

# 材料力学 (乙)

**Mechanics of Materials**



## 第四章 弯曲内力

## 第五章 弯曲应力

## 第六章 弯曲变形



## 之前的两章我们学了什么？

	第2章	第3章	第4-6章
内容	拉压	扭转	弯曲
内力	轴力 $F_N$	扭矩 $T$	?
内力图	轴力图	扭矩图	?
应力类型	正应力	切应力	?
内力-应力	$\sigma = F_N/A$	$\tau_{\max} = T/W_t$	?
应力-应变	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	?
载荷-变形	$\Delta l = F_N l/EA$	$\varphi = Tl/GI_p$	?

# 弯曲内力

§4-1 弯曲的概念和实例

§4-2 受弯杆件的简化

§4-3 剪力和弯矩

§4-4 剪力方程和弯矩方程

剪力图和弯矩图

§4-5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

§4-6 平面曲杆的弯曲内力

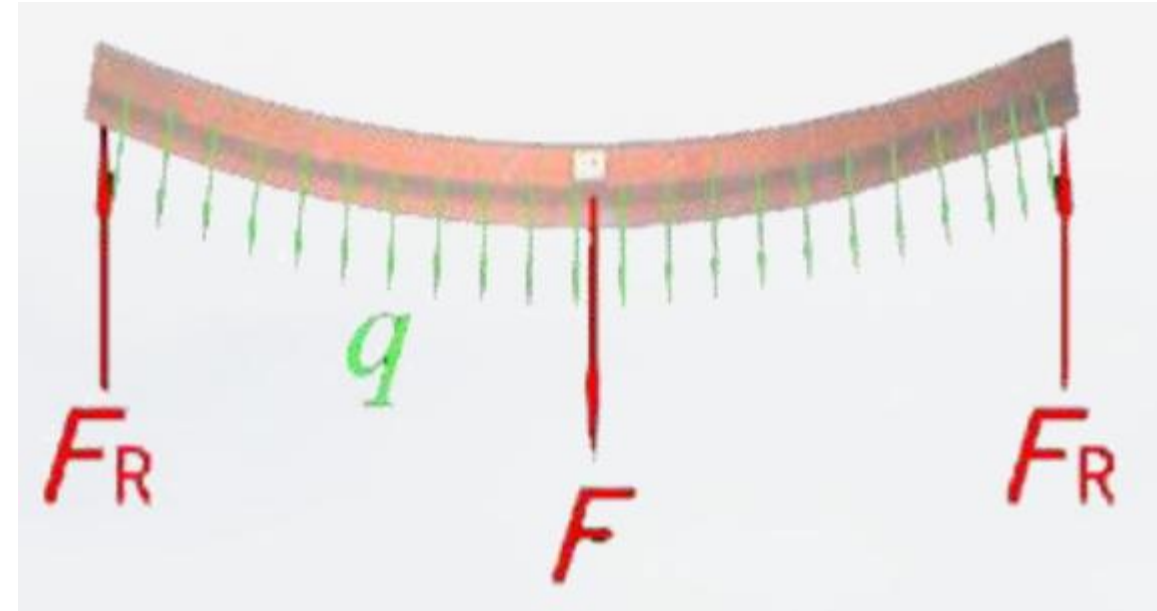


## §4.1 弯曲的概念和实例

### 弯曲的实例



起重机大梁

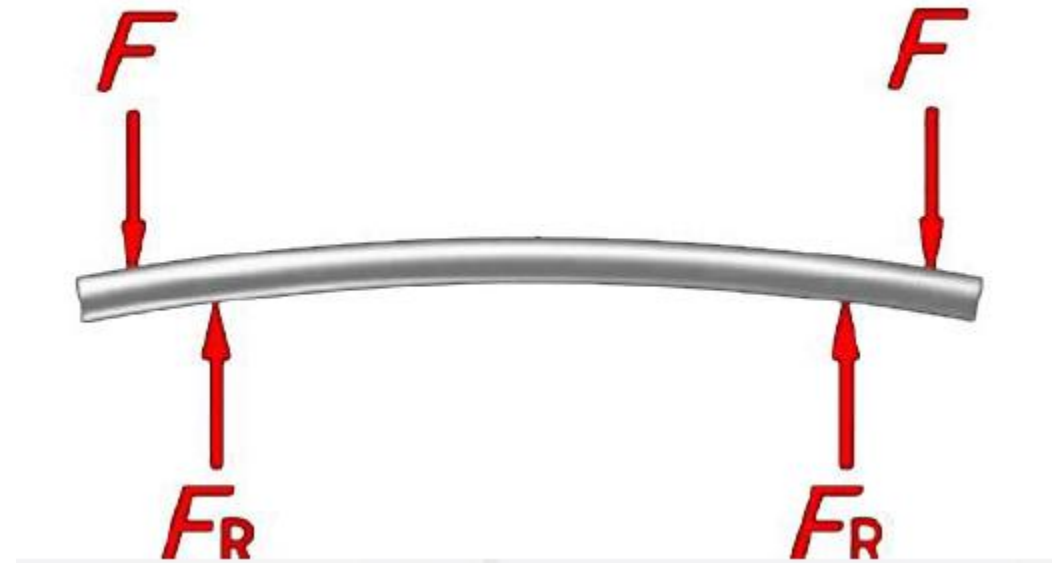


## §4.1 弯曲的概念和实例

### 弯曲的实例



火车轮轴



## §4.1 弯曲的概念和实例

### 弯曲的实例



单杠



## §4.1 弯曲的概念和实例

### 弯曲的实例

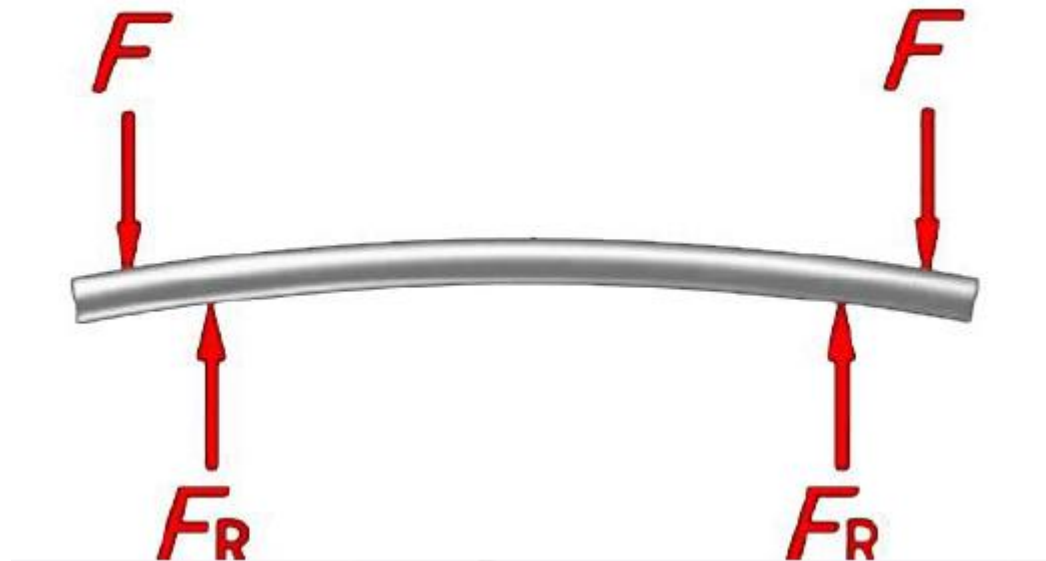
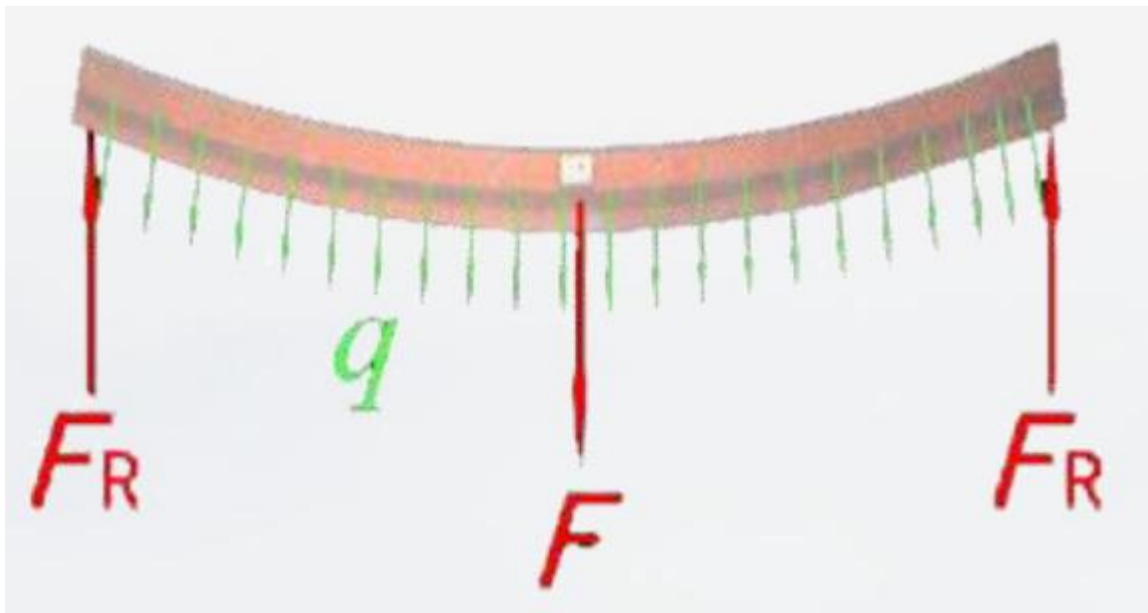


举重



## §4.1 弯曲的概念和实例

**弯曲：**杆件承受垂直于其轴线的**外力**或位于其轴线所在平面内的**力偶**作用时，其轴线将弯曲成曲线。



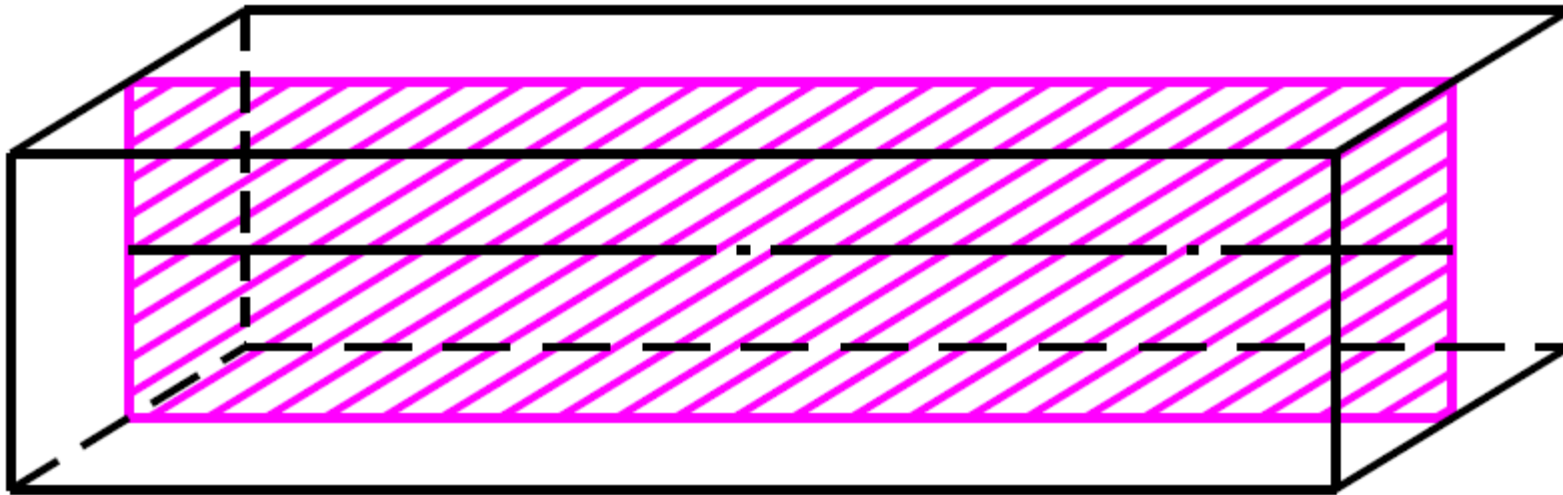
- **受力特点：**外力与杆件轴线垂直，通常称为横向力。
- **变形特点：**直杆的轴线变形后由原来的直线变为曲线。

