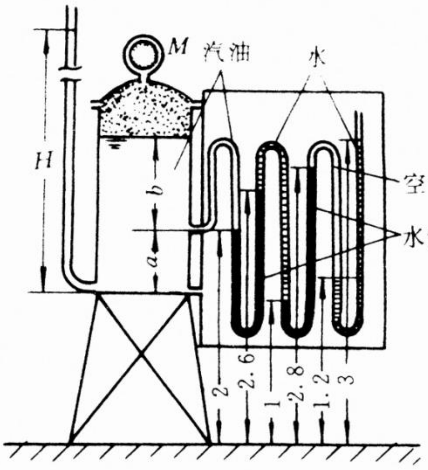
2-2 在汽油箱上装三种测压仪表如图所示，已知 $a=0.6\text{m}$，$b=1.3\text{m}$，各液面标高均以 m 计。汽油比重为 0.7，水银比重为 13.6，空气比重近似为零。试求金属压强表上的读数及测压管高度 H。

［解］ 这是一个训练点压强计算公式和等压面概念的题目。



题 2-2 图

从多管测压计的最右端开始运用压强计算公式逐段向左推演，可以得到多管测压计左端与汽油箱衔接点上的表压强为

$$
\begin{aligned}
p &= \gamma_W(3-1.2)+\gamma_{Hg}(2.8-1)-\gamma_W(2.6-1) \\
&\quad +\gamma_{Hg}(2.6-2) \\
&= 9810(1.8-1.6)+13.6\times 9810(1.8+0.6) \\
&= 3.22\times 10^5\text{Pa} \\
&= 3.22\text{bar}
\end{aligned}
$$

在汽油箱中再运用压强计算公式，可得金属压强表上的表压强为

$$p_M = p-\gamma_{oil}b = 3.22-0.7\times 9810\times 1.3 = 3.13\text{bar}$$

左端测压管的高度为

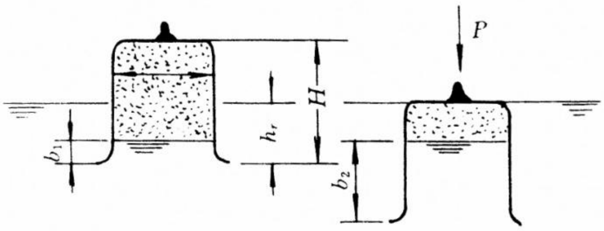
$$H=\frac{p+\gamma_{oil}a}{\gamma_{oil}}=\frac{p}{\gamma_{oil}}+a=\frac{3.22\times 10^5}{0.7\times 9810}+0.6=47.5\text{m}$$

［答：$p_M=3.13\text{bar}$，$H=47.5\text{m}$］

2-17 薄壁钟形容器的直径 $D=0.5$m，高 $H=0.7$m，重量 $G=1000$N，在自重作用下铅直沉入水中，保持平衡，原来钟罩内的大气按等温规律被压缩在钟罩内部，如图(a)所示。已知大气压强 $p_a=750$mmHg。

(1)试求钟的淹没深度 h_1 及钟内充水深度 b_1

(2)需加多大的力 P 才能使钟罩完全没入水中，如图(b)所示，此时钟罩内的气体绝对压强及钟罩内的充水深度是多少？



(a)　　　　　　(b)

题 2-17 图

[解]　设大气压强为 p_a，图(a)钟罩内的气体压强为 p_1，图(b)钟罩内的气体压强为 p_2。

解此题需根据三条原则：钟罩内气体压力与钟罩上面的大气压力及钟罩自重相平衡，钟罩内的气体按等温规律压缩，钟罩内外压强与液柱高相平衡。据此，对(a)、(b)两图可分别求解如下：

(1)由图(a)的压力平衡可得

$$p_a\frac{\pi}{4}D^2+G=p_1\frac{\pi}{4}D^2$$

于是

$$p_1=p_a+\frac{4G}{\pi D^2} \tag{a}$$

由于 $p_a=750\text{mmHg}=10^5\text{Pa}$ 并以 G、D 数值代入，可得

$$p_1=10^5+\frac{4\times1000}{\pi\times0.5^2}=105100\text{Pa}=1.051\text{bar}(\text{绝对压强})$$

由图(a)的等温压缩 $pV=C$，可得

$$p_a(\pi/4)D^2H=p_1(\pi/4)D^2(H-b_1)$$

$$p_a H = p_1(H - b_1) \qquad (b)$$

由此得 $$b_1 = H - \frac{p_a H}{p_1} = 0.7 - \frac{10^5 \times 0.7}{1.051 \times 10^5}$$

$$= 0.034\text{m} = 3.4\text{cm}$$

再由图(a)的压强平衡可得

$$p_1 = p_a + \gamma(h_1 - b_1) \qquad (c)$$

于是$h_1 = b_1 + \dfrac{p_1 - p_a}{\gamma} = 0.034 + \dfrac{5100}{9810} = 0.554\text{m} = 55.4\text{cm}$

(2)由图(b)的压强平衡，可得

$$p_2 = p_a + \gamma(H - b_2) \qquad (d)$$

由图(b)的等温压缩，得

$$p_a \frac{\pi}{4} D^2 H = p_2 \frac{\pi}{4} D^2 (H - b_2)$$

即

$$p_a H = p_2(H - b_2) \qquad (e)$$

联立(d)、(e)两式，可得

$$\frac{p_2 - p_a}{\gamma} = H - b_2 = \frac{p_a H}{p_2}$$

即 $$p_2^2 - p_a p_2 - \gamma p_a H = 0$$

这是 p_2 的二次方程，故用求根公式可得

$$p_2 = \frac{1}{2}\left(p_a \pm \sqrt{p_a^2 + 4\gamma p_a H}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^5 \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 0.098 \times 1 \times 0.7}\right)$$

$$= 1.064 \times 10^5 \text{Pa} = 1.064\text{bar}$$

“—”号不合理，舍去。

由(e)式得

$$b_2 = H - \frac{p_a H}{p_2} = 0.7 - \frac{10^5 \times 0.7}{1.064 \times 10^5} = 0.042\text{m} = 4.2\text{cm}$$

