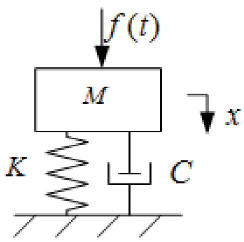
复习

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 能量法求固有频率
- 有阻尼自由振动

1 基本假设（1）

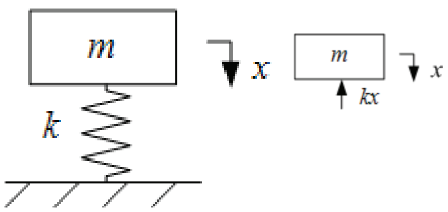
- 系统运动只沿一个方向，只用一个坐标就可以定义。
- 系统仅由三个基本元件（质量元件、弹性元件和阻尼元件）组成，且构成下图模型。
- 系统参数全部为常数，系统是**线性**、**时不变**参数系统



$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_2 x=f(t)$$

2.1 无阻尼自由振动

- 无阻尼—— $c=0$
- 自由振动—— $f(t)=0$
- 初始条件—— $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0$



力学方程： $m\ddot{x}=-kx$

数学方程：

$$m\ddot{x}+kx=0$$

2.2 特征方程和无阻尼自由振动的解（1）

- 数学模型

$$m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow \ddot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^2x=0,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

特征方程

令 $x=Be^{\lambda t}, B\neq 0$

$$\lambda^2Be^{\lambda t}+\omega_{\mathrm{n}}^2Be^{\lambda t}=0 \longrightarrow \lambda^2+\omega_{\mathrm{n}}^2=0$$

$$\longrightarrow \lambda_1=\mathrm{i}\omega_n, \lambda_2=-\mathrm{i}\omega_n$$

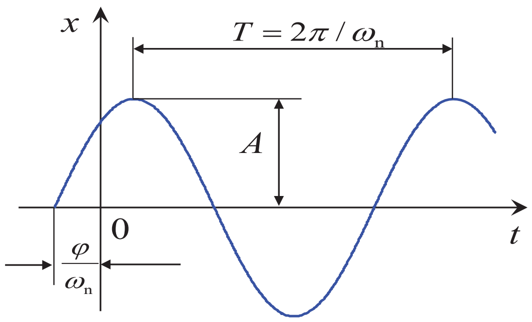
特征值

2.2 特征方程和无阻尼自由振动的解（2）

- 数学模型的解

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2},$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{x_0\omega_n}{v_0}$$

3.1 能量法的原理

- 对于能量无耗散的振动系统，在自由振动时系统的机械能守恒。

$$T+U=\text{常数} \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$$

T ——动能　　U ——势能

- 动能和势能的最大值相等

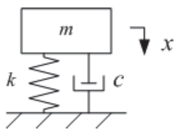
$$T_{\max}=U_{\max}$$

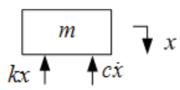
4.1 阻尼的分类（1）

- 粘性阻尼
- 结构阻尼
- 流体阻尼
- 库伦阻尼

4.2 有阻尼自由振动

- 物理模型





- 数学方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

初始条件：　$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$

4.3 有阻尼自由振动的解（1）

- 求解过程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}+2\xi\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=0, \qquad \omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{k}{m}}, \xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

阻尼比

令 $x=Be^{\lambda t}, B\neq 0$

$$\lambda^{2}Be^{\lambda t}+2\xi\omega_{\mathrm{n}}\lambda Be^{\lambda t}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}Be^{\lambda t}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^{2}+2\xi\omega_{\mathrm{n}}\lambda+\omega_{\mathrm{n}}^{2}=0$$

特征方程

4.3 有阻尼自由振动的解（2）

- 特征值

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_{\mathrm{n}} \pm \omega_{\mathrm{n}}\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- 解的分类

$0 < \xi < 1$	$\xi = 1$	$\xi > 1$
⇓	⇓	⇓
欠阻尼	临界阻尼	过阻尼

《机械系统动力学》——浙江大学本科生课程（08192050）

第二章 单自由度系统

主讲：祝毅
（yiz@zju.edu.cn）

2022年春

内容提要

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 能量法求固有频率
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动