以弯曲变形为主的杆件通常称为**梁**。

## §4.1 弯曲的概念和实例

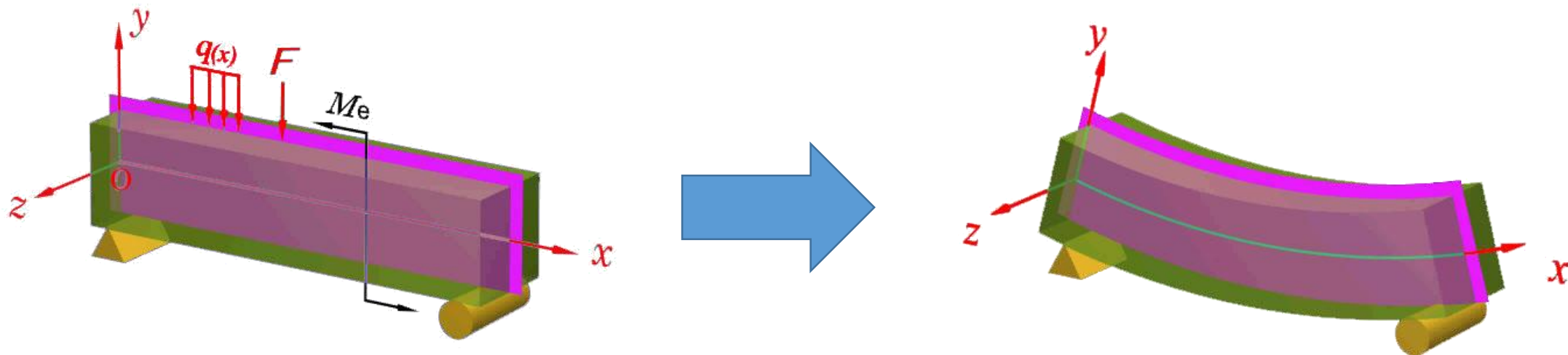
### 对称弯曲

纵向对称面：梁的轴线与横截面的对称轴所构成的平面。



## §4.1 弯曲的概念和实例

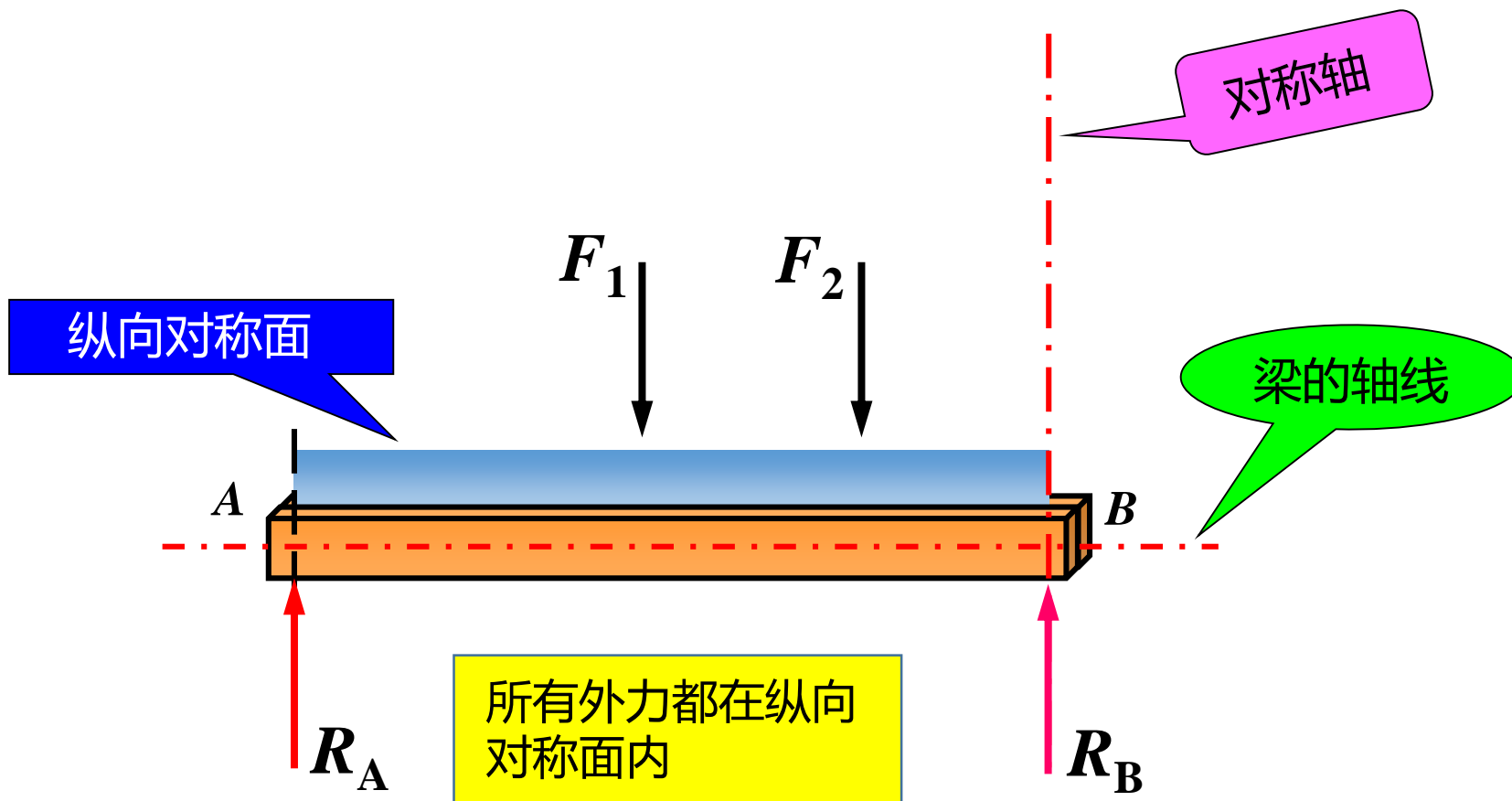
### 对称弯曲



- 具有纵向对称面
- 外力都作用在纵向对称面内
- 弯曲变形后轴线弯成纵向对称面内的平面曲线

## §4.1 弯曲的概念和实例

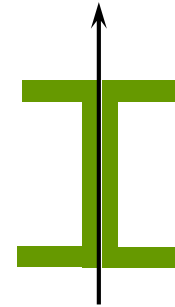
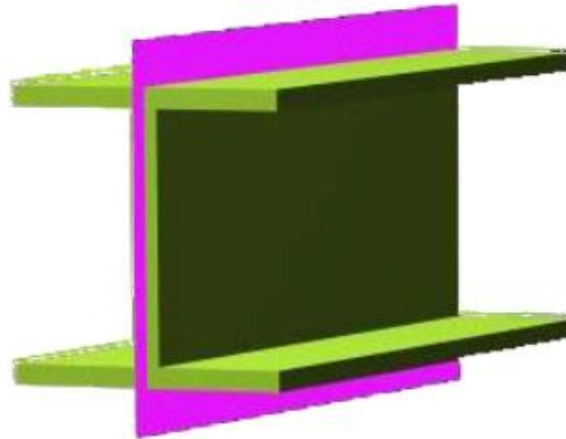
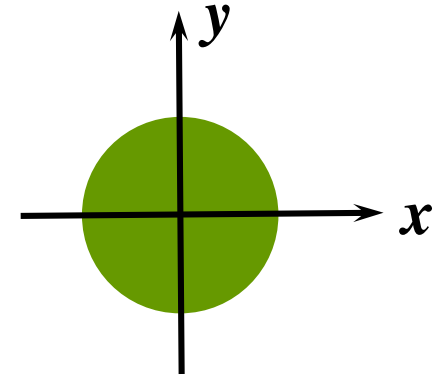
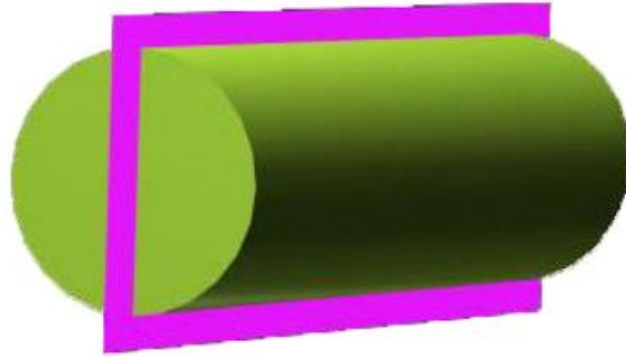
### 对称弯曲





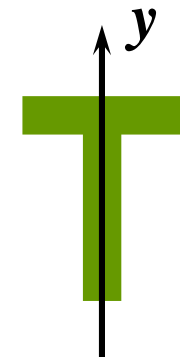
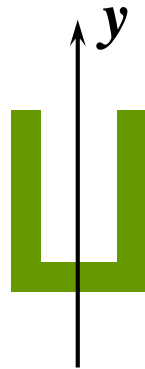
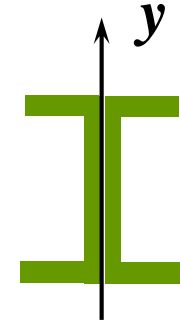
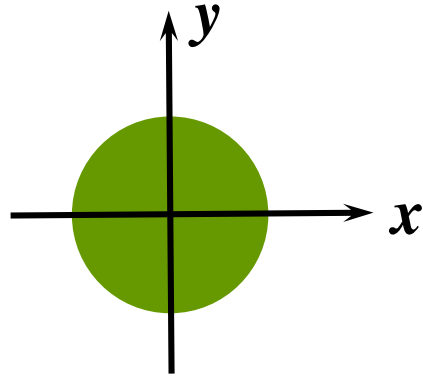
## §4.1 弯曲的概念和实例

