.7
\end{aligned}$$



提问：如何计算这五种食物的组合？

线性方程组的应用

从图 3-1 所示的电路中求出电流强度。

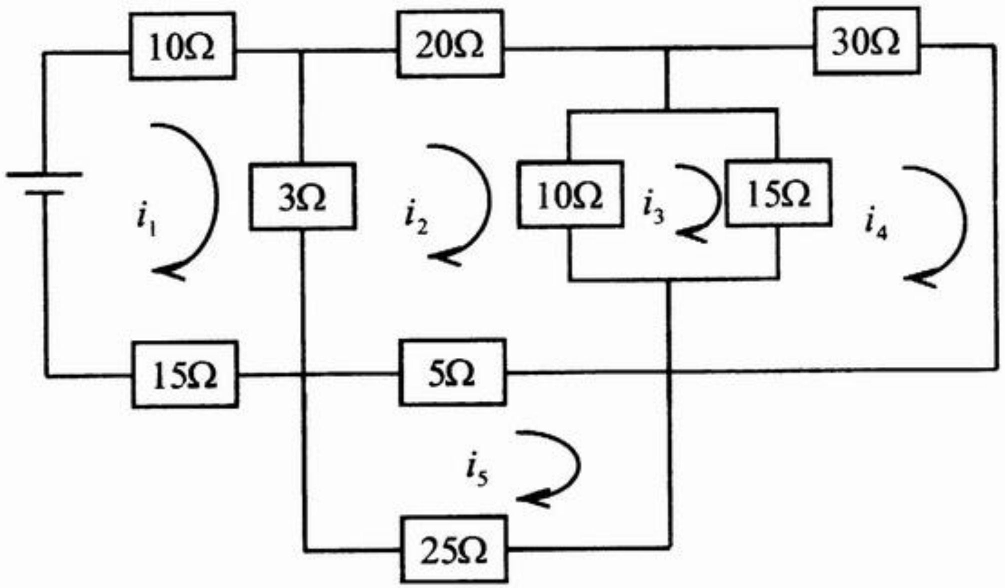


图 3-1

就需要解方程组：

$$\begin{cases} 28i_1 - 3i_2 = 10 \\ -3i_1 + 38i_2 - 10i_3 - 5i_5 = 0 \\ -10i_2 + 25i_3 - 15i_4 = 0 \\ -15i_3 + 45i_4 = 0 \\ -5i_2 + 30i_5 = 0 \end{cases}$$