5 简谐激励下的强迫振动

- 强迫振动概述
- 简谐激励力作用下的强迫振动
- 旋转不平衡质量引起的强迫振动
- 基础运动引起的强迫振动
- 其它实例分析

5.1 强迫振动概述

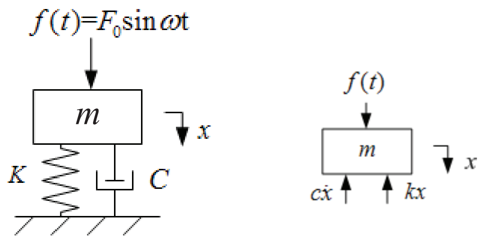
- 振动系统由外部持续激励所产生的振动，称为强迫振动。
- 系统对外部激励的响应取决于激励的类型，依照从简单到复杂的次序，外部激励分为：简谐、非简谐。
- 对于线性系统，可以采用叠加原理求解。先分别求出对所给定的许多各种激励的响应，然后组合得出总响应。

5.2 简谐激励力作用下的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的解
- 稳态响应和频率响应

5.2.1 物理模型和数学方程

- 物理模型



- 数学模型

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t),\quad \mathrm{IC}: x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0$$

5.2.2 强迫振动的解（1）

- 解的结构分析

非齐次微分方程通解 = 齐次微分方程通解 + 非齐次微分方程特解

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$\begin{cases} x(t)=e^{-\xi\omega_{\mathrm{n}}t}A\sin(\omega_{\mathrm{d}}t+\theta), 0<\xi<1 \\ x(t)=e^{-\omega_{\mathrm{n}}t}(A_1+A_2t), \xi=1 \\ x(t)=e^{-\xi\omega_{\mathrm{n}}t}(A_1\mathrm{ch}\omega_{\mathrm{n}}^{*}t+A_2\mathrm{sh}\omega_{\mathrm{n}}^{*}t), \xi>1 \end{cases}$$

?

5.2.2 强迫振动的解（2）

- 特解的求解

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

假设 $f(t) = F_0 e^{i\omega t}$ ，有

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

x 的虚部就是方程的解，进一步，有

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = B\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \qquad B = \frac{F_0}{k}$$

5.2.2 强迫振动的解（3）

- 特解的求解

假设 $x = \bar{x}e^{i\omega t}$ ，代入

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = B\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

得

$$H(\omega) = \frac{\bar{x}}{B} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\xi\omega_0\omega} = \frac{1}{(1-\lambda^2) + i2\xi\lambda}, \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}$$

5.2.2 强迫振动的解（4）

- 特解的求解

令 $\overline{x}=B\beta e^{i\theta}$ ，得

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}},\quad \theta=-\tan^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

所以

$$x=\overline{x}e^{i\omega t} \qquad x=B\beta e^{i(\omega t+\theta)}$$

取虚部，得特解： $x=B\beta\sin(\omega t+\theta)$

5.2.3 稳态响应和频率响应

- 系统的响应
  - 系统响应是系统在给定输入情况下的输出变化规律。
  - 系统响应反映了系统数学模型解的物理意义。
- 系统的瞬态响应

  只在短时间内出现，当时间趋于无穷大时将消失的那部分系统响应。
- 系统的稳态响应

  当时间趋于无穷大时的系统响应。
- 系统的频率响应

  当系统输入正弦信号时，系统的稳态响应正弦幅值及相位随激励频率的变化规律。（一般针对线性系统而言）

5.2.3 稳态响应和频率响应

非齐次微分方程通解 = 齐次微分方程通解 + 非齐次微分方程特解

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\xi\omega_n t} A\sin(\omega_d t+\theta), 0<\xi<1 \\ x(t) = e^{-\omega_n t}(A_1+A_2 t), \xi=1 \\ x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 \mathrm{ch}\omega_n^* t + A_2 \mathrm{sh}\omega_n^* t), \xi>1 \end{cases}$$

