

## 第9章 真空中的静电场

### 一 用电场强度定义求电场强度（已在大物1中考查）

#### 1. 电荷与库仑定律

##### ① 电荷

- 自然界只存在正、负两种电荷，同种电荷之间为排斥力，异种电荷之间为吸引力
- 电荷守恒定律：一个孤立系统内无论发生什么过程，总电荷数保持不变。电荷既不能被创造、也不能被消灭，它只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一个部分转移到另一个部分

##### ② 库仑定律

- 真空中两个静止的点电荷  $q_1$  与  $q_2$  之间的相互作用力的大小和  $q_1$  与  $q_2$  的乘积成正比，和它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

$$\epsilon_0 : \text{真空中的介电常数} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

##### ③ 电力叠加原理

空间存在多个点电荷时，某点电荷受到的静电力等于其它点电荷各自单独存在时静电力的矢量和

#### 3. 电场与电场强度

##### ① 电场的概念

- 电荷在其周围空间激发电场，通过电场对其他电荷产生力的作用
- 电场是物质的一种形态，可以脱离电荷而存在

##### ② 电场强度的定义

- 单位试验电荷（电量小，可看成点电荷）在该点所受电场力

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad \text{单位: N/C 或 V/m}$$

##### ③ 场强叠加原理

- 点电荷系产生的电场在某点场强等于各点电荷单独存在时产生的电场在该点场强之和

#### 用电场强度定义与场强叠加原理求解电场强度

- 根据电场强度的定义，可以得到点电荷的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- 根据场强叠加原理，带电体产生的电场可以看作多个点电荷产生的电场的叠加
- 因此可以求出每个点电荷产生的场强分布，再将这些场强相加

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad r_i : P \text{ 与点电荷 } q_i \text{ 的距离}$$

如果电荷是连续分布的，就需要引入电荷密度（包括线密度  $\lambda$ 、面密度  $\sigma$ 、体密度  $\rho$ ）

并使用微元法，将带电体分割成微元，微元视作一个带电量为  $dq = \lambda dl$ （或  $\sigma dS$ 、 $\rho dV$ ）的点电荷由该微元电荷产生的场强记作  $d\mathbf{E}$ ，表示出  $d\mathbf{E}$  后，对所有电荷积分即可

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

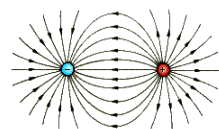
· 如果对微元法感到迷茫，不妨回去看看《微积分（甲）II》中多元函数积分学这一部分

## 二 用高斯定理求电场强度（已在大物1中考查，但大物2依然常用）

### 1. 电场线与电通量

#### ① 电场线

- 为形象地描述电场分布，在电场中作的反映电场中各点场强的大小和方向的假想线
- 规定：① 电场线上每一点的切线方向与该点场强  $\mathbf{E}$  的方向一致
- ② 任一点通过垂直于  $\mathbf{E}$  的单位面积  $dS$  的电场线数目  $dN$  等于该点场强大小
- 性质：① 电场线起自正电荷，终止于负电荷，不会在无电荷处中断
- ② 任意两条电场线不会相交
- ③ 静电场中的电场线不形成闭合曲线

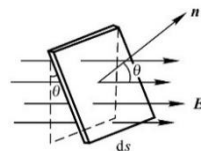


#### ② 电通量

- 定义：穿过曲面  $S$  的电通量等于穿过该曲面的电场线条数（联系第二类曲面积分）

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

- 对于闭合曲面，规定法线方向  $\mathbf{n}$  为自内而外的方向
- 特殊情况：① 均匀电场  $\mathbf{E}$ 、平面  $S$  垂直于  $\mathbf{E} \rightarrow \Phi_e = ES$
- ② 均匀电场  $\mathbf{E}$ 、平面  $S$  与  $\mathbf{E}$  法线夹角为  $\theta \rightarrow \Phi_e = ES \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$



### 2. 高斯定理

- 通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和除以  $\epsilon_0$

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

#### 用高斯定理求解电场强度

- 若带电体的分布存在对称性，则我们能找到一个闭合曲面，其上的电场强度分布也存在对称性
- 这个闭合曲面的电通量积分可以简化，直接由  $E$  代数表出，通过高斯定理就能建立方程，求解出  $E$

### 3. 常用场强结论

- 均匀带电球面（电量  $q$ ）  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- 无限大平板（面密度  $\sigma$ ）  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- 均匀带电圆柱面（线密度  $\lambda$ ）  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$  （注意电场的方向）

### 三 求电势

#### 1. 静电场的环路定理

##### ① 电场力做功路径无关

- 当试验电荷在静止点电荷电场中移动时，电场力所做的功，仅与试验电荷电量的大小及其起点和终点的位置有关，而与电荷移动的路径无关

##### ② 静电场环路定理

- 在静电场中，电场强度沿任意闭合回路的线积分恒等于零

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- 这两条表述是等价的，也说明了静电场是保守场，因此可以引入势能相关的概念

#### 2. 电势能与电势

##### ① 电势能

- 当试验电荷  $q_0$  从  $a$  点移动至  $b$  点，其间电场力所做的功应等于电荷静电势能增量的负值

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(W_b - W_a) = -\Delta W$$

- 含义：电荷从高电势能点移向低电势能点，电势能减小，电场力做正功

电荷从低电势能点移向高电势能点，电势能增加，电场力做负功

- 参考点：电势能是相对的，需要规定一个电势能为 0 的参考点

若场源电荷分布在空间有限区域内时，通常规定无限远处试验电荷为 0，因此电势能

$$W_P = \int_P^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

##### ② 电势

- 某点电势能与其电荷量的比值，是只与位置有关的函数

$$U_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$P_0$  是电势为 0 的参考点，可以是无穷远处 ( $\infty$ )

- 数值上等于单位正电荷在该处具有的电势能
- 引入电势之后，电场力做功可以表示为

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 (U_a - U_b)$$

#### 用电势定义求解电势

- 当电场分布已知或容易求出（通过高斯定理）时，用定义式  $U_P = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  即可求出电势
- 注意这是第二类曲线积分，要先选择一条方便求解的路径（一般就是直线），然后转化为定积分
- 注意参考点（零电势点）的选择，是选择某个点还是无穷远处

**例 1** 求半径  $R$ ，总电量为  $Q$  的均匀带电球面的电场中的电势分布（规定无穷远处为参考点）

**解** 根据高斯定理求出电场分布：

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

因此距球心为  $r$  一点  $P$  的电势 ( $r > R$ ) (路径是从点  $P$  沿球径向直线移动至无穷远点)

$$U_P = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

当  $r < R$  时, 按照相同路径分段积分, 得到  $U_P = \int_r^R 0 dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r < R)$

### ③ 电势叠加原理

- 点电荷系电场中某点的电势, 等于每一个点电荷单独存在时在该点所产生的电势的代数和

#### 用电势叠加原理求解电势

- 根据电势定义, 可求出单个点电荷  $q$  产生的电势分布为 ( $r$  是该点到点电荷的距离)

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

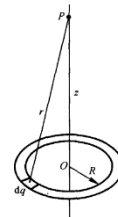
- 因此根据电势叠加定理, 可以分别算出各个点电荷在某点的电势, 然后相加

若电荷连续分布, 则分解为微元电荷  $dq$ , 表示为电荷密度与几何微元的乘积, 表示出  $dU$  后积分

**例 2** 求半径为  $R$  均匀带电圆环 (总电量  $q$ ) 轴线上一点的电势 (规定无穷远处为参考点)

**解** 建立如图坐标系, 设微元电荷产生的电势为  $dU$ , 电荷线密度  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

$$\text{表示出 } dU \text{ 积分, 得到总电势 } U_P = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$



#### 一种特殊情况

- 即使球面不均匀带电, 球面电荷在球心处产生的电势也只和球面总电量有关:

$$U = \int_s \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_s dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{即使不知道 } dq \text{ 的表达式也能求出})$$

## 四 用电势分布求解电场

### 1. 电场与电势梯度的关系

- 电场中任一点的电场强度矢量, 等于该点电势梯度矢量的负值

$$\mathbf{E} = -\text{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

**例 3** 某区域内电场的电势分布函数为  $U = ax^2 + bxy - cz^3$ , 其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为常量。则该区域中任一点的电场强度  $\mathbf{E} =$  \_\_\_\_\_。

**解** 代入公式, 分别对  $U$  求三个偏导数, 然后并成向量, 记得加上负号

$$\mathbf{E} = -\text{grad} U = -(2ax + by, bx, -3cz^2) \text{ 或写成 } \mathbf{E} = -(2ax + by)\vec{i} - bx\vec{j} + 3cz^2\vec{k} \text{ 的形式}$$

## 第 10 章 静电场中的导体与电介质

### 一 静电场中金属导体问题求解

#### 1. 静电平衡的形成

- 外电场引起导体上自由电子的移动，使导体带上等量异号的**感应电荷**
- 感应电荷激发**附加电场**，改变导体内外的电场
- 当导体内的外电场与附加电场正好**相互抵消**时，导体上的自由电子停止宏观运动，导体达到静电平衡

#### 2. 静电平衡的特点

##### ① 场强与电势

- **导体内部场强处处为 0**，且表面外侧紧靠表面处的场强处处与表面垂直
- **导体是一个等势体**，导体表面是一个等势面

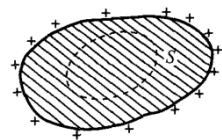
##### ② 电荷分布

- **电荷只分布在导体的表面上**
- **导体上所有电荷的代数和为最开始所带的电荷**（如  $Q$ 、0）

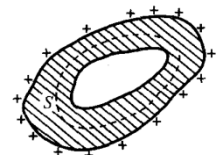
- 导体表面场强与电荷面密度的关系：

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- 孤立导体曲率越大的地方，电荷面密度越大



(a) 实心导体



(b) 空心导体

#### 3. 静电屏蔽

- 外部电场无法影响到空腔内，只能引起外表面电荷的分布
- 外表面未接地时，空腔内的电荷将影响导体外的电场
- 若外表面接地（电势变为 0），则内外电场互不干扰

#### 静电场中金属导体问题求解

- 通常，题目要求求出导体的电荷分布（或电荷量）、电场分布、电势等
- ① 根据静电平衡时导体内部无场强与电荷守恒，用高斯定理联系场强与电荷量，求解各个面的电荷量
- ② 根据求出的电荷量，用高斯定理、场强叠加等计算导体外部（包括空腔和外界）的场强
- ③ 根据求出的场强，用电势定义式计算导体表面的电势
- 一些操作代表的含义：接地 → 改变导体所带电荷量，使得其电势为 0  
连接 → 两个导体等电势，电荷在两个导体间重新分布