线性方程组的应用

用线性代数中的概念来表达，则线性方程组为：

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

其中的$a_{1,1}$，$a_{1,2}$以及b_1，b_2等等是已知的常数，而x_1，x_2等等则是要求的未知数。

The Solution of Linear System

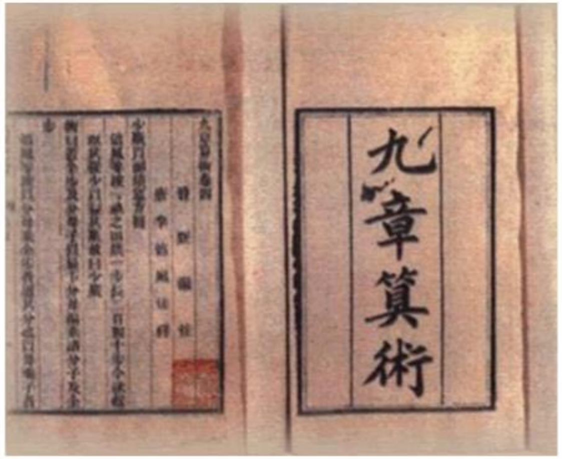
AX=B

线性方程组的应用

一个古老的数学问题

今有 上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。
问上、中、下禾实一秉各几何？

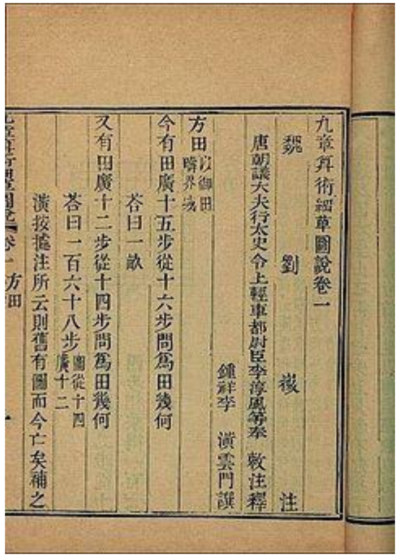
——《九章算术》



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Ax = b}$$

线性方程组的应用



九章算術細草圖說卷一

魏 劉 徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋

錢塘李 潢雲門譔

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二

潢按徽注所云則舊有圖而今亡矣補之

《九章算术》总结了自先秦以来的中国古代数学，它既包含了以前已经解决了的数学问题，又有汉朝时新发现的数学成就。

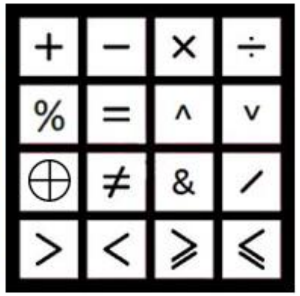
《九章算术》中有许多数学问题都是世界上记载最早的。例如，关于比例算法的问题，它和后来在16世纪西欧出现的三分律的算法一样。关于双设法的问题，在阿拉伯曾称为契丹算法，13世纪以后的欧洲数学著作中也有如此称呼的，这也是中国古代数学知识向西方传播的一个证据。

《九章算术》隋、唐时，流传到了日本和朝鲜，**对其古代的数学发展也产生了很大的影响，之后更远传到印度、阿拉伯和欧洲**，现已译成日、俄、英、法和德等多种文字版本。

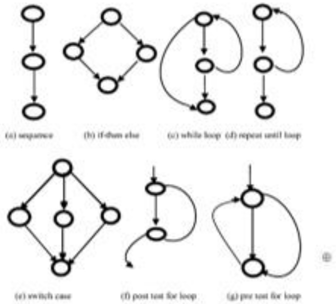
新华社在2020年12月4日的报道《最快！我国量子计算机实现算力全球领先》和同日中国科学院量子信息与量子科技创新研究院网站刊载文章《中国科学家实现“量子计算优越性”里程碑》，**中国科学技术大学宣布该校潘建伟等人成功构建76个光子的量子计算原型机**，该原型机的名字“九章”正是来源于《九章算术》。

求解线性方程组

数据储存



运算操作

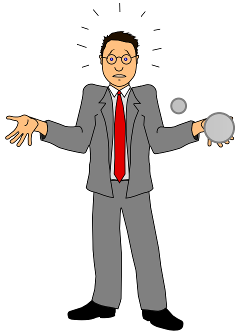


逻辑控制

快速、稳定、大规模

- 计算机仅能进行**高速、稳定、大规模**的简单数据运算
- 需要通过**高效、稳定的算法**组合计算机的简单运算去实现各种**复杂的功能**和解决各种**复杂的问题 （核心是算法！！）**

第八章　二元一次方程组
8.1　二元一次方程组
8.2　消元——解二元一次方程组
8.3　实际问题与二元一次方程组



怎么让计算机帮我们解线性方程组?

根据**计算机运算特点**，设计/分析有效的大规模线性方程组求解算法

求解线性方程组

解法一：克莱姆法则(Cramer's rule)

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

如果A是一个可逆矩阵（$\det A \neq 0$）

方程的解为 $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\boxed{\det}(A)}$ A_i是A第i列的列向量被$\boldsymbol{B}$取代后得到的矩阵

行列式

求解线性方程组

2个未知量 $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

方程的解为 $$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

3个未知量 $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

方程的解为 $$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}、\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad \text{以及} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

求解线性方程组

2阶矩阵的行列式：$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

3阶矩阵的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

计算量：n=20

n!(n+1)+n=51090942171709440020

利用2GHZ的计算机计算需要多长时间?　　800多年?

计算行列式的计算复杂度随维数的增长非常快，实际计算中并未被采用，需要有更好的数值计算方法

求解线性方程组

$$AX = B$$

线性代数 $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B$$

求逆矩阵是否是最佳方案?