### 常见弯曲构件的纵向对称面



## §4.1 弯曲的概念和实例

### 常见弯曲构件的纵向对称面

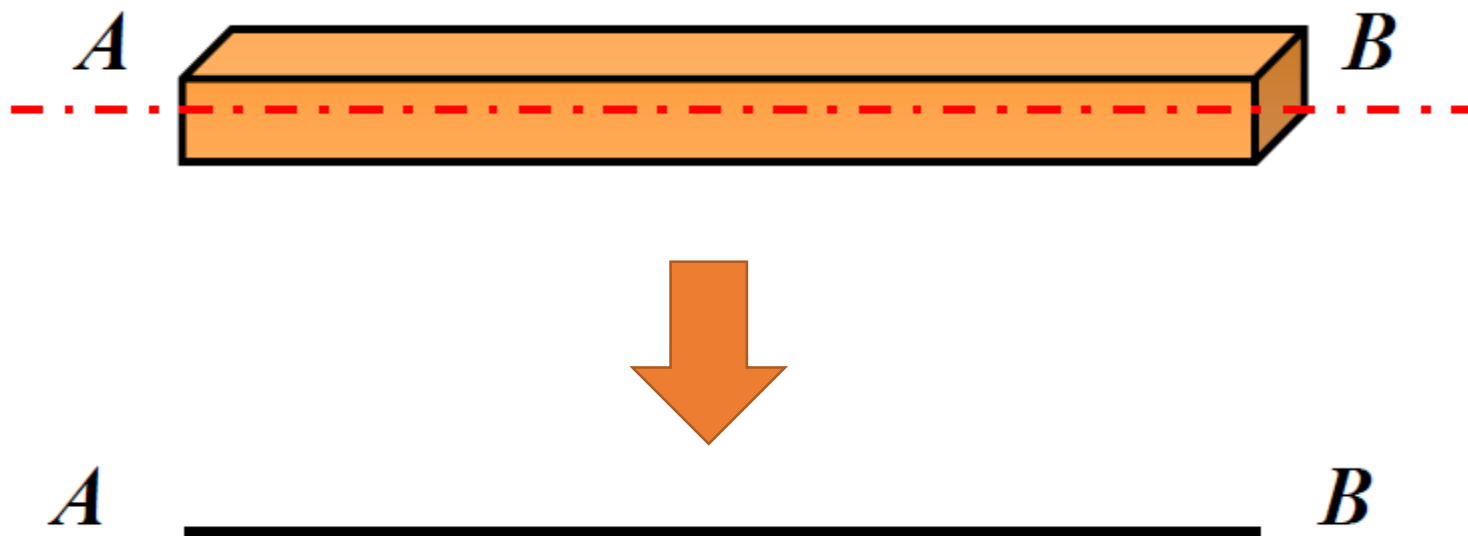


## §4.2 受弯杆件的简化

### 梁的简化

通常取梁的轴线来代替梁。

折杆或曲杆用中心线代替。

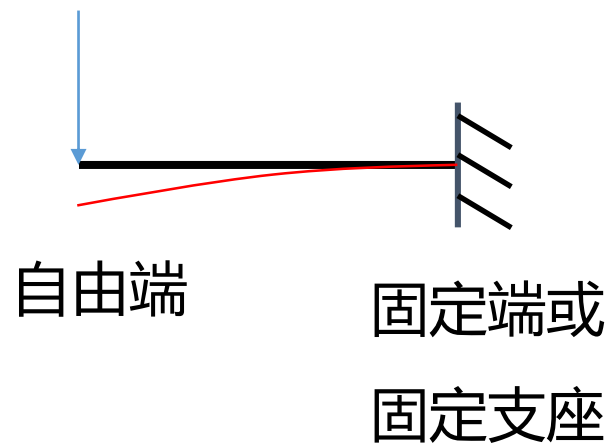


## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

根据支座对梁在载荷平面内的约束情况，一般可以简化为三种基本形式：

#### 1. 固定端支座



#### 支座处约束特征：

水平和竖直方向被约束，也不能转动。



## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

根据支座对梁在载荷平面内的约束情况，一般可以简化为三种基本形式：

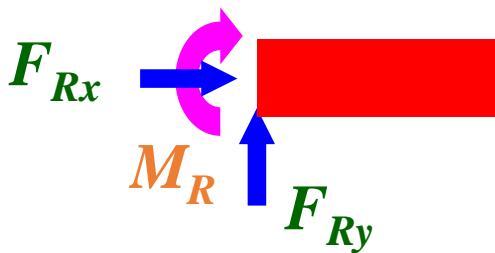
#### 1. 固定端支座



对支座处约束的位移描述

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \theta = 0$$

支座反力



## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

#### 2. 固定铰支座



#### 支座处约束特征：

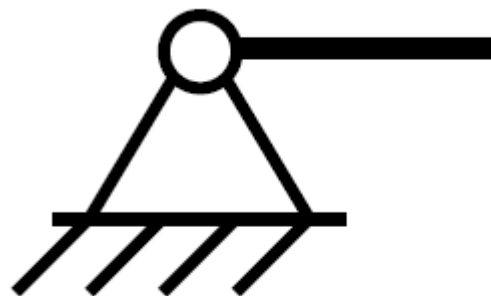
水平和竖直方向不能动，但是可以转动。

## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

#### 2. 固定铰支座

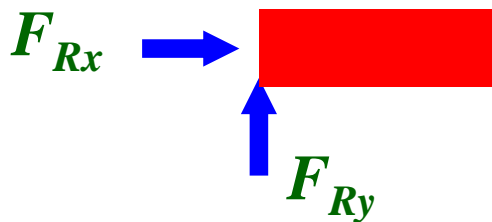
支座示意图



对支座处约束的位移描述

$$u_x = 0, \quad u_y = 0$$

支座反力



## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

#### 3. 可动铰支座



#### 支座处约束特征:

竖直方向不能动，水平方向可自由移动，还可以自由转动。

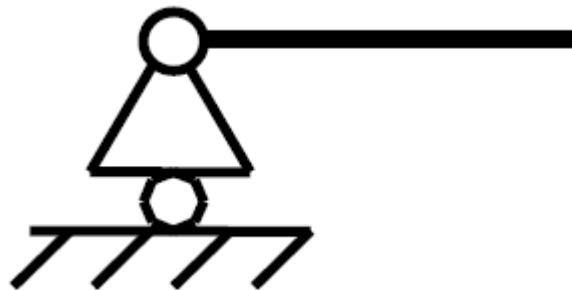


## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

#### 2. 可动铰支座

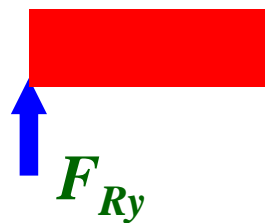
支座示意图



对支座处约束的位移描述

$$u_y = 0$$

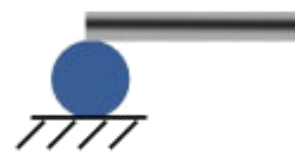
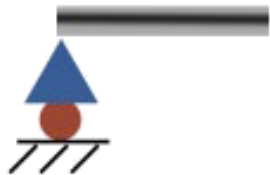
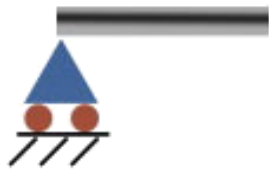
支座反力



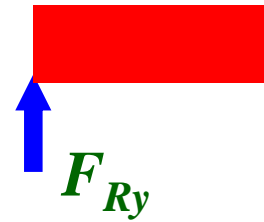
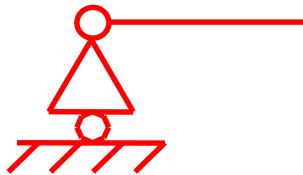
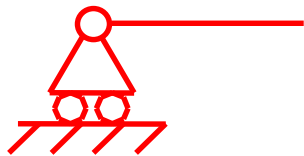
## §4.2 受弯杆件的简化

