浙江大学 2011-2012 学年秋冬学期《微积分 I》课程期末考试试卷

一、求导数。

1、（本题 7 分）设 $x^3+y^3-x^2-y^2+xy=1$，求 $\frac{dy}{dx}|(x,y)=(1,1),\frac{d^2y}{dx^2}|(x,y)=(1,1)$。

2、（本题 7 分）设 $y=\arcsin^2(\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2})$，求 $\frac{dy}{dx}$。

3、（本题 7 分）设 $\varphi(x)=\frac{2}{x^2-1}$，求 $\varphi^{(n)}(x)$。

二、求极限。

1、（本题 7 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

2、（本题 7 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos^x x-2}{x\ln\cos x}$。

三、求积分。

1、（本题 7 分）求 $\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx$。

2、（本题 7 分）求 $\int_0^1\cos(1+\ln x)dx$。

3、（本题 7 分）求 $\int\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{\ln x}{x})^2}dx$。

4、（本题 7 分）求 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$。

四、综合题。

1、（本题 7 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$。

2、（本题 6 分）确定级数

$1+x^2+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n(n-1)}$ 的收敛范围与和函数。

3、（本题 6 分）设曲线 s 的方程为

$\begin{cases}x(t)=t^2-\frac{2}{3}t^3\\y(t)=t-t^2\end{cases},0\le t\le 1$，求 s 的弧长。

4、（本题 6 分）已知 f（x）满足关系式

$\int_0^x f(x-t)(x-t)dt = \frac{1}{2}\sin(x^2)$，求函数 f（x）。

五、证明题。

1、（本题 7 分）证明，在区间[0.1]上，导数连续的函数 F（x），F（0）=F（1）=0，

（1）若 $F'(0+)>0$，则存在某一 $\delta_1>0$，使得在（$0,\delta_1$）上，$F(x)>0$。

（2）若 $F'(1-)<0$，则存在某一 $\delta_2>0$，使得在（$1-\delta_2,1$）上，$F(x)>0$。

（3）若 $F'(0+)>0$，$F'(1-)<0$，且 $F(\frac{1}{2})<0$，则在区间[0，1]上，除 0,1 外，F（x）至少还有两个零点。

2、1、（本题 5 分）f(x)是在[0，1]上连续的函数，并在（0，1）上连续的函数，并在（0，1）上三阶可导，满足

$f'(0+)>\frac{1}{2}, f'(1-)<\frac{1}{2}, \quad f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})<0$

证明，在（0，1）上存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=6$。