浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第二讲 2022.3.18

机械系统动力学

Dynamics of Mechanical Systems

陈远流

Email: yuanliuchen@zju.edu.cn

Phone: 13486183967

浙江大学机械工程学院

本讲内容

第3章内容回顾与作业讲评

第4章 双自由度系统的受迫振动

3.1.1 简谐外力激励下的受迫振动

激励： $F(t)=F_0e^{i\omega t}$

响应：

有一定的相位滞后（反抗）

$$x=\frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}\qquad \beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

$$A=\frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}\qquad \theta(s)=tg^{-1}\frac{2\xi s}{1-s^2}\qquad s=\frac{\omega}{\omega_0}$$

阻尼的影响

结论：

（1）线性系统对简谐激励的稳态响应是频率等同于激振频率、而相位滞后激振力的简谐振动

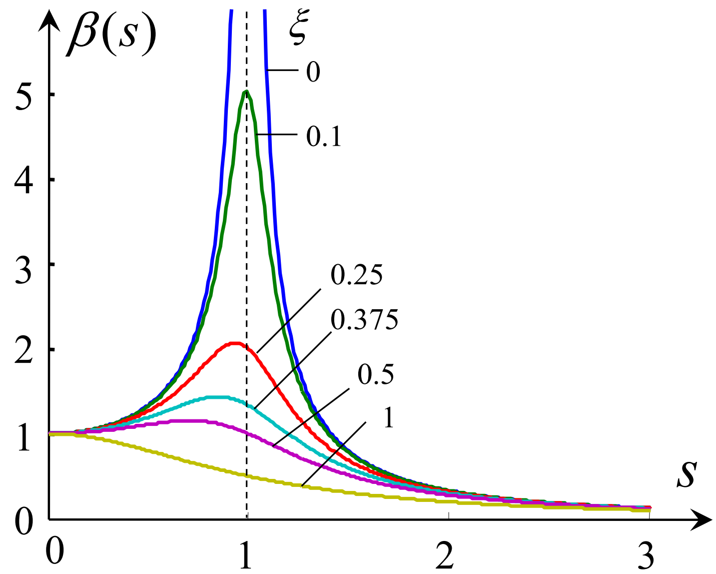
（2）稳态响应的振幅及相位只取决于系统本身的物理性质（*m*，*k*，*c*）和激振力的频率及力幅，而与系统进入运动的方式（即初始条件）无关

3.1.2 稳态响应特性

- **稳态响应的特性**

以s为横坐标画出 $\beta(s)$ **曲线**

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$



幅频特性曲线

简谐激励作用下稳态响应特性：

(1) 当 s<<1（$\omega \ll \omega_0$）

激振频率相对于系统固有频率很低

$\beta \approx 1$ **结论：响应的振幅 A 与静位移 B 相当**

通过阻尼影响

$$x=\frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

3.1.2 稳态响应特性

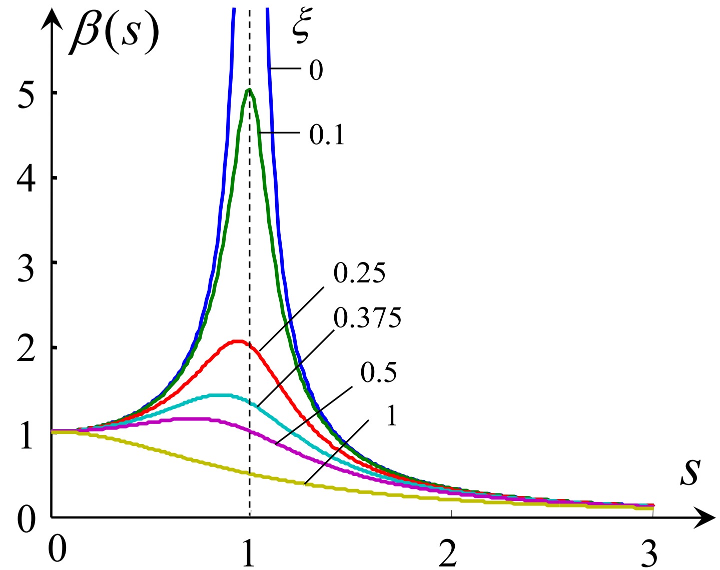
- **稳态响应特性**

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

（2）当s>>1（$\omega >> \omega_0$）

激振频率相对于系统固有频率很高

$$\beta \approx 0$$



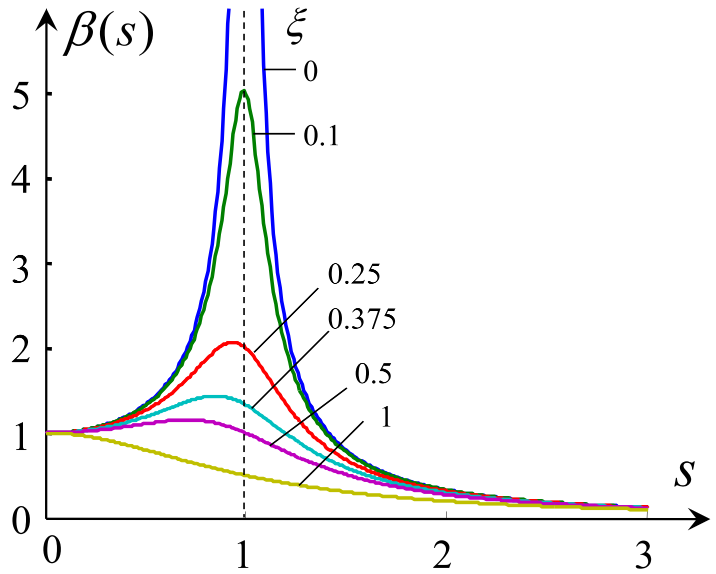
结论：响应的振幅很小

$$x=\frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

3.1.2 稳态响应特性

• 稳态响应特性

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$



(3）在以上两个领域

s>>1，s<<1

对应于不同 ξ 值,曲线较为密集，说明阻尼的影响不显著

结论：系统即使按无阻尼情况考虑也是可以的

3.1.2 稳态响应特性

- **稳态响应特性**

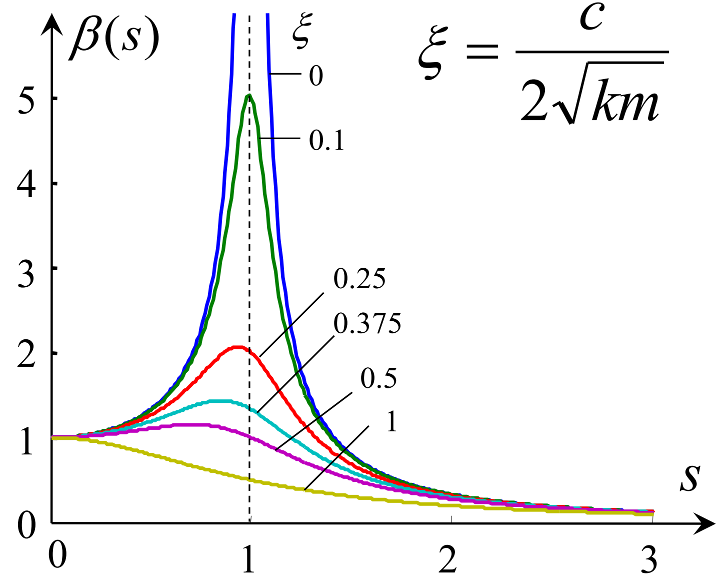
$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

(4) 当 $s\approx 1 \quad \omega\approx\omega_0$

对应于较小 ξ **值，**$\beta(s)$ **迅速增大**

当 $\xi=0$ ➡ $\beta(s)\to\infty$

结论：共振　　振幅无穷大



$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}}$$

但共振对于来自阻尼的影响很敏感，在 s=1 附近的区域内，增加阻尼使振幅明显下降

$$x=\frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

3.1.2 稳态响应特性

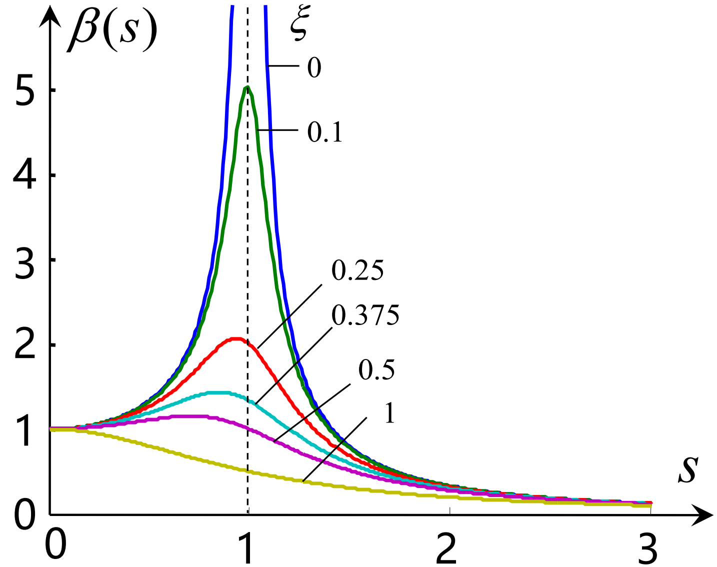
- **稳态响应特性**

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

(5）对于有阻尼系统，β_{max}并不出现在s=1处，而且稍偏左

$$\frac{d\beta}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad s=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\beta_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



$$x=\frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

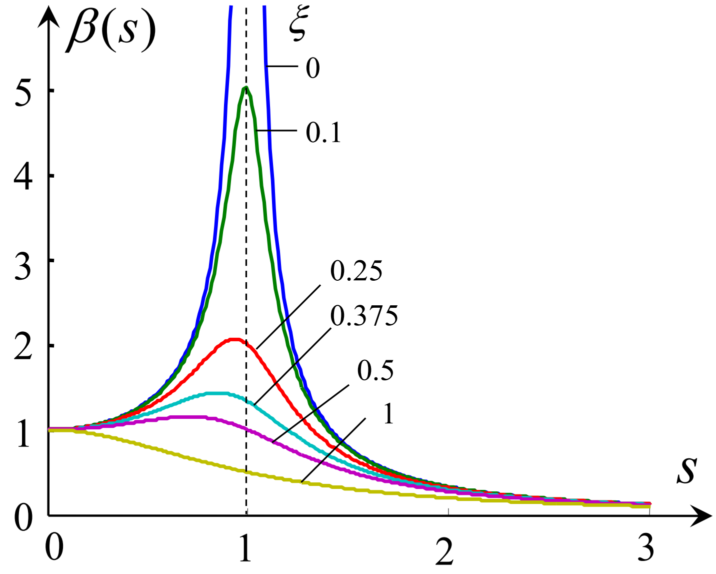
3.1.2 稳态响应特性

- **稳态响应特性**

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

(6) 当 $\xi>1/\sqrt{2}$ $\beta<1$

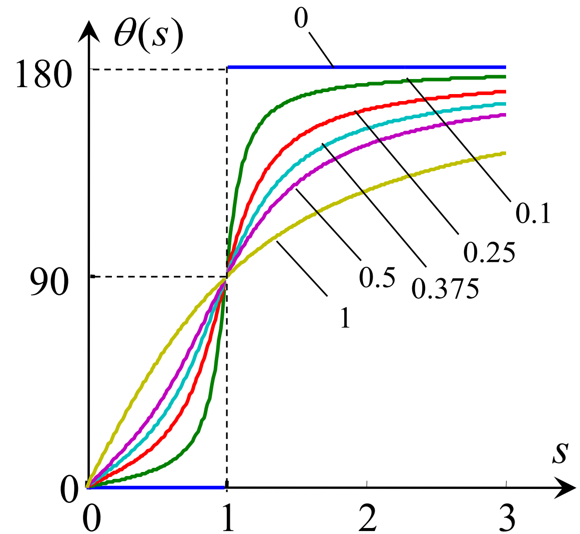
振幅无极值



3.1.2 稳态响应特性

- **稳态响应特性**

以s为横坐标画出 $\theta(s)$ 曲线



$$\theta(s) = tg^{-1}\frac{2\xi s}{1-s^2}$$

相频特性曲线

（1）当s<<1 $(\omega << \omega_0)$

相位差 $\theta \approx 0$ 位移与激振力在相位上几乎相同

（2）当s>>1 $(\omega >> \omega_0)$

$\theta \approx \pi$ 位移与激振力反相

（3）当 $s \approx 1$ $\omega \approx \omega_0$ 共振时的相位差为 $\frac{\pi}{2}$，与阻尼无关

$$x = \frac{F_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)} = Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

3.1.3 受迫振动的过渡阶段

在系统受到激励开始振动的初始阶段，其自由振动伴随受迫振动同时发生。系统的响应是暂态响应与稳态响应的叠加

回顾：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

显含 t，非齐次微分方程

非齐次微分方程通解	=	齐次微分方程通解	+	非齐次微分方程特解
		阻尼自由振动逐渐衰减		持续等幅振动
		暂态响应		**稳态响应**

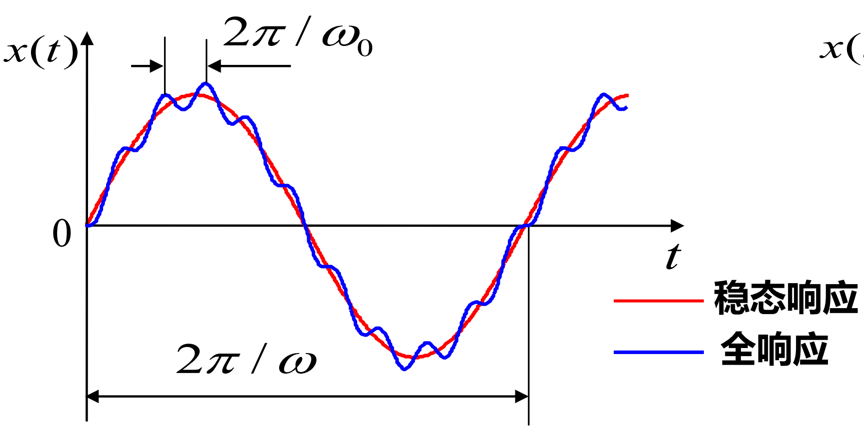
3.1.3 受迫振动的过渡阶段

零初始条件 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=-\dfrac{Bs}{1-s^2}\sin\omega_0 t+\dfrac{B}{1-s^2}\sin\omega t$