用 P 力使钟罩沉没时，图(b)的压力平衡关系是

$$P + G + p_a \frac{\pi}{4} D^2 = p_2 \frac{\pi}{4} D^2 \qquad (f)$$

由此可解得

$$P = (p_2 - p_a) \frac{\pi}{4} D^2 - G$$

代入数值

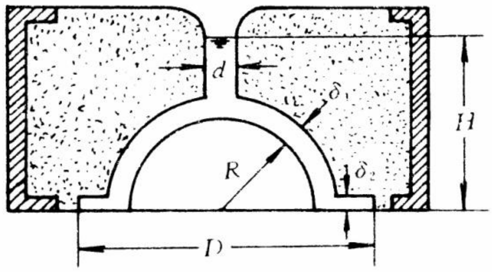
$$P = (1.064 - 1) \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 0.5^2 - 1000 = 256.6\mathrm{N}$$

［答：(1)$h_1 = 55.4\mathrm{cm}$，$b_1 = 3.4\mathrm{cm}$

(2)$P = 256.6\mathrm{N}$，$p = 1.064\mathrm{bar}$，$b_2 = 4.2\mathrm{cm}$］

2-34 用熔化铁水（比重为 7）铸造带凸缘的半球形零件，试求铁水作用在砂箱上的力。

已知 $H=0.5\text{m}$，$D=0.8\text{m}$，$R=0.3\text{m}$，$d=0.05\text{m}$，$\delta_1=0.02\text{m}$，$\delta_2=0.05\text{m}$。



题 2-34 图

［解］ 作用在砂箱上的铁水压力铅直向上，其大小等于压力体的液重

$$P=\gamma V=\gamma(V_1-V_2-V_3-V_4)$$

压力体可看成是由直径为 D 高为 H 的大圆柱体 $V_1=\frac{\pi}{4}D^2H$ 减去以下 V_2、V_3、V_4 三部分体积所组成：

V_2 是半径为 $R+\delta_1$ 的半圆球体 $V_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi(R+\delta_1)^3$

V_3 是外半径 $D/2$、内半径 $R+\delta_1$、高 δ_2 的圆环体 $V_3=\frac{\pi}{4}\times\left[(\frac{D}{2})^2-(R+\delta_1)^2\right]\delta_2$

V_4 是直径为 d、高为 $H-R-\delta_1$ 的小圆柱体 $V_4=\frac{\pi}{4}d^2(H-R-\delta_1)$

于是

$$P=\gamma V=\gamma\left\{\frac{\pi}{4}D^2H-\frac{2}{3}\pi(R+\delta_1)^3-\pi\left[\frac{D^2}{4}-(R+\delta_1)^2\right]\delta_2-\frac{\pi}{4}d^2(H-R-\delta_1)\right\}$$

$$=7\times 9810\left\{\frac{\pi}{4}\times 0.8^2\times 0.5-\frac{2}{3}\pi(0.3+0.02)^3-\pi\left[\frac{0.8^2}{4}-(0.3+0.02)^2\right]\times 0.05-\frac{\pi}{4}\times 0.05^2(0.5-0.3-0.02)\right\}$$

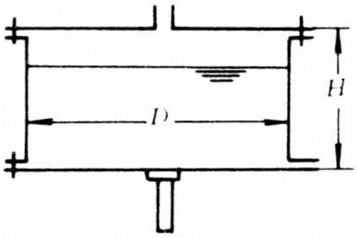
$=$ ~~12366N~~，方向向上

= 11900 30 N

2-50 直径 $D=0.2\text{m}$ 高度 $H=0.1\text{m}$ 的圆柱形容器，装 2/3 水容积后，绕其垂直轴旋转

(1)试求自由液面到达顶部边缘时的转速 n_1；

(2)试求自由液面到达底部中心时的转速 n_2。



题 2-50 图

［解］ (1)自由液面到达顶部边缘时，自由液面上的空白容积应是圆柱体的 1/3，而自由液面上的空白容积又是同底同高(抛物面的超高圆柱体的 1/2，故有

$$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}D^2h=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}D^2H$$

即
$$h=\frac{2}{3}H$$

按抛物面超高公式

$$h=\frac{\omega^2R^2}{2g}=\frac{\omega^2D^2}{8g}$$

可得
$$\omega=\sqrt{\frac{16gH}{3D^2}}=\frac{\pi n_1}{30}$$

$$\therefore n_1=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{16gH}{3D^2}}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{16\times 9.81\times 0.1}{3\times 0.2^2}}=109.2\text{r/min}$$

(2)自由液面到达底部中心时，自由液面在顶盖处的圆形交接线的半径为 r，则根据上述体积关系，有

$$\frac{1}{2}\pi r^2H=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}D^2H$$

$$r^2=\frac{D^2}{6}$$

据超高公式

$$H=\frac{\omega^2r^2}{2g}=\frac{\omega^2D^2}{12g}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{12gH}{D^2}}=\frac{\pi n_2}{30}$$

$$\therefore n_2=\frac{30}{\pi D}\sqrt{12gH}=\frac{30}{\pi\times 0.2}\sqrt{12\times 9.81\times 0.1}$$
$$=163.8\text{r/min}$$

［答：$n_1=109.2\text{r/min}$，$n_2=163.8\text{r/min}$］