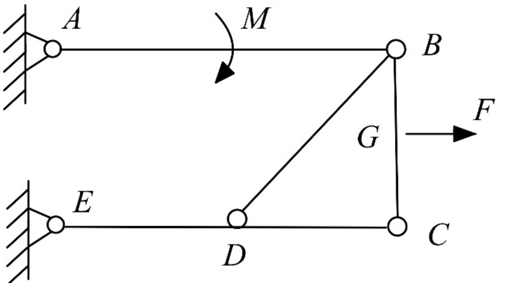
2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷

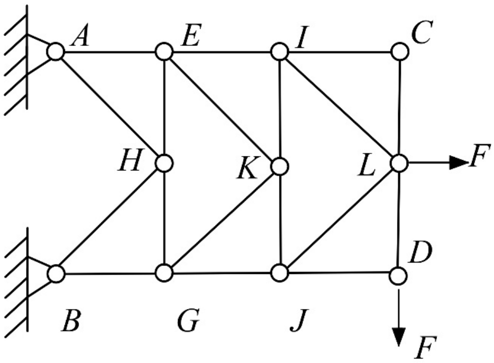
计算题（共 6 题）

一、图示平面构架，A、E 处均为固定铰支座，杆 BD 与 CE 于 D 处饺接，杆 AB、CE 水平，BC 垂直，长度 AB=CE=2L，BC-CD=DE=L。杆 BC 中点 G 受水平 F 作用，杆 AB 中间受力偶作用，力偶矩为 M=2FL,各杆重不计。

求:（1）支座 A 的约束力;（2）杆 BD 的内力。（15 分）

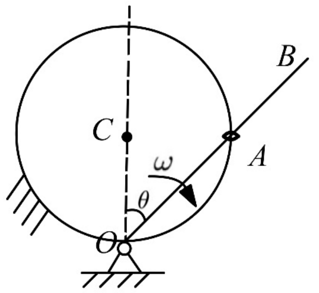


二、图示平面桁架，A、B 处均为固定铰支座，AEIC、HKL、 BUJD 水平,AB、EHG、IRJ、CTD 垂直，长度 CL=DL=b, AE=EI=CI=b。节点 D 受垂直力 F 作用，节点 L 受水平力 F 作用，各杆重不计。求:杆 EK、GK、EI 的内力。（15 分）

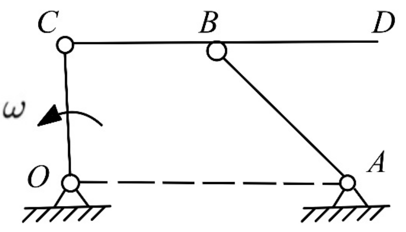


三、（a）图示机构，大圆环固定，半径为 r，圆心位于 C 点，直杆 OB 绕 O 轴转动,O 点在圆周上,小环 A 套在大圆环与杆上,随其滑动.当 OC 与杆 OB 的夹角$\theta=45°$时，杆 OB 的角速度为ω,角加速度为零。求:此时小环的速度与加速度。

（b）图示平面机构，杆 OC 绕 O 轴转动,杆 AB 绕 A 轴转动，OA 连线水平,长度 OC=BC=BD=L。图示瞬时，杆 OC 垂直，杆 CBD 水平，$\angle ABD=45°$，杆 OC 的角速度为ω。求:此时杆 AB 的角速度、点 D 的速度。



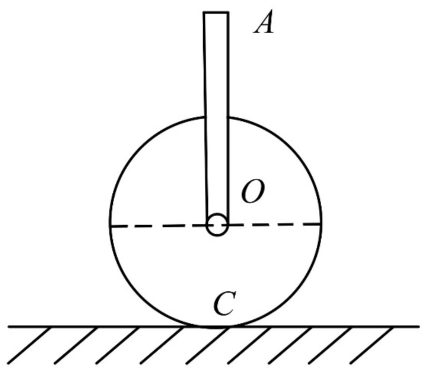
题(a)图



题(b)图

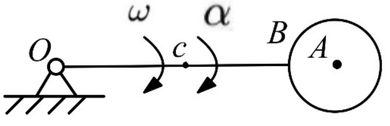
四、图示均质直杆 OA，长度为为 2r，质量为 m，均质圆轮的半径为 r，质量为 m，杆 O 端与轮心 O 有光滑铰链接，轮放置在光滑水平地面上。初始时系统静止，杆 OA 垂直，当杆 OA 无初速度顺时针倒下，到达水平位置时，其中轮仅水平滑动（无转动）。