(1) $s<1 \quad (\omega<\omega_0)\ (T>T_0)$

稳态受迫振动进行一个循环时间内，自由伴随振动完成多个循环

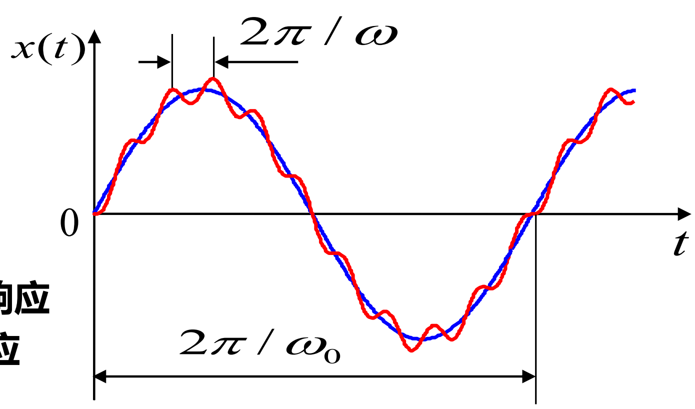
受迫振动响应成为稳态响应曲线上迭加的一个振荡运动



(2) $s>1 \quad (\omega>\omega_0)\ (T<T_0)$

自由伴随振动进行一个循环时间内，稳态受迫振动完成多个循环

受迫振动响应成为自由振动响应曲线上迭加的一个振荡运动



3.1.3 受迫振动的过渡阶段

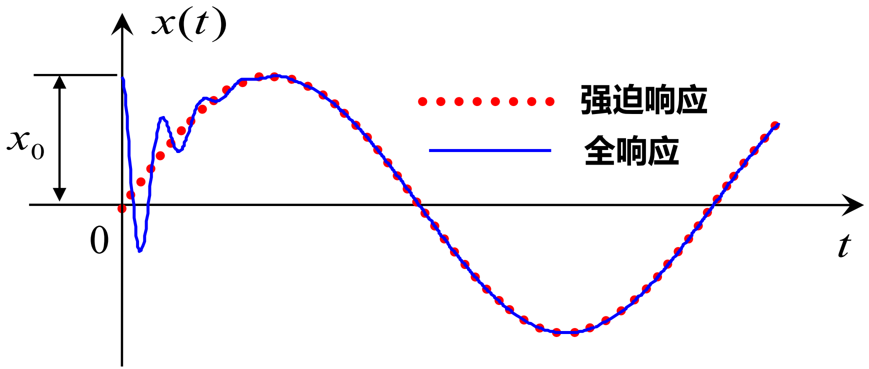
$$x(t)=e^{-\xi\omega_0 t}(x_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_0 x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t)$$

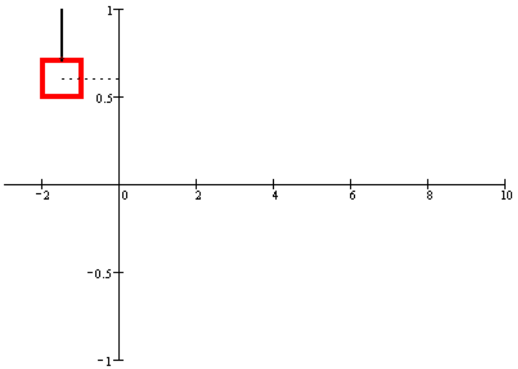
初始条件响应

$$+B\beta e^{-\xi\omega_0 t}[\sin\theta\cos\omega_d t+\frac{\omega_0}{\omega_d}(\xi\sin\theta-s\cos\theta)\sin\omega_d t]+B\beta\sin(\omega t-\theta)$$

自由伴随振动

强迫响应





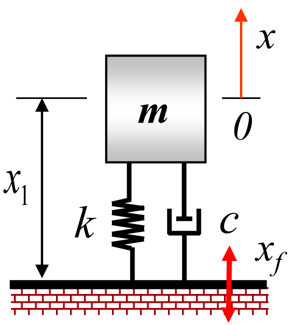
经过充分长时间后，作为瞬态响应的前两种振动都将消失，只剩稳态强迫振动

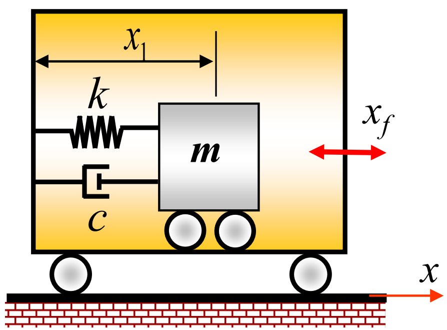
3.1.4 简谐惯性力激励的受迫振动

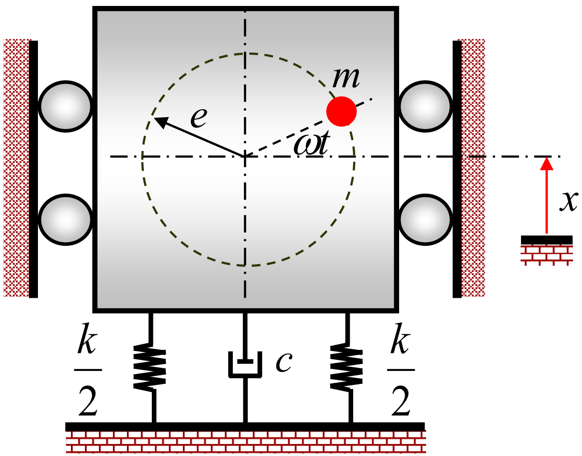
- **简谐惯性力激励的受迫振动**

背景：由惯性引起的受迫振动

特点：激振惯性力的幅值与频率的平方成正比例





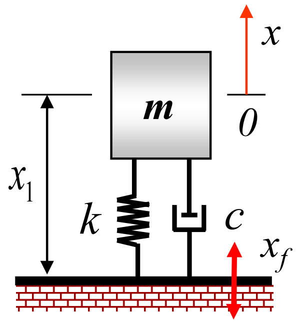


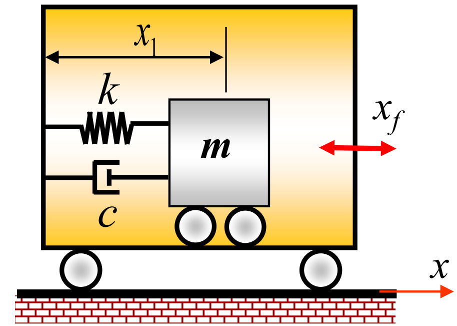
3.1.4 简谐惯性力激励的受迫振动

- **支承运动小结**

基座位移规律：

$$x_f(t) = De^{i\omega t}$$





相对位移

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = mD\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$x_1 = \beta_1 De^{i(\omega t-\theta_1)}$$

$$\beta_1(s) = \frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}}$$

$$\theta_1(s) = tg^{-1}\frac{2\zeta s}{1-s^2}$$

绝对位移

$$x = x_1 + x_f = \beta_2 De^{i(\omega t-\theta)}$$

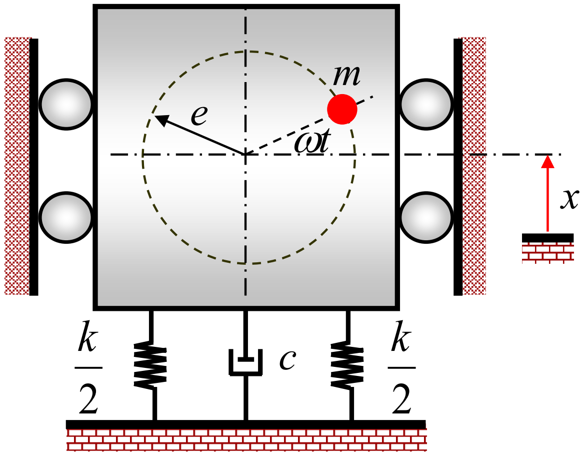
$$\beta_2 = \sqrt{\frac{1+(2\zeta s)^2}{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}}$$

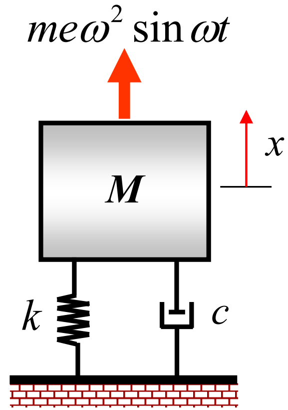
$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

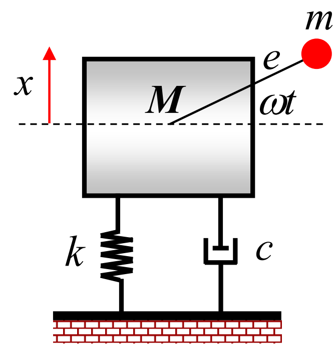
$$\theta_2 = tg^{-1}(2\zeta s)$$

3.1.4 简谐惯性力激励的受迫振动

- **偏心质量小结**







$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

解2： $x(t)=\beta_1 B_1\sin(\omega t-\theta)$

解1： $x(t)=\beta B\sin(\omega t-\theta)$

$$\beta_1=\frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}$$

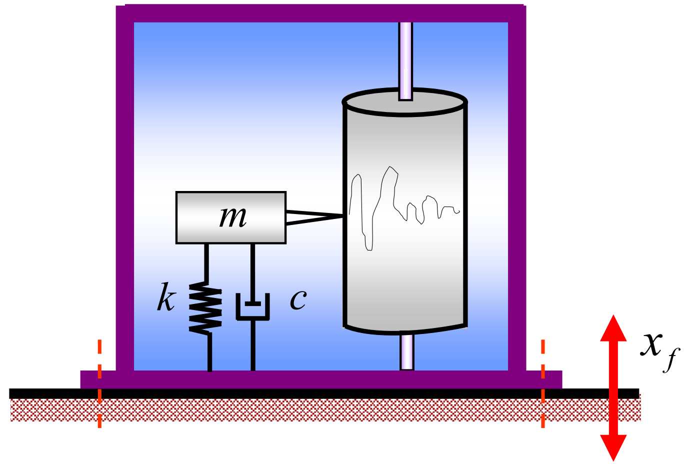
$$B_1=\frac{me}{M}\qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}\qquad s=\frac{\omega}{\omega_0}\qquad \theta=tg^{-1}\frac{2\xi s}{1-s^2}\qquad B=\frac{me\omega^2}{k}$$

简谐激励受迫振动工程应用

• 惯性式测振仪

基础位移 $x_f = De^{i\omega t}$

x 为 m 相对于外壳的相对位移



动力方程：

$$m(\ddot{x}+\ddot{x}_f)+c\dot{x}+kx=0$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=mD\omega^2 e^{i\omega t}$$

振幅： $A_1=\dfrac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\xi s)^2}}D$

低固有频率测量仪用于测量振动的位移幅值，称为**位移计**

$s\rightarrow\infty \quad \Leftrightarrow \quad \omega>>\omega_0$

$$\lim_{s\rightarrow\infty} A_1 \approx D$$

当仪器的固有频率远小于外壳振动频率时，仪器读数的幅值 A_1 接近外壳振动的振幅 D

简谐激励受迫振动工程应用

$$A_1 = \frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\zeta s)^2}} D$$

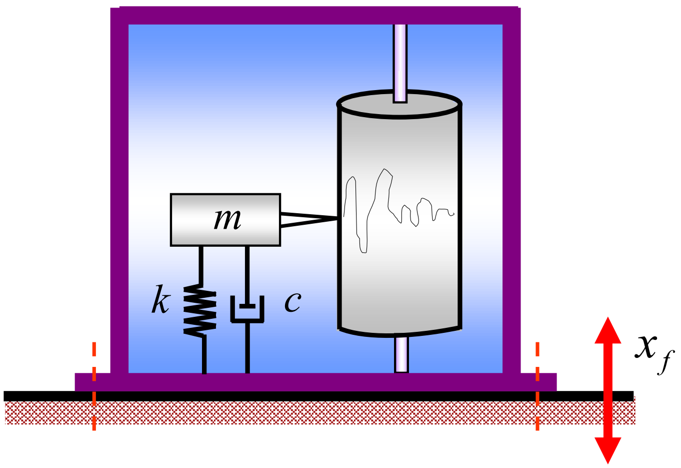
A_1 还可写为：

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\xi s)^2}} \left(\frac{D\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$s \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega << \omega_0$

刚度大

$$\lim_{s\to 0} A_1 \approx \frac{1}{\omega_0^2}(D\omega^2)$$



$D\omega^2$：被测物体的加速度幅值

当仪器的固有频率远大于外壳振动频率时，仪器读数的幅值A_1与外壳加速度的幅值成正比

高固有频率测量仪用于测量振动的加速度幅值，称为加速度计

第3章. 单自由度系统的受迫振动

- 3.1 简谐激励引起的受迫振动
- 3.2 工程中的受迫振动问题
- 3.3 任意周期激励的响应
- 3.4 非周期激励的响应

3.3 任意周期激励的响应

前面讨论的强迫振动，都假设了系统受到激励为简谐激励，但实际工程问题中遇到的大多是周期激励而很少为简谐激励

假定粘性阻尼系统受到的周期激振力： $F(t)=F(t+T)$

记基频： $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$ T 为周期

傅立叶级数展开： $F(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T}F(t)dt \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T}F(t)\cos n\omega_1 t dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T}F(t)\sin n\omega_1 t dt \end{cases}$$

a_n： n 的偶函数

b_n： n 的奇函数

τ 为任一时刻

记：

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\varphi_n=tg^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$

3.3 任意周期激励的响应

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

运动微分方程： $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$

叠加原理，系统稳态响应：

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n}{k}\beta_n\cos(n\omega_1 t-\theta_n)+\frac{b_n}{k}\beta_n\sin(n\omega_1 t-\theta_n)]$$

$$=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos(n\omega_1 t-\theta_n)+b_n\sin(n\omega_1 t-\theta_n)}{k\sqrt{(1-n^2s^2)^2+(2\xi ns)^2}}$$

不计阻尼时： $x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t}{k(1-n^2s^2)}$

$\frac{a_0}{2k}$ **代表着平衡位置**

周期激励通过傅氏变换被表示成了一系列频率为基频整数倍的简谐激励的叠加，这种对系统响应的分析被成为谐波分析法

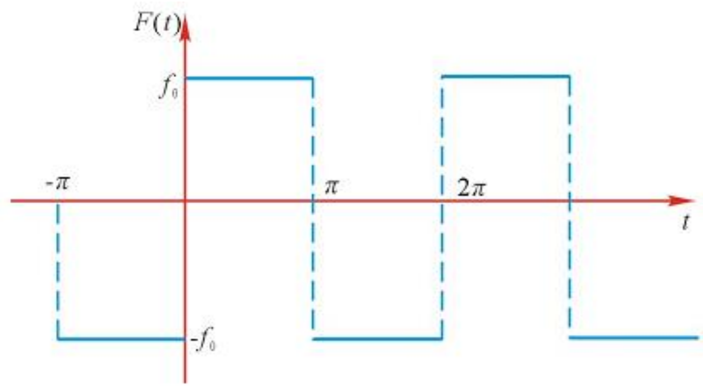
$$\beta_n=\frac{1}{\sqrt{(1-n^2s^2)^2+(2\xi ns)^2}}\qquad s=\frac{\omega_1}{\omega_0}\qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad \theta_n=tg^{-1}\frac{2n\xi s}{1-n^2s^2}$$