### 支座的类型与简化模型

#### 可动铰支座

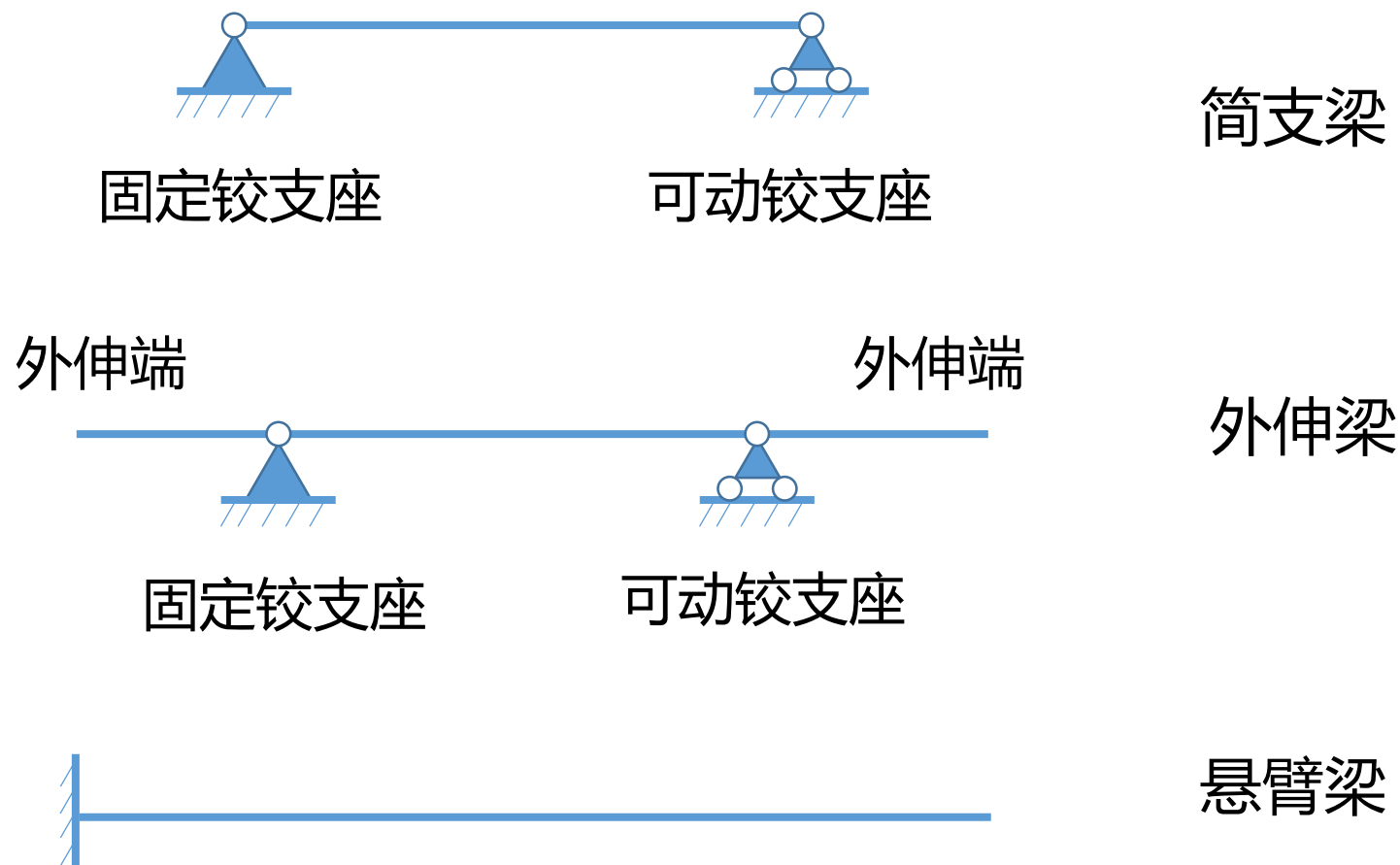


$$u_y = 0$$



## §4.2 受弯杆件的简化

### 受弯杆件的简化



**静定梁:** 所有支座反力可由平衡方程求出。

## §4.2 受弯杆件的简化

### 例题4.1

如图，已知 $F$ ， $a$ ， $l$ ，求距A端 $x$ 处截面上内力。

解：(1) 求支座反力

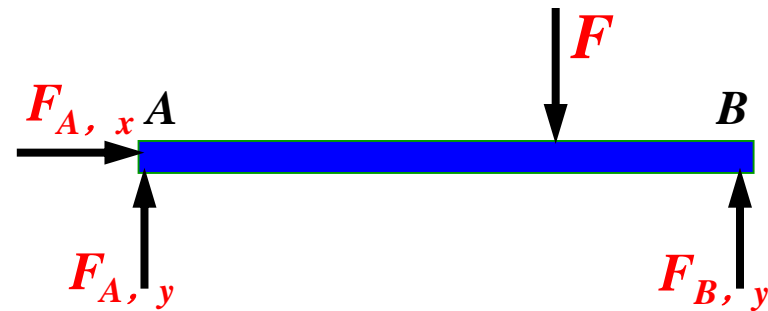
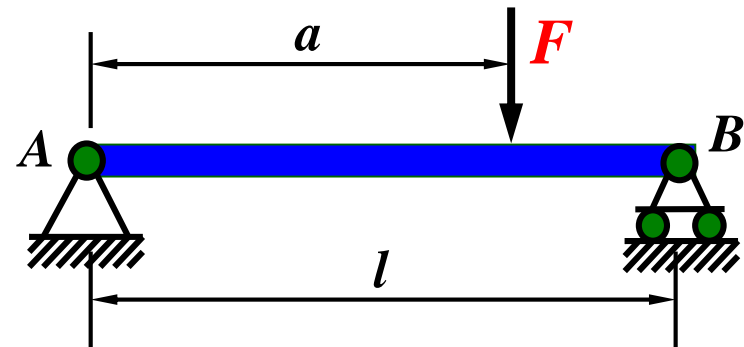
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{A,x} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{B,y}l - Fa = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{B,y} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{A,y} + F_{B,y} - F = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{A,y} = \frac{F(l-a)}{l}$$



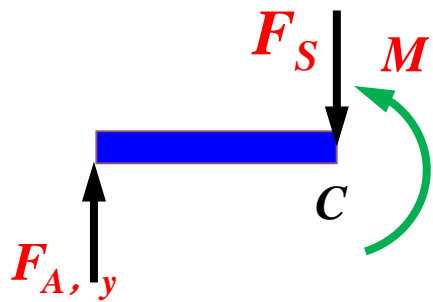


## §4.2 受弯杆件的简化

### 例题4.1

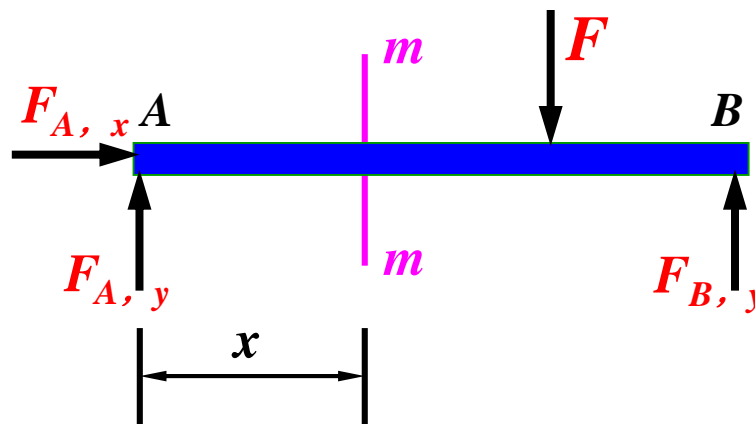
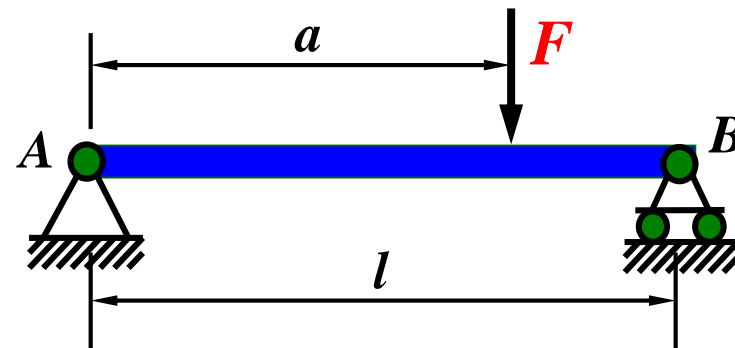
如图，已知 $F$ ， $a$ ， $l$ ，求距A端 $x$ 处截面上内力。

解：（2）截面法求内力



$$\sum F_y = 0, \quad F_s = F_{A,y} = \frac{F(l-a)}{l}$$

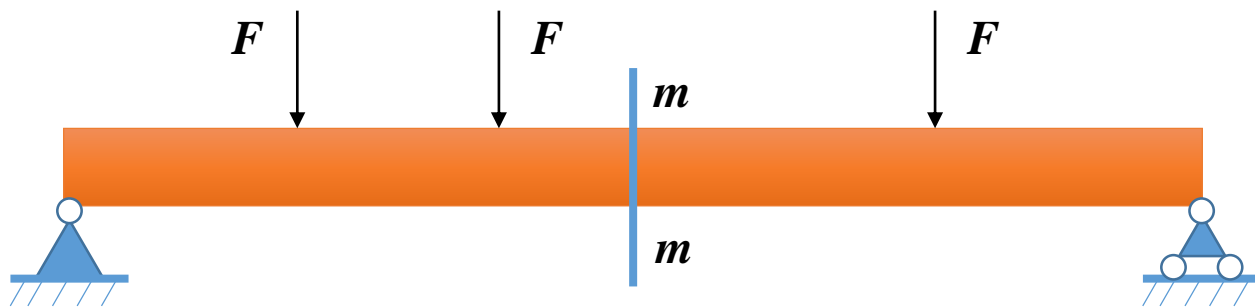
$$\sum M_C = 0, \quad M = F_{A,y} \cdot x$$