$$x = B\beta\sin(\omega t+\theta)$$

5.2.3 稳态响应和频率响应

- 稳态响应和瞬态响应：

非齐次微分方程通解 = 齐次微分方程通解 + 非齐次微分方程特解

齐次微分方程通解	非齐次微分方程特解
阻尼自由振动	等幅振动
逐渐衰减	持续
瞬态响应	稳态响应

系统的稳态响应是一个与激励力相同频率的简谐振动，但滞后一个相角。

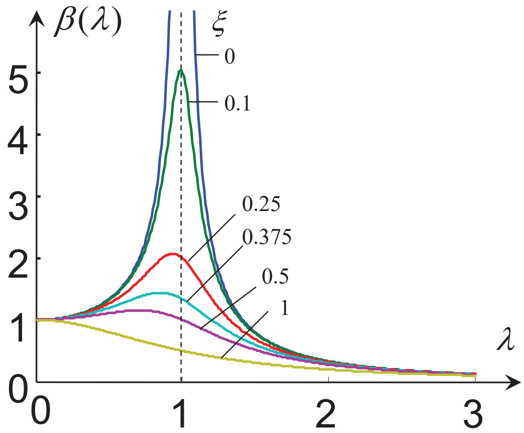
$$x = B\beta\sin(\omega t + \theta)$$

5.2.3 稳态响应和频率响应

- 频率响应
  - 幅频特性

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}}$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

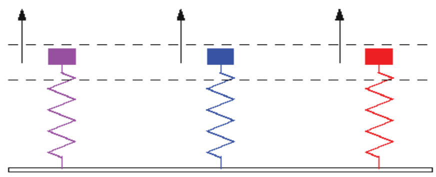


5.2.3 稳态响应和频率响应

假设系统固有频率： $\omega_0 = 1$

外部作用力规律：

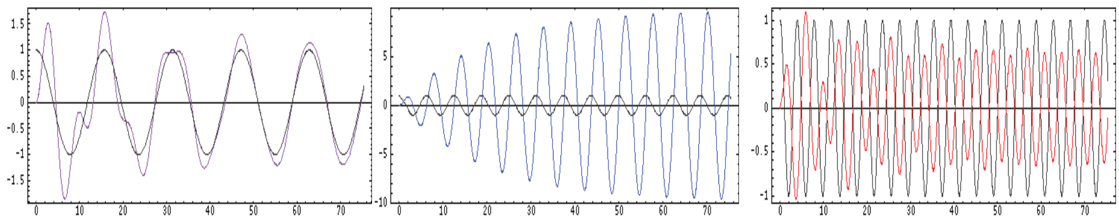
$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$



$\omega < \omega_0$ $\omega = 1.01\omega_0$ $\omega > \omega_0$

从左到右：

$\omega = 0.4,\ \omega = 1.01,\ \omega = 1.6$



5.2.3 稳态响应和频率响应

- 幅频特性重要结论
  - 峰值

对于有阻尼系统， 峰值并不出现在λ=1 处，
而且稍偏左 。

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}} \qquad \frac{d\beta}{d\lambda}=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\beta_{\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