3.3 任意周期激励的响应

周期振动的谐波分析以无穷级数出现，但一般可以用有限项近似表示周期振动。

例 已知一周期性矩形波如图所示，试对其作谐波分析。

解：矩形波一个周期内函数$F(t)$可表示为



$$F(t)=\begin{cases} f_0 & 0<t<\pi \\ -f_0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\,\mathrm{d}t=0$$

表示$F(t)$的波形关于t轴对称，故其平均值为零。

3.3 任意周期激励的响应

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f_0 \cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} f_0 \cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t\right] = 0$$

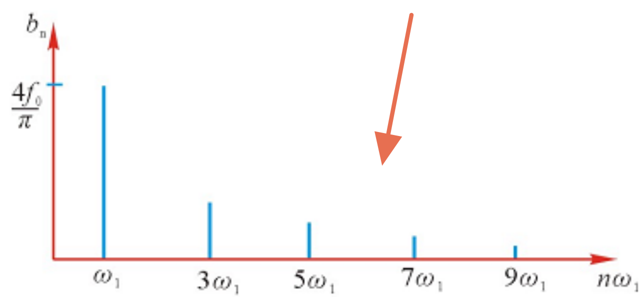
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f_0 \sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} f_0 \sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t\right] = \frac{2f_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{4f_0}{n\pi}$$

n=1，2，3……

于是，得*F*(t)的傅氏级数

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t = \frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t = \frac{4f_0}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots\right)$$

***F*(*t*)是奇函数，在它的傅氏级数中也只含正弦函数项。在实际的振动计算中，根据精度要求，级数均取有限项。*F*(*t*)的幅值频谱如图所示。**



3.3 任意周期激励的响应

先对周期激励作谐波分析，将它分解为一系列不同频率的简谐激励。然后，求出系统对各个频率的简谐激励的响应。再由线性系统的叠加原理，将每个响应分别叠加，即得到系统对周期激励的响应。

周期

设粘性阻尼系统受到周期激振力 $F(t) = F(t + T)$

谐波分析方法，得到 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ 基频

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

系统的运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

3.3 任意周期激励的响应

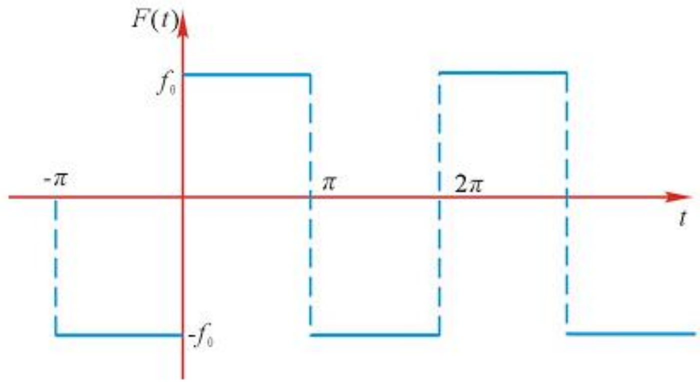
由叠加原理，并考虑欠阻尼情况，得到系统的稳态响应

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(n\omega_1 t-\varphi_n)+B_n\sin(n\omega_1 t-\varphi_n)]$$

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{a_n}{k}\dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda_n^2)^2+(2\zeta\lambda_n)^2}}\\ B_n=\dfrac{b_n}{k}\dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda_n^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}}\\ \tan\varphi_n=\dfrac{2\zeta\lambda_n}{1-\lambda_n^2}\\ \lambda_n=\dfrac{n\omega_1}{p_\mathrm{n}},\quad p_\mathrm{n}^2=\dfrac{k}{m},\quad \zeta=\dfrac{c}{2mp_\mathrm{n}}\end{cases}$$

3.3 任意周期激励的响应

例　弹簧质量系统，受到周期性矩形波的激励。试求系统的稳态响应。(其中 $T=\dfrac{12\pi}{p_n}$)



解：周期性矩形波的基频为

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}=\frac{\boxed{p_n}}{6}$$

固有频率

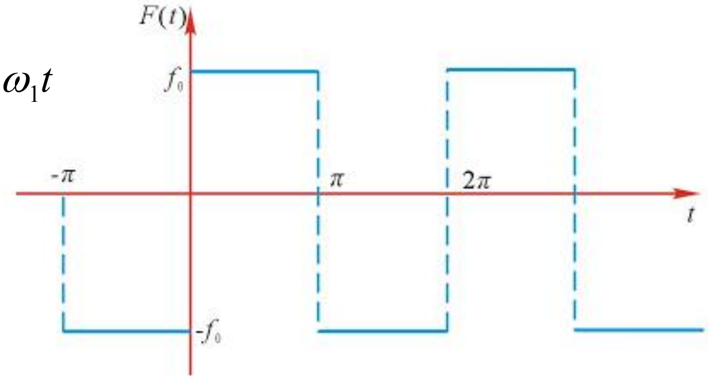
矩形波一个周期内函数

$$F(t)=\begin{cases} f_0 & 0<t<\pi \\ -f_0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

将矩形波分解为 $$F(t)=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$

3.3 任意周期激励的响应

将矩形波分解为 $F(t)=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1,3,....}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$



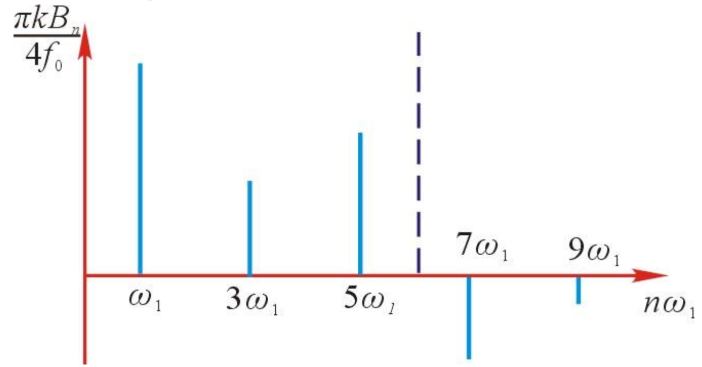
可得稳态响应

奇数

$$x(t)=\sum_{n=1,3,....}^{\infty}B_n\sin n\omega_1 t$$

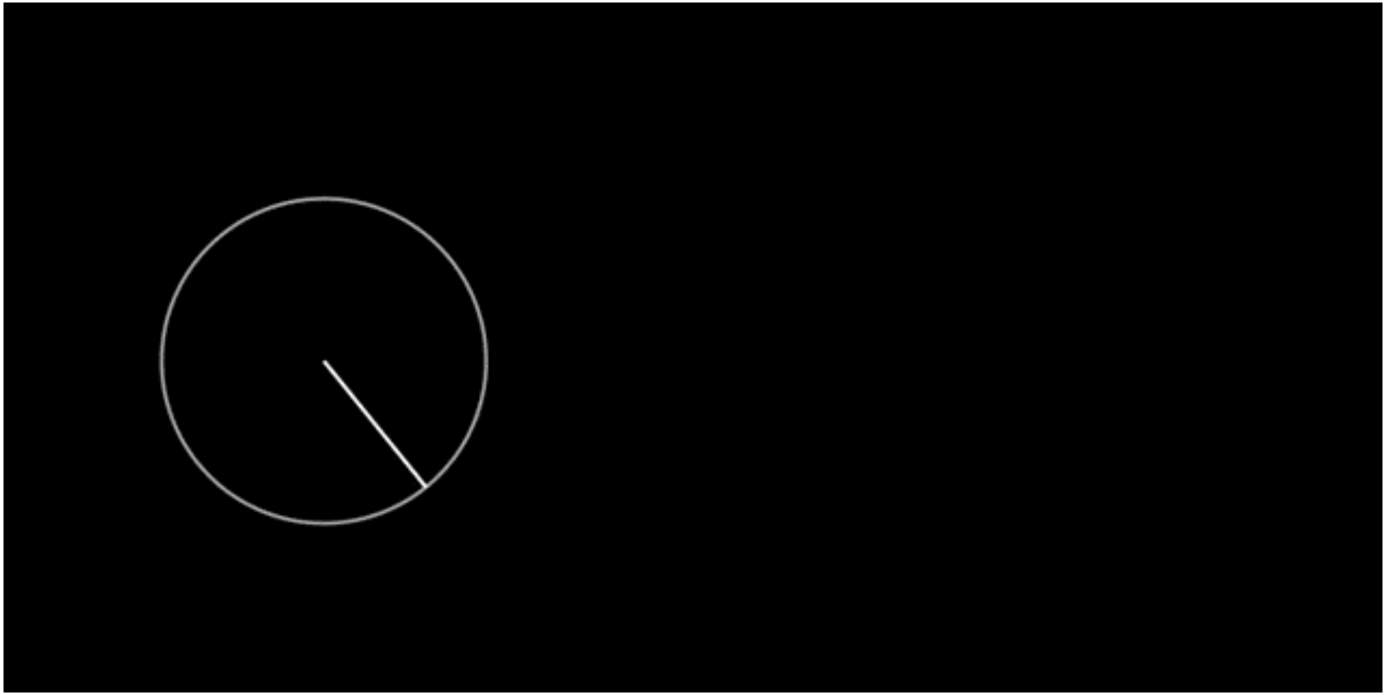
$$B_n=\frac{4f_0}{n\pi k}\frac{1}{(1-\lambda_n^2)},\lambda_n=\frac{n\omega_1}{p_{\text{n}}}$$

画出系统的响应频谱图

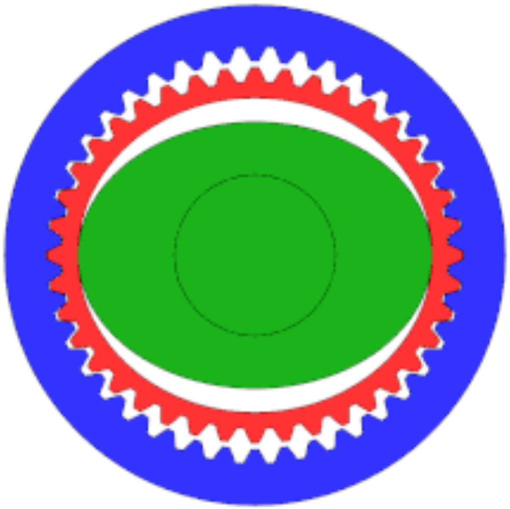


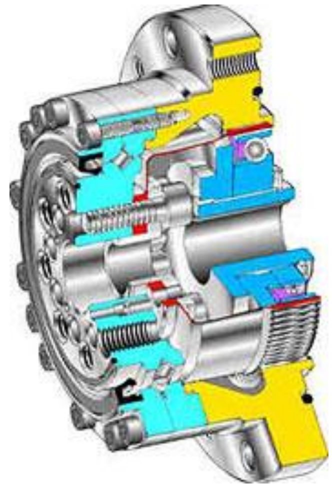
从频谱图中看，系统只对激励所包含的谐波分量有响应。对于频率靠近系统固有频率的那些谐波分量，系统响应的振幅放大因子比较大，在整个稳态响应中占主要成分。

