理论力学（乙）

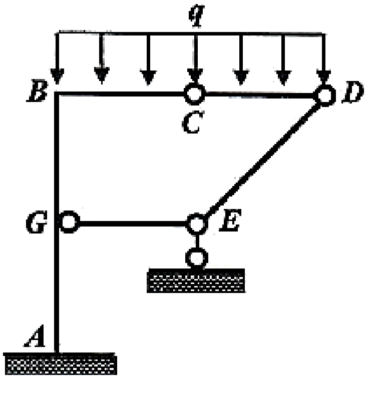
2019-2020 学年第一学期期末考试试卷

计算题（共 6 题）

一、图示平面构架，A 处为固定端，C、D 处光滑铰连接，E 处为滑动铰支座，杆 ABC 的 AB 段垂直、BC 段水平，杆 CD 与 EG 水平，杆 DE 与 EG 于 E 处铰接，G 端铰接于 AB 的 G 处，长度 $AG = BG = BC = CD = EG = b$。杆 BC 与 CD 受垂直均匀分布力作用，集度为 q，各杆重不计。

求：（1）铰 C 的约束力；（2）杆 DE 的内力；（3）支座 A 的约束力偶。

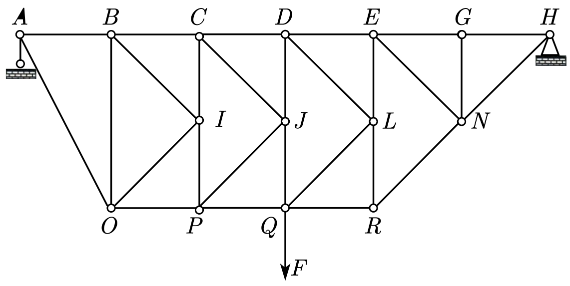
（15 分）



二、图示平面桁架，A 处为滑动铰支座，H 处为固定铰支座，$ABCDEFGH$ 、$IJLN$ 、$OPQR$ 水平，BO 、CIP 、DJQ 、ELR 、GN 垂直，除杆 BO 外，各水平与垂直杆的长度均为 b 。节点 Q 受垂直力 F 作用，各杆重不计。

求：杆 CD 、CJ 、JP 的内力。

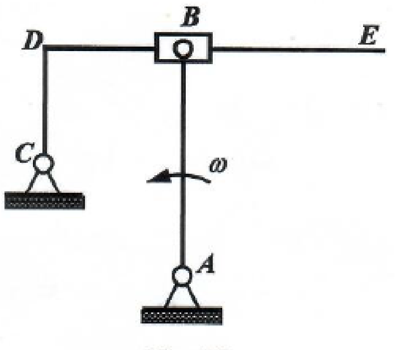
（15 分）



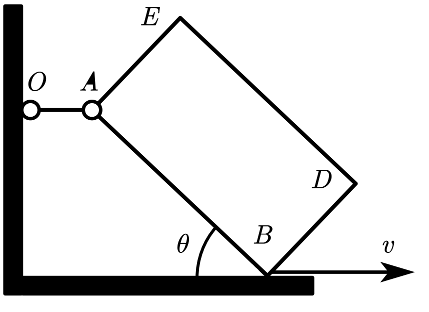
三、（a）图示机构，杆CDE的CD段垂直于DE段，绕C轴转动，杆AB绕A轴转动，B处为套筒联接。图示瞬时，AB、CD垂直，$CD=DB=b$，$AB=2b$，杆AB的角速度为ω，角加速度为零。求：此时杆CDE的角速度与角加速度。

（b）图示矩形板，边长$AB=2b$，$BD=b$，A端与杆OA铰接，杆O端铰接于垂直墙面。图示瞬时，AB与水平地面的夹角$\theta=45^{\circ}$，点B沿地面向右滑动的速度为v_0。求：此时矩形板的角速度、点D的速度。