求:此时,（1）杆的角速度（2）杆的角加速度，铰 O 的水平与垂直约束力。（提示:系统的水平动量守恒）（20 分）

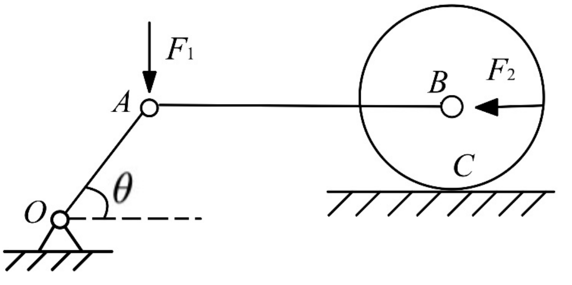


五、(a) 图示均质直杆 OB 的长度为 L，质量为m_1，均质圆轮的质量为m_2,半径为 R，轮与杆固接，轮心 A 位于杆 OB 轴线上。图示瞬时，杆绕 O 轴转动的角速度为ω，角加速度为α。求:此时杆与轮的惯性力系向点 O 简化的结果。

（b）图示平面机构，O 处为固定铰支座，A 处光滑铰连接，杆长 AB=2OA=2L,圆轮半径为 R，杆 AB 铰接于轮心 B，轮在水平面上无滑动。图示状态，杆 OA 的斜角为θ,杆 AB 水平。铰 A 受垂直力F_1作用,轮心 B 受水平力F_2作用,各杆重不计,平衡时,求:用虚角位移原理计算力F_1与F_2的关系。



题(a)图



题(b)图

六、设某单自由度系统的广义坐标为x，动能 T，势能 V，非保守广义力$\tilde{Q}$分别为（其中m,b,g,F,c为常数，t为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(b+x)^2\dot{x}^2,\ V=mg(b-\cos x),\tilde{Q}=F\sin t-c\dot{x}$$

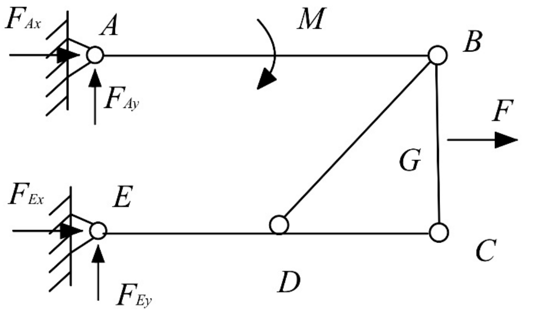
（1）系统的拉格朗日方程，（2）系统的哈密顿方程

（15 分）

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

计算题

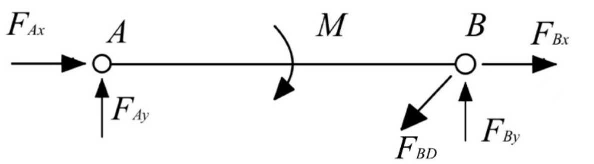
一、【解析】（1）整体，受力如图，平衡



$$\sum M_E = 0, F_{AX}L + F \cdot \frac{L}{2} + M = 0$$

得 $F_{AX} = -\frac{5}{2}F$

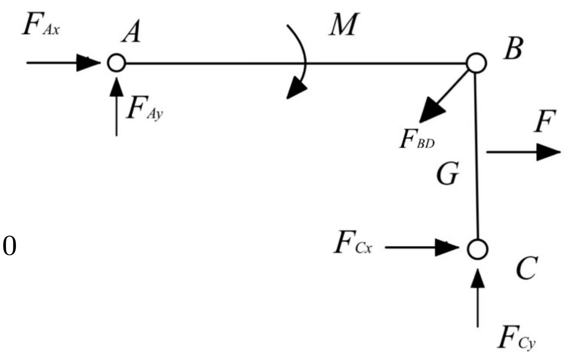
（2）杆 AB，受力如图，平衡



$$\sum M_B = 0, F_{Ay} \cdot 2L + M = 0$$

得 $F_{Ay} = -F$

（3）杆 $AB + BC$，受力如图，平衡



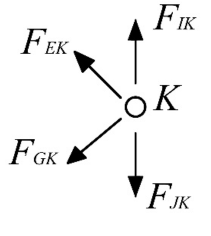
$$\sum M_C = 0$$

$$F_{BD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}L - F_{Az}L - F_{Ay} \cdot 2L - M - F \cdot \frac{L}{2} = 0$$