## §4.3 剪力和弯矩

剪力 ( $F_s$ ) : 与横截面相切的分布内力系的合力

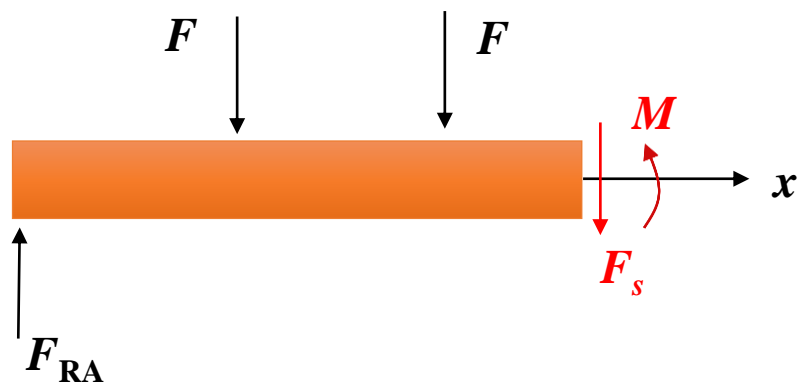
弯矩 ( $M$ ) : 与横截面垂直的分布内力系合成的力矩



根据平衡条件

$$\sum F_y = 0$$

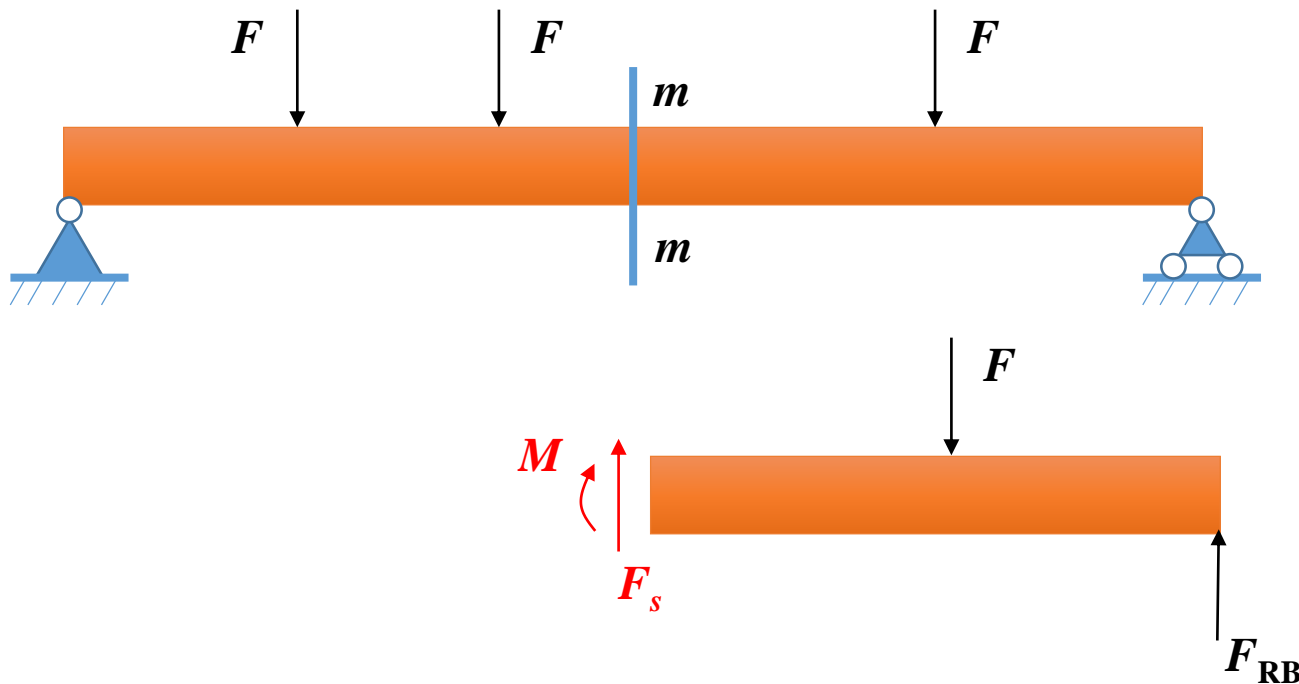
$$\sum M_{\text{截面中心}} = 0$$



## §4.3 剪力和弯矩

剪力 ( $F_s$ ) : 与横截面相切的分布内力系的合力

弯矩 ( $M$ ) : 与横截面垂直的分布内力系合成的力矩



根据平衡条件

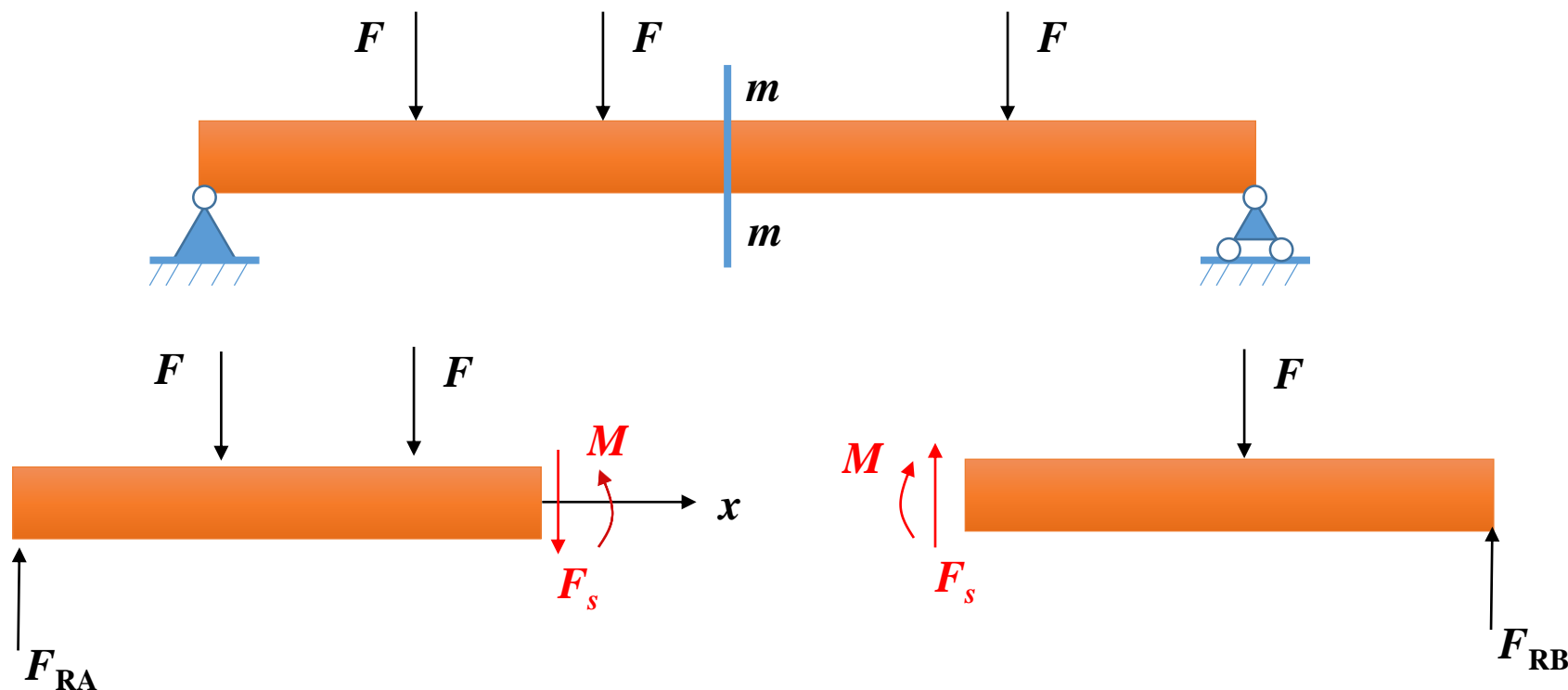
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{\text{截面中心}} = 0$$

## §4.3 剪力和弯矩

剪力 ( $F_s$ ) : 与横截面相切的分布内力系的合力

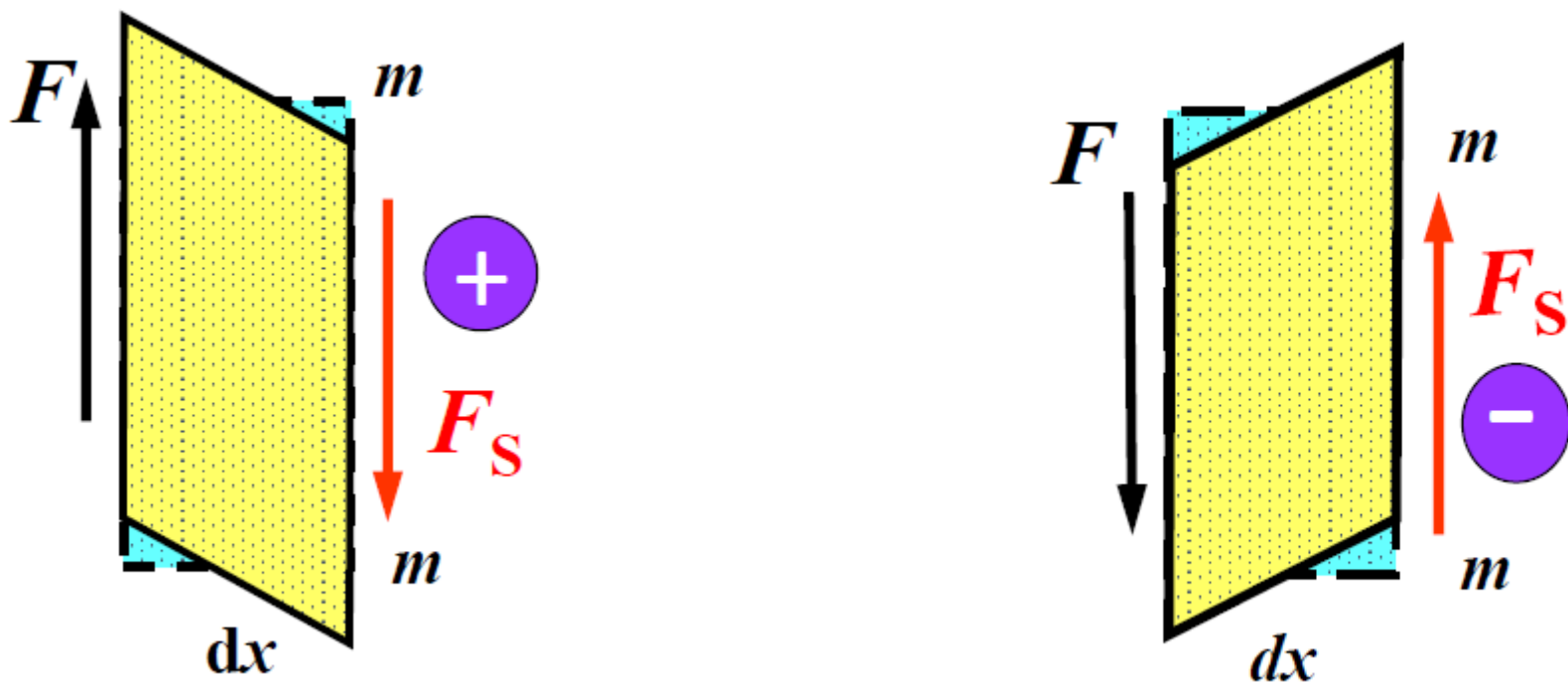
弯矩 ( $M$ ) : 与横截面垂直的分布内力系合成的力矩



## §4.3 剪力和弯矩

### 剪力符号的规定

使要分析的对象有左端向上而右端向下的运动趋势，倾向于发生顺时针运动



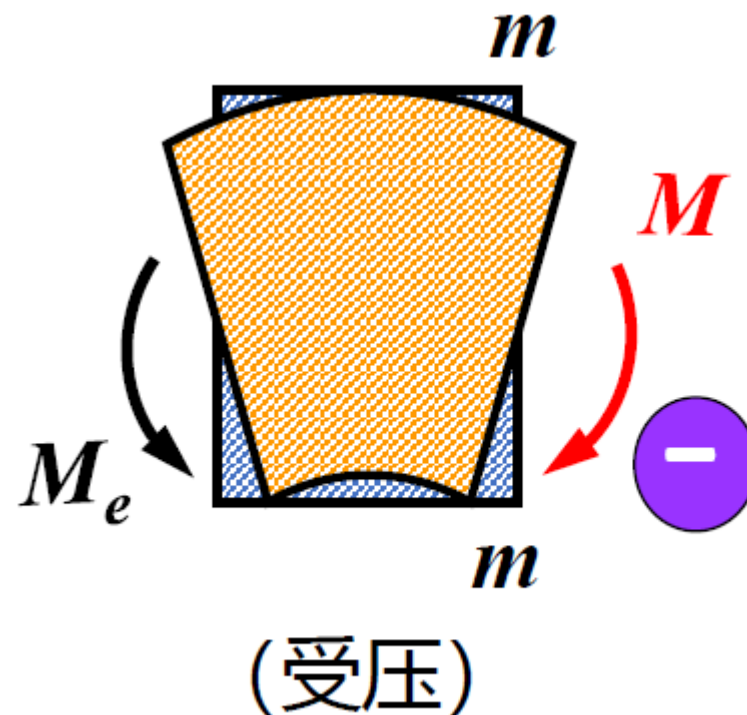
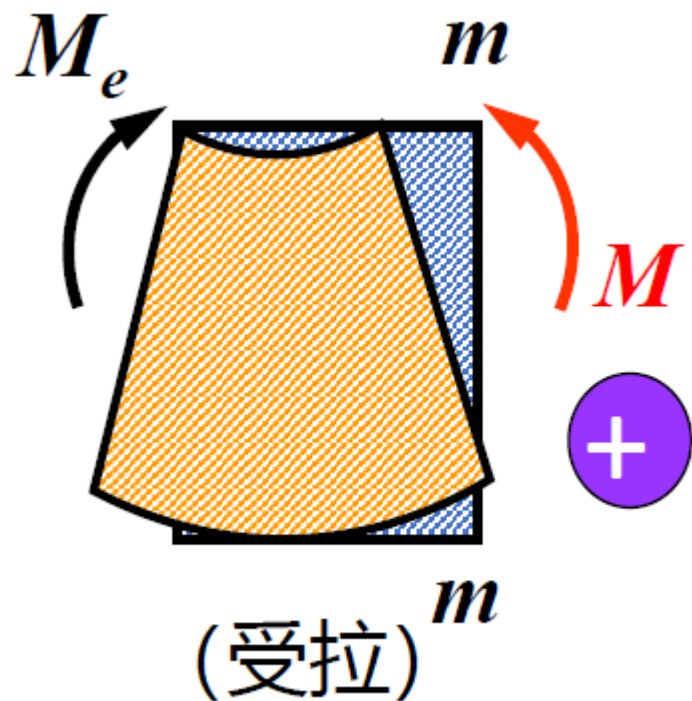
左上右下为正；反之为负



## §4.3 剪力和弯矩

### 弯矩符号的规定

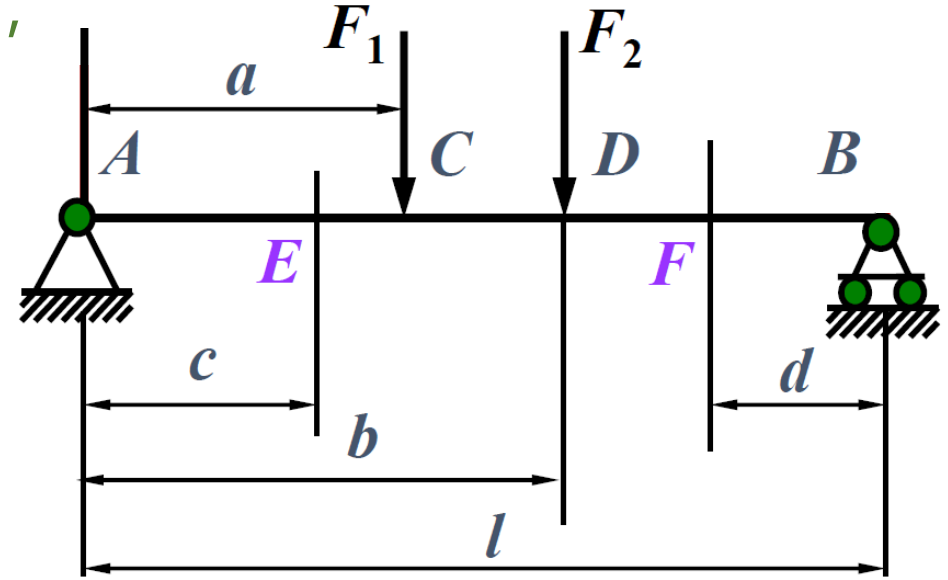
当梁发生变形时，横截面  $m-m$  处弯曲变形凸向下时，截面  $m-m$  的弯矩为正