（20分）



题(a)图

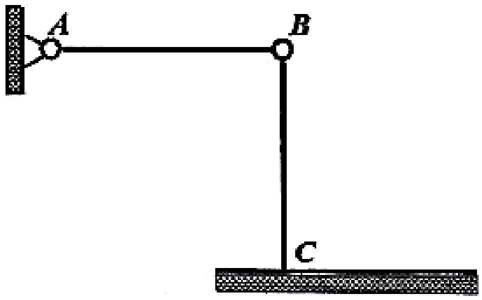


题（b）图

四、图示均质直杆AB与BC铰接于B，两杆长度均为L，质量均为m，A处为固定铰支座，C端搁在光滑水平面上。初始时，杆AB水平，杆BC垂直，两者静止。然后，杆AB无初速度顺时针落下，推动杆BC的C端向右滑动，设C端未脱离平面，当两杆处于同一斜直线时。

求：此时，（1）杆AB与BC的角速度；（2）杆BC受到的C端与B端约束力。

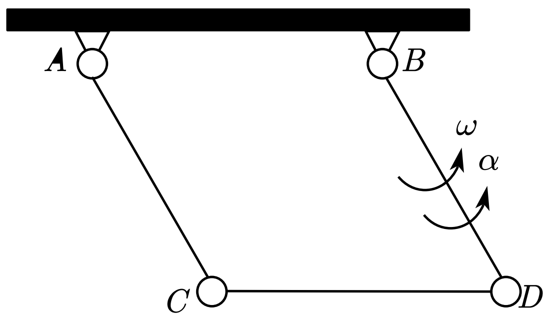
（20分）



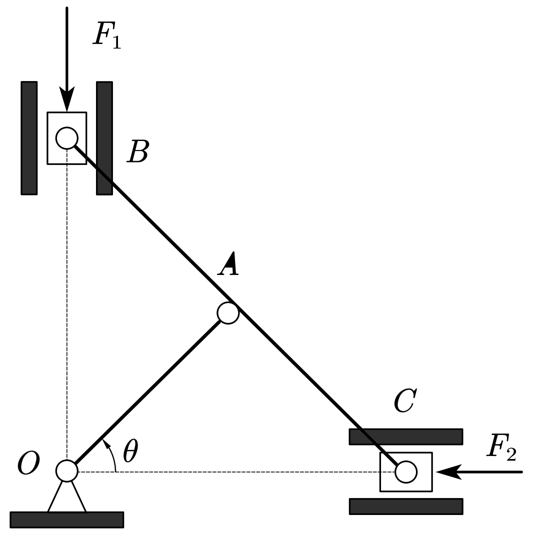
五、（a）图示平面机构，$ABCD$ 为平行四边形，均质杆 AC 与 BD 的质量均为 m_1，长度为 R，均质杆 CD 的质量为 m_2，长度为 L。图示瞬时，杆 BD 的角速度为 ω，角加速度为 α。求：此时杆 AC 与 CD 的惯性力系点 A 简化的结果。

（b）图示平面机构，杆 OA 铰接与杆 BC 的 A 处，滑块 B 可沿 OB 槽滑动，滑块 C 可沿 OC 槽滑动，OB 垂直于 OC，长度 $OA=AB=AC=b$。图示瞬时，杆 OA 与 OC 的夹角为 θ,滑块 B 受 BO 方向力 F_1 作用，滑块 C 受 CO 方向力 F_2 作用，各物体重不计。机构具有一个自由度。平衡时，求：用虚位移原理计算力 F_1 与 F_2 的关系。

（15 分）



题（a）图



题（b）图

六、设某单自由度系统的广义坐标为q，动能T、势能V、非保守广义力$\tilde{Q}$分别为（其中m,a,b,w,f,c为常数，t为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(a+q^2)\dot{q}^2,\quad V=w(b-q^2+\sin q),\quad \tilde{Q}=f\cos t-c\dot{q}$$