单个变量的线性方程组

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

$$\boxed{x = 7^{-1} \times 21 = 0.142857 \times 21 = 2.99997}$$

求解线性方程组

MATLAB直接计算

如果A为一个任意大小和形状的矩阵，而矩阵B和A的行数一样多时：

$$AX = B$$

$$X = A \backslash B$$

反斜杠左除 (backward slash)

类似地，求解矩阵A在右边，而矩阵B和A的列数一样多时：

$$XA = B$$

$$X = B / A$$

正斜杠右除 (forward slash)

计算机是如何实现这一数值计算任务的？？

上节课知识回顾

1.数值计算方法的误差分析

- 绝对误差、相对误差、有效数字（绝对误差限、相对误差限）
- 误差传播分析的方法和原则 （绝对条件数）

2.数值计算方法性能分析

- 可靠性分析（前退vs后退）
- 计算复杂性（秦九昭法）

3.线性方程组求解

- 线性方程组应用（九章算术）
- 线性代数求解（克拉姆法则？求逆矩阵？）

高斯消去法 （3 x 3 例子）

$$
\begin{aligned}
10x_1 - 7x_2 &= 7, \\
-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4, \\
5x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.
$$

$$AX = B$$

高斯消去法 （3 x 3 例子）

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

乘子消元 →

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

选主元 →

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.1 \end{pmatrix}.$$

乘子消元 →

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{pmatrix}.$$

线性方程组变换

$$6.2x_3 = 6.2.$$

$$2.5x_2 + (5)(1) = 2.5.$$

$$10x_1 + (-7)(-1) = 7.$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

迭代求解

高斯消去法 （3 x 3 例子）

线性方程组变换中涉及乘子消元和选主元两步主要步骤

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵L包含了在消去变量过程中用到的乘子
矩阵U是最后得到的系数矩阵
矩阵P反映了选主元的情况

$$LU = PA.$$

原始的系数矩阵可以表示为结构较为简单、规则的矩阵的乘积

高斯消去法

排列矩阵和三角形矩阵

排列矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

MATLAB 的排列向量：

```
p = [4 1 3 2]
```

```
P*A = A(p,:)
```

上三角阵：

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

下三角阵：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

高斯消去法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

一般线性方程组 **上三角阵方程组**

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}^{(1)}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}=(b_1^{(1)},b_2^{(1)},\cdots,b_n^{(1)})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$. 若约化主元素 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$($k=1,2,\cdots,n$), 则可通过高斯消去法将方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 约化为三角形方程组(3.8)求解, 其计算公式如下:

(1)消元计算: 对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 依次计算

$$\begin{cases} m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)} & (i=k+1,\cdots,n) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)} & (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)} & (i=k+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{3.9}$$

前向消元

高斯消去法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots \\ \qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.3}$$

是一个三角形方程组，当 $a_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时有唯一解，求解过程可以从最后一个方程入手，采取逆推方式进行，即先由第 n 个方程解得

$$x_n = b_n / a_{nn} \tag{3.4}$$

代入第 $n-1$ 个方程，可得

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) / a_{n-1,n-1}$$

如此继续下去．假设已求得 x_n、x_{n-1}、$\cdots$、x_{k+1}，代入第 k 个方程即得 x_k 的计算式

$$x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j) / a_{kk} \qquad (k = n-1, n-2, \cdots, 1) \tag{3.5}$$

上述求解过程称为**回代过程**．

反向回带

高斯消去法

三角矩阵线性方程组的求解很容易

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right)/a_{kk} \qquad (k = n-1, n-2, \cdots, 1)$$

```
x = zeros(n,1);
for k = n:-1:1
    j = k+1:n;
    x(k) = (b(k) - U(k,j)*x(j))/U(k,k);
end
```

关键是如何把矩阵转化为三角矩阵

LU 分解

目标是将普通矩阵A拆成上三角和下三角矩阵

$$LU = PA.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

仔细观察每行elements和上下行的联系

LU 分解

如何用Matlab script实现LU分解?