**例 1**（教材例题 10.1）一块面积为  $S$  的金属大薄平板  $A$ ，带电量为  $Q$ ，在其附近平行放置另一块不带电的金属大薄平板  $B$ ，两板间距远小于板的线度。试求两板表面的电荷面密度，以及周围空间的场强分布。

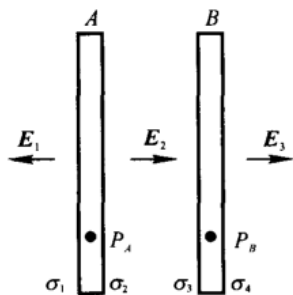
**解** 两块平板一共有 4 个表面，因为可视为无限大，其表面上若有电荷都应是均匀分布的，  
分别这四个平面的电荷面密度为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$

- 根据电荷守恒, 有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad ①, \quad \sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad ②$$

- 空间任一点的场强, 是这 4 个带电平面产生的场强叠加的结果  
平面均视为无限大, 则由高斯定理, 由某个平面产生的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \text{ 规定向右为正, 向左为负}$$



- 根据静电平衡, 两个导体内部场强都应该为 0, 各取一个点, 用场强叠加原理计算两处的场强:

$$P_A: \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \quad ③$$

$$P_B: \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \quad ④$$

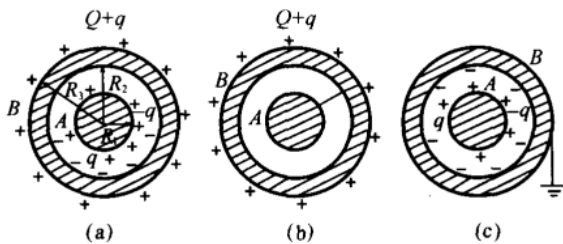
- 联立以上方程①~④, 解得  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$ ,  $\sigma_3 = -\frac{Q}{2S}$
- 接下来求电场, 根据无限大带电平面的特点, 空间一共被分为 3 处, 每处的场强都是相等的  
因此同样根据高斯定理与场强叠加, 分别求出 3 处的场强

$$E_1 = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = -\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

**例 2** (教材例题 10.2) 如图所示, 一半径为  $R_1$  的导体球 A, 带有电量  $q$ , 球外有一内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的同心球壳 B, 带有电量  $Q$ 。(1) 求球 A 和球壳 B 的电势;(2) 若用细导线连接球 A 和球壳 B, 再求其电势;(3) 若未连接时使外球接地, 此时其电势又是多少?(4) 如果外球接地后再拆除, 然后将内球接地, 此时其电势又是多少?(设外球离地很远)



**解** (1) 题目中一共有 3 个表面: A 的外表面, B 的内、外表面

① 求电荷量: 根据静电平衡, 球壳内部场强均为 0, 在球壳内作高斯面, 则电通量为 0

从而该面包括的电荷量 (A 外表面、B 内表面) 代数和为 0

- 因为 A 外表面带电量  $q$ , 因此推得 B 内表面带电量为  $-q$
- 由于 B 内、外表面共带电量  $Q$ , 因此 B 外表面带电量为  $Q+q$

② 求电场强度：由于这个体系是高度对称的，因此电场均匀分布，适合用高斯定理求解

· 在空腔内作同心球面为高斯面，有  $4\pi r^2 E = q / \epsilon_0$

在球壳外部作同心球面为高斯面，有  $4\pi r^2 E = (Q+q) / \epsilon_0$

· 于是电场分布为

$$E = \begin{cases} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_3 \\ 0, & 0 < r < R_1, R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

③ 根据电势定义求电势

· 球壳 B 的电势  $U_B = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

球 A 的电势  $U_A = U_B + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

(2) 用导线连接 A 和 B 后，电荷将全部分布到球壳的外表面，且两导体等势，因此

$$U_A = U_B = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

(3) 球壳接地后，其外表面的电荷被中和，和大地等电势（通常取为 0）

此时 A 上的电荷不变，从而电场分布也不变，因此 A 的电势

$$U_A = U_B + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(4) 将外球壳接地后，其外表面电势为 0

设此时外表面电量为  $x$ ，内表面电量因为要保持静电平衡因此还是  $-q$ 。根据 (1) 的结果：

$$U_B = \frac{q + (-q) + x}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

解得  $x=0$ ，因此 B 外表面无电荷，外壳总电荷量为  $-q$ ，接地拆除后这一值保持不变

将内球接地后，A 的电势变为 0，电荷量未知，设为  $q_x$

由于静电平衡，B 内表面电荷量为  $-q_x$ ；再结合电荷守恒，B 外表面总电荷量为  $q_x - q$

$$U_A = \frac{q_x}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q_x}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_x - q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

解得  $q_x = \frac{q}{R_3} / \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$

此时内球电势为 0，外球电势为  $U_B = \frac{q_x - q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \left[ \frac{1}{R_3} / \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - 1 \right]$

## 二 电容器求解

### 1. 电容器的电容

- 两个带有等量异号电荷的导体组成电容器，其之间的电势差为  $U_A - U_B$ ，则电容定义为

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

- 单位：法拉 (F)，常用的是微法 ( $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$ ) 和皮法 ( $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$ )

### 2. 电容的串并联

- 串联等效为电容  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$
- 并联等效为电容  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

#### 求电容器的电容

##### 定义法

- 假设两个导体（极板）上带有等量、异号的电荷  $+q$ 、 $-q$ ，回归到静电场导体参数求解  
求出电场强度，进而求出电势差，代入电容的定义式即可得到电容的表达式

##### 串并联法

- 将未知电容等效为若干个已知电容再运算，适用于极板间距不等的情况

**例 3** 设有半径都是  $r$  的两条平行“无限长”输电线 A 和 B，两轴间相距为  $d$ ，且满足  $d \gg r$ ，求两输电线单位长度的电容。

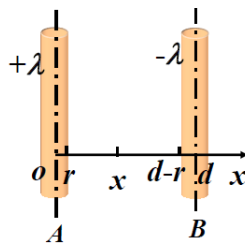
**解** 设 A、B 的电荷线密度分别为  $\pm\lambda$ ，建立坐标系

- 根据高斯定理，两导线间  $x$  处的电场为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

- 由电场定义： $U_{AB} = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_d^{d-r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-r}{r} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r}$

- 单位长度电容： $C = \frac{q/l}{U_{AB}} = \frac{\lambda}{U_{AB}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r)}$



## 三 电介质下静电场问题求解

### 1. 静电场中电介质参数

#### ① 电介质在电场中的表现

- 外电场加在电介质之上，同样在介质的表面会产生电荷（极化电荷）  
但介质内部产生的电场不会与外电场抵消，因此介质内部场强并不为 0

#### ② 极化强度

- 某点对应的体积微元中所有分子电矩的矢量和  $\mathbf{P}$

- 外加电场不太大时，有线性关系  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$  电极化率  $\chi_e$  相对介电常数  $\epsilon_r$



### ③ 极化电荷面密度

- 均匀电介质极化时, 电介质表面上某点处的极化电荷面密度  $\sigma'$  等于极化强度在该点表面的法向分量

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$$

## 2. 电介质下的电场定理

### ① 电位移 $\mathbf{D}$

- 为了不考虑极化电荷和附加电场, 引入电位移  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- 由  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ :  $\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$      $\epsilon$ : 介电常数

### ② 电介质中的高斯定理

- 通过电场中任意闭合曲面的位移电通量, 等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

### 含电介质的电场问题求解

- ① 如果题目没有给出电荷量, 且是一个电容器求电容问题, 首先设定两极板间的电荷量 (等量异号)
- ② 根据电介质高斯定理求出  $\mathbf{D}$  的分布
- ③ 根据  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的比例关系求出  $\mathbf{E}$  的分布
- ④ 根据电势定义由  $\mathbf{E}$  得到两板间电势差, 再根据电容定义得到电容
- ⑤ 若有要求, 则由  $\mathbf{E}$  得到  $\mathbf{P}$ , 以及极化电荷面密度  $\sigma'$

**例 4** 平行板电容器两极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ 。在极板间平行地放置两块厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$  的介质板, 其相对介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$ 。设电容器充电后两极板分别带有  $\pm q$  的电荷。试求: (1) 电容器的电容; (2) 两介质交界面上的极化电荷面密度

**解** (1) ① 求  $\mathbf{D}$ : 平行板电容器之间电场强度是均匀分布且向下的, 因此作柱形高斯面 (如图所示) 则由电介质高斯定理有

$$D_1 \Delta S_1 = \sigma \Delta S_1 \quad D_2 \Delta S_2 = \sigma \Delta S_2$$

解得  $D_1 = D_2 = \sigma = q/S$ , 方向向下

- ② 求  $\mathbf{E}$ : 根据  $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ , 有

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}$$

- ③ 求  $U$  与求  $C$

$$\text{由电势定义} \quad U = \int_0^{d_1} E_1 dl + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dl = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{q d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} + \frac{q d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}$$

$$\text{由电容定义} \quad C = \frac{q}{U} = q / \left( \frac{q d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} + \frac{q d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S} \right) = S / \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

(2) 两介质在交界面上的极化电荷面密度的总量等于两介质交界面上的极化电荷面密度的代数和

由  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$ , 得  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  均是竖直向下的

介质 1 外表面的法线方向竖直向下, 介质 1 外表面的法线方向竖直向上

$\therefore$  由  $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , 有

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = P_1 - P_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E_1 - \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2 = \left(\frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}\right) \frac{q}{S}$$

**例 5** 真空中一无限大带电导体板两侧面上的电荷面密度均为  $\sigma$ , 现在的导体板右侧充满介电常数为  $\epsilon$  的均匀电介质。试求: (1) 导体板左侧面、右侧面上的自由电荷面密度  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  以及电介质表面的极化电荷面密度  $\sigma'$ ; (2) 导体板左、右两侧的电场强度大小和方向。

**解** (1) 根据电介质极化的特点, 系统中一共有三处电荷: 导体板两侧和电介质左侧

· 这三个电荷面将有场强的空间划分为左右两处, 这三个电荷面位于中间

· 对于无限大平板电荷面, 其在两侧产生的场强大小是相等的

由此可以推出, 导体板两侧的电场由中间三个电荷面产生, 因此大小相等  $E_1 = E_2$

· 根据电介质中的电场定理  $E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$ ,  $E_2 = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma_2}{\epsilon}$ , 因此有  $\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon}$

由电荷守恒  $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma$ , 联立解得  $\sigma_1 = 2\sigma \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon}$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma \frac{\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon}$

· 极化电荷  $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P = -D + \epsilon_0 E_2 = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \sigma_2 = 2\sigma \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon}$

(2)  $E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0 + \epsilon}$ ,  $E_1$  方向向左,  $E_2$  方向向右