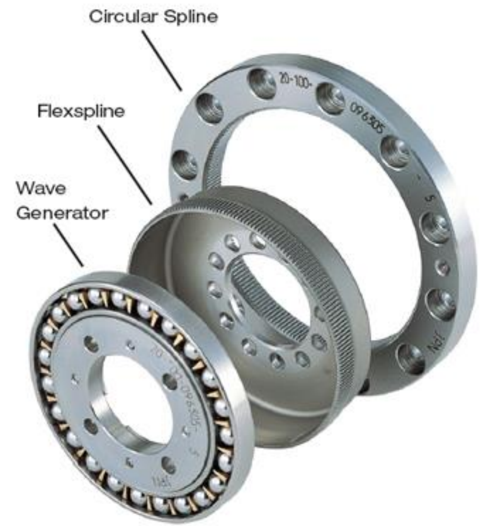
3.3 任意周期激励的响应

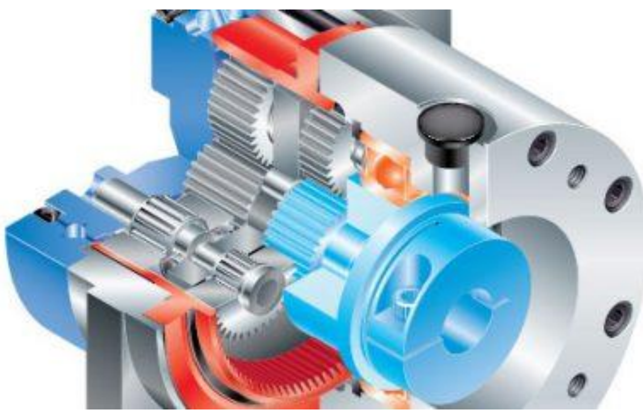


谐波减速器：机器人的核心部件





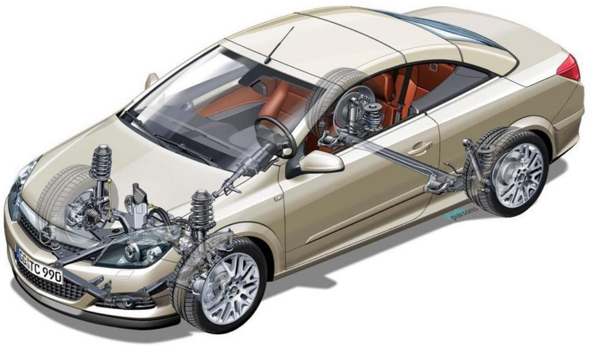


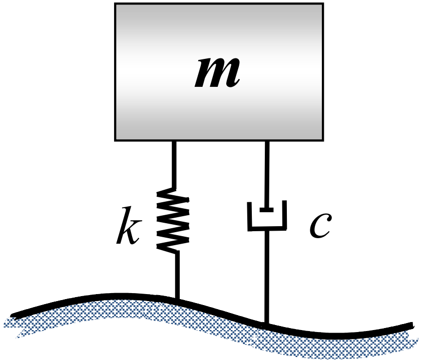


多自由度系统振动

多自由度系统的振动

例子：轿车行驶在路面上会产生上下振动





要求：对轿车的上下振动进行动力学建模

分析：人与车、车与车轮、车轮与地面之间的运动存在耦合

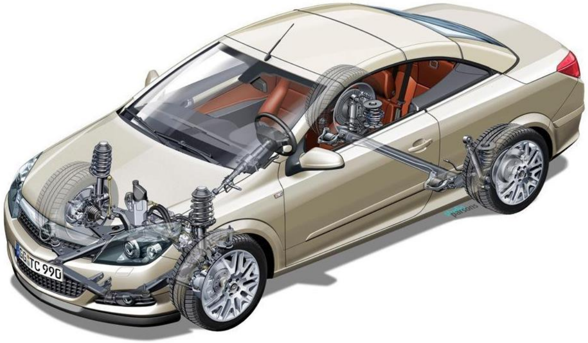
建模方法1：

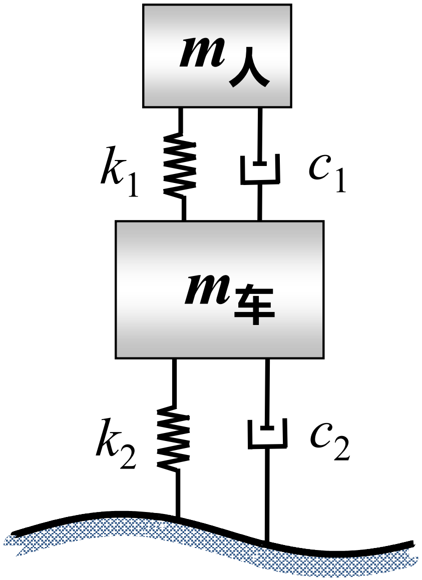
将车、人等全部作为一个质量考虑，并考虑弹性和阻尼

优点：模型简单

缺点：模型粗糙，没有考虑人与车、车与车轮、车轮与地面之间的相互影响

多自由度系统的振动





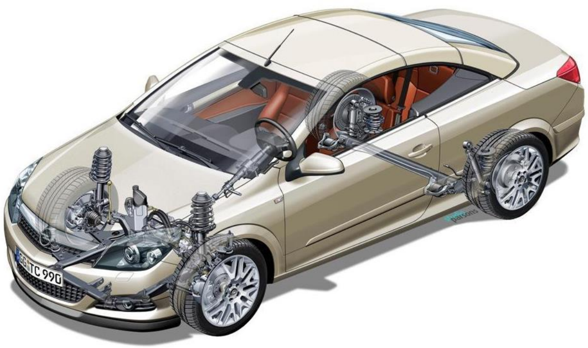
建模方法2：

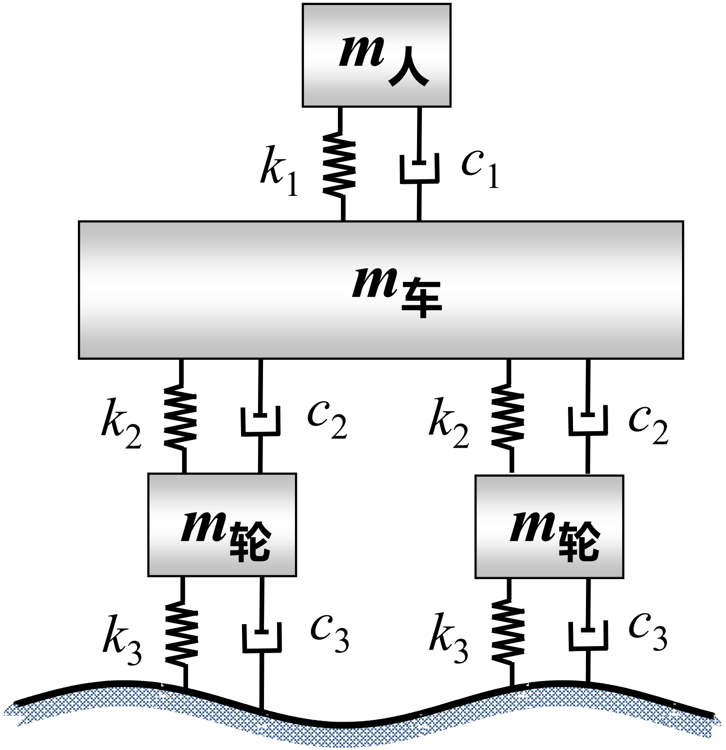
车、人的质量分别考虑，并考虑各自的弹性和阻尼

优点：模型较为精确，考虑了人与车之间的耦合

缺点：没有考虑车与车轮、车轮与地面之间的相互影响

多自由度系统的振动





建模方法3：

车、人、车轮的质量分别考虑，并考虑各自的弹性和阻尼

优点：分别考虑了人与车、车与车轮、车轮与地面之间的相互耦合，模型较为精确

问题：如何描述各个质量之间的相互耦合效应?

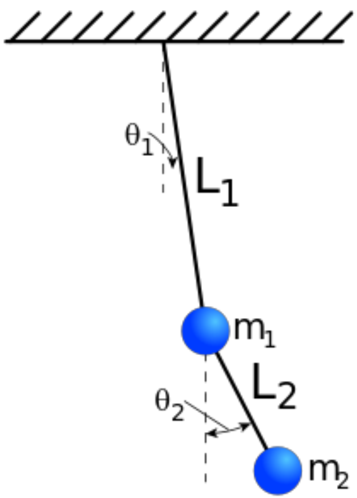
多自由度系统的振动

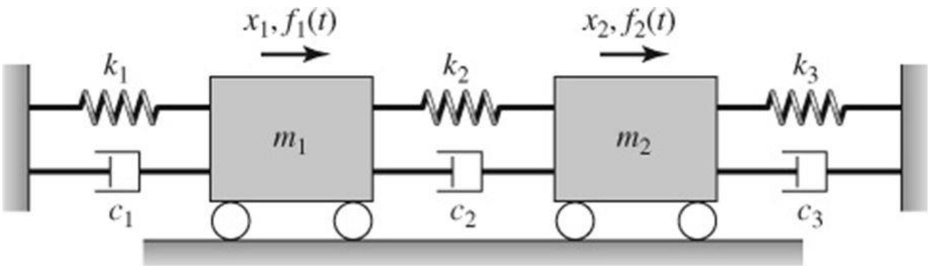
如何考虑如下飞机机翼的振动模型？

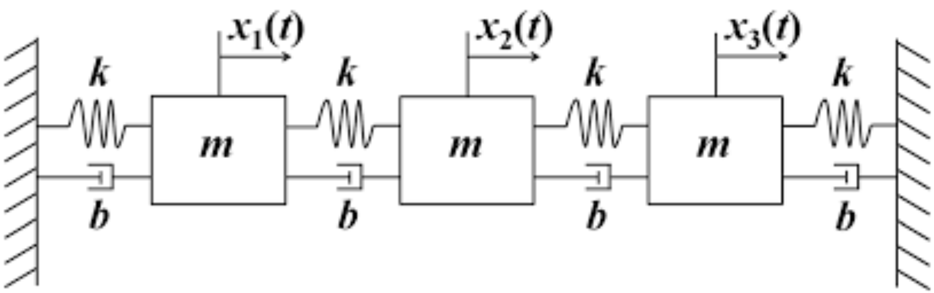
多自由度系统的振动

有质量才考虑（数有几个m）

当系统的自由度数为N时，系统需要且仅需要有N个坐标来定义，这N个坐标称之为广义坐标







多自由度系统的振动

PI Hexapods are more Versatile than Conventional Positioners

- High Stiffness
- Low Moving Mass
- Central Aperture

Versatility　Mini　High-Speed　High-Load　Planar　Sub-Mini

多自由度系统的振动

多自由度振动系统

需要用两个或两个以上的独立坐标才能描述其运动的振动系统

各个自由度彼此相互联系，某一自由度的振动往往导致整个系统振动。

描述系统振动的运动微分方程的变量之间通常相互耦合，使得求解比单自由度系统困难的多。

第4章. 多自由度振动系统的基本方程

- 4.1 运动微分方程
- 4.2 刚度矩阵和质量矩阵
- 4.3 耦合与坐标变换

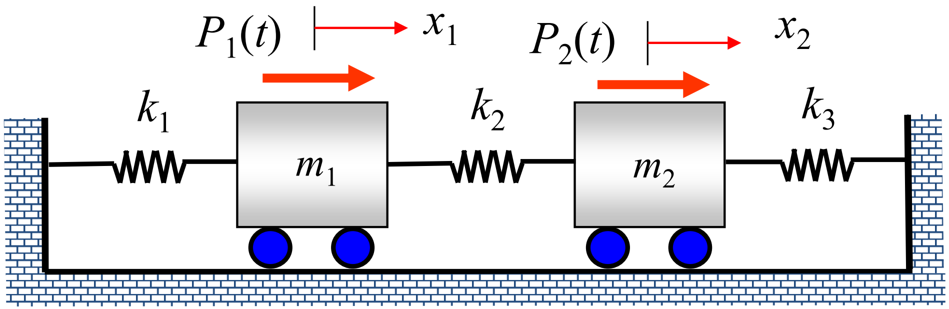
4.1 运动微分方程

- **作用力方程**

几个例子

例1：双质量弹簧系统，两质量分别受到激振力

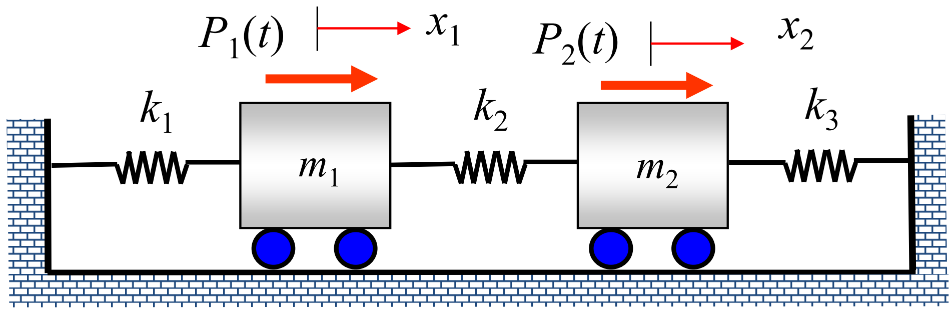
不计摩擦和其他形式的阻尼



试建立系统的运动微分方程

4.1 运动微分方程

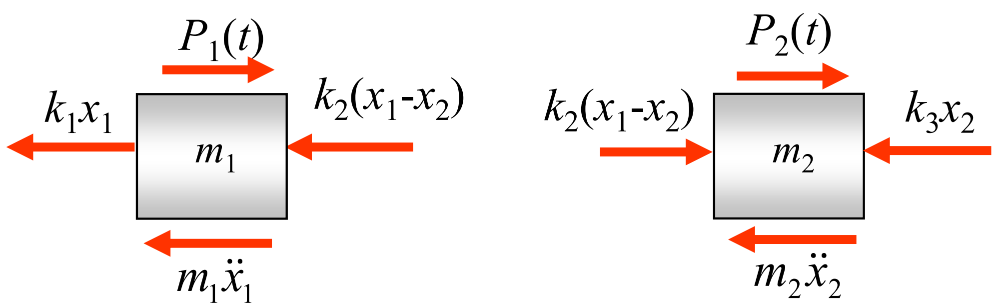
解：



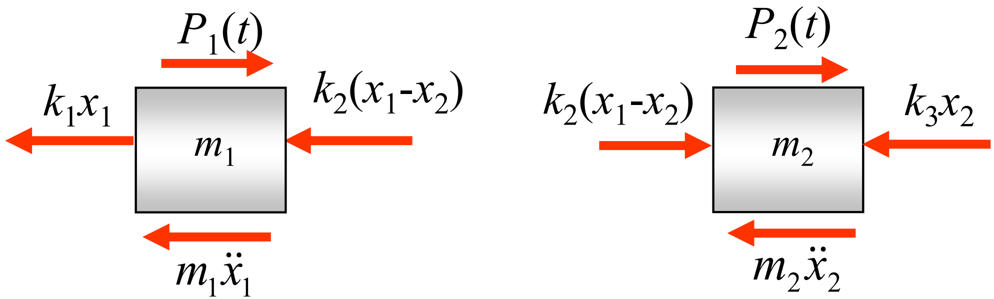
建立坐标： x_1、x_2 **的原点分别取在** m_1、m_2 **的静平衡位置**

设某一瞬时： m_1、m_2**上分别有位移** x_1、x_2 **加速度** $\ddot{x}_1$、$\ddot{x}_2$

受力分析：



4.1 运动微分方程



建立方程：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = P_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) + k_3x_2 = P_2(t) \end{cases}$$ **力量纲**

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

坐标间的耦合项

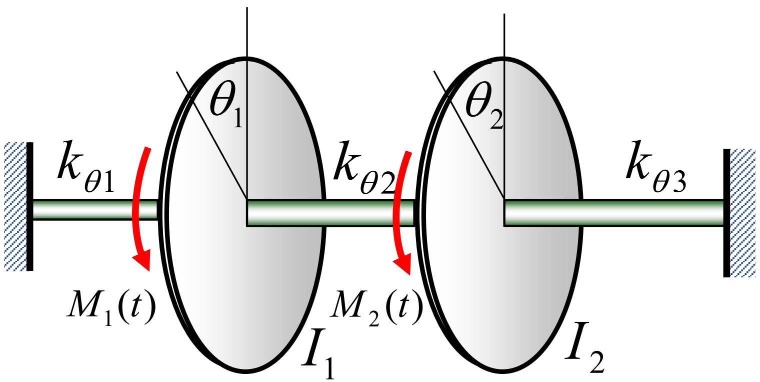
4.1 运动微分方程

例2：转动运动

替 m

两圆盘　外力矩 $M_1(t), M_2(t)$　转动惯量 I_1, I_2

轴的三个段的扭转刚度 $k_{\theta 1}, k_{\theta 2}, k_{\theta 3}$



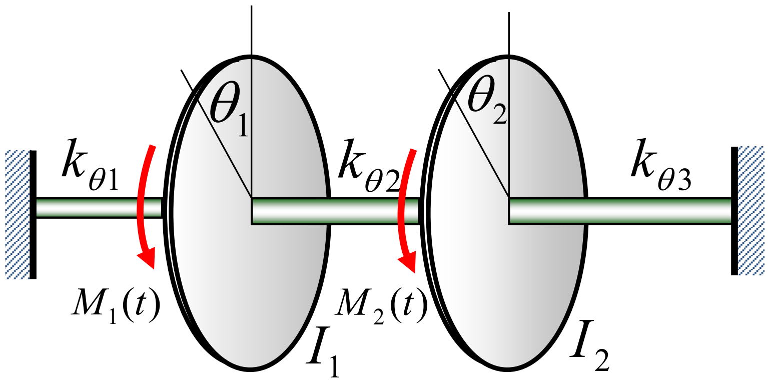
试建立系统的运动微分方程

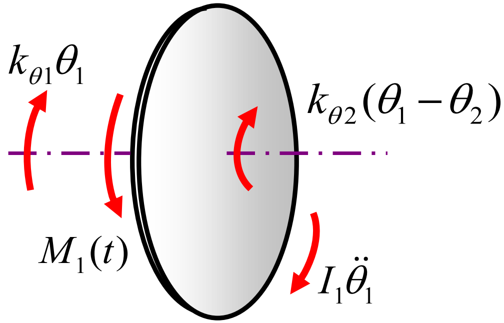
4.1 运动微分方程

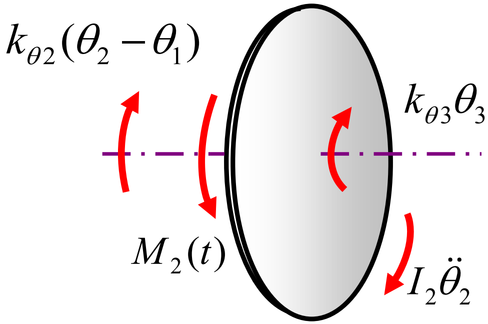
解：

建立坐标： **设某一瞬时：** **角位移** θ_1, θ_2 **角加速度** $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$