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\
l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\
l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\
l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\
l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\
l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44}
\end{bmatrix}
$$

LU 分解

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ ⇒ 上三角阵 $\boldsymbol{U}$(即 $\boldsymbol{A}^{(n)}$)是非奇异矩阵

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{U}_1 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{U}_2$$

$$\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{U}_2$$

$$\boldsymbol{L}_2^{-1} \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{U}_1^{-1}$$

由 $\boldsymbol{L}_2^{-1} \boldsymbol{L}_1$ 是单位下三角阵,$\boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{U}_1^{-1}$ 是上三角阵,

可知等式两端都只能是单位矩阵,故说明这种分解是唯一的

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2 \quad \text{且} \quad \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$$

LU 分解

如何利用LU分解解线性方程?

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} \qquad \boldsymbol{LY} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} . \qquad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

LU 分解

如何利用LU分解解线性方程?

```
function x = bslashtx2(A,b)
%BSLASHTX2  Solve linear system (backslash)
%   x = bslashtx2(A,b) solves A*x = b

% Triangular factorization
[L,U,p] = lutx(A);

% Permutation and forward elimination
y = forward(L,b(p));

% Back substitution
x = backsubs(U,y);
```

$$A = LU$$

$$LY = b$$

$$UX = Y$$

主元消元法

为什么要选主元（Pivoting）？

若用顺序消去法求解(用具有舍入的 4 位浮点数进行运算)

$$
\begin{cases}
0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\
2x_1 + 3x_2 = 2
\end{cases}
$$

分别利用顺序消去法和主元消去法求解

主元消元法

顺序消去法

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.00001000 & 2.000 & 1.000 \\ 2.000 & 3.000 & 2.000 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{即 } r_2 - m_{21}r_1]{\text{第一次消元}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.00001000 & 2.000 & 1.000 \\ 0 & -4.000\times10^5 & -2.000\times10^5 \end{array}\right]$$

回代求解即得 $x_2 = 0.5000,\ x_1 = 0.0000$

主元消元法

主元消去法

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0.00001000 & 2.000 & 1.000 \\ 2.000 & 3.000 & 2.000 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{即 } r_1 \leftrightarrow r_2]{\text{交换二行}} \left[\begin{array}{cc:c} 2.000 & 3.000 & 2.000 \\ 0.00001000 & 2.000 & 1.000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{即 } r_2 - m_{21} r_1]{\text{第一次消元}} \left[\begin{array}{cc:c} 2.000 & 3.000 & 2.000 \\ 0 & 2.000 & 1.000 \end{array}\right]$$

回代求解即得

$$x_2 = 0.5000, \qquad x_1 = 0.2500$$

那个方案好?

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

顺序 $x_2 = 0.5000,\ x_1 = 0.0000$

主元 $x_2 = 0.5000,\ x_1 = 0.2500$

小数消大数，需要乘一个很大的数，放大误差！！

主元消元法

主元消去

由于选取主元的范围不同，相应地就有不同的主元素消去法．例如，在进行第 k 次消元计算前，已得方程组 $\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{X}=\mathbf{b}^{(k)}$ 的增广矩阵如(3.6)式，如果我们在整个子块

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n-k}=\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

中选择绝对值最大的元素作为约化主元素，则相应的方法称为**完全主元素消去法**；如果在子块 $\tilde{\mathbf{A}}_{n-k}$ 的第一行元素中选取主元素，则相应的方法称为**行主元素消去法**；如果在子块 $\tilde{\mathbf{A}}_{n-k}$ 的第一列中选取主元素，则相应的方法称为**列主元素消去法**．其中使用最广的是列主元素消去法．

为了减少计算过程中的舍入误差的影响，在每次消元前，应选择绝对值大的元素作为约元的主元素

上节课知识回顾

1.线性方程组数值求解

- 克拉姆法则
- 高斯消元法

包含前向消元，选主元，反向回带3个主要步骤，将AX=b转化为一个UX=b′

- 为什么要选主元?

小数消大数，需要乘一个很大的数，放大误差！！

- LU分解法

包含LU分解（行列交替计算），LY=b，UX=Y 3个主要步骤，要能和Matlab代码内容对应起来

2.线性方程组消元法稳定性分析

- 评价指标
- 范数、条件数

稳定性分析

$$x = A^{-1}b$$

computed solution: x_* theoretical solution： x

如何评价计算解的好坏?