**例 6** 一空气平行板电容器, 两板间距为  $d$ , 极板上带电量分别为  $+q$  和  $-q$ , 板间电势为  $U$ , 忽略边缘效应; 将电源断开, 在两板间平行插入一厚度为  $t$  ( $t < d$ ) 的金属板, 则板间电势差变为 \_\_\_\_\_, 此时电容器的电容值为 \_\_\_\_\_。

**解** 与例 4 相同的推导可以得到平行板电容器中场强  $E$  均匀分布, 因此  $U = Ed$

电源断开意味着电势差发生变化, 但带电量  $q$  不变

根据金属板内场强为 0, 可以推得金属板两侧带上电量  $\pm q$

根据电介质中的高斯定理, 除了被金属板占据的区域外, 其余部分电场强度不变

因此两极板间的电势

$$U' = E(d-t) = \boxed{\frac{d-t}{d}U}$$

则此时的电容

$$C' = \frac{q}{U'} = \boxed{\frac{q}{U} \frac{d}{d-t}}$$

**评注** 此类问题首先要关注插入金属导体前后电源是否断开，这关系到是电势差不变还是电荷量不变，在抓住不变量的基础上，分别分析前后的物理模型，从而得到答案

**例 7** 一球形电容器，内外球面半径分别为  $R_1 = 2\text{cm}$  和  $R_2 = 4\text{cm}$ ，在两球间充满击穿电场强度为  $160\text{kV/m}$  的电介质；则该电容器能承受的最大电压为\_\_\_\_\_。

**解** 球形电容器的电场分布为  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  ( $R_1 < r < R_2$ )

$\therefore$  电场强度在  $r = R_1$  时达到最大值，该值不能超过电介质的击穿场强，因此  $\frac{q}{4\pi\epsilon R_1^2} \leq E_{\text{击穿}}$

得到电容器的最大电量  $q \leq 4\pi\epsilon R_1^2 E_{\text{击穿}}$

$$\therefore U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \leq \frac{4\pi\epsilon R_1^2 E_{\text{击穿}}}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = R_1^2 E_{\text{击穿}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \boxed{1.6 \times 10^3 \text{V}}$$

**注** 击穿问题的核心在于找到系统内场强能够达到的最大值及其位置

## 四 求静电场中的能量

### 1. 点电荷系统的能量

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i U_i$$

- $W$ ：系统的总能量      $U_i$ ：在点电荷  $q_i$  所在处由  $q_i$  以外其它所有电荷所产生的电势
- 若电荷连续分布，改写成微元电荷积分的形式即可

### 2. 电容器的能量

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q(U_A - U_B) = \frac{1}{2} C(U_A - U_B)^2$$

### 3. 电场能量

|        |   |         |                     |
|--------|---|---------|---------------------|
| · 电能密度 | $w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$ | · 非均匀电场 | $W = \int_V w_e dV$ |
|--------|---|---------|---------------------|

**注** 求解电场能量，往往是先求出某点电能密度的函数表达式，然后进行三重积分

**例 8** 半径为  $a$  的长直导线，外面套有共轴导体圆筒，圆筒内半径为  $b$ ，导线与圆筒间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀电介质。设沿轴线单位长度上导线均匀带电  $+\lambda$ ，圆筒均匀带电  $-\lambda$ ，忽略边缘效应，沿轴线单位长度的电场能量为\_\_\_\_\_。

**解** 作圆柱高斯面，得  $D = \frac{\lambda}{2\pi r}$ ，从而  $E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$ ，因此  $w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2}$

这是一个非均匀电场，因此需要在长度为  $l$  的圆柱套筒范围内进行积分（柱坐标系）：

$$W = \int_V w_e dV = \int_a^b \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^l dl = \frac{\lambda^2 l}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

因此单位长度的电场能量  $W/l = \boxed{\frac{\lambda^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{b}{a}}$

### 电场能量变化求解问题

题目通常对电容器等系统加以外力使之发生变化，如抽出、放入电介质，考查过程的做功、力等

- ① 联系第 2 章的功能原理，要意识到做功的量是系统能量的变化值，功是力在空间上的累积
- ② 一般先求出变化前后系统电场能量的表达式
- ③ 此时可以算出功，也可以对表达式求导算出力等参数
- ④ 变化过程中同样要注意哪些量保持不变

**例 9** 平行板电容器极板面积为  $2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ，极板间距离为  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，在电容器内有一介质板 ( $\epsilon_r = 5$ ) 充满两极板间的全部空间。电容器与 300V 电源相连，充电后将电源切断，再抽出介质板。求：

(1) 抽出过程中外力所做的功；(2) 抽出介质板后，两极板间的相互作用力。

**解** (1) 根据功能原理，抽出过程中外力所做的功应等于系统前后能量的变化

· 因为抽出前后电源切断，所以极板上带的电荷量  $Q$  不变

· 介质板抽出前，电容器的电容  $C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$  (可快速推导出来)，能量  $W_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$

· 介质板抽出后，电容器的电容  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ，能量  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

$$\therefore A = W - W_0 = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right) = \frac{1}{2} (C_0 U)^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} U^2 (\epsilon_r - 1) = \boxed{1.59 \times 10^{-4} \text{ J}}$$

(2) 设两极板间相互作用力为  $F$ ，这个力表现为吸引力，属于保守内力

· 这个力使得极板间的距离  $x$  有减小的倾向，距离减小  $dx$  可视为其中一块极板发生位移  $dx$

此时电场力做功可以表示为  $dA = F dx$

由势能原理，保守力做功等于电容器能量的减少量  $dA = -dW$

由于电荷量不变，因此电容器的能量  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\epsilon_0 S}$

$$\text{因此 } F = \frac{dA}{dx} = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r^2 S U^2}{2d^2} = \boxed{-0.199 \text{ N}}$$

## 第 11 章 稳恒电流

### 一 电流与电流密度

#### 1. 电流

##### ① 电流强度 $I$

- 单位时间内通过导体任一截面的电量，是标量

$$I = \frac{dq}{dt}$$

##### ② 电流密度 $j$

- 电流密度描述导体内一点的电流情况，是矢量

$$I = \int_S j \cdot dS$$

- 在磁场相关章节中，电流密度可能以线密度的形式存在

#### 2. 电流密度与漂移速度的关系

- 自由电子除无规则热运动外，还将作逆着电场方向的定向运动（漂移运动）
- 漂移运动的平均速度  $v_d$ （漂移速度）与电流密度间的关系：

$$j = -ne v_d$$

其中  $n$  为自由电子数密度， $e$  为基本电荷

#### 3. 稳恒电流

- 导体中各点电流密度矢量  $j$  或通过导体任一截面的电流强度  $I$  不随时间变化的电流

$$\oint_s j \cdot dS = -\frac{dq}{dt} = 0$$

**例 1** 直径为 2mm 的铜线，通有 1A 的稳恒电流，则铜导线中电子的漂移速度为\_\_\_\_\_；

已知铜的电子浓度为  $8.5 \times 10^{28}/\text{m}^3$

**解** 由电流密度与稳恒电流的关系，以及铜线直径恒定（截面积恒定，且垂直于电流密度）

$$j = \frac{4I}{\pi d^2}$$

由电流密度与漂移速度的关系

$$v_d = \frac{4I}{ne\pi d^2}$$

代入数据，得  $v_d = 2.34 \times 10^{-5} \text{m/s}$

### 二 电动势

#### 1. 定义

- 在电源内部，将单位正电荷从负极移到正极时非静电力所做的功

## 第 12 章 稳恒磁场

### 一 求磁感应强度

#### 0. 磁场与磁感应强度相关概念

##### ① 磁场

- 运动电荷在其周围空间产生磁场，通过磁场对其它运动电荷施加作用力

##### ② 磁感应强度

- 磁感应强度  $\mathbf{B}$  反映场内某点的磁场方向与强弱（矢量场），单位：特斯拉（T）
- 运动电荷（速度  $\mathbf{v}$ ）在某点（磁感应强度  $\mathbf{B}$ ）受到的磁场作用力（洛伦兹力）为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

##### ③ 磁感应线

- 形象展示磁感应强度分布的假想图线，没有起终点，环绕方向与电流方向服从右螺旋法则

**右螺旋法则** 用右手竖一个👍（这个 emoji 是左手）

若是直线电流产生的磁场，大拇指指向电流方向，则其它四指的绕行方向就是  $\mathbf{B}$  的方向

若是环形电流产生的磁场，其它四指的绕行方向为电流方向，则大拇指指向  $\mathbf{B}$  的方向

#### 2. 用毕奥-萨伐尔定律求磁感应强度

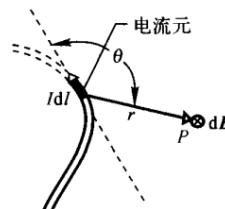
##### ① 毕奥-萨伐尔定律

- 长  $d\mathbf{l}$  的电流元  $I d\mathbf{l}$ （微元，视为一个点）在点  $P$  处产生的磁感应强度

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

- $I$ ：电流     $\mathbf{r}$ ：电流元指向  $P$  的矢量     $\mu_0$ ：真空磁导率，

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$



##### ② 叠加原理

- 点  $P$  处的磁感应强度由各电流元在该点处产生的磁感应强度的矢量和

##### ③ 由定律得到的基本结论

| 长直载流导线   | 载流圆线圈  |
|--|--|
|  |  |
| $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ | $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$ |

方向由右螺旋法则确定

### ③ 由常用结论得到的特殊结论

· 无限长直导线距离  $a$  处

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

· 圆弧形电流 (圆心角  $\theta$ ) 在圆心处

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\theta}{2\pi}$$

### 用毕奥-萨伐尔定律与叠加原理求磁感应强度的基本流程

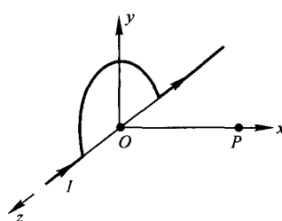
· 最一般的情况: 根据微元法表示出  $I d\mathbf{l}$ , 代入公式得到  $d\mathbf{B}$  后进行积分 (例 1)

· 常见的情形是产生磁场的电流可以分解为直线电流、圆环电流等 “基本单元”

这时应根据上面的已有结论分别求出各部分产生的磁场, 再根据叠加原理将  $\mathbf{B}$  相加。

若电流是连续分布的, 则应将这些微电流其产生的磁场表示为  $d\mathbf{B} = \mathbf{\times} \times d\mathbf{l}$ , 再积分 (例 2 及后)