上压下拉(上凹下凸) 为正；反之为负。

## §4.3 剪力和弯矩

例题4.2 图示梁的计算简图。已知 $F_1$ 、 $F_2$ ，且 $F_2 > F_1$ ，尺寸 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $l$ 亦均为已知。试求梁在 $E$ 、 $F$ 点横截面处的剪力和弯矩。



## §4.3 剪力和弯矩

例题4.2 图示梁的计算简图。已知 $F_1$ 、 $F_2$ ，且 $F_2 > F_1$ ，尺寸 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $l$ 亦均为已知。试求梁在 $E$ 、 $F$ 点横截面处的剪力和弯矩。

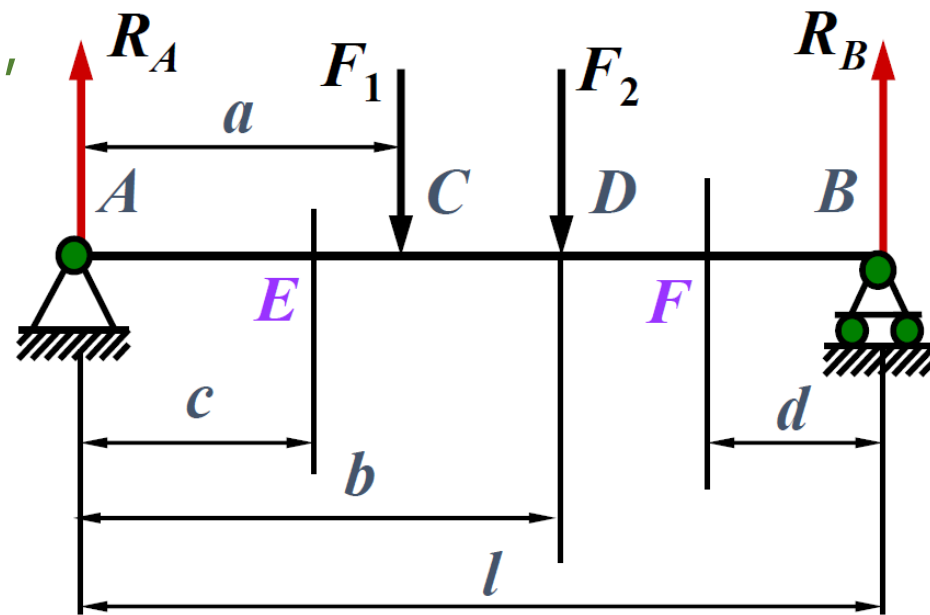
解：(1) 求梁的支座反力

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B l = F_1 a + F_2 b$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1(l - a) + F_2(l - b) = R_A l$$

$$R_A = \frac{F_1(l - a) + F_2(l - b)}{l}$$

$$R_B = \frac{F_1 a + F_2 b}{l}$$



## §4.3 剪力和弯矩

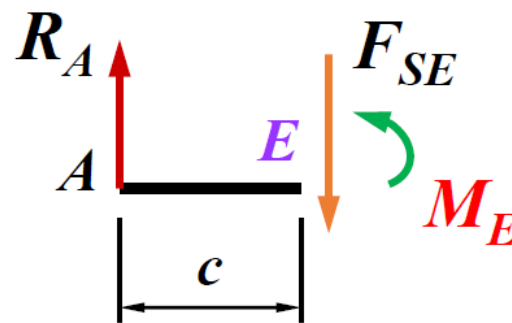
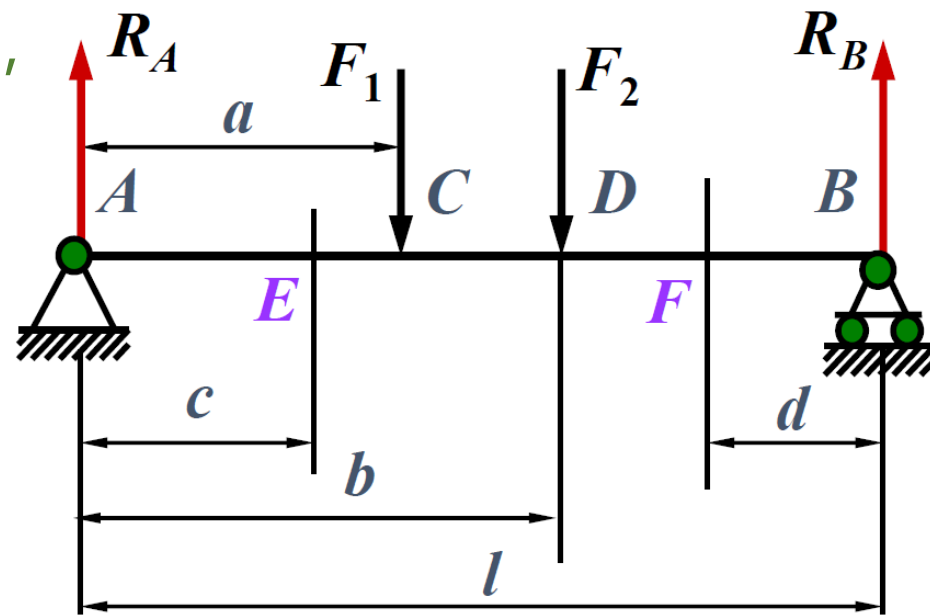
例题4.2 图示梁的计算简图。已知 $F_1$ 、 $F_2$ ，且 $F_2 > F_1$ ，尺寸 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $l$ 亦均为已知。试求梁在 $E$ 、 $F$ 点横截面处的剪力和弯矩。

解：(2) 计算横截面 $E$ 上的剪力 $F_{SE}$ 和弯矩 $M_E$ 。

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = F_{SE}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow R_A \cdot c = M_E$$

$$\Rightarrow F_{SE} = R_A \quad (+) \quad M_E = R_A \cdot c \quad (+)$$



## §4.3 剪力和弯矩

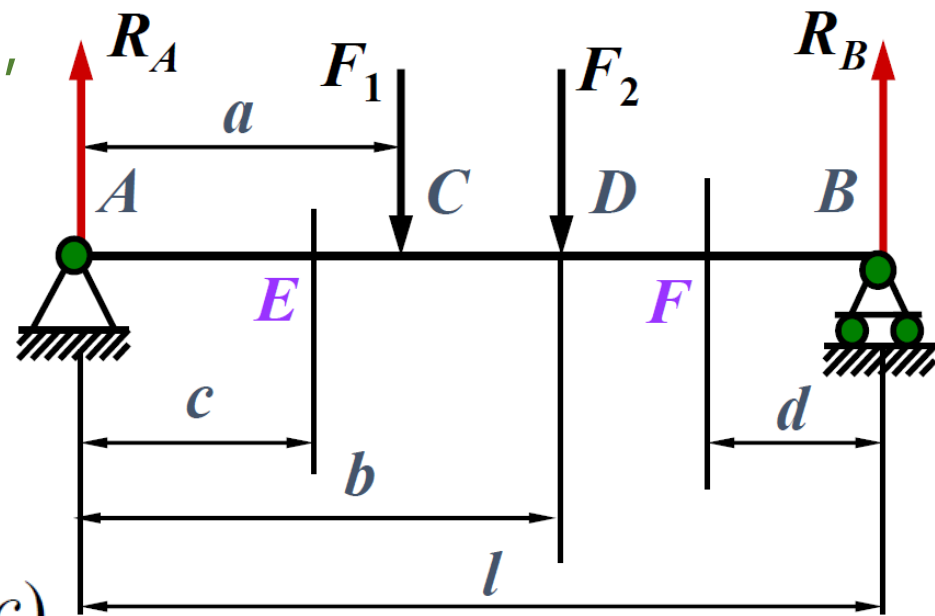
例题4.2 图示梁的计算简图。已知 $F_1$ 、 $F_2$ ，且 $F_2 > F_1$ ，尺寸 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $l$ 亦均为已知。试求梁在 $E$ 、 $F$ 点横截面处的剪力和弯矩。

解：(2) 计算横截面 $E$ 上的剪力 $F_{SE}$ 和弯矩 $M_E$ 。

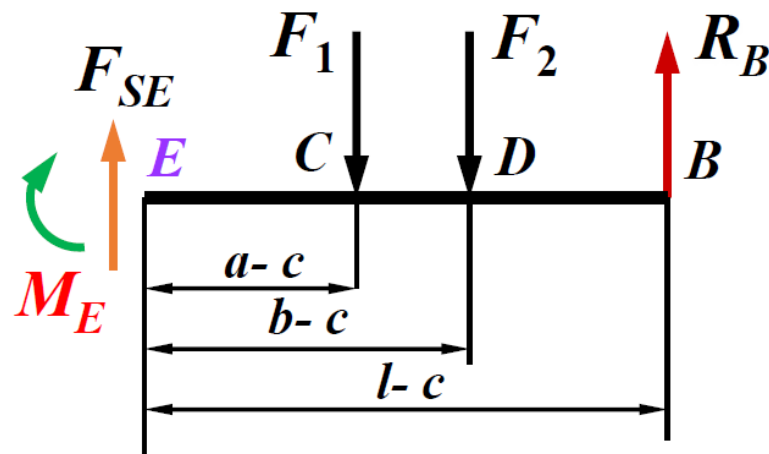
$$\sum M = 0 \Rightarrow M_E + F_1(a - c) + F_2(b - c) = R_B(l - c)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{SE} + R_B = F_1 + F_2$$

$$\Rightarrow F_{SE} = R_A \quad (+) \quad M_E = R_A \cdot c \quad (+)$$



取右段为研究对象



## §4.3 剪力和弯矩

例题4.2 图示梁的计算简图。已知 $F_1$ 、 $F_2$ ，且 $F_2 > F_1$ ，尺寸 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $l$ 亦均为已知。试求梁在 $E$ 、 $F$ 点横截面处的剪力和弯矩。

