浙江大学 2009-2010 学年秋冬学期《微积分 I》课程期末考试试卷解答

一、求导数或微分

（1） $y=\arcsin\sqrt{x-1}+x^{e^{2x}}$，

$$\mathrm{d}y=[\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+e^{e^{2x}\ln x}(\frac{e^{2x}}{x}+2e^{2x}\ln x)]\mathrm{d}x$$

$$=[\frac{1}{2\sqrt{(2-x)(x-1)}}+x^{e^{2x}}e^{2x}(\frac{1}{x}+2\ln x)]\mathrm{d}x.$$

（2） $x=\int_0^{t^2}\cos s^2\mathrm{d}s$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t\cos t^4$ ，$y=\sin t^4$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4t^3\cos t^4$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2t^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4t}{2t\cos t^4}=2\sec t^4.$$

（3） 由 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，两边求导，得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=x^3y'+3x^2y+\cos x,\qquad y'=\frac{(3x^2y+\cos x)(x^2+y)-2x}{1-x^5-x^3y}$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$y'|_{x=0,y=1}=\left.\frac{(3x^2y+\cos x)(x^2+y)-2x}{1-x^5-x^3y}\right|_{x=0,y=1}=1$.

二、求极限

（4） $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{-\frac{1}{3}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{-\frac{2}{3}x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+\sin x}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

（5） $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+(1+\frac{1}{x})}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\frac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\frac{2+\cos x}{3})}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\frac{2+\cos x}{3})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$，

其中，$\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})\sim(\frac{\cos x-1}{3}),(x\to 0)$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\frac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

三、求积分

(7) $\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}\frac{1}{x^2}$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\ln(1+x^2)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

(8) 令 $\sqrt{x}=t,x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

(9) $\int_{-2}^{2}(x^3+2|x|)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 4x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 令 $x=2\sin t$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=32(1-\frac{2}{3})=\frac{32}{3}.$$

(10) $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}f(x)=x^3 f(x)-3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$=x^3(\frac{\sin x}{x})'-3\int x^2(\frac{\sin x}{x})'\mathrm{d}x$$

$$=x^3(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2})-3\int x^2\mathrm{d}(\frac{\sin x}{x})$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3[x\sin x-\int 2\sin x\mathrm{d}x]$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

四、 解：记 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\right|}=|x|^2$，

所以，当 $|x|<1$ 时绝对收敛；当 $|x|>1$ 时通项不趋于 0，发散；

当 $|x|=1$ 时为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，条件收敛，

故收敛半径 $R=1$，收敛开区间为 $(-1,1)$，收敛域为 $[-1,1]$．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$=x\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\Big)'\mathrm{d}x$$

$$=x\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\Big)\mathrm{d}x$$

$$=x\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n\Big]\mathrm{d}x$$

$$=x\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x,$$

在 $x=\pm1$ 处，函数 $f(x)=x\arctan x$ 连续，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 收敛，

所以在 $x=\pm1$ 处和式仍成立，所以上式成立的区间为 $[-1,1]$．

五、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{Ax^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{Anx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xf(x^2)}{Anx^{n-1}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f(x^2)}{Anx^{n-2}}=\lim_{x\to0}\Big[\frac{2}{Anx^{n-4}}\cdot\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\Big],$$

当且仅当 $n=4$ 时，上式 $=\dfrac{1}{2A}f'(0)=\dfrac{1}{2A}$，

所以，当 $x\to0$ 时，$F(x)\sim Ax^n$ 的充要条件是 $n=4,A=\dfrac{1}{2}$．

六、解：(1) 设切点为(x_0,y_0)，则过点(x_0,y_0)的切线方程为$y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$，

因为点$(0,0)$在切线上，故$-y_0=e^{x_0}(-x_0)$，又因为$y_0=e^{x_0}$，所以$x_0=1$，

从而切线方程为$y=ex$.

(1) 面积 $A=2\pi\int_0^e(\frac{y}{e}-\ln y)\mathrm{d}y$

$$=[\frac{y^2}{2e}-y\ln y+y]_0^e=\frac{e}{2}+\lim_{y\to0^+}y\ln y=\frac{e}{2}.$$

(2) 体积（用套筒法）

$$V=\int_0^e y(\frac{y}{e}-\ln y)\mathrm{d}y=2\pi[\frac{y^3}{3e}-\frac{y^2}{2}\ln y+\frac{y^2}{4}]_0^e=\frac{\pi e^2}{6}.$$

七、 证：不妨以极小值的情况证明第二充分条件的证明，

因为 $f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$，由极限的保号性，

有，在$x=x_0$的某去心邻域$\overset{0}{U}(x_0)$内，$f'(x)$与$(x-x_0)$同号，即

当$x\in\overset{0}{U}(x_0)$，且$x<x_0$时，$f'(x)>0$；

当$x\in\overset{0}{U}(x_0)$，且$x>x_0$时，$f'(x)<0$，所以$f(x_0)$为极小值.

举例：例如$f(x)=x^4$，$f(0)$为$f(x)$的极小值，$f'(0)=0$，但$f''(0)=0$，并不大于零.

八、 (1) 由$e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$，所以$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$，$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$，

$$f(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(2n)!},\quad(-\infty<x<+\infty);$$

(2) $\int_0^1(e^{x^2}+e^{-x^2})\mathrm{d}x=2\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(2n)!}\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(2n)!}$，

$$\int_0^1(e^{x^3}+e^{-x^3})\mathrm{d}x=2\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n}}{(2n)!}\mathrm{d}x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)(2n)!}$$

所以，$\int_0^1(e^{x^2}+e^{-x^2})\mathrm{d}x>\int_0^1(e^{x^3}+e^{-x^3})\mathrm{d}x$.