**例 1** 如图所示, 一无限长直导线, 其中部被弯成半径为  $r$  的半圆环, 当导线通有电流  $I$  时, 求垂直于环面的轴线上距环心  $O$  点  $x$  处  $P$  点的磁感应强度。



**解** 直线部分产生的磁场属于基本结论, 可代入公式:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( \cos 0 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( -\frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \cos \pi \right) \quad (\text{两段的叠加})$$

当然也可视为是无限长直导线减去了中间的部分 (计算结果相同):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{-r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right)$$

方向竖直向下 ( $y$  轴负方向)

圆弧部分则没有现成的结论, 需要用定律计算

画图, 结合立体几何知识可以得出, 角度为  $\theta$  时, 电流元产生的  $\mathbf{B}$  可以分解为

$$\begin{cases} dB_x = B \sin \alpha \\ dB_y = B \cos \alpha \sin \theta \\ dB_z = B \cos \alpha \cos \theta \end{cases}$$

同时  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{L}}{L^3} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r d\theta}{L^2}$ , 因此

$$\begin{cases} dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r \sin \alpha}{L^2} d\theta \\ dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r \cos \alpha}{L^2} \sin \theta d\theta \\ dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r \cos \alpha}{L^2} \cos \theta d\theta \end{cases}$$

因为积分范围是  $\theta = 0$  至  $\theta = \pi$ , 因此由对称性可得  $B_z = 0$ , 同时

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0}{4} \frac{Ir \sin \alpha}{L^2} = \frac{\mu_0}{4} \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \\ B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir \cos \alpha}{L^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Irx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \end{cases}$$

最后加上直导线产生的  $B_1$  并合成, 得到该点的磁感应强度

$$\mathbf{B} = \left( -\frac{\mu_0}{4} \frac{Ir^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}, -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Irx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) \right)$$

**评注** 所以, 一旦不得不用毕奥-萨伐尔定律来求  $\mathbf{B}$ , 事情就会变得非常的麻烦, 对立体几何、空间想象力以及叉乘的掌握都是一个巨大的考验。因此考试考查的基本都是可以只用已知结论求解的题型

**例 2** 一无限长直导线通有电流  $I$ , 如图弯成一个半径为  $R$  的  $3/4$  圆, 则圆心  $o$  处的磁感应强度为\_\_\_\_\_。



**解** 根据叠加原理, 将该导线分为三个部分: 左边的半无限直导线、 $3/4$  圆、右边的半无限直导线

①  $o$  点位于右边的半无限直导线所在直线上, 因此这部分导线不在  $o$  点产生场强

② 左边的半无限直导线可根据基本结论求  $\mathbf{B}$ :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

由右手螺旋法则, 方向垂直纸面向外

③  $3/4$  圆符合特殊结论, 因此可直接代入公式求解:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{3/2\pi}{2\pi} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

由右手螺旋法则, 方向垂直纸面向里

由此叠加, 得到  $B = B_2 - B_1 = \frac{3\mu_0 I}{8R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R} (\frac{3}{2} - \frac{1}{\pi})$  方向垂直纸面向里

**例 3** 在半径为  $R$  的无限长半圆筒形金属薄壁中, 自上而下通过电流  $I$ , 设电流均匀地分布在薄壁上, 求轴线上  $P$  点的磁感应强度。

**解** 薄壁可以看成是连续分布的无限长直电流的叠加因此使用微元法

从薄壁电流的横截面入手, 可以得出电流的线密度为

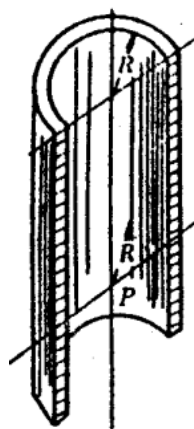
$$j = \frac{I}{\pi R}$$

截面是一个半圆弧, 因此取微元  $dI = jRd\theta$ ,  $0 < \theta < \pi$

由无限长直导线的结论, 微元  $dI$  在  $P$  点产生的磁感应强度大小

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$

方向则随  $\theta$  变化而变化, 但都与轴线垂直, 因此根据右螺旋法则, 可以分解为





$$dB_x = dB \sin \theta$$

$$dB_y = dB \cos \theta$$

根据积分区间及对称性,  $B_y = 0$ ,  $B_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$ , 因此,  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$

### 3. 运动电荷产生的磁感应强度

① 单个电荷  $q$  以速度  $\mathbf{v}$  运动产生的磁感应强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

② 电荷运动的等效电流

当有多电荷 (尤其是连续分布电荷) 进行匀速运动时, 可考察某截面单位时间通过的电荷量而求  $I$

**例 4** 一圆盘的半径为  $R$ , 中心点为  $o$ , 圆盘表面上均匀分布着面密度为  $\sigma$  并与圆盘固结在一起的电荷。假定圆盘以角速度  $\omega$  绕对称轴转动, 求轴上一点的磁感应强度。

**解** 圆盘转动时, 将其分解为无数个微元圆环, 每个圆环上的电荷作圆周运动, 可以等效为环形电流。对于半径为  $r$ , 宽  $dr$  的圆环, 在时间  $\Delta t$  内, 圆盘转动  $\Delta\theta = \omega\Delta t$ , 流过截面的电荷量为

$$q = \sigma r \Delta\theta dr$$

由此可得出圆环的等效电流为

$$dI = \frac{q}{\Delta t} = \sigma \omega r dr$$

因此根据已有结论, 在圆盘轴上一点 (距圆心  $x$ ), 该圆环产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^3 \sigma \omega dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

因此对整个圆盘积分 (提示: 用分部积分法):

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 r^3 \sigma \omega dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$

**评注** 运动电荷, 特别是连续分布电荷转动产生的磁场, 关键在于求出等效电流。由于题目涉及的都是匀速运动 (不然就不是稳恒磁场了), 一般通过设定一个时间段, 选择一个与运动方向垂直的截面, 求该时间段内通过的电荷量从而求出等效电流

### 4. 用安培环路定理求磁感应强度

① 安培环路定理

· 在稳恒磁场中, 磁感应强度  $\mathbf{B}$  沿任何回路的线积分等于闭合回路所包围电流的代数和的  $\mu_0$  倍

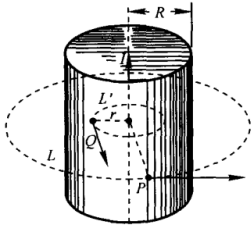
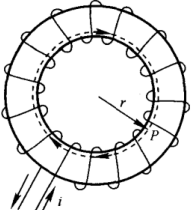
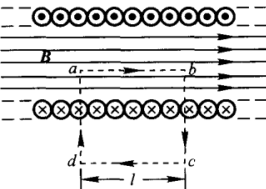
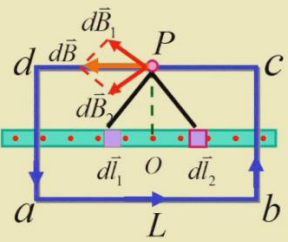
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$

· 电流方向与积分路径绕行方向呈右螺旋关系时取正号, 反之取负号

## 用安培环路定理与叠加原理求磁感应强度的基本流程

- 检查条件：磁场分布应当呈现一定的对称性，使得有环路的积分可以化简为乘积  
这依赖电流的分布呈现对称性
- 若条件满足，找到一个合适的环路，使它的环路积分可以化简为  $B$  的表达式
- 代入公式，求解方程组，即可得到  $B$  的大小，方向则通过右手螺旋法则求出

### ② 常用结论

| 无限长载流圆柱体   | 载流螺绕环   | 长直载流螺线管  | 无限大载流平面   |
|--|---|--|---|
|                       |  |  |  |
| $B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r < R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & r > R \end{cases}$ | $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} = \mu_0 n I$  | $B = \mu_0 n I$  | $B = \frac{\mu_0}{2} j$   |
|  | $n$ ：单位长度环绕的线圈匝数  |  | $j$ ：电流线密度  |
| 方向由右螺旋法则确定   |   |  |   |

### ③ 与叠加定理结合

- 有些因不对称无法适用安培环路定理的磁场可以分解为多个可以适用的磁场的叠加

**例 5** 在一半径为  $R$  的长圆柱形导体内，有一半径为  $a$  的圆柱形空腔，它们的轴线相互平行，间距为  $d$ 。设该导体载有分布均匀的电流  $I$ ，求空腔内任一点的磁感应强度

**解** 看似这个磁场是不对称的，无法适用安培环路定理，但实际上这个磁场可以看成是两个无限长载流圆柱体产生的磁场的叠加，定理分别适用

如图所示，设点  $O$  至点  $P$  的矢径为  $\mathbf{r}$ ，点  $O'$  至点  $P$  的矢径为  $\mathbf{r}'$

对于半径  $R$  的载流圆柱体产生的磁场（设电流密度矢量  $\mathbf{j}$ ），其电流密度应当为

$$\mathbf{j} = \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)} \mathbf{k}$$

根据已有结论，其在  $P$  点产生的场强  $B = \frac{\mu_0 r j}{2}$ ，结合右螺旋法则，可以表示为  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{r}$

对于半径  $a$  的载流圆柱体产生的磁场，可视为电流反向，其在  $P$  点产生的场强  $\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{r}'$

则由叠加定理：
$$\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{r} - \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{r}' = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{d}$$

其中  $\mathbf{d}$  为点  $O$  指向  $O'$  的矢径, 因此空腔内的场强为定值:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)}(R - a) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{(R + a)}$$

## 二 求磁通量

### 1. 磁通量的定义

- 磁通量是磁感应强度  $B$  在某个曲面  $S$  上的第二类曲面积分

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

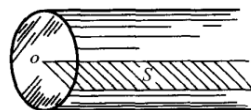
- 对于闭合曲面, 规定外法线方向为法线正方向

#### 由定义求磁通量的基本流程

- 首先应求出磁感应强度  $\mathbf{B}$  的分布
- 取曲面  $S$  上的面积微元, 规定正法线方向, 表示出  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , 然后进行积分

大物一般只考查平面的磁通量, 积分会相对简单很多, 一定要熟练掌握, 电磁感应部分经常用

**例 6** 一根长铜线载有分布均匀的电流  $I$ , 在铜线内部作一假想的平面  $S$ , 如图所示。求通过每米导线内的  $S$  平面的磁通量。



**解** 设铜线半径为  $R$ , 由安培环路定理, 根据已知结论, 得到磁感应强度分布:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

由于  $S$  平面上的磁感应强度只随  $r$  变化, 将  $S$  分割为长  $l$  宽  $dr$  的小长条, 其上的磁通量

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} r dr \quad (\text{设 } S \text{ 的法矢量与 } B \text{ 同向})$$

积分得到磁通量

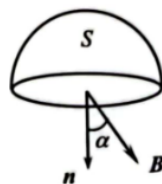
$$\Phi_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 I l}{4\pi} \quad \therefore \text{单位长度磁通量为 } \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