5.2.3 稳态响应和频率响应

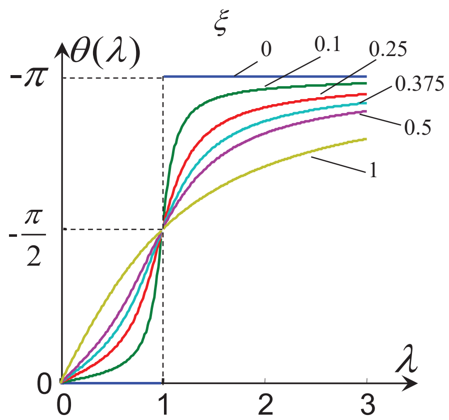
- 幅频特性重要结论
  - 峰值消失点

当 $\xi > 1/\sqrt{2}$ 时， $\beta < 1$，振幅无极值

5.2.3 稳态响应和频率响应

- 频率响应
  - 相频特性

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

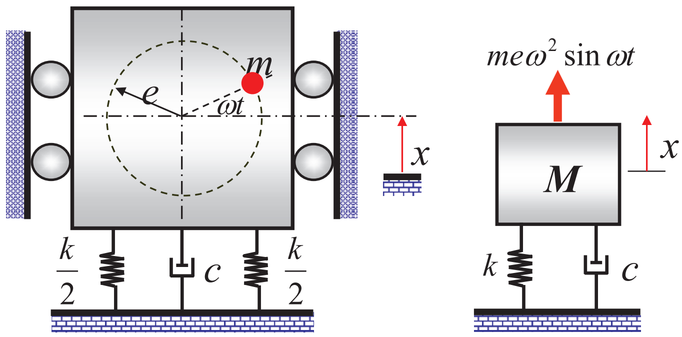


5.3 旋转不平衡质量引起的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的稳态响应
- 频率响应

5.3.1 物理模型和数学方程

- 物理模型



- 数学模型

$$(M-m)\ddot{x}+m\frac{d^2}{dt^2}(x+e\sin\omega t)+c\dot{x}+kx=0$$

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

5.3.2 强迫振动的稳态解

- 解的过程

设： $F_0 = me\omega^2$

得： $x(t) = \beta B \sin(\omega t + \theta)$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}, \quad B = \frac{F_0}{k} = \frac{me\omega^2}{k}, \quad \theta = -\tan^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

5.3.2 强迫振动的稳态解

- 解的过程

$$B=\frac{F_0}{k} \qquad B=\frac{me\omega^2}{k}=\frac{me\omega^2}{\omega_0^2 M}=\frac{me}{M}\lambda^2 \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}},$$

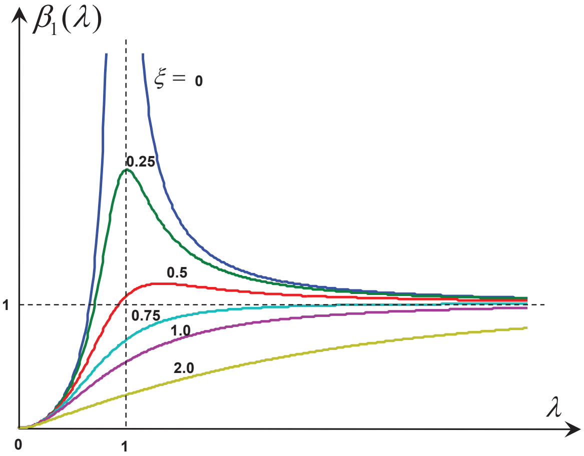
$$x(t)=\beta B\sin(\omega t+\theta)$$

$$x(t)=\frac{\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}\frac{me}{M}\sin(\omega t+\theta)=\beta_1 B_1\sin(\omega t+\theta)$$

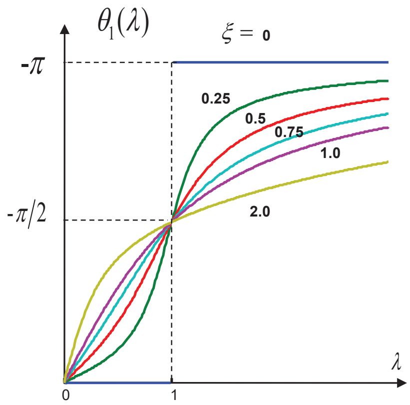
$$\beta_1=\frac{\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}, \quad B_1=\frac{me}{M}, \quad \theta=-\tan^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