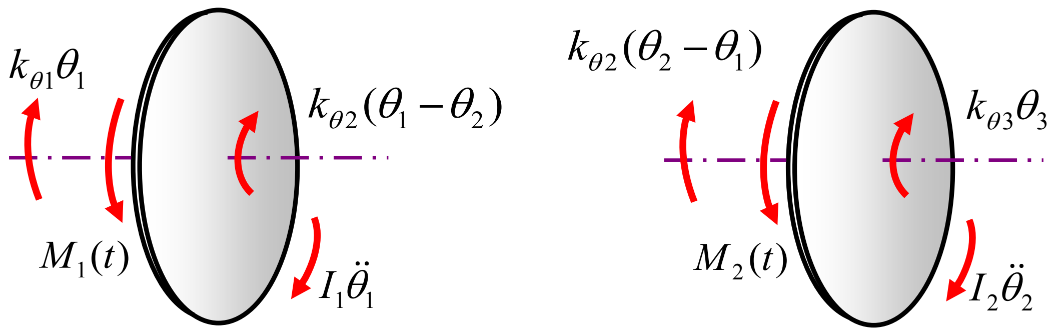
受力分析：







4.1 运动微分方程



建立方程：

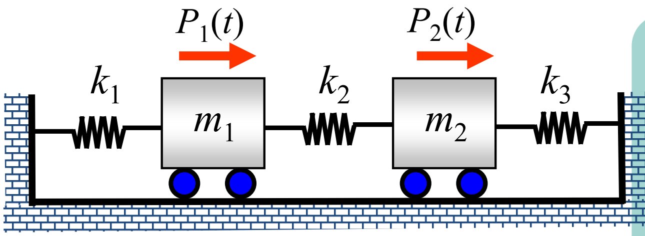
$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta}_1+k_{\theta 1}\theta_1+\underline{k_{\theta 2}(\theta_1-\theta_2)}=M_1(t) \\ I_2\ddot{\theta}_2+\underline{k_{\theta 2}(\theta_2-\theta_1)}+k_3\theta_3=M_2(t) \end{cases}$$

矩阵形式：

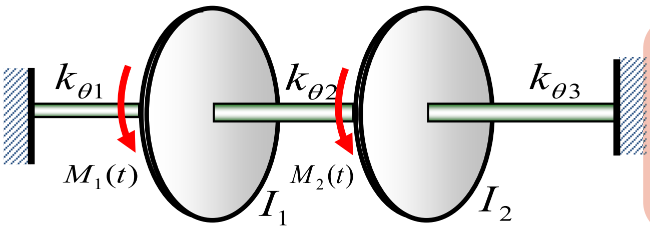
$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{\theta 1}+k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} \\ -k_{\theta 2} & k_{\theta 2}+k_{\theta 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}$$

坐标间的耦合项

4.1 运动微分方程



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\theta 1}+k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} \\ -k_{\theta 2} & k_{\theta 2}+k_{\theta 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}$$

多自由度系统的角振动与直线振动在数学描述上相同

如同在单自由度系统中所定义的，在多自由度系统中也将质量、刚度、位移、加速度及力都理解为广义的

4.1 运动微分方程

小结：

例1：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

例2：

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{\theta 1}+k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} \\ -k_{\theta 2} & k_{\theta 2}+k_{\theta 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}$$

可统一表示为：

$$\underbrace{M}_{\text{质量矩阵}}\;\underbrace{\ddot{X}}_{\text{加速度向量}}+\underbrace{K}_{\text{刚度矩阵}}\;\underbrace{X}_{\text{位移向量}}=\underbrace{P(t)}_{\text{激励力向量}}$$

作用力方程

若系统有 n 个自由度，则各项皆为 n 维矩阵或列向量

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

n 个自由度系统:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}(t)$$

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T\in R^n$$ 广义坐标列向量

$$\boldsymbol{M}=\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11}\ldots m_{1j}\ldots m_{1n} \\ m_{21}\ldots m_{2j}\ldots m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\ldots m_{nj}\ldots m_{nn} \end{bmatrix}}_{n\times n} \qquad \boldsymbol{K}=\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11}\ldots k_{1j}\ldots k_{1n} \\ k_{21}\ldots k_{2j}\ldots k_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}\ldots k_{nj}\ldots k_{nn} \end{bmatrix}}_{n\times n} \qquad \boldsymbol{P}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

质量矩阵第 j 列　　　　刚度矩阵第 j 列

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

- **刚度矩阵和质量矩阵**

作用力方程：　$\cancel{M\ddot{X}}+KX=P(t)$　　$X\in R^n$

当 M、K 确定后，系统动力方程可完全确定

M、K 该如何确定?

先讨论 K

假设外力是以准静态方式施加于系统　加速度为零　$\ddot{X}=0$

$$KX=P(t)$$

静力平衡　　准静态外力列向量

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

作用力方程： $\cancel{M\ddot{X}} + KX = P(t)$　　　　$X \in R^n$

$$\underline{KX = P(t)}$$

假设作用于系统的是这样一组外力：它们使系统只在第 j 个坐标上产生单位位移，而在其他各个坐标上不产生位移

即： $X = [x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n]^T = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$

代入： $$P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \ldots k_{1j} \ldots k_{1n} \\ k_{21} \ldots k_{2j} \ldots k_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1} \ldots k_{nj} \ldots k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix}P_1(t)\\P_2(t)\\\vdots\\P_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}\cdots k_{1j}\cdots k_{1n}\\k_{21}\cdots k_{2j}\cdots k_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\k_{n1}\cdots k_{nj}\cdots k_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{nj}\end{bmatrix}$$

考虑：这样的外力列阵是否唯一？

所施加的这组外力数值上正是刚度矩阵 K 的第 j 列

k_{ij} $(i=1\sim n)$ ：在第 i 个坐标上施加的力

结论： 刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11}\ldots k_{1j}\ldots k_{1n} \\ k_{21}\ldots k_{2j}\ldots k_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}\ldots k_{nj}\ldots k_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{nj} \end{bmatrix}$$

结论： 刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

第j个坐标产生单位位移 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 刚度矩阵第j列 $\xrightarrow{j=1\sim n}$ 系统刚度矩阵

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

作用力方程： $M\ddot{X} + \cancel{KX} = P(t)$ $\qquad X \in R^n$

讨论 M $\qquad M\ddot{X} = P(t)$

假设系统受到外力作用的瞬时，只产生加速度而不产生任何位移

假设作用于系统的是这样一组外力：它们使系统只在第 j 个坐标上产生单位加速度，而在其他各个坐标上不产生加速度

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \ldots m_{1j} \ldots m_{1n} \\ m_{21} \ldots m_{2j} \ldots m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1} \ldots m_{nj} \ldots m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11}\ldots m_{1j}\ldots m_{1n} \\ m_{21}\ldots m_{2j}\ldots m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\ldots m_{nj}\ldots m_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{bmatrix}$$

考虑：这样的外力列阵是否唯一？

这组外力正是质量矩阵 M 的第 j 列

结论：质量矩阵 M 中的元素 m_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

第j个坐标单位加速度 $\xrightarrow{\text{确定}}$ **质量矩阵第j列** $\xrightarrow{j=1\sim n}$ **系统质量矩阵**

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

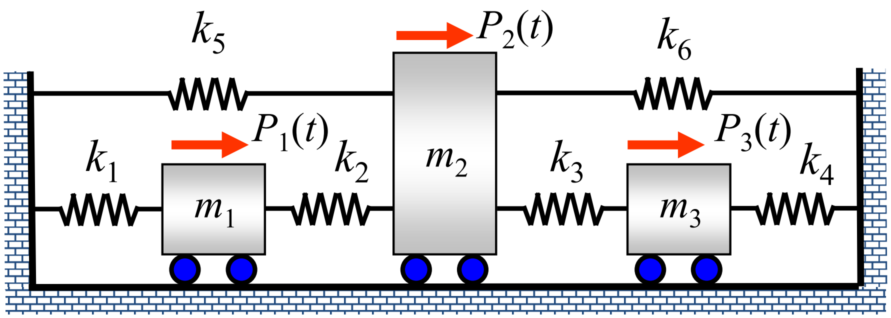
刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

质量矩阵 M 中的元素m_{ij}是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

m_{ij}、k_{ij}又分别称为**质量影响系数**和**刚度影响系数**。根据它们的物理意义可以直接写出系统质量矩阵M和刚度矩阵K，从而建立作用力方程，这种方法称为**影响系数方法**

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、 K 及运动微分方程



解：先只考虑静态

令 $X=[1\quad 0\quad 0]^T$ 只使m1产生单位位移，m2和m3不动

使m1产生单位位移所需施加的力：$k_{11}=k_1+k_2$

保持m2不动所需施加的力：$k_{21}=-k_2$

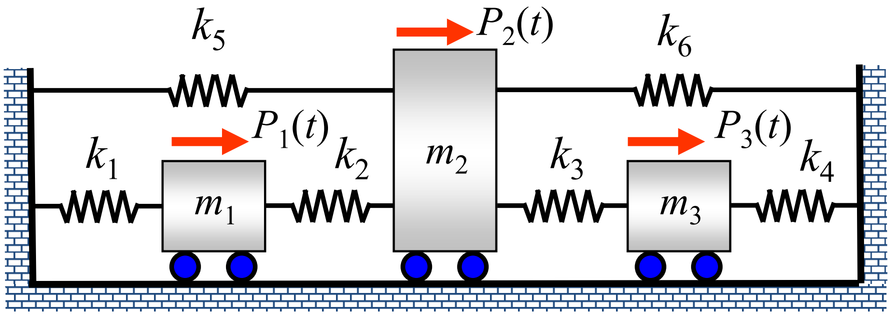
保持m3不动所需施加的力：$k_{31}=0$

在三个质量上施加力 $\begin{bmatrix} k_1+k_2 \\ -k_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 能够使得 $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

系统刚度矩阵的第一列

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、K 及运动微分方程



解：先只考虑静态

令 $X=[1 \quad 0 \quad 0]^T$ **只使m1产生单位位移，m2和m3不动**

使m1产生单位位移所需施加的力： $k_{11}=k_1+k_2$

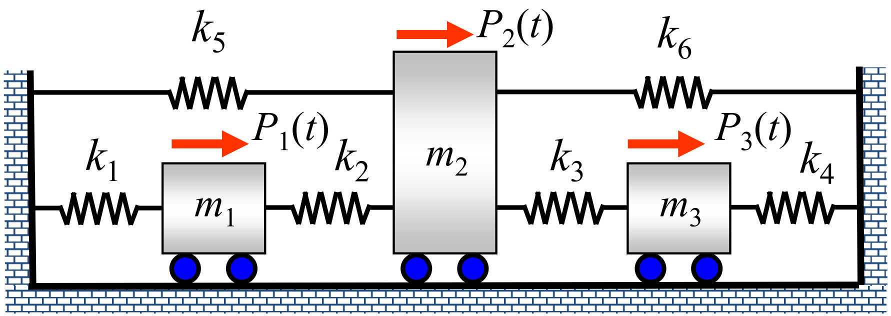
保持m2不动所需施加的力： $k_{21}=-k_2$

保持m3不动所需施加的力： $k_{31}=0$

刚度矩阵： $\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & ? & ? \\ -k_2 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、 K 及运动微分方程



解：先只考虑静态

令 $X=[0\quad 1\quad 0]^T$ **只使m2产生单位位移，m1和m3不动**

使m2产生单位位移所需施加的力： $k_{22}=k_2+k_3+k_5+k_6$

保持m1不动所需施加的力： $k_{12}=-k_2$

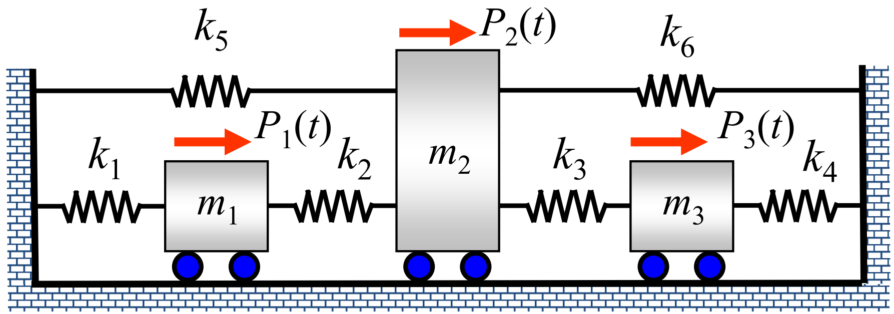
保持m3不动所需施加的力： $k_{32}=-k_3$

在三个质量上施加力 $\begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2+k_3+k_5+k_6 \\ -k_3 \end{bmatrix}$ **能够使得** $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

系统刚度矩阵的第二列

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、 K 及运动微分方程



解： 先只考虑静态

令 $X=[0 \quad 1 \quad 0]^T$ **只使m2产生单位位移，m1和m3不动**

使m2产生单位位移所需施加的力： $k_{22}=k_2+k_3+k_5+k_6$

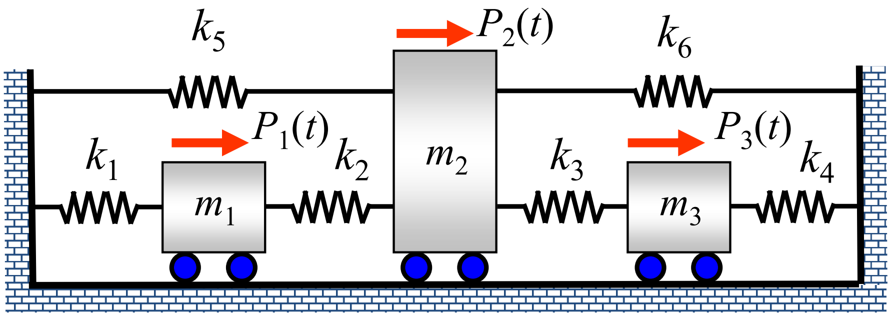
保持m1不动所需施加的力： $k_{12}=-k_2$

保持m3不动所需施加的力： $k_{32}=-k_3$

刚度矩阵： $\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & ? \\ -k_2 & k_2+k_3+k_5+k_6 & ? \\ 0 & -k_3 & ? \end{bmatrix}$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、K 及运动微分方程



