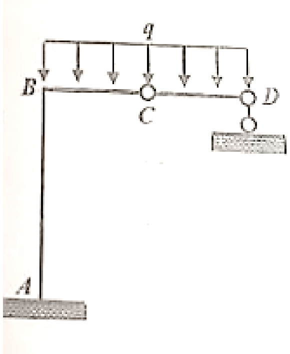
2013-2014 学年第一学期期末考试试卷

一、图示平面构架，A 端固定，C 处光滑铰链接，D 端滑动铰支座约束，杆 CD 与 BC 水平，AB 垂直，长度 AB=2b，BC=CD=b。杆 BC 与受垂直均匀分布力作用，集度为 q，各杆重不计。求：

（1） 固定端 A 的约束力及力偶；

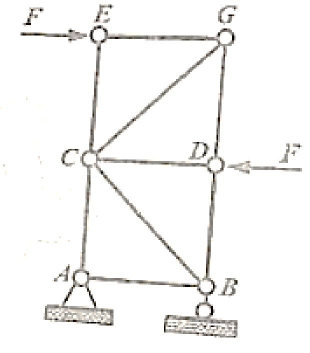
（2） 铰 C 的约束力；



二、图示平面结构，ABCD 与 CDEG 为相等的正方形，边长均为 b,杆 AB 水平，A 端为固定铰支座，B 端为滑动铰支座约束。铰 D、E 分别受水平力 F 作用，各杆重不计。求：

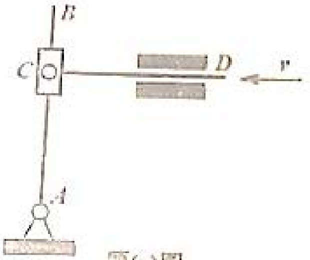
（1）杆 CD 的内力；

（2）杆 BC 与 AC 的内力。

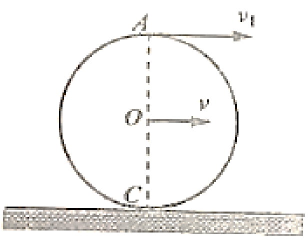


三、（a）图示机构，杆 AB 绕 A 轴运动，杆 CD 在水平滑道内滑动，C 处为套筒连接。图示瞬时，杆 AB 垂直，AC=b，杆 CD 的速度为 v，加速度为零。求：此时杆 AB 的角速度与角加速度。

（b）图示圆环，半径为 R，在水平地面上沿直线前进。图示瞬时，圆心 O 的速度为 v，图上 A 点的速度为 v1,A、O、C 三点位于同一垂直线。求：此时圆环的角速度、点 C 的速度。



题(a)图



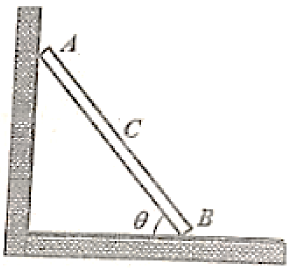
题(b)图

四、图示均质直杆 AB，长度为 L，质量为 m。墙面光滑，地面粗糙，滑动摩擦系数为 f。当杆 AB 由静止开始滑倒，从$\theta = 30°$到$\theta = 0°$，设杆 A 未脱离墙面。求：

（1）杆 AB 到达水平时的角速度；

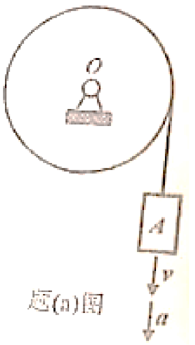
（2）杆 AB 水平时 B 端受到地面的支撑力与摩擦力。

（提示：杆水平时，质心加速度$a_{Cx} = -L\omega^2/2$，$a_{Cy} = -L\alpha/2$，x 轴向右，y 轴向上，角速度ω，角加速度α逆时针为正）