得 $F_{BD} = -2\sqrt{2}F$

【考点延伸】平面力系平衡方程

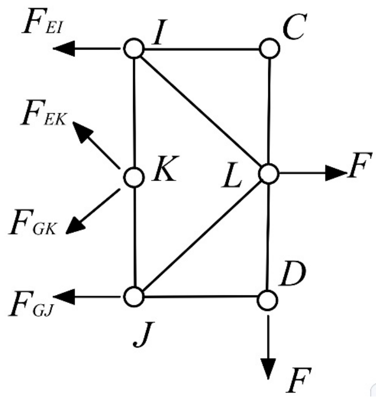
二、【解析】（1）节点 K，受力如图，平衡



$$\sum F_x = 0,$$

得 $F_{EK} + F_{GK} = 0$

（2）截取 CDJI，受力如图，平衡



$$\sum F_y=0, F_{EK}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-F_{GK}\frac{\sqrt{2}}{2}-F=0$$

得$F_{EK}=-F_{GK}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}F$

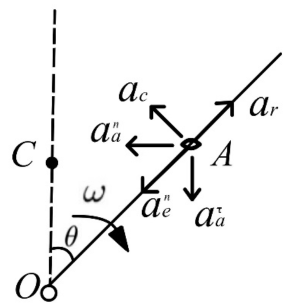
$$\sum M_J=0, F_{EI}\cdot 2b+F_{EK}\cdot 2b+F_{GK}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b-Fb-Fb=0$$

得$F_{EI}=F$

【考点延伸】平面桁架受力分析

三、【解析】（a）动点：小环 动系：杆 OB 上 定系：地面 绝对运动：绕 C 的圆周

相对运动：沿 OB 上直线 牵连运动：绕 O 转动



速度合成 $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$，如图，$v_e=\sqrt{2}r\omega$

到小环：$v_a=\sqrt{2}v_e=2r\omega, v_r=\sqrt{2}r\omega$

加速度合成：$\vec{a}_a^\tau+\vec{a}_n^\tau=\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_r+\vec{a}_c$

关系如图，$a_e^\tau=0, a_e^n=\sqrt{2}r\omega^2, a_c=2\sqrt{2}r\omega^2, a_n=4r\omega^2$

向垂直于 OB 方向投影，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_a^\tau-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n^n=-a_c$，得$a_a^\tau=0$

故小环加速度为$a=4\omega^2 r$

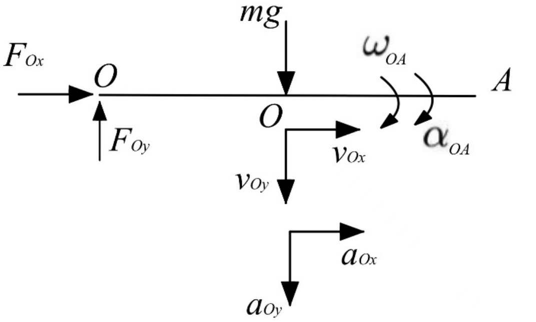
（2）杆 CBD 平面运动，速度瞬心 P，$PC=L, PB=\sqrt{2}L, PD=\sqrt{5}L$

$v_c=L\omega$，则杆CD，$\omega_{CD}=\dfrac{v_C}{PC}=\omega, v_B=\sqrt{2}L\omega$

杆AB，$\omega_{AB}=\dfrac{v_B}{AB}=\omega$，点$D$，$v_D=\sqrt{5}L\omega$

【考点延伸】点的加速度合成

四、【解析】(1）杆水平时，受力如图，



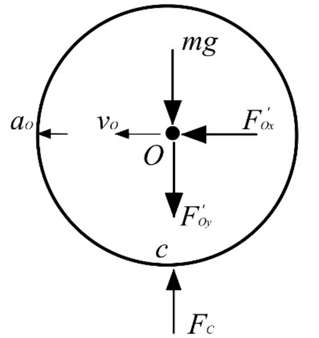
运动关系 $\vec{v}_D=\vec{v}_O+\vec{v}_{OD}$

$v_{Ox}=-v_O, v_{Oy}=r\omega_{OA}$，

动能 $T_{OA}=\dfrac{1}{2}mv_D^2+\dfrac{1}{2}J_D\omega_{OA}^2=\dfrac{1}{2}\left(v_O^2+\dfrac{4}{3}r^2\omega_{OA}^2\right)$

$$T_0=\frac{1}{2}mv_O^2$$

动能定理 $T_2-T_1=\sum W$,$T_1=0, T_2=T_{OA}+T_O, \sum W=mgr$，



得 $v_o^2+\dfrac{2}{3}r^2\omega_{OA}^2=gr$

水平动量定理 $P_x=-mv_O=0$，得 $v_O=0$,$\omega_{OA}=\sqrt{\dfrac{3g}{2r}}$

(2）杆平面运动方程 $F_{Ox}=ma_{Dx}, F_{Oy}-mg=m(-a_{Dy}), F_{Oy}r=J_D\alpha_{OA}=\dfrac{1}{3}mr^2\alpha_{OA}$