解：先只考虑静态

令 $X=[0 \quad 0 \quad 1]^T$ **只使m3产生单位位移，m1和m2不动**

使m3产生单位位移所需施加的力： $k_{33}=k_3+k_4$

保持m2不动所需施加的力： $k_{23}=-k_3$

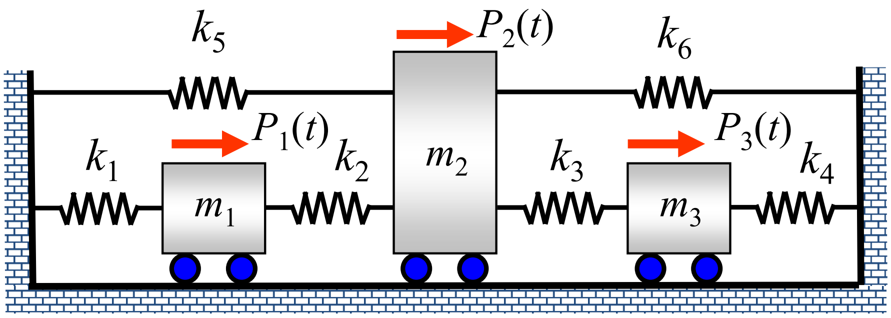
保持m1不动所需施加的力： $k_{13}=0$

在三个质量上施加力 $\begin{bmatrix} 0 \\ -k_3 \\ k_3+k_4 \end{bmatrix}$ **能够使得** $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

系统刚度矩阵的第三列

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：写出 M、 K 及运动微分方程



解：先只考虑静态

令 $X = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ **只使m3产生单位位移，m1和m2不动**

使m3产生单位位移所需施加的力： $k_{33} = k_3 + k_4$

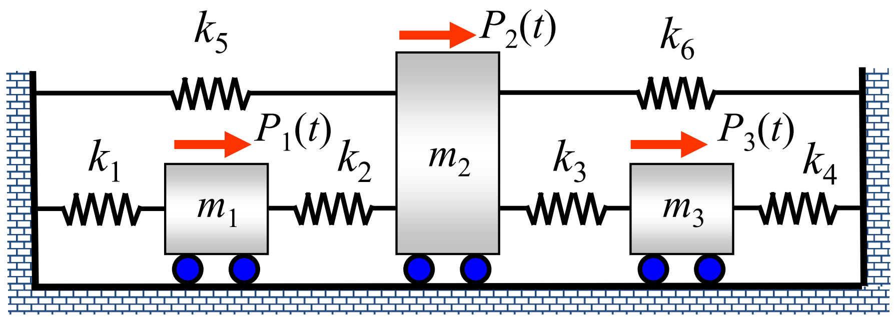
保持m2不动所需施加的力： $k_{23} = -k_3$

保持m1不动所需施加的力： $k_{13} = 0$

刚度矩阵：

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + k_5 + k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



例：写出 M、K 及运动微分方程

解：先只考虑静态

令 $X=[1 \quad 0 \quad 0]^T$ ⟹ $k_{11}=k_1+k_2 \qquad k_{21}=-k_2 \qquad k_{31}=0$

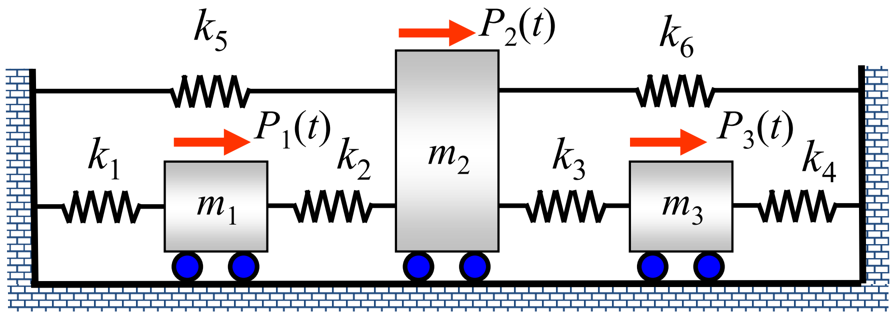
令 $X=[0 \quad 1 \quad 0]^T$ ⟹ $k_{12}=-k_2 \qquad k_{22}=k_2+k_3+k_5+k_6 \qquad k_{32}=-k_3$

令 $X=[0 \quad 0 \quad 1]^T$ ⟹ $k_{13}=0 \qquad k_{23}=-k_3 \qquad k_{33}=k_3+k_4$

刚度矩阵：

$$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_5+k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



只考虑动态

令 $\ddot{X} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$

只使m1产生单位加速度，m2和m3加速度为零

m1产生单位加速度的瞬时，m2 和 m3 尚没有反应

所需施加的力：

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \times 1 = m_1$$
$$= m_{11}$$

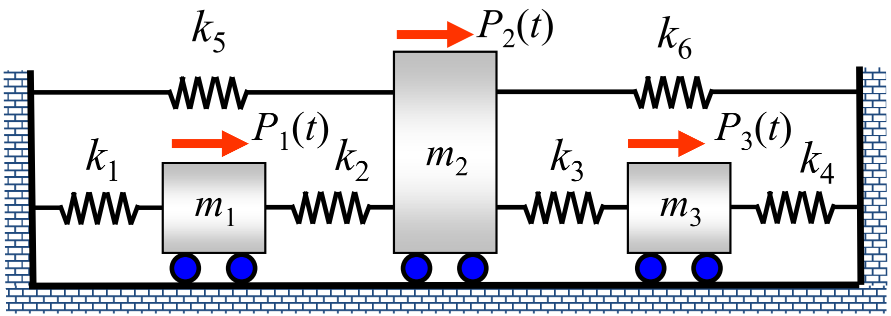
所需施加的力：

$$F_2 = m_2 a_2 = 0 \qquad F_3 = m_3 a_3 = 0$$
$$= m_{21} \qquad\qquad = m_{31}$$

在三个质量上施加力 $\begin{bmatrix} m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 能够使得 $\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

系统质量矩阵的第一列

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



只考虑动态

令 $\ddot{X} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$

只使m1产生单位加速度，m2和m3加速度为零

m1产生单位加速度的瞬时，m2 和 m3 尚没有反应

所需施加的力：

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \times 1 = m_1$$
$$= m_{11}$$

所需施加的力：

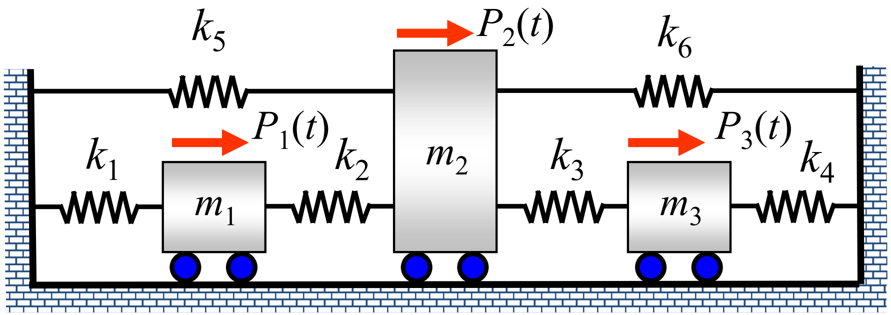
$$F_2 = m_2 a_2 = 0$$
$$= m_{21}$$

$$F_3 = m_3 a_3 = 0$$
$$= m_{31}$$

质量矩阵：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

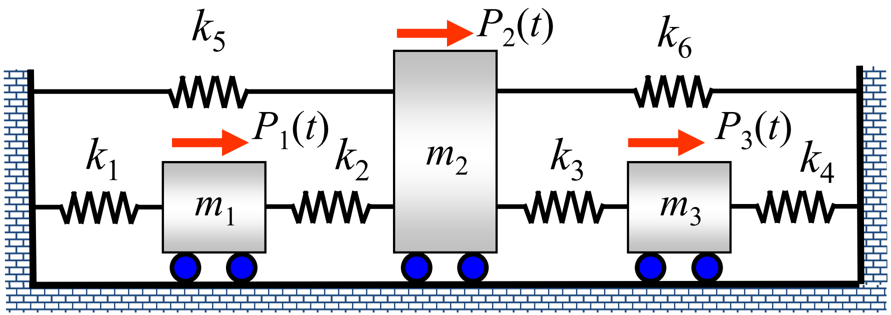


同理

令 $\ddot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & ? \\ 0 & m_2 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



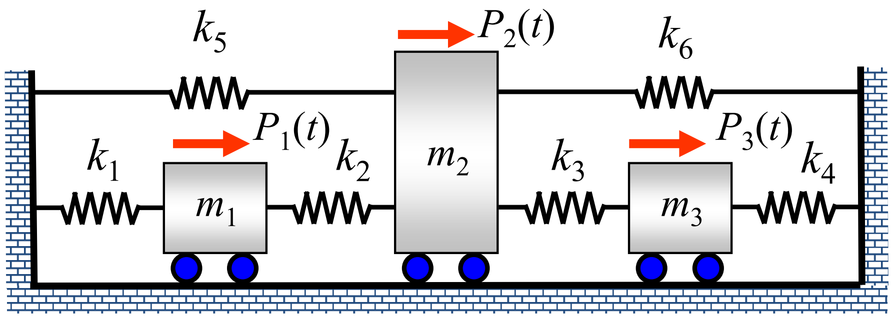
同理

令 $\ddot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

令 $\ddot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



令 $\ddot{X} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ 有： $m_{11} = m_1 \qquad m_{21} = 0 \qquad m_{31} = 0$

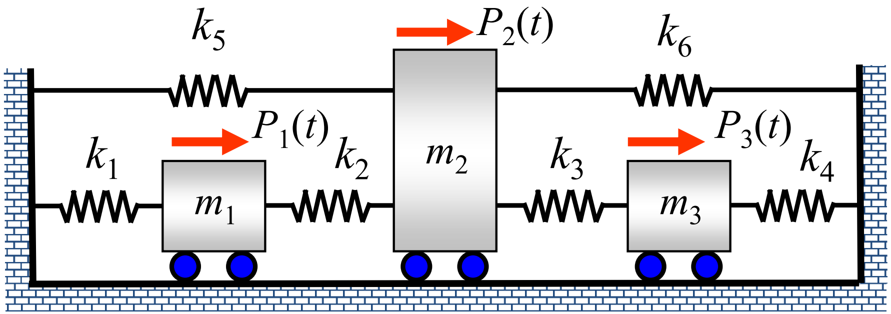
令 $\ddot{X} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ 有： $m_{12} = 0 \qquad m_{22} = m_2 \qquad m_{32} = 0$

令 $\ddot{X} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ 有： $m_{13} = 0 \qquad m_{23} = 0 \qquad m_{33} = m_3$

质量矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵



$$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_5+k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}$$

运动微分方程：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_5+k_6 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix}$$

外力列阵

矩阵形式： $M\ddot{X}+KX=P(t)$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

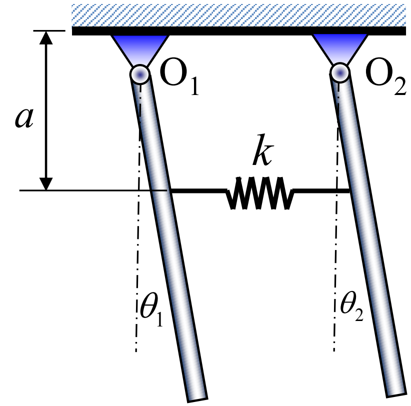
例： 双刚体杆

每杆质量 m

杆长度 l

水平弹簧刚度 k

弹簧距离固定端 a



求：

以微小转角 θ_1、θ_2 为坐标，写出微摆动的运动学方程

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

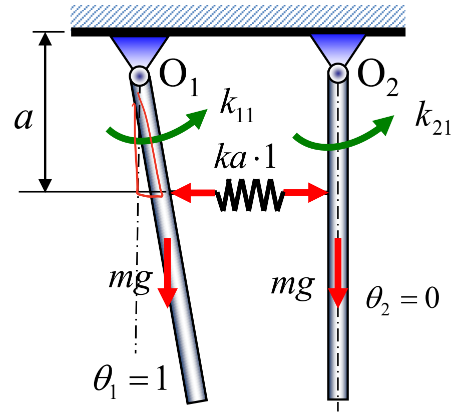
解:

令: $\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$

则需要在两杆上施加力矩 $k_{11} \quad k_{21}$

分别对两杆 O_1、O_2 **求矩:**

$$k_{11} = \frac{1}{2}mgl + ka^2 \qquad k_{21} = -ka^2$$

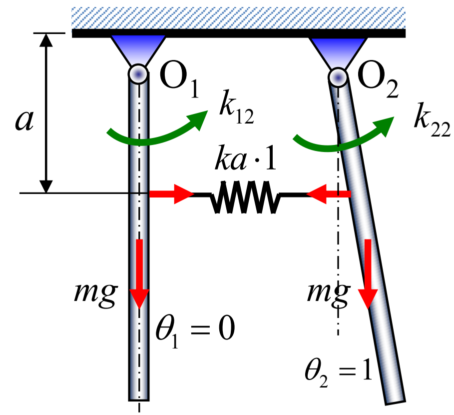


令: $\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 1$

则需要在两杆上施加力矩 $k_{12} \quad k_{22}$

分别对两杆 O_1、O_2 **求矩:**

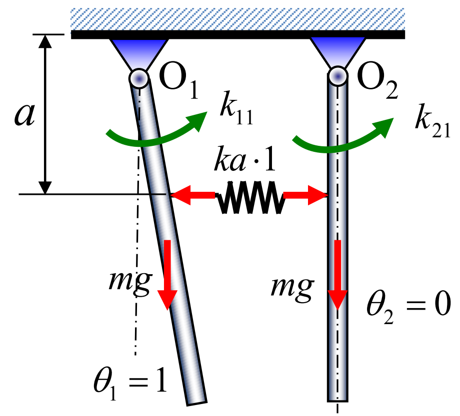
$$k_{12} = -ka^2 \qquad k_{22} = \frac{1}{2}mgl + ka^2$$