误差（error）： $e = x - x_*,$

剩余向量（residual） $r = b - Ax_*.$

稳定性分析

3位有效数字

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{0.001}{0.001} = 1.00 \\ x_1 &= \frac{0.254 - 0.659x_2}{0.913} \\ &= -0.443 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_* = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

稳定性分析

6位有效数字

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.913000 & 0.659000 \\ 0 & -0.000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254000 \\ 0.000001 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{0.000001}{-0.000001} = -1.00000, \\ x_1 &= \frac{0.254 - 0.659 x_2}{0.913} \\ &= 1.00000, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_* = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.000 \end{pmatrix}$$

稳定性分析

不知道理论解的时候

剩余向量（residual）：$r = b - Ax_*.$

$$r = b - Ax_* = \begin{pmatrix} 0.217 - ((0.780)(-0.443) + (0.563)(1.00)) \\ 0.254 - ((0.913)(-0.443) + (0.659)(1.00)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.000460 \\ -0.000541 \end{pmatrix}.$$

$$r = b - Ax_* = \begin{pmatrix} 0.217 - ((0.780)(-1 \quad) + (0.563)(1.00)) \\ 0.254 - ((0.913)(-1 \quad) + (0.659)(1.00)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0 \\ -0 \end{pmatrix}.$$

观察：第一组解的残差很小，第二组解是真实解，但第一组和第二组解的误差很大。矩阵条件数

范数和条件数

向量范数：用来度量向量大小

l_p 范数一般形式：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$

l_1 曼哈顿范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$

l_2 欧几里得距离：$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

l_∞ 切比雪夫范数：$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$

向量范数性质

定义 1 若向量 $X \in \mathbb{R}^n$ 的某个实值函数 $N(X) \overset{(\text{记})}{=} \|X\|$ 满足

(1)非负性，即 $\|X\| \geqslant 0$ 且 $\|X\| = 0$ 的充分必要条件是 $X = 0$；

(2)齐次性，即 $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\| \ (\alpha \in \mathbb{R})$；

(3)三角不等式，即对 $X, Y \in \mathbb{R}^n$，总有

$$\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$$

则称 $N(X) = \|X\|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上向量 X 的范数(或模).

在MATLAB中，用norm（x,p）计算向量范数

```
x = (1:4)/5
norm1 = norm(x,1)
norm2 = norm(x)
norminf = norm(x,inf)
```

```
x =
    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000

norm1 =
    2.0000

norm2 =
    1.0954

norminf =
    0.8000
```

l_p 范数一般形式： $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}.$

l_1 曼哈顿范数： $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|,$

l_2 欧几里得距离： $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$

l_∞ 切比雪夫范数： $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$

矩阵范数

定义 2 若矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的某个实值函数 $N(A)\overset{(记)}{=}\|A\|$满足

(1)非负性，即 $\|A\|\geqslant 0$ 且 $\|A\|=0$ 的充分必要条件是 $A=0$；

(2)齐次性，即 $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|\ (\alpha\in\mathbb{R})$；

(3)三角不等式，即对 A、$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$总有 $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$；

(4)矩阵乘法不等式，即对 A、$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$总有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$；

则称 $N(A)=\|A\|$为$\mathbb{R}^{n\times n}$上**矩阵 A 的范数(或模)**.

与向量范数一样，矩阵范数的种类也很多.由于在许多应用问题中，矩阵和向量常常具有一定关系，这就要求矩阵范数与向量范数相“协调”，即满足矩阵、向量乘法的相容性

$$\|AX\|\leqslant\|A\|\,\|X\|$$

稳定性分析

常见矩阵范数

1-范数： $||A||_1 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$ 列和范数

2-范数： $||A||_2 = \sqrt{\lambda_1}$ ， λ_1为的$A^T A$最大特征值。

∞-范数： $||A||_\infty = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$ 行和范数

Matlab – norm(A, var)，要求能进行笔算

稳定性分析

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，求 $\|\mathbf{A}\|_\infty$、$\|\mathbf{A}\|_1$ 及 $\|\mathbf{A}\|_2$