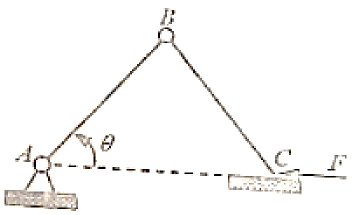


五、（a）图是均质圆轮，半径为 R，质量为 m1，绕 O 轴转动。轮上缠绕细线，绳另一端悬挂重物 A，物 A 的质量为 m2,。某瞬时，物 A 的速度为 v，加速度为 a.求：此时圆轮与重物的惯性力系简化结果。

（b）图示平面内，杆 AB 与 BC 的长度均为 L，A 端为固定铰支座，B 处光滑铰连接，C 端在光滑平面上。平衡时，杆 AB 倾角为θ。结构具有一个自由度。求：用虚角位移$\delta\theta$表示铰 B 与 C 端的虚位移。



题(a)图



题(b)图

六、设某单自由系统广义坐标为θ，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为：

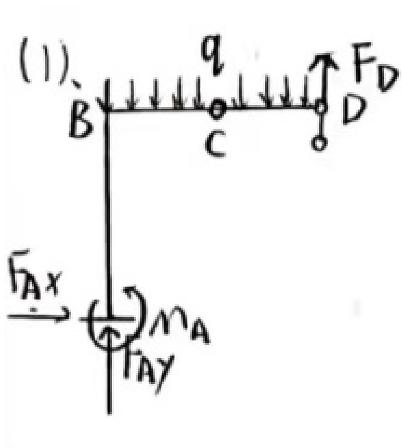
$$T=\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2, V=mg(b+\theta-\cos\theta), \widetilde{Q}=Fb \quad (m,bmg,F\text{为常数})$$

求：（1）该系统的拉格朗日方程；

（2）系统的哈密顿方程。

2013-2014 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、【解析】



(1)取CD为对象分析，$M_C=F_Db-\frac{1}{2}qb^2=0\Longrightarrow F_D=\frac{1}{2}qb$

对整体分析，$\sum M=0\ \ M_A+F_D2b-\frac{1}{2}q(2b)^2=0$

$\sum F_Y=0\ \ F_{Ay}+F_D-2qb=0$

解得 $F_{Ay}=\frac{3}{2}qb(\uparrow)\quad M_A=qb^2(\circlearrowleft)$

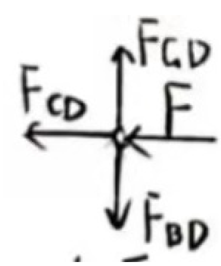
(2)取CD为对象 $M_D=-F_{Cb}+\frac{1}{2}qb^2=0$

解得 $F_C=\frac{1}{2}qb$

【考点延伸】平面力系平衡方程

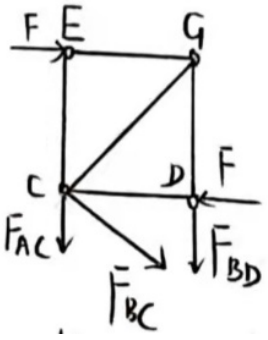
二、【解析】

（1）取D点分析，在水平方向上



$F_{CD}+F=0\ \ F_{CD}=-F$

（2）



取上部结构分析

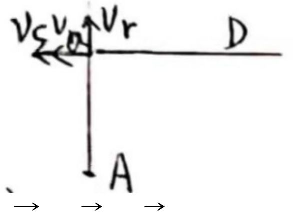
$F_X = F - F + F_{BC} = 0 \Longrightarrow F_{BC} = 0$

$M_a = F_{AC}b - Fb = 0 \Longrightarrow F_{AC} = F$

【考点延伸】构架受力分析

三.【解析】

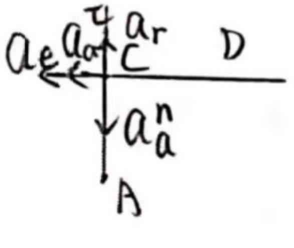
（a）动点；套筒 C；动系；杆 AB;