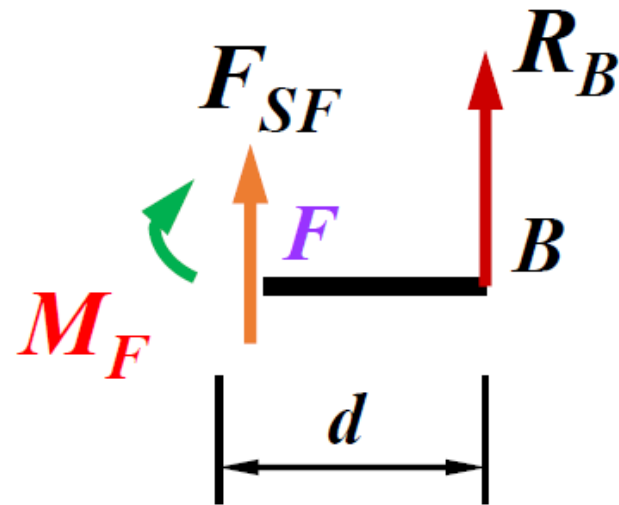
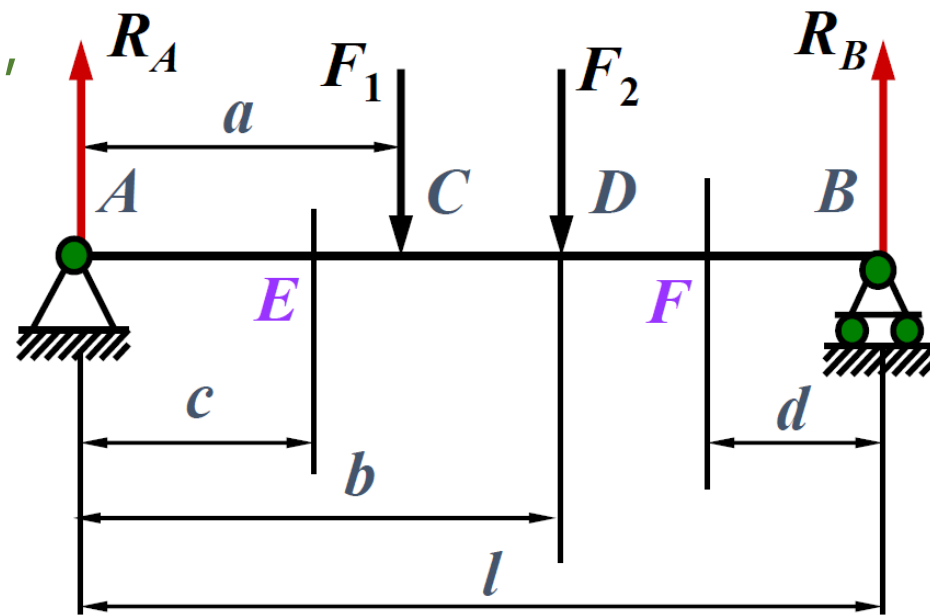
解：(3) 计算横截面 $F$ 处的剪力 $F_{SF}$ 和弯矩 $M_F$ 。

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{SF} + R_B = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_F = R_B \cdot d$$

$$\Rightarrow F_{SF} = -R_B \quad \ominus$$

$$M_F = R_B \cdot d \quad \oplus$$





## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

### 1、剪力方程和弯矩方程

用函数关系表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律，分别称作剪力方程和弯矩方程。

(1) 剪力方程

$$F_s = F_s(x)$$

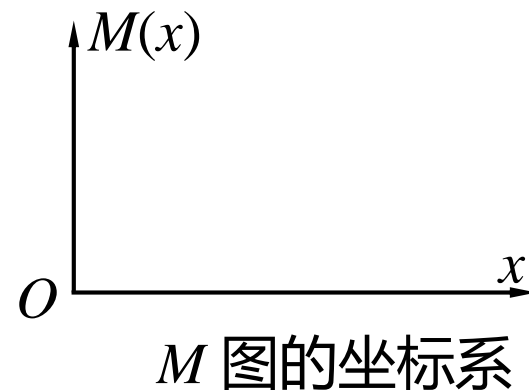
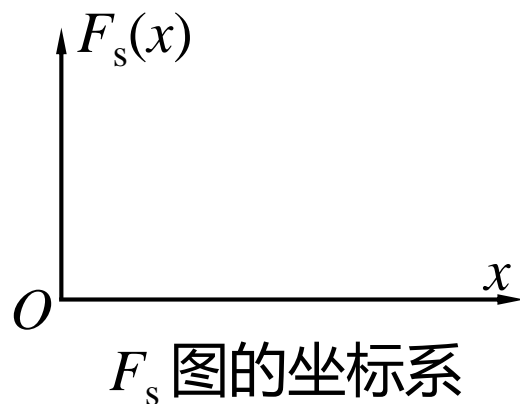
(2) 弯矩方程

$$M = M(x)$$

## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

### 2、剪力图和弯矩图

以平行于梁轴的横坐标 $x$ 表示横截面的位置，以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩，这种图线分别称为剪力图和弯矩图。



剪力为正值画在 $x$ 轴上侧，负值画在 $x$ 轴下侧；

弯矩为正值画在 $x$ 轴上侧，负值画在 $x$ 轴下侧。

## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.4 图示的简支梁在C点处受集中载荷 $F$ 作用。试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求支反力

$$\sum M_B = 0 \rightarrow Fb - R_A l = 0 \rightarrow R_A = \frac{Fb}{l}$$
$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B l - Fa = 0 \rightarrow R_B = \frac{Fa}{l}$$

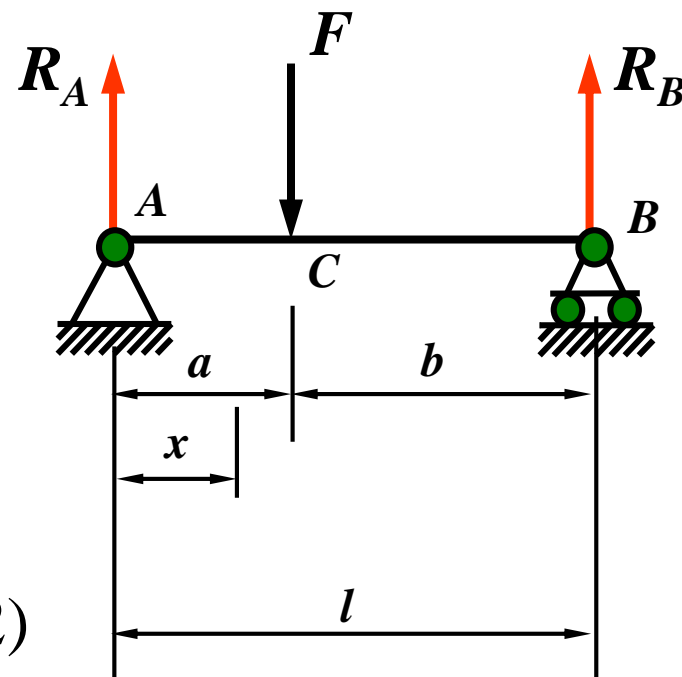
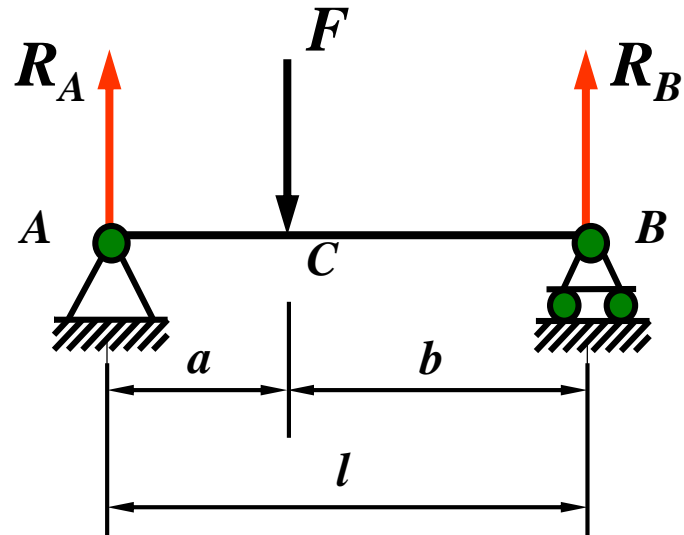
(2) 求内力

因为AC段和CB段的内力方程不同，所以必须分段写剪力方程和弯矩方程。

AC段

$$F_s(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l} x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$



## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

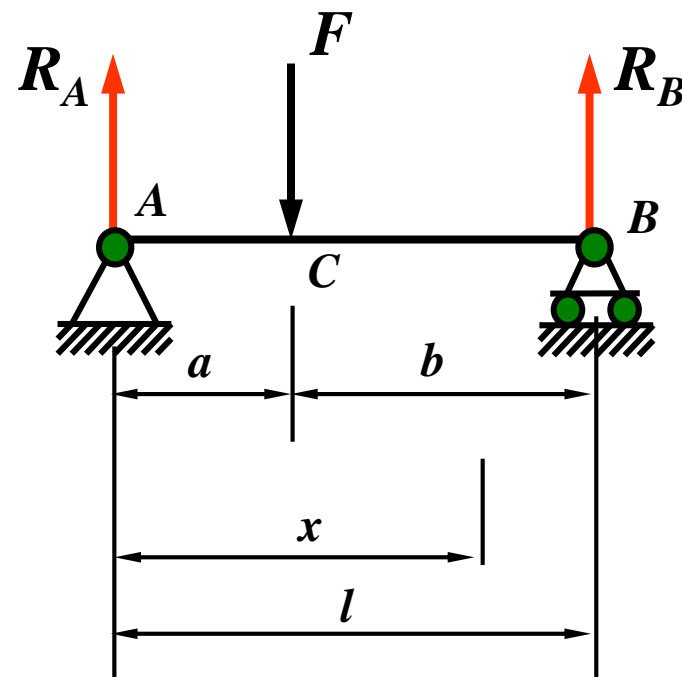
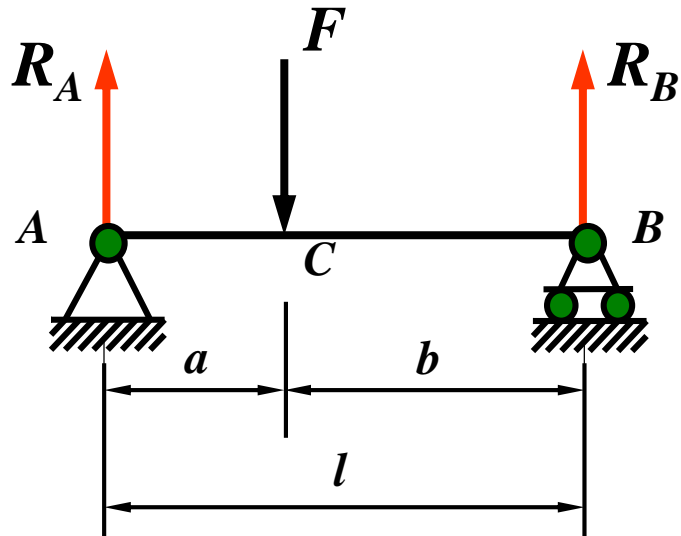
例题4.4 图示的简支梁在C点处受集中载荷 $F$ 作用。试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(2) 求内力

CB段

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \frac{Fb}{l} - F = -\frac{F(l-b)}{l} \\ &= -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{Fb}{l}x - F(x-a) \\ &= \frac{Fa}{l}(l-x) \quad (a \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (4)$$



## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

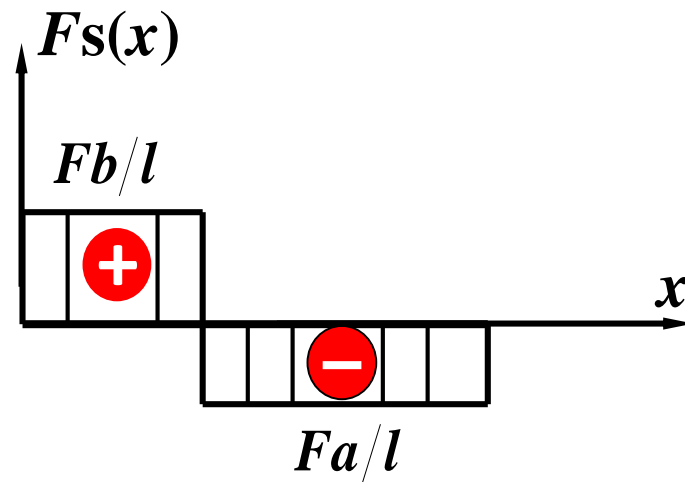
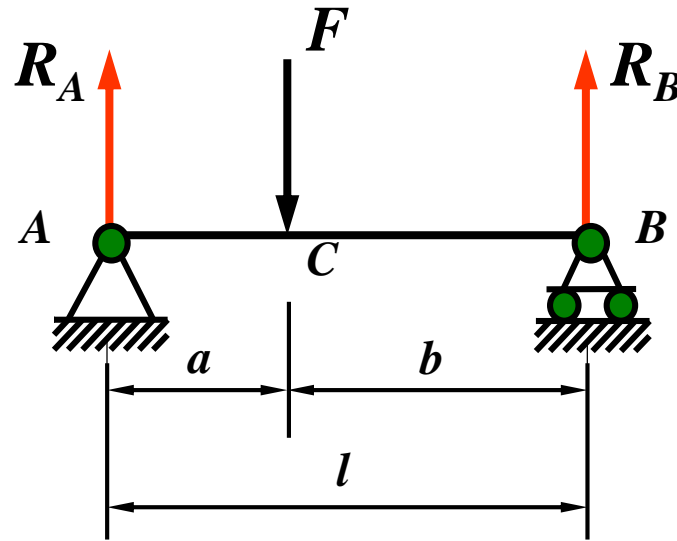
例题4.4 图示的简支梁在C点处受集中载荷 $F$ 作用。试作此梁的剪力图和弯矩图。

解： (3) 剪力图

$$F_s(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

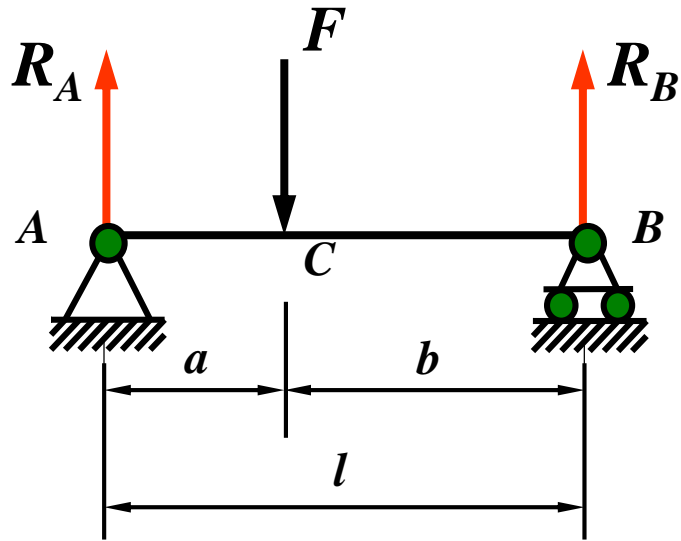
$$F_s(x) = -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \quad (3)$$

AC, CB两段梁的剪力图是水平直线。



## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.4 图示的简支梁在C点处受集中载荷 $F$ 作用。 $R_A$   
试作此梁的剪力图和弯矩图。

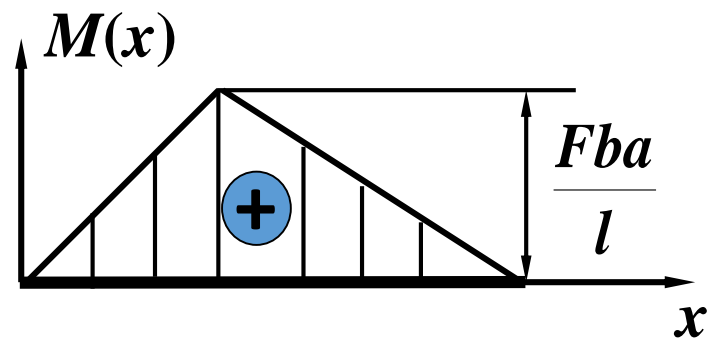


解：(4) 弯矩图

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$$M(x) = \frac{Fa}{l}(l-x) \quad (a \leq x \leq l) \quad (4)$$

AC, CB两段梁的弯矩图是斜直线。



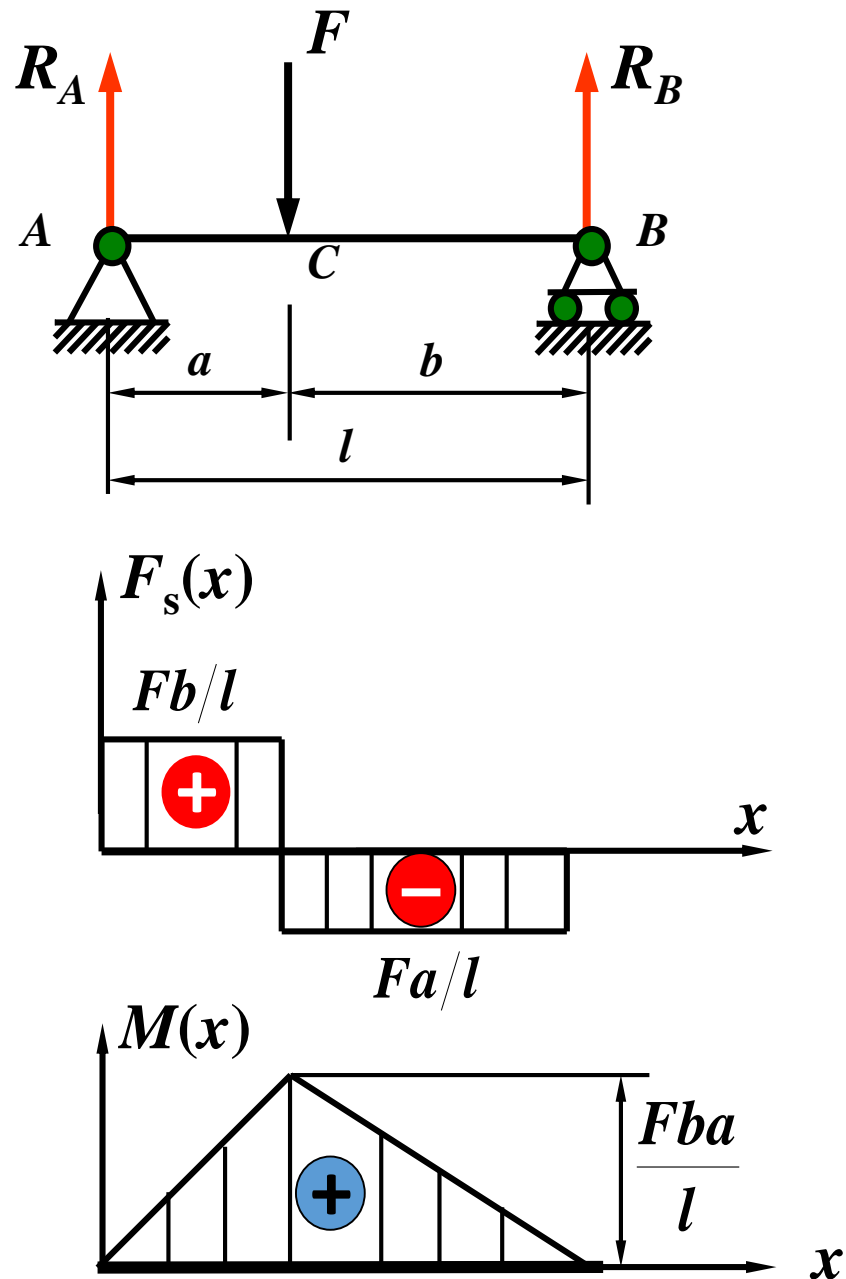


## §4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

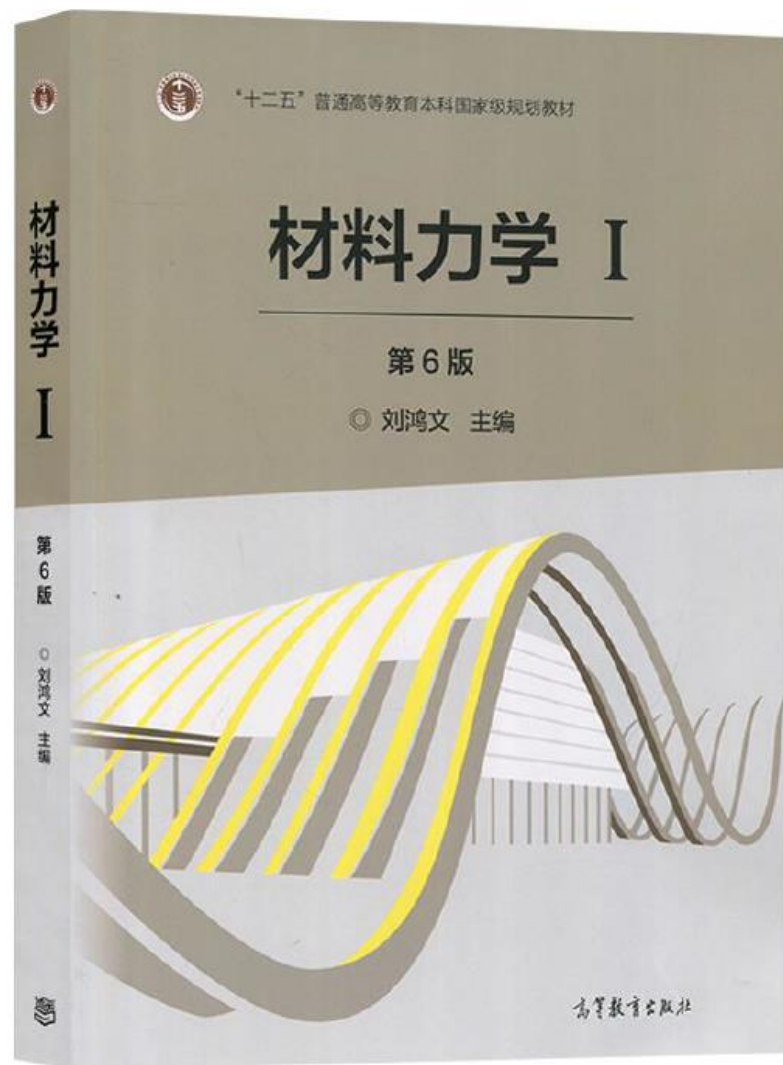
例题4.4 图示的简支梁在C点处受集中载荷 $F$ 作用。试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(5) 讨论

- 在集中载荷作用处的左、右两侧截面上剪力有突变。突变值等于集中荷载 $F$ 。
- 集中载荷作用处弯矩形成尖角，弯矩值最大。



# 作业



4.1 a-b (剪力 & 弯矩)

**4.2日(下周二) 之前交**

# 作业

- 4.1 试求图示各梁中截面 1-1, 2-2, 3-3 上的剪力和弯矩, 这些截面无限接近于截面  $C$  或截面  $D$ 。设  $F, q, q_0, a$  均为已知。