解 由 $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 与 $\|\mathbf{A}\|_1$ 计算公式立即可得

$$\|\mathbf{A}\|_\infty=\max\{7,3\}=7,\qquad \|\mathbf{A}\|_1=\max\{6,4\}=6$$

$$|\lambda I-A^TA|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 10\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-20 & 10\\ 10 & \lambda-10\end{pmatrix}\right|=0$$

$$(\lambda-20)(\lambda-10)-100=0$$

$$\lambda^2-30\lambda+100=0$$

$$\lambda_1=15+5\sqrt{5},\ \lambda_2=15-5\sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{15+5\sqrt{5}}\approx 5.1167$$

稳定性分析

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.0001x_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 0.9999x_2 = 1.9999 \end{cases}$$

解为 $x_1 = 2, x_2 = 0$　　　　$x_1 = 1, x_2 = 1$

方程组初始数据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 的微小变化引起了解的很大变化．这样的方程组就是病态方程组．

与矩阵A的条件数的关系?

稳定性分析

$AX = b \qquad (A \text{ 非奇异}, b \neq 0)$

分析 A、b 微小扰动对解 X 的影响.

(1)仅 b 有扰动 δb

设相应方程组 $AX = b + \delta b$ 的解为 $X = X + \delta X$，即

$$A(X + \delta X) = b + \delta b$$

$$\delta X = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta X\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

另一方面，由(3.67)得 $\|b\| \leqslant \|A\| \|X\|$ 且 $X \neq 0$，故

$$\frac{1}{\|X\|} \leqslant \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leqslant \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

这表明解的相对误差不超过右端向量相对误差的 $\|A^{-1}\| \|A\|$ 倍.

稳定性分析

(2)仅 A 有扰动 δA(设 $A+\delta A$ 仍可逆)

设相应方程组 $(A+\delta A)X=b$ 的解为 $\tilde{X}=X+\delta X$,即

$$(A+\delta A)(X+\delta X)=b$$

用(3.72)式减去(3.67)式得 $\delta A(X+\delta X)+A\delta X=0$,即

$$\delta X=-A^{-1}\delta A(X+\delta X)$$

故

$$\|\delta X\|\leqslant\|A^{-1}\|\ \|\delta A\|\ \|X+\delta X\|$$

因 $A+\delta A$ 可逆且 $b\neq 0$,从而 $X+\delta X\neq 0$,故由上式可得

$$\boxed{\frac{\|\delta X\|}{\|X+\delta X\|}\leqslant\|A^{-1}\|\ \|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

这表明解的相对误差不超过系数矩阵相对误差的 $\|A^{-1}\|\ \|A\|$ 倍

稳定性分析

以上分析表明，数 $\|A^{-1}\|\ \|A\|$ 反映了方程组 $AX=b$ 的解对初始数据 A、b 扰动的灵敏度

$$\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\|.$$

矩阵A的条件数

设 A 是非奇异矩阵. 若 $\kappa(A)\gg 1$, 则称方程组 $AX=b$ 为病态方程组; $\kappa(A)$ 相对地小, 则称方程组 $AX=b$ 为良态方程组.

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1+1.0001x_2=2 \end{cases}$$

系数矩阵及其逆阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}10001 & -10000\\ -10000 & 10000\end{bmatrix}$$

$$\kappa(A)_{\infty}=\|A^{-1}\|_{\infty}\|A\|_{\infty}=20001\times 2.0001\approx \boxed{40004}$$

稳定性分析

定理 2 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$，并且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ 为矩阵 A 的伴随矩阵.

复习逆矩阵计算
会手算矩阵的条件数

例 1 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

$$|A|=2\neq 0$$

$$A^*=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

稳定性分析

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

```
% Stablity analysis
A = [0.78, 0.563; 0.913, 0.659];
A_1 = inv(A);
cond(A)
norm(A,2)*norm(A_1,2)
```

```
>> cond(A)

ans =

    2.1932e+06

>> norm(A,2)*norm(A_1,2)

ans =

    2.1932e+06
```

因此，当计算过程中出现极小误差，求解误差剧烈变大！

感谢聆听,欢迎讨论！