4.2 刚度矩阵和质量矩阵

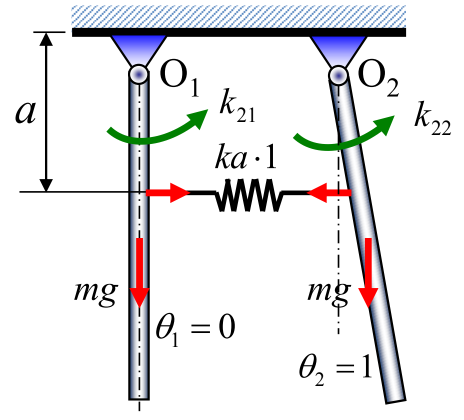
$$k_{11} = \frac{1}{2}mgl + ka^2 \qquad k_{21} = -ka^2$$

$$k_{12} = -ka^2 \qquad k_{22} = \frac{1}{2}mgl + ka^2$$



刚度矩阵：

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mgl + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & \frac{1}{2}mgl + ka^2 \end{bmatrix}$$

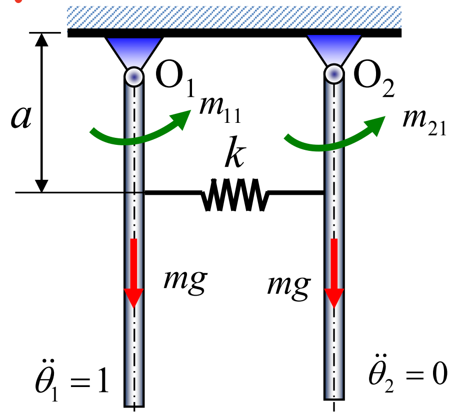


4.2 刚度矩阵和质量矩阵

回转半径：$\rho=\sqrt{\frac{I}{m}}$

$I=m\rho^2$

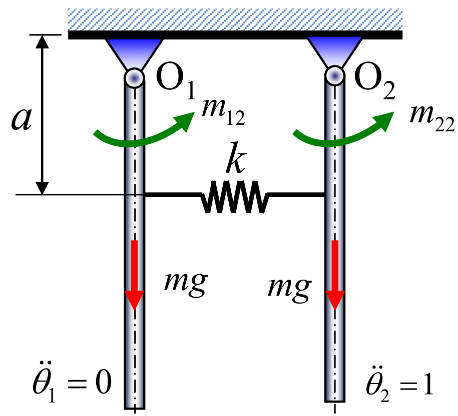
令： $\ddot{\theta}_1=1 \qquad \ddot{\theta}_2=0$



则需要在两杆上施加力矩 $m_{11} \quad m_{21}$

$$m_{11}=I_1\ddot{\theta}_1=\frac{1}{3}ml^2 \qquad m_{21}=0$$

令： $\ddot{\theta}_1=0 \qquad \ddot{\theta}_2=1$



则需要在两杆上施加力矩 $m_{12} \quad m_{22}$

$$m_{12}=0 \qquad m_{22}=I_2\ddot{\theta}_2=\frac{1}{3}ml^2$$

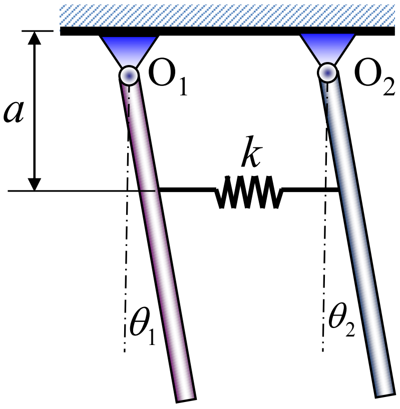
质量矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

$$K=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}mgl+ka^2 & -ka^2\\ -ka^2 & \frac{1}{2}mgl+ka^2\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}ml^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}ml^2\end{bmatrix}$$



运动学方程：

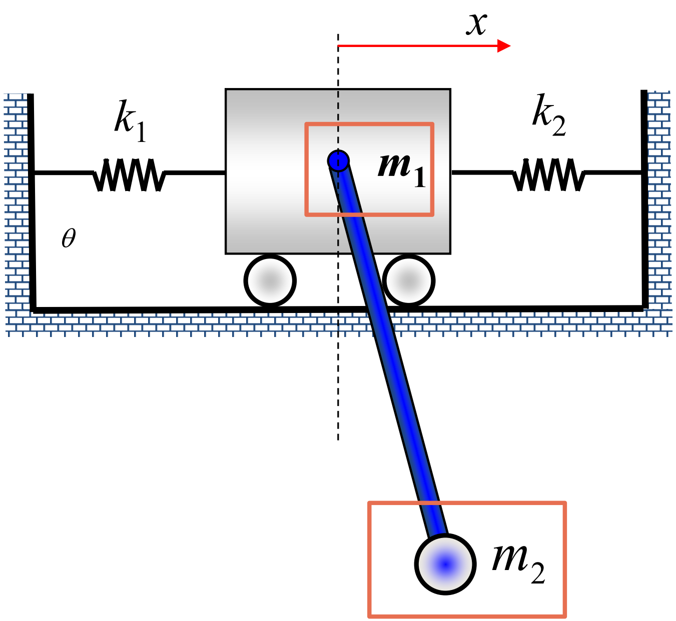
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}ml^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}ml^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}mgl+ka^2 & -ka^2\\ -ka^2 & \frac{1}{2}mgl+ka^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

例：两自由度系统

摆长 l，无质量，微摆动

求：运动微分方程



4.2 刚度矩阵和质量矩阵

解： **先求解刚度矩阵**

令： $x=1 \quad \theta=0$ **静态平衡**

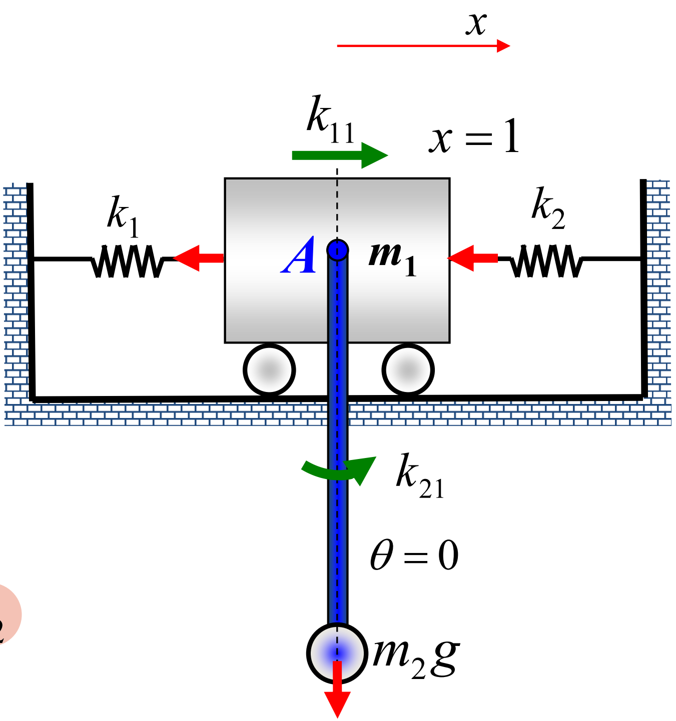
需要施加的力和矩 $k_{11} \quad k_{21}$

x**方向力平衡**

$$k_{11}=(k_1+k_2)\times 1=k_1+k_2$$

A**点力矩平衡**

$$k_{21}=0$$



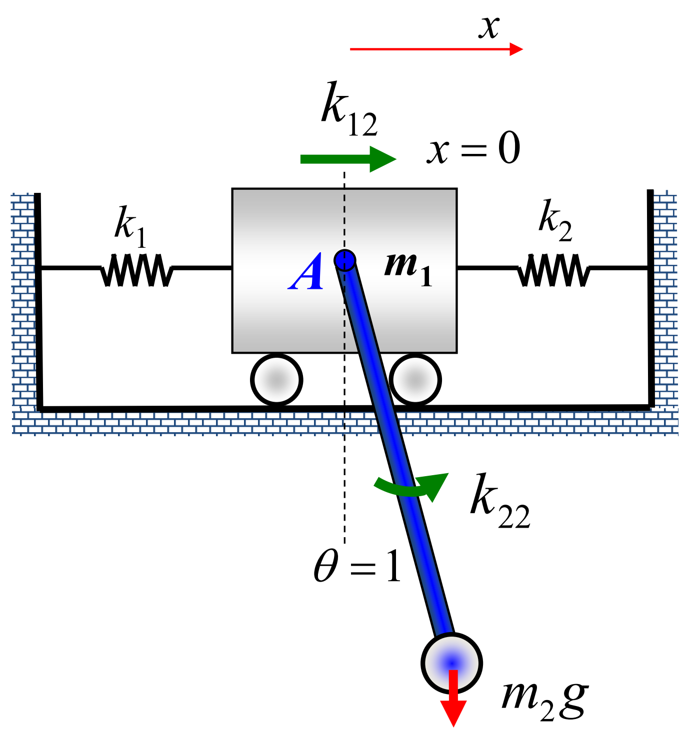
刚度矩阵第一列： $\begin{bmatrix} k_1+k_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

解：

令： $x=0 \qquad \theta=1$

需要施加的力和矩 $k_{12} \quad k_{22}$



x方向力平衡

$$k_{12}=(k_1+k_2)\times 0=0$$

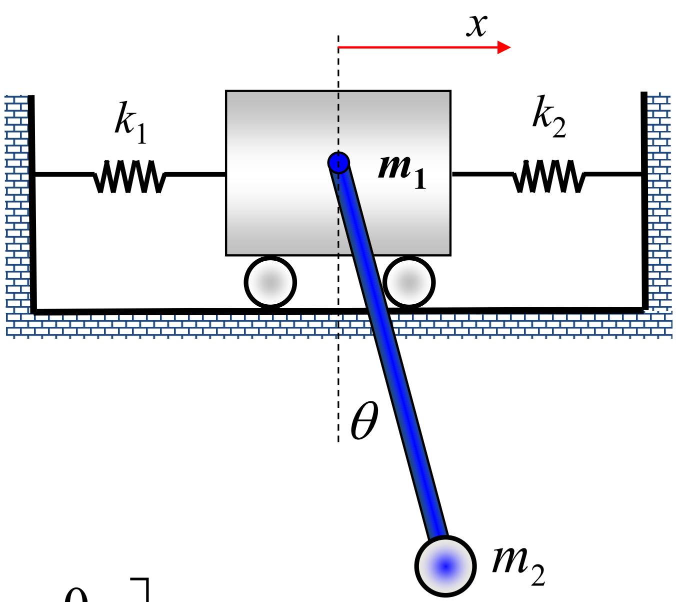
A点力矩平衡

$$k_{22}=m_2g\times l\sin\theta\approx m_2gl$$

刚度矩阵第二列： $\begin{bmatrix} 0 \\ m_2gl \end{bmatrix}$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

刚度矩阵第一列： $\begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ 0 \end{bmatrix}$



刚度矩阵第二列： $\begin{bmatrix} 0 \\ m_2 gl \end{bmatrix}$

系统刚度矩阵： $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & m_2 gl \end{bmatrix}$

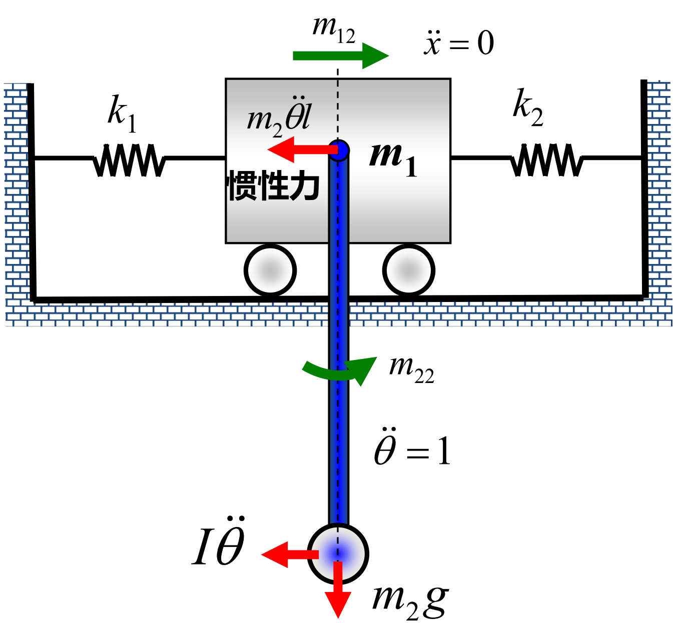
4.2 刚度矩阵和质量矩阵

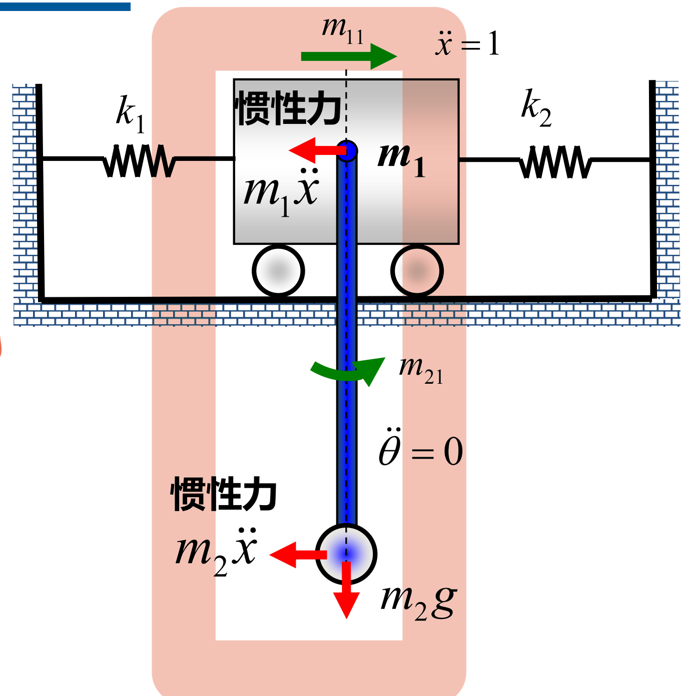
求解质量矩阵

令： $\ddot{x}=1 \quad \ddot{\theta}=0$ **瞬时动态**

$$m_{11}=(m_1+m_2)\times\ddot{x}=m_1+m_2$$ 力

$$m_{21}=(m_2\ddot{x})\times l=m_2 l$$ 力矩





令： $\ddot{x}=0 \quad \ddot{\theta}=1$

$$m_{12}=m_2\ddot{\theta}l=m_2 l$$ 力

$$m_{22}=I\ddot{\theta}=m_2 l^2\times\ddot{\theta}=m_2 l^2$$ 力矩

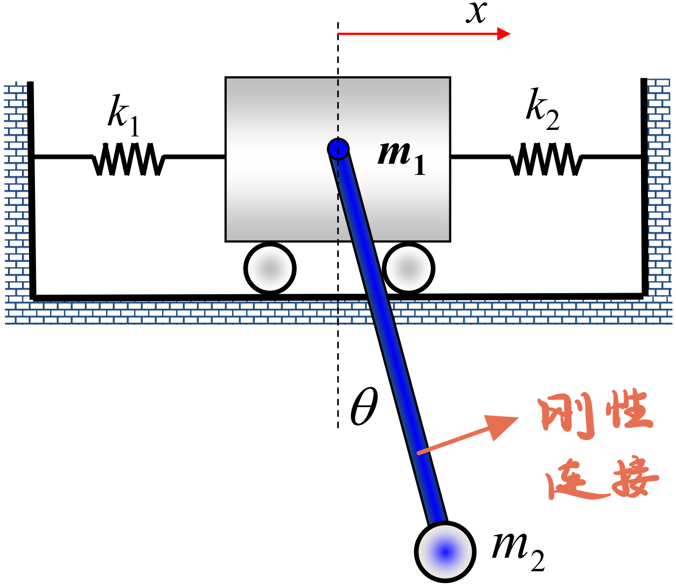
4.2 刚度矩阵和质量矩阵

$$m_{11} = m_1 + m_2 \qquad m_{12} = m_2 l$$

$$m_{21} = m_2 l \qquad m_{22} = m_2 l^2$$

质量矩阵： $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix}$

刚度矩阵： $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix}$



运动微分方程：

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2 刚度矩阵和质量矩阵

小结：

- 多自由度系统作用力方程： $M\ddot{X}+KX=P(t)$

力的量纲

- 刚度矩阵：　静态

刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

- 质量矩阵：　动态

质量矩阵 M 中的元素m_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

建立动力学方程的影响系数法

4.3 耦合与坐标变化

矩阵中非零的非对角元元素称为**耦合项**

质量矩阵中出现耦合项称为**惯性耦合**

刚性联接

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & \boxed{m_{12}} \\ \boxed{m_{21}} & m_{22} \end{bmatrix}$$