5.3.3 频率响应

- 结果



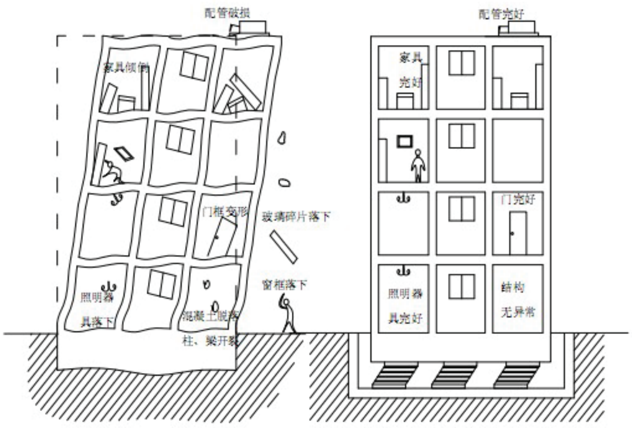
$\beta_1(\lambda)$
$\xi=0$
0.25
0.5
1
0.75
1.0
2.0
λ
0
1



$\theta_1(\lambda)$
$\xi=0$
$-\pi$
0.25
0.5
0.75
1.0
$-\pi/2$
2.0
λ
0
1

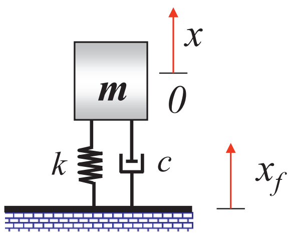
5.4 基础运动引起的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的稳态响应
- 频率响应



5.4.1 物理模型和数学方程

- 物理模型



$$x_f = X_f \sin \omega t$$

- 数学模型

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_f) + k(x - x_f) = 0$$

或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_f + kx_f$$

5.4.2 强迫振动的稳态响应

- 解的过程

令 $x_f = X_f e^{i\omega t}$ ，代入

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = i2\xi\omega_0\omega X_f e^{i\omega t} + \omega_0^2 X_f e^{i\omega t}$$

假设 $x = \overline{x}e^{i\omega t}$ ，代入

$$-\omega^2\overline{x}e^{i\omega t} + i2\xi\omega_0\overline{x}e^{i\omega t} + \omega_0^2\overline{x}e^{i\omega t} = i2\xi\omega_0\omega X_f e^{i\omega t} + \omega_0^2 X_f e^{i\omega t}$$

得

$$H(\lambda) = \frac{\overline{x}}{X_f} = \frac{1 + i2\xi\lambda}{(1-\lambda^2) + i2\xi\lambda}$$

5.4.3 强迫振动的稳态响应

- 解的过程

令 $\bar{x} = X_f \beta e^{i\theta}$ ，得

$$\beta=\frac{\sqrt{1+4\xi^2\lambda^2}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}},\quad \theta=\tan^{-1}2\xi\lambda-\tan^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

所以

$$x = X_f \beta e^{i(\omega t+\theta)}$$

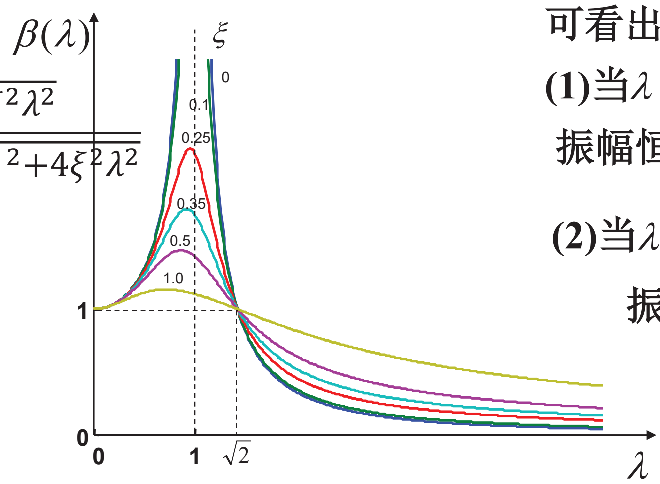
取虚部，得特解： $x = X_f \beta \sin(\omega t+\theta)$

5.4.4 频率响应

- 结果

$$\beta = \frac{\sqrt{1+4\xi^2\lambda^2}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_0}$$



可看出：

(1)当$\lambda = \sqrt{2}$时，$\beta = 1$

振幅恒为基础运动振幅 X_f

(2)当$\lambda > \sqrt{2}$ 时，$\beta < 1$

振幅恒小于 X_f

(3)增加阻尼反而使振幅增大