求：（1）系统的拉格朗日方程；（2）系统的哈密顿方程。

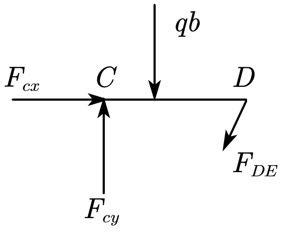
（15 分）

2019-2020 学年第一学期期末考试试卷参考答案

计算题（共 6 题）

一、【解析】（1）（2）

DE 为二力杆，取 CD 杆分析，受力如图：



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -qb\cdot\frac{b}{2} - F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b = 0 \Rightarrow F_{DE} = -\frac{\sqrt{2}}{2}qb(\text{压力})$$

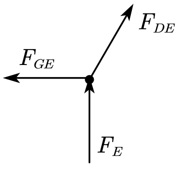
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{cy}\cdot b - qb\cdot\frac{b}{2} = 0 \Rightarrow F_{cy} = \frac{qb}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{cx} - F_{DE}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{cx} = -\frac{1}{2}qb$$

故铰 C 的约束力分别为：$F_{cx} = -\frac{1}{2}qb(\rightarrow\leftarrow)$，$F_{cy} = \frac{qb}{2}(\downarrow\uparrow)$；

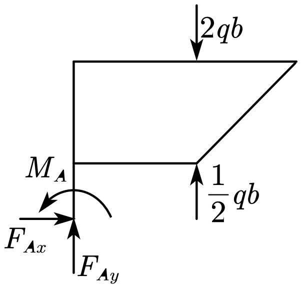
杆 DE 的内力：$F_{DE} = -\frac{\sqrt{2}}{2}qb(\text{压力})$

（3）取 E 节点分析，受力如图：



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_E + F_{DE}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_E = \frac{1}{2}qb$$

取整体分析，受力如下图：



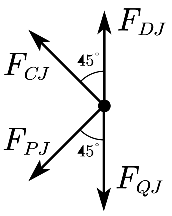
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - \frac{3}{2}qb \cdot b = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3}{2}qb^2$$

【考点延伸】平面力系平衡方程

二、【解析】

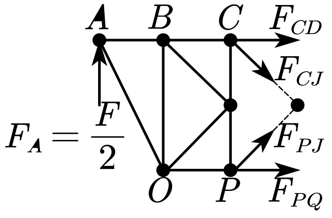
对整体，$\sum M_H = 0 \Rightarrow F_A \cdot 6b - F \cdot 3b = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{2}F(\uparrow)$

J 点：



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CJ}\sin 45^\circ + F_{PJ}\sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F_{CJ} = -F_{PJ}$$

取左半部分（切断CD，CJ，PJ，PQ 杆）进行分析，受力如下图：



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} + F_{PJ}\sin 45^\circ - F_{CJ}\sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{CJ} = \dfrac{F}{2\sqrt{2}}(\text{拉力}) \\ F_{PJ} = -\dfrac{F}{2\sqrt{2}}(\text{压力}) \end{cases}$$

$$\sum M_P = 0 \Rightarrow -\frac{F}{2} \cdot 2b - F_{CD} \cdot 2b - F_{CJ} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2b = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = \frac{-Fb - \frac{1}{2}Fb}{2b} \Rightarrow F_{CD} = -\frac{3}{4}F(\text{压力})$$

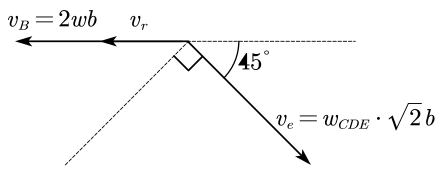
综上：$F_{CD}=-\frac{3}{4}F$(压)、$F_{CJ}=\frac{F}{2\sqrt{2}}$(拉)、$F_{PJ}=-\frac{F}{2\sqrt{2}}$(压)