$\vec{v}_C = \vec{v}_a + \vec{v}_r$

由几何关系得：$v_C = v_a = v$

则杆的角速度 $\omega_{AB} = \dfrac{v}{b}$



在τ方向上有，$a_c = a_e + a_a^{\tau}$ $a_a^{\tau} = 0$

$a_c = 2\omega_e v_r = 0$ $\alpha_{AB} = \dfrac{a_c}{r} = 0$

【考点延伸】点的速度与加速度合成

（b）

设圆环角速度ω

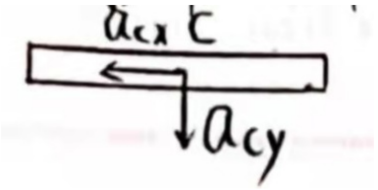
$v_1 = v + \omega R \quad \Longrightarrow \omega = \dfrac{v_1 - v}{R}$

$v_c + \omega R = v \quad \Longrightarrow v_c = 2v - v_1$

【考点延伸】刚体平面运动

四、【解析】

（1）如图，到达水平时，对该瞬时列平面运动微分方程



y方向上，$ma_{cy} = mg - F_N$

x方向上，$ma_{cx} = fF_N$

对力矩，$\dfrac{1}{12}mL^2\alpha = F_N \dfrac{L}{2}$

又$a_{cy} = \dfrac{\alpha L}{2}, a_{cx} = \dfrac{\omega^2 L}{2}$

带入方程组 $m\dfrac{\alpha L}{2} = mg - F_N$

$$m\frac{\omega^2 L}{2} = fF_N$$

$$\frac{1}{12}mL^2\alpha = F_N \frac{L}{2}$$

解得 $\omega = \sqrt{\dfrac{gf}{2L}}$

（2）

由(1)方程组解得

支承力 $F_N = \dfrac{1}{4}mg$ 摩擦力 $F_f = \dfrac{1}{4}mgf$

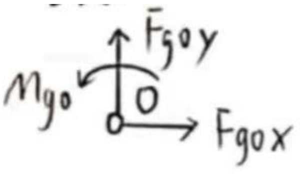
【考点延伸】平面运动微分方程

五、【解析】

(a). 轮心角速度 $\omega=\dfrac{v}{R}$,角加速度$\alpha=\dfrac{a}{R}$

惯性力 $F_{gox}=-m_1a_{ox}=0, F_{goy}=-m_1a_{oy}+m_2a=m_2a$

$M_{go}=J_0\alpha+F_{gA}R=\left(\dfrac{1}{2}m_1+m_2\right)Ra$



(b). 系统自由度为1，以角θ为广义坐标，y轴正方向垂直向上，x轴正方向垂直向右

坐标：$y_B=L\sin\theta\quad x_c=2L\cos\theta$

虚位移：$\delta y_B=L\cos\delta\theta\quad \delta x_c=-2L\sin\delta\theta$

列平衡方程 $\sum\delta W=-F_1\delta y_B-F_2\delta x_c=(-F_1L\sin\theta+2F_2L\sin\theta)\delta\theta=0$

得：$-F_1\cos\theta+2F_2\sin\theta=0\quad F_1=2F_2\tan\theta$

【考点延伸】惯性力系的简化

六、【解析】

（1）

拉氏函数：$L=T-V=\dfrac{1}{2}mb\dot{\theta}^2-mg(b+\theta-\cos\theta)$

$\dfrac{dL}{d\dot{\theta}}=mb\dot{\theta}$

拉式方程：$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\varphi L}{\varphi\dot{\theta}}-\dfrac{\varphi L}{\varphi\theta}=\tilde{a}$

即 $mb\ddot{\theta}-mg-mg\cos\theta=Fb$

（2）

广义动量 $p=\frac{\varphi L}{\varphi\dot{\theta}}=mb\dot{\theta}\ \ \dot{\theta}=\frac{p}{mb}$

哈氏函数 $H=\left(p\dot{\theta}-L\right)\dot{\theta}\rightarrow p=\frac{p^{2}}{2mb}+mg(b+\theta-\cos\theta)$

哈氏方程 $\begin{cases}\dot{\theta}=\frac{\varphi H}{\varphi p}=\frac{p}{mb}\\ \dot{p}=-\frac{\varphi H}{\varphi\theta}+\widetilde{Q}=-mg\sin\theta-mg+Fb\end{cases}$

【考点延伸】拉格朗日 哈密顿方程