### 2. 磁场高斯定理

$$\Phi_m = \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

- 用处: 求简单曲面的磁通量以获得复杂曲面的磁通量

**例 7** 在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中, 作一半径为  $r$  的半球面  $S$ ,  $S$  边线所在平面的法线方向单位矢量  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{B}$  的夹角为  $\alpha$ , 则通过半球面  $S$  的磁通量 (取弯面向外为正) 为\_\_\_\_\_。



**解** 由磁场高斯定理,  $\Phi_m = \oint_{S+S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

对于边线平面  $S'$ ,  $\int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BS \cos \alpha = \pi r^2 B \cos \alpha$

因此  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \boxed{-\pi r^2 B \cos \alpha}$

### 三 求磁矩

#### 1. 磁矩的概念

- 与闭合回路相关的物理量

$$\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{e}_n$$

**例 8** 从经典观点看，氢原子可看作是一个电子绕核作高速旋转的体系，已知电子和质子的电荷分别为  $-e$  和  $e$ ，电子质量为  $m_e$ ，氢原子的圆轨道半径为  $r$ ，电子作平面轨道运动，则电子轨道运动的磁矩为\_\_\_\_\_。

**解** 由库仑定律和圆周运动，电子绕核的线速度

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi m_e \epsilon_0} r}$$

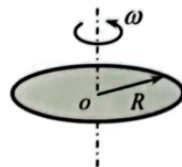
单位时间内通过的电荷量为  $e \times$  单位时间通过电子数目 (= 电子单位时间绕圈数目 = 频率)  
因此根据电流定义：

$$I = e \frac{v}{2\pi r}$$

$\therefore$  磁矩

$$p_m = IS = e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m_e}}$$

**例 9** 如图所示，一半径为  $R$  的塑料圆盘，表面上均匀分布有电量为  $+q$  的电荷，圆盘以角速度  $\omega$  绕通过中心且与盘面垂直的轴转动。则该圆盘的磁矩  $p_m$  的大小为\_\_\_\_\_；方向为\_\_\_\_\_。



**解** 之前例 4 中已经解过，半径为  $r$  处的等效环形电流强度

$$dI = \sigma \omega r dr = \frac{q}{\pi R^2} \omega r dr$$

则这个环形电流的磁矩  $dp_m = SdI = \pi r^2 \cdot \frac{q}{\pi R^2} \omega r dr = \frac{q\omega}{R^2} r^3 dr$ ，方向沿轴向上

因此积分得到

$$p_m = \int_0^R \frac{q\omega}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{4} q\omega R^2 \quad \text{方向沿轴向上}$$

### 四 求磁场作用力与功

#### 1. 安培力

- 安培力是洛伦兹力的宏观表现，对于某电流元  $I d\mathbf{l}$ ，该处磁感应强度  $\mathbf{B}$ ，则受到安培力

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

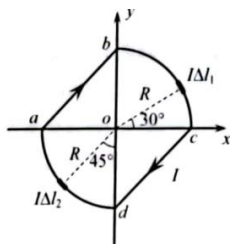
- 对于一段导线受到的安培力，根据力的叠加原理相加（积分）

$$\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

· 均匀磁场中，一段弯曲导线受到的安培力等于同一起终点的直导线受到的安培力，直导线受力为

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

**例 10** 如图所示，在  $xOy$  平面（即纸面）内有一载流线圈  $abcd$ ，其中  $bc$  弧和  $da$  弧皆为以  $o$  为圆心半径  $R$  的  $1/4$  圆弧， $\overline{ab}$  和  $\overline{cd}$  皆为直线，电流  $I$ ，其流向沿  $abcd$  的绕向；电流元  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ ，位置如图。设线圈处于磁感应强度  $B$  的均匀磁场中， $\mathbf{B}$  方向沿  $x$  轴正方向。试求以下电流元或载流导线在均匀磁场  $\mathbf{B}$  中的受力：



- (1) 电流元  $I\Delta l_1$  和  $I\Delta l_2$  所受安培力  $\Delta \mathbf{F}_1$  和  $\Delta \mathbf{F}_2$  的大小和方向；
- (2) 直线段  $\overline{ab}$  和  $\overline{cd}$  所受到的安培力  $\mathbf{F}_{ab}$  和  $\mathbf{F}_{cd}$  的大小和方向；
- (3) 圆弧段  $bc$  弧和  $da$  弧所受到的安培力  $\mathbf{F}_{bc}$  和  $\mathbf{F}_{da}$  的大小和方向。

**解** (1) 由安培力的微分式  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

$$\Delta F_1 = I\Delta l_1 B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} I\Delta l B \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$\Delta F_2 = I\Delta l_2 B \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} I\Delta l B \quad \text{方向垂直纸面向内}$$

- (2) 直线段的长度均为  $\sqrt{2}R$ ，则直导线所受安培力

$$F_{ab} = I\sqrt{2}RB \sin 45^\circ = IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

$$F_{cd} = I\sqrt{2}RB \sin 135^\circ = IRB \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

- (3) 此时  $dF = IRB \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) d\theta = IRB \cos \theta d\theta$ ，则

$$F_{bc} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} IRB \cos \theta d\theta = IRB \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$F_{ad} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} IRB \cos \theta d\theta = IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

当然，可以直接利用结论，计算  $bc$  和  $ad$  直导线所受安培力

## 2. 载流平面线圈的磁力矩

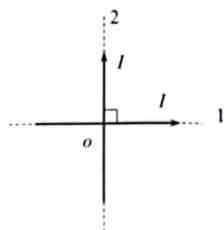
· 一般情况下，线圈受到的力矩

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

· 均匀磁场中，线圈受到的力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$$

**例 11** 如图所示，两根相互绝缘的无限长直导线 1 和 2 绞接于  $o$  点，两导线间的夹角为  $90^\circ$ ，通有相同的电流  $I$ ，求距导线 2  $r$  处，导线 1 的单位长度线段所受磁力对  $o$  点的力矩大小



**解** 导线 2 产生的磁感应强度为  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，方向垂直纸面向里（ $r > 0$ ）或向外

( $r < 0$ )

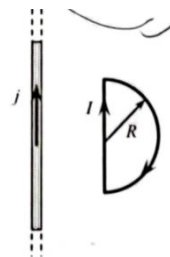
导线 1  $r$  处  $I dl = I dr$ , 方向向右, 因此力矩

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \rightarrow dM = r I \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} dr$$

因此单位长度线段所受磁力对  $o$  点的力矩大小为

$$\frac{dM}{dr} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}$$

**例 12** 如图所示, 在电流密度为  $j$  的均匀载流无限大平板附近, 有一载流为  $I$ , 半径为  $R$  的半圆形刚性线圈, 其线圈平面与载流大平面垂直, 线圈所受磁力矩为 \_\_\_\_\_; 若线圈平行于载流大平面, 则所受磁力矩大小为 \_\_\_\_\_。



**解** 均匀载流无限大平板在右侧附近产生的磁感应强度为  $\frac{\mu_0}{2} j$ , 方向垂直纸面向里

因为是均匀磁场, 所以可用磁矩计算磁力矩

∵ 磁矩与线圈平面垂直 ∴ 线圈平面与载流大平面垂直时, 磁矩平行于  $\mathbf{B}$ , 因此磁力矩为 0  
线圈平行于载流大平面时, 磁矩垂直于  $\mathbf{B}$ , 因此

$$M = p_m B \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 \pi R^2 I j}{4}$$

### 3. 磁力做功

· 一个任意的闭合载流回路, 在磁场中改变位置或形状时, 磁力或磁力矩做的功

$$dA = I d\Phi$$

**例 13** 由细软导线做成的圆环, 半径为  $R$ , 流过电流  $I$ , 将圆环放在磁感应强度  $B$  的均匀磁场中, 磁场的方向与圆电流的磁矩方向一致, 今有外力作用在导线环上, 使其变成正方形, 则在维持电流不变的情况下, 外力克服磁场力所作的功是 \_\_\_\_\_。

**解** 导线由圆形变成正方形, 周长不变, 面积变化。设正方形边长  $a$ , 则有

$$2\pi R = 4a \quad \text{因而} \quad a = \frac{\pi R}{2}$$

则磁场力做功

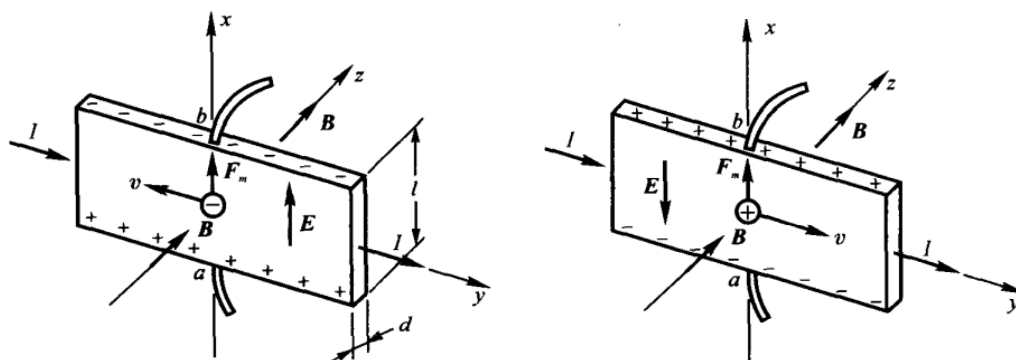
$$A = I \Delta\Phi = IB \Delta S = IB(a^2 - \pi R^2) = IB\pi R^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$$

因此外力克服磁场力做功  $-A = IB\pi R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

## 三 霍尔效应

### 1. 霍尔效应

· 处在均匀磁场中的通电导体薄板, 当电流方向与磁场方向垂直时, 则在垂直于磁场和电流方向的薄板上、下两端之间出现电势差



· 电势差方向判别：载流子带负电荷，则  $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$  的方向为  $\mathbf{E}$  的方向

载流子带正电荷，则  $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$  的反方向为  $\mathbf{E}$  的方向

判断电势差方向基本每年期中考都考，若记不清结论，就先推导洛伦兹力的方向，再根据电荷得出结论  
有时候是已知电势差，判断磁场方向、电流方向、载流子，也要熟练

## 2. 霍尔元件

· 霍尔电压  $U_H = R_H \frac{IB}{d}$       霍尔系数  $R_H = \frac{1}{nq}$        $d$ ：厚度       $n$ ：载流子浓度

**例 14** 如图所示，把一宽  $l$  为  $2.0 \times 10^{-2} \text{m}$ ，厚度  $d$  为  $1.0 \times 10^{-3} \text{m}$  的铜片放在磁感应强度  $B=1.5 \text{T}$  的均匀磁场中，如果铜片中通有  $200 \text{A}$  的电流，则铜片\_\_\_\_\_（填“左”或“右”）的电势高，霍尔电势差为\_\_\_\_\_。（已知铜的电子浓度为  $8.5 \times 10^{28} \text{l/m}^3$ ）