【考点延伸】桁架问题；平面力系平衡方程

三、【解析】

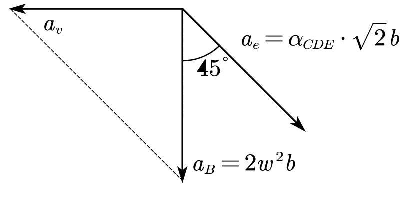
（a）取 AB 杆上的 B 为动点，CDE 曲杆为动系。

速度分析：



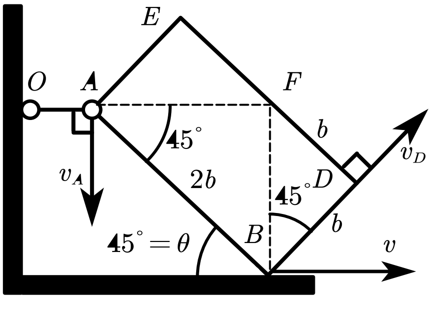
$$\vec{v}_B=\vec{v}_r+\vec{v}_{CDE}\Rightarrow v_e\cdot\sin45^\circ=0\Rightarrow w_{CDE}=0$$

加速度分析（注意：$a_B{}^{\tau}=0$，$a_e{}^{n}=0$，$a_c=0$）：



$$\alpha_{CDE}\cdot\sqrt{2}b=\frac{2w^2b}{\cos45^\circ}\Rightarrow\alpha_{CDE}=2w^2(\curvearrowright)$$

（b）受力如图：



题（b）图

速度瞬心为F点，矩形板的角速度：

$$w=\frac{v}{BF}=\frac{v}{2b\sin45^\circ}=\frac{v}{\sqrt{2}b}\Rightarrow w=\frac{v}{\sqrt{2}b}$$

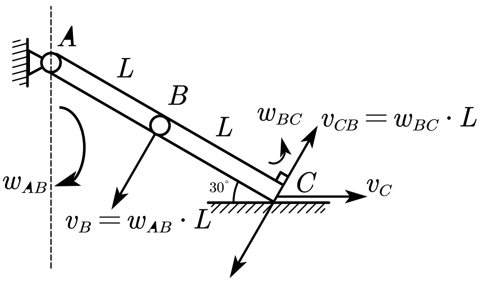
F 位于 DE 中点，则点 D 的速度：

$v_D=\frac{v}{\sqrt{2}b}\cdot b=\frac{\sqrt{2}}{2}v$，速度方向沿着 BD 方向

【考点延伸】点的速度与加速度合成

四、【解析】

（1）受力如图：



$$v_B=w_{AB}\cdot L,\ \ v_{CB}=w_{BC}\cdot L$$

$\Rightarrow v_B\cdot\sin60^{\circ}-v_{CB}\cdot\sin60^{\circ}=0\Rightarrow w_{AB}=w_{BC}$

由动能定理：（c 点为速度瞬心）

$$T_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)w_{AB}{}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)w_{BC}{}^2$$

$$=\frac{1}{3}mL^2w_{AB}^2$$

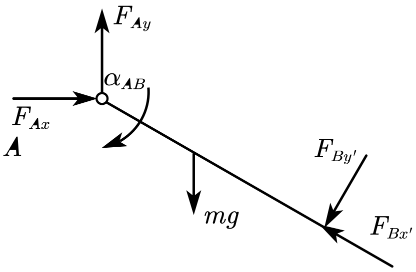
$T_1=0$

$$w=mg\frac{L}{2}\sin30^{\circ}+mg\frac{L}{2}(1-\sin30^{\circ})=\frac{1}{2}mgL$$

由动能定理：

$$T_2-T_1=w\ \Rightarrow\ w_{AB}=w_{BC}=\sqrt{\frac{3g}{2L}}\ (\curvearrowleft)$$