补充 $\vec{a}_D=\vec{a}_O+\vec{a}_{DO}^{\tau}+\vec{a}_{DO}^{n}$，得 $a_{Dx}=-a_O-r\omega_{OA}^2, a_{Dy}=r\alpha_{DA}$

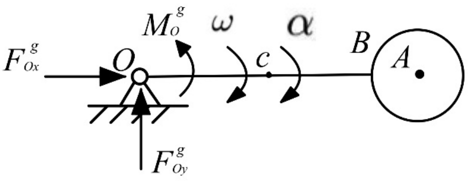
滑轮动 $F_{Ox}=ma_O$

解方程得 $\alpha_{OA}=\dfrac{3g}{4r}$,$F_{Ox}=-\dfrac{3}{4}mg$,$F_{Oy}=\dfrac{1}{4}mg$

【考点延伸】点的速度与加速度合成，刚体平面运动微分方程

五、【解析】（a）杆质心 C，$a_c^n=\dfrac{1}{2}L\omega^2, a_c^\tau=\dfrac{1}{2}L\alpha$

$a_A^n=(L+R)\omega^2, a_A^\tau=(L+R)\alpha$



题(a)图

惯性力如图，

$$F_{Ox}^g=m_1a_c^n+m_2a_A^n=\frac{1}{2}m_1L\omega^2+m_2(L+R)\omega^2$$

$$F_{Oy}^g=m_1a_c^\tau+m_2a_A^\tau=\frac{1}{2}m_1L\alpha+m_2(L+R)\alpha\text{。}$$

$$M_O^g=J_O\alpha=\left[\frac{1}{3}m_1L^2+\frac{1}{2}m_2R^2+m_2(L+R)^2\right]\alpha$$
$$=\left[\frac{1}{3}m_1L^2+m_2\left(\frac{1}{2}R^2+(L+R)^2\right)\right]\alpha$$

（b）系统自由度为 1，设θ为广义坐标，虚位移$\delta\theta$

虚速度$v_A=L\omega, v_A\sin\theta=v_B$

则虚位移$\delta r_A=\dfrac{v_A}{\omega}\delta\theta=L\delta\theta, \delta r_B=\dfrac{v_B}{\omega}, \delta\theta=L\sum\theta\,\delta\theta$

平衡，虚功，$\sum\delta W=-F_1\delta r_A, \cos\theta+F_2\delta r_B=\left(F_2L\sum\theta-F_1L\cos\theta\right)\delta\theta=0$

得$F_1=F_2\tan\theta$

【考点延伸】惯性力，虚位移原理

六、【解析】（1）拉氏函数 $L=T-V=\dfrac{1}{2}m(b+x)^2\dot{x}^2-mg(b-\cos x)$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m(b+x)\dot{x}$$

拉式方程 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=\tilde{Q}$

即 $m(b+x)^2\ddot{x}+2m(b+x)\dot{x}^2-m(b+x)\dot{x}^2+mg\sin x=F\sin t-c\dot{x}$

得 $m(b+x)^2\ddot{x}+m(b+x)\dot{x}^2+c\dot{x}+mg\sin x=F\sin t$

（2）广义动量 $p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m(b+x)^2\dot{x}$，$\dot{x}=\dfrac{p}{m(b+x)^2}$

哈氏函数 $H=(p\dot{x}-L)\dot{x}\ \rightarrow\ p=\dfrac{p^2}{2m(b+x)^2}+mg(b-\cos x)$

广义 $\tilde{Q}=Fsint-\dfrac{cp}{m(b+x)^2}$

哈氏方程 $\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m(b+x)^2}\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}+\tilde{Q}=\dfrac{p^2}{m(b+x)^3}-mg\sin x+F\sin t-\dfrac{cp}{m(b+x)^2}\end{cases}$

【考点延伸】拉格朗日方程，哈密顿正则方程