**解** 由图知，载流子为负电荷， $\mathbf{B}$  竖直向上， $\mathbf{I}$  垂直纸面向里

由右螺旋法则，电场方向向右，因此左侧电势高

由霍尔电势差公式

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} = \frac{1}{ne} \frac{IB}{d} = 2.2 \times 10^{-5} \text{V}$$

## 第 13 章 磁场中的磁介质

### 一 磁介质下磁场问题求解

#### 1. 磁介质的相关概念

##### ① 磁介质如何响应外磁场

- 分子本身具有磁矩（固有磁矩  $\mathbf{p}_m$ ），可认为由等效的圆电流（分子电流）产生  
由于磁矩取向无规则，它们相互抵消，导致磁介质不显磁性
- 磁介质处于外磁场时，每个分子均产生与外磁场方向相反的附加磁矩  $\Delta \mathbf{p}_m$
- 顺磁质的  $\mathbf{p}_m$  远大于  $\Delta \mathbf{p}_m$ ，且分子受到的磁力矩尽可能使固有磁矩转向外磁场方向  
抗磁质的  $\mathbf{p}_m$  为 0，附加磁矩是产生磁化的唯一原因

##### ② 磁化强度 $\mathbf{M}$

- 某单位体积微元内分子总磁矩之和

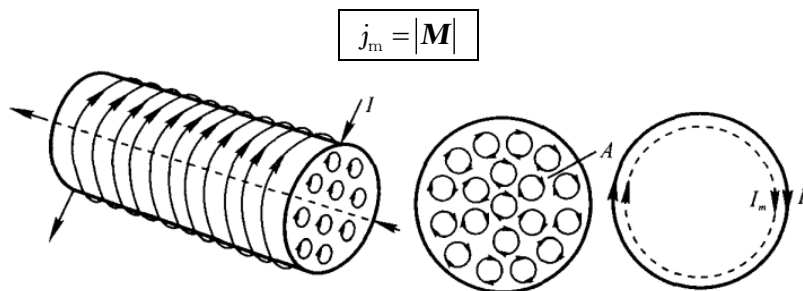
$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{p}_m / dV$$

- 顺磁质  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{B}_0$  同向，抗磁质  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{B}_0$  反向

##### ③ 磁化电流 $I_m$

由磁介质中各分子的分子电流叠加而成，仅在磁介质表面产生的等效环形电流

- 磁介质表面上某处磁化电流线密度  $j_m$  等于该点磁化强度  $\mathbf{M}$  沿表面的切向分量  
若是均匀磁介质被均匀磁化，则



#### 2. 磁介质下的磁场定理

##### ① 磁场强度 $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (\text{单位: A/m})$$

##### ② $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{M}$ 之间的关系（各向同性的磁介质）

- 基本关系式  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$   $\chi_m$ : 介质的磁化率，顺磁质为正，抗磁质为负
- 常用关系式  $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$   $\mu_r$ : 相对磁导率，无量纲  $\mu$ : 磁导率

· 由于  $\mu$ 、 $\mu_r$ 、 $\chi_m$  都有可能成为已知数据，因此它们之间的关系一定要灵活掌握



### ③ 安培环路定理

· 磁场强度  $\mathbf{H}$  沿任意闭合路径  $L$  的环流，等于穿过该路径所围面积的传导电流的代数和

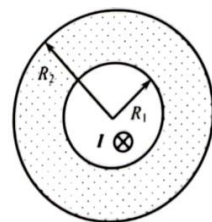
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$$

#### 磁介质下磁场问题求解流程

· 通常，题目要求求出磁场强度分布、磁感应强度分布、磁化电流线密度等

- ① 用磁介质下的安培环路定理求出磁场强度  $\mathbf{H}$  的分布
- ② 根据  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{M}$  间的关系，求解出  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{M}$ （有时已知这俩，反过来求  $\mu$ ）
- ③ 根据  $\mathbf{M}$  与  $j_m$  的关系，得到  $j_m$ 、 $I_m$  等

**例 1** 如图所示，一磁导率为  $\mu_1$  ( $> \mu_0$ ) 的无限长圆柱形导体半径为  $R_1$ ，其中均匀地通有电流  $I$ 、方向垂直向里；导体外包一层磁导率为  $\mu_2$  ( $> \mu_1$ ) 地同轴圆筒形不导电的磁介质，其外半径为  $R_2$ ；外部是真空。求：



(1) 磁场强度和磁感应强度的空间分布；

(2) 半径为  $R_2$  处介质表面上的磁化电流线密度的大小和方向、总磁化电流强度。

**解** (1) 取半径为  $r$  的同心圆形环路，则有  $2\pi r H = I$  ( $r > R_1$ )， $2\pi r H = I r^2 / R_1^2$  ( $r < R_1$ )

$$\cdot \text{ 磁场强度分布 } H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r}, & r > R_1 \\ \frac{I r}{2\pi R_1^2}, & r < R_1 \end{cases}$$

空间内磁导率呈现三处分布，由  $B = \mu H$ ：

$$\cdot \text{ 磁感应强度分布 } B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R_2 \\ \frac{\mu_2 I}{2\pi r}, & R_2 > r > R_1 \\ \frac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2}, & r < R_1 \end{cases}$$

(2) 半径  $R_2$  处的磁化强度

$$M = \chi_m H = \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) H = \frac{I}{2\pi R_2} \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right)$$

$\because \mu_2 > \mu_1 > \mu_0$  因此  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  同向

$$\therefore j_m = M = \frac{I}{2\pi R_2} \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right), \text{ 方向垂直纸面向外}$$

$j_m$  在半径  $R_2$  的圆周上均有分布，因此总磁化电流强度

$$I_m = \int_0^{2\pi} j_m dl = 2\pi R_2 j_m = I \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right)$$

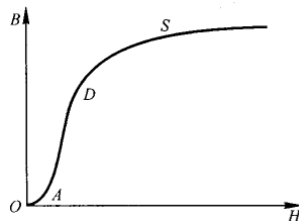
## 二 铁磁质的特性

### 1. 铁磁质的磁化曲线与磁滞回线

- 不同于磁化率恒定的其它介质，铁磁质的磁化率会随磁场变化而变化
- 由于  $B = \mu H$ ，故通过  $B-H$  曲线研究这一性质

#### ① 起始磁化曲线

- 当铁磁质从未磁化状态开始加外磁场测得的曲线
- 曲线呈现“S”形，说明  $\mu$  不是常数
- 随着  $H$  增加， $B$  会趋于一个极限值 — 饱和磁感应强度



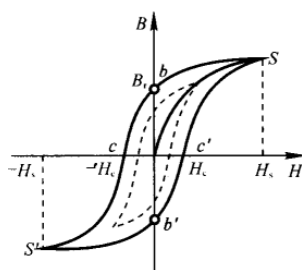
#### ② 磁滞回线

- 铁磁质达到饱和状态后，当减小  $H$  时， $B$  的减小呈现出滞后性（磁滞现象）

结果： $H=0$  时， $B \neq 0$ ，称为剩磁感应强度  $B_r$

只有  $H = -H_c$ （矫顽力）时才能让  $B=0$

- 此后再减小  $H$ （增大反向磁场），铁磁质开始反向磁化至反向饱和状态再沿正方向增加  $H$ ， $B$  又会滞后于  $H$  达到饱和状态，形成磁滞回线
- 实际上，即使未达到饱和状态就开始减小  $H$ ，也会形成磁滞回线，只是相比之下会小一些（图中的虚线）

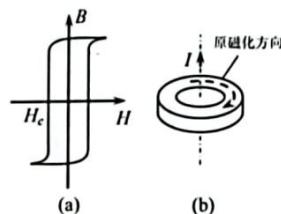


#### ③ 总结

- 铁磁质在沿着初始磁化曲线磁化后，要么沿着磁化曲线继续增大，要么沿着磁滞回线往复循环

**例 2** 铁氧体的矩形磁滞回线如图（a）所示。图（b）为用这种材料制作的电

子计算机中存储元件的环形磁芯，其外半径为  $0.8\text{mm}$ 、内半径为  $0.5\text{mm}$ 、高  $0.3\text{mm}$ ，矫顽力为  $H_c = 500/\pi \text{ A/m}$ 。磁芯已被磁化，方向如图所示。对磁芯施加轴向电流达到\_\_\_\_\_A 时，磁芯中磁化方向开始翻转，若需使磁芯中自内向外的磁化方向全部翻转，脉冲电流的峰值至少需要达到\_\_\_\_\_A。



**解**

根据安培环路定理，磁环处的磁场强度  $H = \frac{I}{2\pi r}$

设内半径  $r_1$ ，外半径  $r_2$ ，则  $r_1$  处磁场强度最大，最先翻转，因此

$$H_c = \frac{I_1}{2\pi r_1} \Rightarrow I_1 = 2\pi r_1 H_c = 2\pi \times 0.5\text{mm} \times \frac{500}{\pi} \text{ A/m} = 0.5\text{A} \quad (\text{第一空})$$

当  $r_2$  处磁场强度为  $H_c$  时，磁芯中磁化方向全部翻转，因此

$$H_c = \frac{I_2}{2\pi r_2} \Rightarrow I_2 = 2\pi r_2 H_c = 2\pi \times 0.8\text{mm} \times \frac{500}{\pi} \text{ A/m} = 0.8\text{A} \quad (\text{第二空})$$

## 第 14 章 电磁感应

### 一 求感应电动势

#### 1. 法拉第电磁感应定律与楞次定律

##### ① 法拉第电磁感应定律

- 基本内容：回路所包围面积的磁通量  $\Phi$  发生变化时，回路中会产生感应电动势  $\epsilon_i$

$$\epsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- 正负与方向：通常规定与原磁感应强度方向成右螺旋关系的回路方向为正方向，使得  $\Phi$  一定为正  
此时若  $\epsilon_i$  为正，说明其方向与回路绕行方向相同，否则相反
- 全磁通  $\Psi$ ：若导体由多个线圈串联而成，每个线圈的磁通量为  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ ，则

$$\epsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt}, \text{ 其中 } \Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$$

##### ② 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使它所激发出的磁场去阻止引起感应电流的原磁通量的变化

#### 用法拉第电磁感应定律求电动势 —— 磁通量法

- ① 求出  $\mathbf{B}$  的分布
- ② 求出回路的磁通量  $\Phi_m$  —— 应该是关于  $t$  的函数
- ③ 根据定律求出  $\epsilon_i$  的值
- ④ 用楞次定律确定电动势的方向