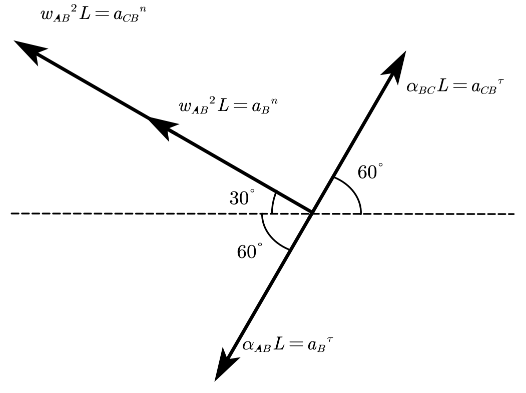
（2）取 AB 杆分析，受力如图：



对固定点用动量矩定理：

$$\sum M_A(F)=0 \Rightarrow F_{By'}\cdot L+mg\cos 30^{\circ}\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{3}mL^{2}\cdot\alpha_{AB} \qquad (1)$$

取 BC 杆分析，受力如图：



$$\Rightarrow 2w_{AB}{}^{2}L\cdot\sin 30^{\circ}+\alpha_{BC}L\cdot\sin 60^{\circ}=\alpha_{AB}L\cdot\sin 60^{\circ}$$

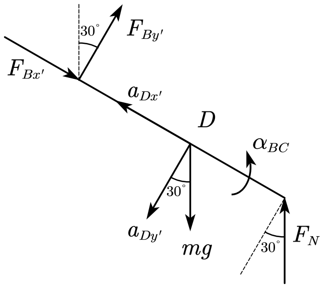
$$\Rightarrow \alpha_{BC}=\alpha_{AB}-\frac{2}{\sqrt{3}}w_{AB}{}^{2}\Rightarrow\alpha_{BC}=\alpha_{AB}-\frac{\sqrt{3}g}{L}$$

质心加速度：

$$a_{Dx'}=w_{AB}{}^{2}L+w_{BC}{}^{2}\frac{L}{2}=\frac{3g}{2L}\cdot\frac{3}{2}L=\frac{9g}{4}$$

$$a_{Dy'}=\alpha_{AB}L-\alpha_{BC}\frac{L}{2}=\alpha_{AB}L-\alpha_{AB}\frac{L}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}g=\frac{1}{2}\alpha_{AB}L+\frac{\sqrt{3}}{2}g$$

设 BC 杆中点为 D，则受力如下：



$$\begin{cases} F_N\sin 30^{\circ}-F_{Bx'}-\dfrac{1}{2}mg=ma_{Dx'} & (2)\\ F_{By'}+F_N\cos 30^{\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg=-ma_{Dy'} & (3)\\ (F_N\cos 30^{\circ}-F_{By'})\dfrac{L}{2}=\dfrac{1}{12}mL^{2}\cdot\alpha_{BC} & (4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{g}{L}\\ F_{By'}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}mg\\ F_{Bx'}=-\dfrac{35}{12}mg\\ F_N=-\dfrac{1}{3}mg\end{cases}$$

$$\text{由}(1)\Rightarrow F_{By'}=\frac{1}{3}mL\alpha_{AB}-\frac{\sqrt{3}}{4}mg$$

$$\text{由}(3),(4)\Rightarrow F_N=-\frac{mg}{6}-\frac{1}{3\sqrt{3}}mL\alpha_{AB}$$

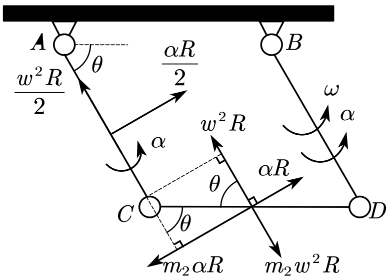
以x,y为坐标轴，分解叠加，得杆 BC 受到的 C 端与 B 端约束力为：

$$F_{Bx}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}mg\,,\quad F_{By}=\frac{4}{3}mg\,,\quad F_N=-\frac{1}{3}mg$$