#### 2. 求动生电动势

- 动生电动势：导体或回路在（稳恒）磁场中运动产生的电动势

##### ① 用动生电动势定义

- 对于线元  $d\mathbf{l}$ ，其上产生的动生电动势

$$d\epsilon_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

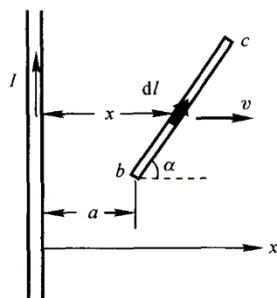
结果的正/负号表明电动势方向与  $d\mathbf{l}$  相同/相反

**例 1**（例题 14.5）如图所示，一长直导线通有电流  $I$ ，有一长  $l$  的金属棒  $bc$  与  $x$  方向成  $\alpha$  角，以速度  $\mathbf{v}$  垂直于长直导线作匀速运动。当棒的  $b$  端距导线为  $a$  时，求金属棒的电动势。

**解** ① 求  $\mathbf{B}$ ：  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ ，方向垂直纸面向里

② 表示出  $d\epsilon_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ ：

$\mathbf{v}$  与  $\mathbf{B}$  垂直，叉乘方向竖直向上，因此与  $d\mathbf{l}$  夹角为  $\frac{\pi}{2} - \alpha$



$$\therefore d\epsilon_i = vB \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) dl \quad \because dx = \cos \alpha dl \quad \therefore d\epsilon_i = vB \sin \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{v\mu_0 I}{2\pi x} \tan \alpha dx$$

③ 积分

$$\epsilon_i = \int_a^{a+l\cos\alpha} \frac{v\mu_0 I}{2\pi x} \tan \alpha dx = \frac{v\mu_0 I}{2\pi} \tan \alpha \ln \frac{a+l\cos\alpha}{a}$$

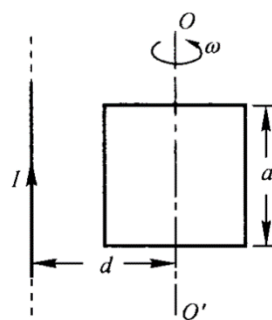
结果  $> 0$  因此电动势由  $b$  指向  $c$

## ② 磁通量法 —— 补全

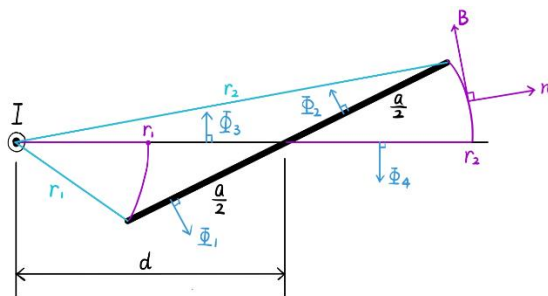
- 将要求电动势的导体与其它不切割磁感线的假想导体组成回路，此时回路的电动势就是所求
- 若要求的就是回路电动势，且回路作转动，则一般来说用磁通量法更加便捷

**例 2** (习题 14.10) 在长直导线附近，有一边长为  $a$  的正方形线圈，绕其中心线  $oo'$  以角速度  $\omega$  旋转，转轴  $oo'$  与长直导线间的距离为  $d$ ，如导线中通有电流  $I$ ，求线圈中的感应电动势。

**解** 设  $t=0$  时处于线圈平面位于纸面，则  $t$  时刻线圈转过的角度  $\theta = \omega t$  俯视图如图所示，由于不同位置  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{n}$  夹角不同，直接求磁通量很麻烦 此处巧妙地用一个方法来转换：



构建如图所示的 2 个闭合曲面，根据 12 章的结论，闭合曲面磁通量为 0



平行于水平面的两个底面自然没有磁通量，两个扇形圆柱面的  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{B}$  垂直，因此  $\Phi_m = 0$

只有如图所示的 4 个面有磁通量，记为  $\Phi_1$  至  $\Phi_4$ ，因此有

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_4 = 0$$

则我们就要求的斜面磁通量  $\Phi_2 - \Phi_1$  转化为新的平面的磁通量  $\Phi_3 - \Phi_4$  了，将  $\Phi_4$  的  $\mathbf{n}$  反向，变成  $\Phi_3 + \Phi_4$ ，实际上是同一平面，且这个面上  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{n}$  同向，求解方便很多！

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

这里的  $r_2$  和  $r_1$  都是与  $t$  有关的变量，由几何关系：

$$r_1 = \sqrt{(d - \frac{a}{2} \cos \omega t)^2 + (\frac{a}{2} \sin \omega t)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(d + \frac{a}{2} \cos \omega t)^2 + (\frac{a}{2} \sin \omega t)^2}$$

代入后，用  $\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  即可得到感应电动势

本题当然可以用动生电动势来求（好像会更简便），求的时候需要搞清楚夹角，因此画图很重要

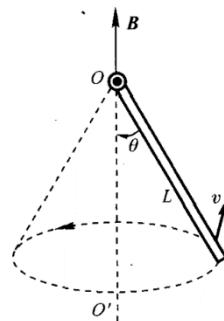
### ③ 磁通量法 —— 转化

- 将要求电动势的导体与其它假想导体组成回路使得回路磁通量不变, 此时假想导体电动势为所求  
此法可将求复杂形状导体的电动势转化为简单导体(直导线)的电动势
- 均匀磁场  $\mathbf{B}$  中的常用结论

长  $L$  的直线导体(与磁场垂直)作平动:  $\epsilon_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$  绕一端作转动:  $\epsilon_i = \frac{1}{2} \omega L^2$

**例 3** (习题 14.6) 在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中, 有一长为  $L$  的导体棒以匀角速度  $\omega$  绕轴  $oo'$  轴旋转。 $oo'$  轴与磁场方向平行, 棒与磁场方向夹角为  $\theta$ , 求导线棒中的动生电动势。

**解** 构建如图所示的回路, 该回路平面与  $\mathbf{B}$  平行, 因此磁通量恒为 0  
从而整个回路的感应电动势为 0  
而  $OC$  段实际上没有运动, 因此其上无动生电动势  
由以上两个结论可知  $OA$  的电动势即为  $CA$  的电动势



由于  $CA$  在垂直  $\mathbf{B}$  的平面内绕  $C$  转动, 因此感应电动势  $\epsilon_{OA} = \epsilon_{CA} = \frac{1}{2} \omega B (\overline{CA})^2 = \frac{1}{2} \omega B L^2 \sin^2 \theta$

方向由  $O \rightarrow A$

### 3. 求感生电动势

- 感生电动势: 导体所处磁场发生变化所产生的电动势(通过在周围激发涡旋电场)

#### ① 求涡旋电场(除非题目有要求, 一般不推荐该方法)

- 涡旋电场与变化磁场的关系

$$\oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{涡旋电场线与 } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ 呈左螺旋关系})$$

- 磁场分布及变化处于高度对称性时, 上式的左边可以简化, 从而求出  $E_i$   
最常见的是圆柱磁场(题目会直接说明, 也会隐含在载流螺线管当中)

$$\begin{cases} 2\pi r \mathbf{E}_i = -\frac{dB}{dt} \pi r^2, & r < R \\ 2\pi r \mathbf{E}_i = -\frac{dB}{dt} \pi R^2, & r > R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_i = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}, & r < R \\ \mathbf{E}_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}, & r > R \end{cases}$$

- 感生电动势等于单位正电荷绕闭合回路一周涡旋电场力所做的功

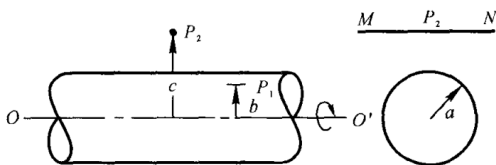
$$\epsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

#### ② 磁通量法

- 将要求电动势的导体与其它不产生感生电动势的假想导体组成回路, 此时回路的电动势就是所求
- 位于径向的直导线因为处处垂直于涡旋电场, 因此不产生感生电动势

**例 4** (习题 14.17) 一半径为  $a$  的无限长均匀带电圆筒面, 单位长度上的电荷为  $\lambda$ , 圆筒绕  $oo'$  以匀角加速度  $\beta$  转动, 试求: (1) 圆筒内与轴相距为  $b$  的  $P_1$  点的电场强度; (2) 若有一长为  $l$  的金属棒

$MN$  与圆筒轴线相垂直,  $P_2$  点在金属棒正上方且为  $MN$  中点, 垂直距离  $oP_2 = c$ , 求金属棒  $MN$  两端的电势差。



**解** (1) 根据 12 章的知识, 旋转带电圆筒产生的磁场类似载流螺线圈:

① 单位长度等效电流  $\frac{\omega\lambda}{2\pi}$

② 由安培环路定理,  $B = \mu_0 \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \mu_0 \frac{\beta\lambda t}{2\pi}$

③ 涡旋电场  $2\pi r E_i = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = -\pi r^2 \frac{\mu_0 \beta \lambda}{2\pi} \rightarrow E_i = -\frac{\mu_0 \beta \lambda}{4\pi} r$

因此  $P_1$  点  $E_i = \frac{\mu_0 \beta \lambda}{4\pi} b$ , 方向与圆筒旋转方向相反

(2) 连接  $OM$  和  $ON$ , 因为这两段为径向, 恒与涡旋电场垂直, 因此没有感生电动势  
则  $MN$  上电动势就是回路  $OMN$  的电动势:

$$\Phi = BS = \theta a^2 \frac{\mu_0 \beta \lambda t}{2\pi} \quad \text{其中} \quad \tan \theta = \frac{l}{2c}$$

$$\therefore \epsilon_{MN} = \frac{\mu_0 a^2 \beta \lambda}{2\pi} \arctan \frac{l}{2c} \quad (\text{本题题干不清, 无法辨别具体方向})$$

**例 5** (习题 14.13) 高度为  $D$  的铜质圆环, 内半径为  $R_1$ , 外半径为  $R_2$ , 放置在垂直于环面的磁场中。

若磁场局限在圆环范围内 (如图), 且磁感应强度按  $B = \frac{t}{r}$  规律变化, 式中  $t$  为时间,  $r$  为环上任意一点与圆环中心的距离。已知铜的电阻率为  $\rho$ , 求圆环上的电流。

**解** 取半径为  $r$ , 宽  $dr$  的圆环, 规定顺时针为正方向则该圆环的磁通量

$$\Phi = \int B \cdot dS = \int_{R_1}^r B \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{R_1}^r t dr = 2\pi t(r - R_1)$$

由此得到圆环上的感应电动势

$$d\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -2\pi(r - R_1) \quad \text{方向为逆时针}$$