【考点延伸】刚体平面运动微分方程；点的速度与加速度合成；动能定理

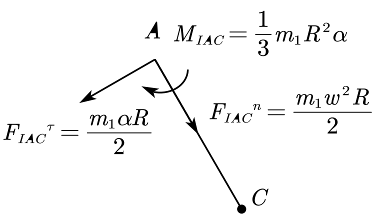
五、【解析】

（a）整体受力如图：

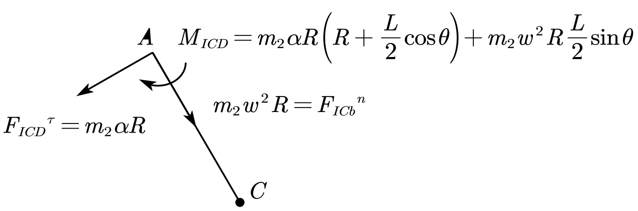


题（a）图

AC向A简化：

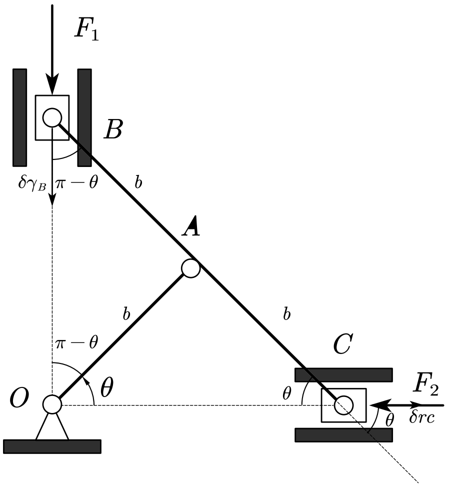


CD向A简化：



$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}F_I{}^{\tau}&=\frac{m_1\alpha R}{2}+m_2\alpha R\\F_I{}^{n}&=\frac{m_1w^2R}{2}+m_2w^2R\\M_I&=\frac{1}{3}m_1R^2\alpha+m_2\alpha R\left(R+\frac{L}{2}\cos\theta\right)+m_2w^2R\frac{L}{2}\sin\theta(\curvearrowright)\end{aligned}\right.$$

（b）机构受力如图：



题（b）图

$$\delta\gamma_B\cos(\pi-\theta)=\delta\gamma_C\cos\theta\Rightarrow\delta\gamma_B\sin\theta=\delta\gamma_C\cos\theta$$

由虚位移定理得：

$$F_1\delta\gamma_B-F_2\delta\gamma_C=0\Rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{\delta\gamma_C}{\delta\gamma_B}=\tan\theta$$

【考点延伸】惯性力系简化；虚位移原理

六、【解析】

（1）$L=\dfrac{1}{2}m(a+q^2)\dot{q}^2-w(b-q^2+\sin q)$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=m(a+q^2)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)=2mq\dot{q}^2+m(a+q^2)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}=mq\dot{q}^2-w(\cos q-2q)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\tilde{\theta}$$

$$\Rightarrow m(a+q^2)\ddot{q}+mq\dot{q}^2+w(\cos q-2q)=f\cos t-c\dot{q}$$

（2）$p=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}}=m(a+q^2)\dot{q}\Rightarrow\dot{q}=\dfrac{p}{m(a+q^2)}$

$$H=p\dot{q}-\frac{p^2}{2m(a+q^2)}+w(b-q^2+\sin q)$$

$$\Rightarrow H=\frac{p^2}{2m(a+q^2)}+w(b-q^2+\sin q)$$

哈密顿方程为：

$$\begin{cases} \dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m(a+q^2)} \\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial p}+\widetilde{Q}=\dfrac{p^2 q}{m(a+q^2)^2}-w(\cos q-2q)+f\cos t-\dfrac{cp}{m(a+q^2)} \end{cases}$$

【考点延伸】拉格朗日方程；哈密顿原理