圆环的电阻

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{2\pi r}{D dr}$$

因此感应电流

$$dI = \frac{d\epsilon_i}{R} = \frac{-2\pi(r - R_1)}{2\pi r \rho} D dr = -\frac{D}{\rho} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{D}{\rho} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr = -\frac{D}{\rho} \left[ (R_2 - R_1) - R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \quad \text{负号说明方向为逆时针}$$

### 圆盘的感应电流

· 将圆盘分割为微元圆环，半径  $r$ ，宽  $dr$

求出该圆环的磁通量  $\rightarrow$  感应电动势  $\rightarrow$  电阻  $\rightarrow$  感应电流

将所有感应电流叠加（积分）

**例 6** (18-19 大题 6) 如图所示，两根平行放置相距  $2a$  的无限长载流直导线，其中一根通稳恒电流  $I_0$ ，另一根通交变电流  $i = I_0 \cos \omega t$ 。两导线间有一与其共面的矩形线圈，线圈的边长分别为  $l$  和  $2b (b > a)$ ， $l$  边与长直导线平行，且线圈以速度  $v$  垂直于导线向右运动。当线圈运动到两导线的中心位置（即线圈中心线与距两导线均为  $a$  的中心线重合）时，右侧导线中的电流恰好为零，求此时线圈中的（1）动生电动势；（2）感生电动势；（3）感应电动势

**解** (1) 将磁场分布固定为所求时刻的分布，则此时右侧导线电流为 0，不产生磁场

线圈中，只有与导线平行的部分  $AB$  和  $CD$  才产生电动势，因此

$$\epsilon_{\text{动}} = \epsilon_{\text{动}AB} - \epsilon_{\text{动}DC} = B_1 vl - B_2 vl = \frac{vl\mu_0 I_0}{2\pi(a-b)} - \frac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi(a+b)} = \frac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi} \left[ \frac{1}{(a-b)} - \frac{1}{(a+b)} \right] \quad \text{方向顺时针}$$

(2) 将线圈位置固定为所求时刻的位置，由于左侧导线产生的是稳恒磁场，无感生电动势

因此只考虑右侧导线，则

$$\Phi = - \int_{a-b}^{a+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi(2a-r)} l dr = - \frac{\mu_0 li}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

$$\epsilon_{\text{感}} = \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} \frac{di}{dt}$$

由于  $i = I_0 \cos \omega t$ ，因此  $\frac{di}{dt} = -\omega I_0 \sin \omega t$ ，又由于此时  $\cos \omega t = 0$ ，因此  $\sin \omega t = \pm 1$

$$\therefore \epsilon_{\text{感}} = - \frac{d\Phi}{dt} = \begin{cases} \frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}, & \omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{顺时针} \\ - \frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}, & \omega t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{逆时针} \end{cases}$$

$$(3) \quad \epsilon = \epsilon_{\text{动}} + \epsilon_{\text{感}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi} \left[ \frac{1}{(a-b)} - \frac{1}{(a+b)} \right] + \frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}, & \omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi} \left[ \frac{1}{(a-b)} - \frac{1}{(a+b)} \right] - \frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}, & \omega t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

顺时针为正，逆时针为负

**感生电动势与动生电动势同时存在  $\rightarrow$  求  $t$  时刻的感应电动势（考试大题必考）**

- ① 假定磁场分布恒为  $t$  时刻的磁场，求出动生电动势
- ② 假定导体位置固定于  $t$  时刻的位置，求出感生电动势
- ③ 两者相加，得到感应电动势



## 二 求自感和互感系数与电动势

### 1. 自感

#### ① 基本概念

- **自感现象**: 由于回路中电流变化而在回路自身中产生感应电动势 (**自感电动势**)
- 此时通过回路的全磁通  $\Psi$  与电流  $I$  成正比,  $L$  称为**自感系数**

$$\Psi = LI$$

- 自感电动势  $\epsilon_i = -L \frac{di}{dt}$ , 负号表示  $\epsilon_i$  与  $I$  方向相反

#### ② 求回路的自感系数与自感电动势

- 假设回路中通有电流  $I$ , 算出磁场分布, 然后算出全磁通  $\Psi$ , 用  $\Psi = LI$  求出自感系数
- 若通有随时间变化的电流  $i$ , 按照  $\epsilon_i = -L \frac{di}{dt}$  计算自感电动势

**例 7** 两根半径为  $a$  的平行长直传输线, 相距为  $d$ , 且  $a \ll d$ , 求单位长度传输线的自感。

**解** 假设传输线中通电流  $I$ , 则离  $AB$  为  $r$  处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

由于  $a \ll d$ , 因此可忽略导线内部的磁通量:

$$\Phi = \int_a^{d-a} l \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \quad \text{单位长度的磁通量} \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$\text{因此自感系数 } L = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

### 2. 互感

#### ① 基本概念

- **互感现象**: 一个回路中的电流变化而在另一个回路中产生感应电动势 (**互感电动势**)
- **互感系数**  $M_{12} = M_{21} = M$ , 使得  $\Psi_{21} = MI_1$ ,  $\Psi_{12} = MI_2$

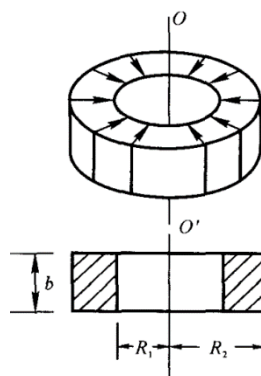
- 互感电动势  $\epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$

#### ② 求回路的互感系数与互感电动势

- 假设回路 1 通有电流  $I_1$ , 算出磁场分布, 然后算出回路 2 全磁通  $\Psi_{21}$ , 用  $\Psi_{21} = MI_1$  求出系数
- 若通有随时间变化的电流  $i_1$ , 按照  $\epsilon_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$  计算自感电动势



**例 8** (习题 14.26) 一矩形截面螺绕环 ( $\mu_r = 1$ ), 由细导线均匀密绕而成, 内半径为  $R_1$ , 外半径为  $R_2$ , 高为  $b$ , 共  $N$  匝。在螺绕环的轴线上, 另有一无限长直导线  $oo'$ , 如图所示, 在螺线环内通交变电流  $I = I_0 \cos \omega t$ , 求无限长直导线中的感应电动势



**解** 本题涉及了两个回路, 因此是互感问题。由互感电动势的求法, 任务在于求出互感系数  $M$ , 既可以假设  $I_1$  求  $\Psi_2$ , 也可假设  $I_2$  求  $\Psi_1$ , 由于载流长直导线不好求磁通量, 所以我们假设直导线通  $I$ , 求螺绕环的磁通量

① 载流直导线的  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , 由于螺绕环内  $\mu_r = 1$ , 因此按真空做

$$\text{螺绕环的全磁通 } \Psi = N\Phi = N \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

② 互感系数  $M = \Psi / I = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

③ 互感电动势  $\epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mu_0 N b \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \sin \omega t$

### 三 求磁场能量

#### 1. 自感磁能

· 自感系数  $L$  的线圈建立稳定电流  $I_0$  时, 线圈中的磁能为  $W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$

#### 2. 磁能密度

· 磁场中某点处的磁能密度  $\omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ , 积分得到  $V$  内的磁场能量

#### 磁场能量求解

- ① 求出  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{B}$  的分布
- ② 表示出磁能密度  $\omega_m$
- ③ 在指定的体积范围内对  $\omega_m$  进行积分, 得到磁场能量  $W_m$

**例 9** (习题 14.26) 同轴电缆由半径为  $R_1$  的铜芯线和半径  $R_2$  的同轴圆筒所组成 (如图), 其间充满磁导率为  $\mu$  的绝缘介质。电流  $I$  从芯线的一端流出经外层圆筒返回, 且电流在芯线内均匀分布。求“无限长”同轴电缆上长为  $l$  的一段磁场能量

**解** 根据安培环路定理:  $H = \frac{I}{2\pi r}$  则  $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ , 因此磁能密度为  $\omega_m = \frac{1}{2} B H = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$

$$\text{在该段的磁场能量 } W_m = \int \omega_m dV = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} r dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

# 第 15 章 电磁场与电磁波

## 一 求位移电流

### 1. 位移电流的定义

· 为了使安培环路定理在非稳恒的情况下普遍适用, 引入位移电流, 将电流的类别扩大

· 位移电流密度  $\mathbf{j}_d = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$  · 位移电流  $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}$  (方向规定为  $\mathbf{D}$  增量的方向)

#### 如何求位移电流

· 通过第 10 章的知识, 由  $U$ 、 $\mathbf{E}$  等参数求出  $D$ , 再通过定义式求出  $\mathbf{j}_d$ , 进而求出  $I_d$

**例 1** 一平板电容器两极板面积为  $S$ , 极板间距为  $d$ , 两极板与一电压  $V = V_0 \sin \omega t$  的交流电源连接, 则穿过电容器的位移电流密度为 \_\_\_\_\_, 位移电流的大小为 \_\_\_\_\_.

**解** 由定义式:  $\mathbf{j}_d = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\epsilon_0}{d} \frac{dV}{dt} = \frac{\epsilon_0 \omega V_0}{d} \cos \omega t$   $I_d = \mathbf{j}_d S = \frac{\epsilon_0 \omega V_0}{d} \cos \omega t$

## 二 麦克斯韦方程组

|  |    |  |
|--|----|--|
| $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = \sum q$   | (  | $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$   |
| $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_e}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$  | (  | $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$             |
| $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$   | (1 | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  |
| $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I + \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ |    | $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ |

## 三 电磁波

### 1. 电磁波的性质

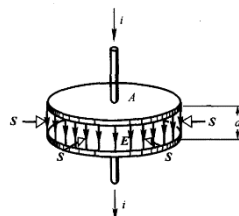
电磁波是横波, 传播的是电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{H}$ , 两者垂直, 传播方向恒为  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , 速度为光速  $c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

### 2. 能流密度与 $S$

·  $S$ : 电磁波的能流密度 (单位时间通过垂直于传播方向的单位面积的能量)

· 矢量形式:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  (坡印亭矢量)

**例 2** 图中表示一正在充电的平行板电容器。电容器圆形极板的半径为  $R$ , 极板间距离为  $d$ 。试计算电容器界面处的能流密度, 并通过能流密度计算单位时间内进入电容器内部的总能量。



**解** 由全电流的安培环路定理, 半径  $R$  处的磁场强度  $H = \frac{\pi R^2 j_d}{2\pi R} = \frac{\epsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt}$ , 俯视顺时针

则能流密度  $S = EH = \frac{\epsilon_0 R E}{2} \frac{dE}{dt}$  (方向指向轴线), 能量  $A = 2\pi R d S = \pi R^2 d \epsilon_0 E \frac{dE}{dt}$