刚度矩阵或柔度矩阵中出现耦合项称为**弹性耦合**

弹性联接

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \boxed{k_{12}} \\ \boxed{k_{21}} & k_{22} \end{bmatrix}$$

以两自由度系统为例

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & \boxed{m_{12}} \\ \boxed{m_{21}} & m_{22} \end{bmatrix}$$

存在惯性耦合

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}$$

不存在惯性耦合

4.3 耦合与坐标变化

耦合 $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$　　**非耦合** $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}$

如果系统仅在第一个坐标上产生加速度 $\ddot{x}_1 \neq 0,\ \ddot{x}_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}\ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}\ddot{x}_1 \\ m_{21}\ddot{x}_1 \end{bmatrix}$$

不出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度只在该坐标上引起惯性力

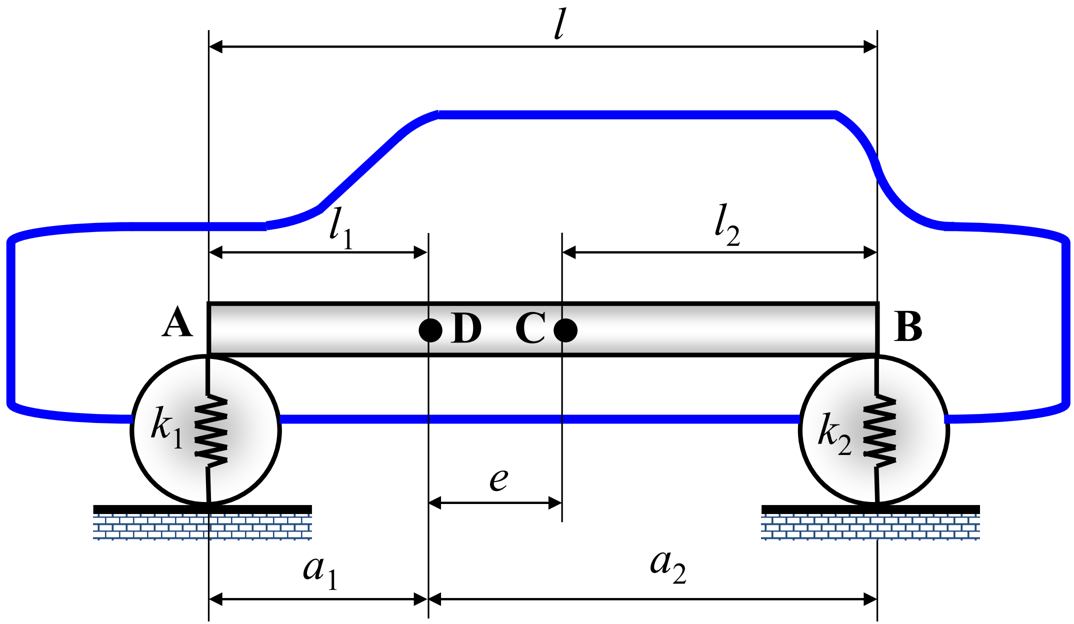
出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度还会在别的坐标上引起惯性力

同理，不出现弹性耦合时，一个坐标上产生的位移只在该坐标上引起弹性恢复力；而出现弹性耦合时，一个坐标上产生的位移还会在别的坐标上引起弹性恢复力

耦合的表现形式取决于坐标的选择

4.3 耦合与坐标变化

例： 研究汽车上下振动和俯仰振动的力学模型



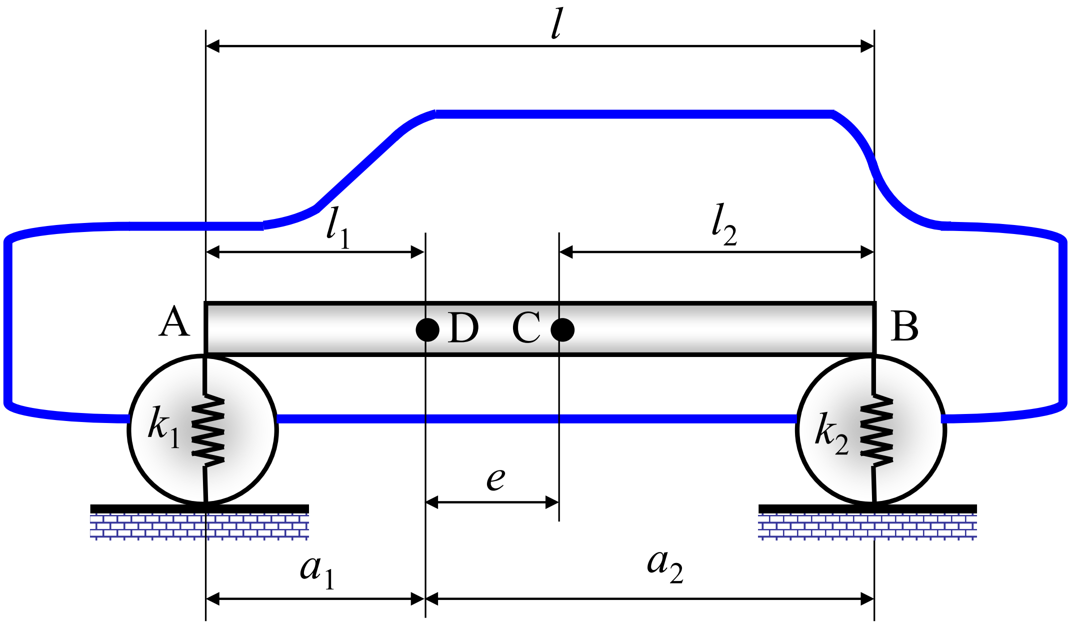
表示车体的刚性杆AB的质量为m，杆绕质心C的转动惯量为I_c

悬挂弹簧和前后轮胎的弹性用刚度为 k_1 和 k_2 的两个弹簧来表示

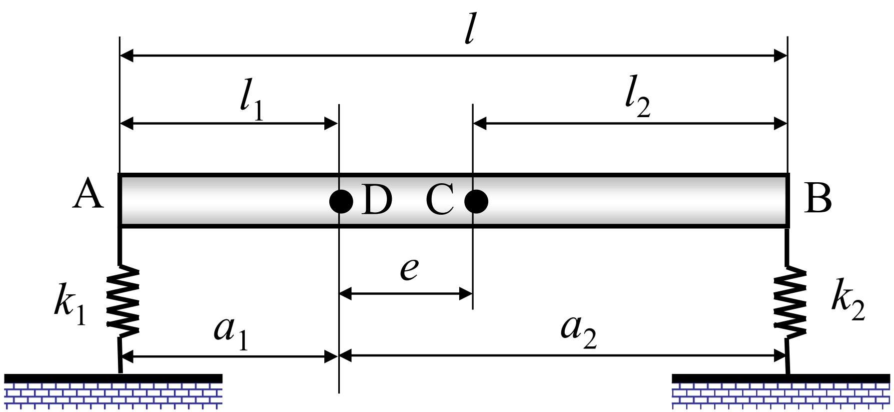
选取D点的垂直位移 x_D 和绕D点的角位移 θ_D 为坐标

写出车体微振动的微分方程

4.3 耦合与坐标变化

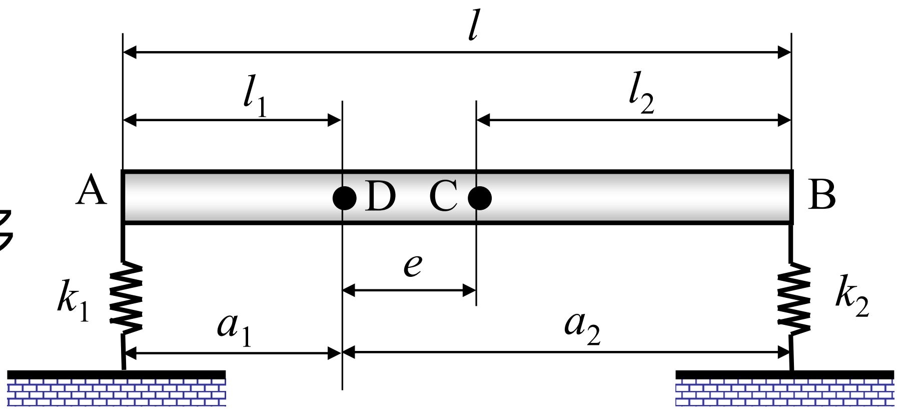


简化形式



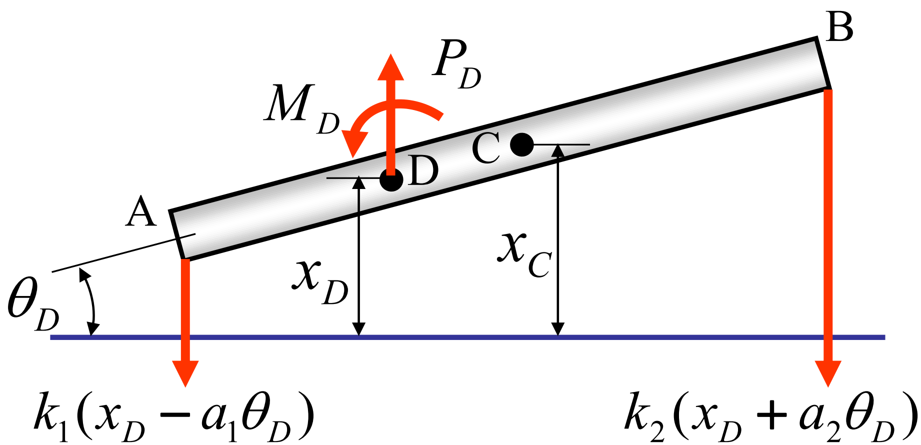
4.3 耦合与坐标变化

车体所受外力向D点简化为合力 P_D 和合力矩 M_D



微振动，杆质心的垂直位移和杆绕质心的角位移：

$$x_C = x_D + e\theta_D$$
$$\theta_C = \theta_D$$



4.3 耦合与坐标变化

振动力学方法求解

首先求刚度矩阵

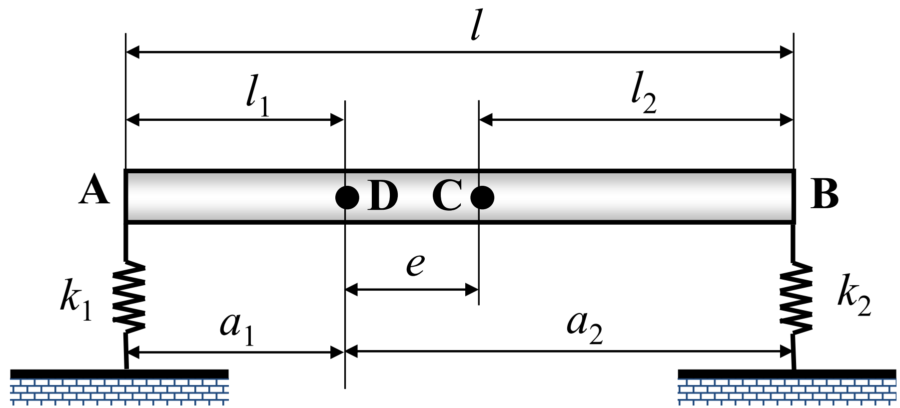
令： $x_D = 1 \qquad \theta_D = 0$

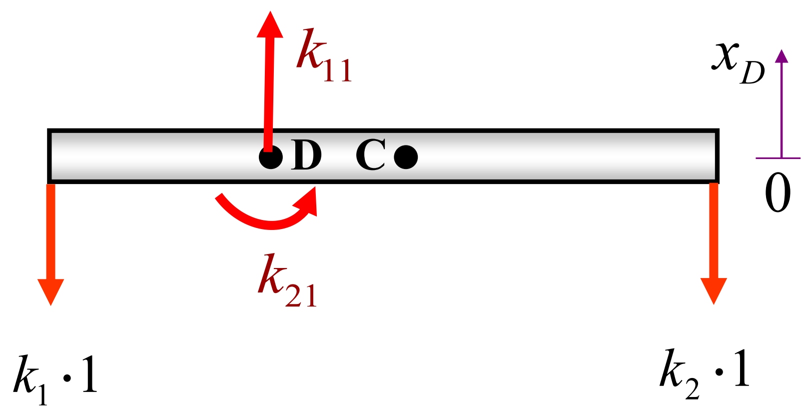
力平衡：

$$k_{11} = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1$$
$$= k_1 + k_2$$

对D点取矩：

$$k_{21} = k_2 \cdot 1 \cdot a_2 - k_1 \cdot 1 \cdot a_1$$
$$= k_2 a_2 - k_1 a_1$$





4.3 耦合与坐标变化

$$k_{11} = k_1 + k_2$$

$$k_{21} = k_2 a_2 - k_1 a_1$$

令： $x_D = 0 \qquad \theta_D = 1$

力平衡：

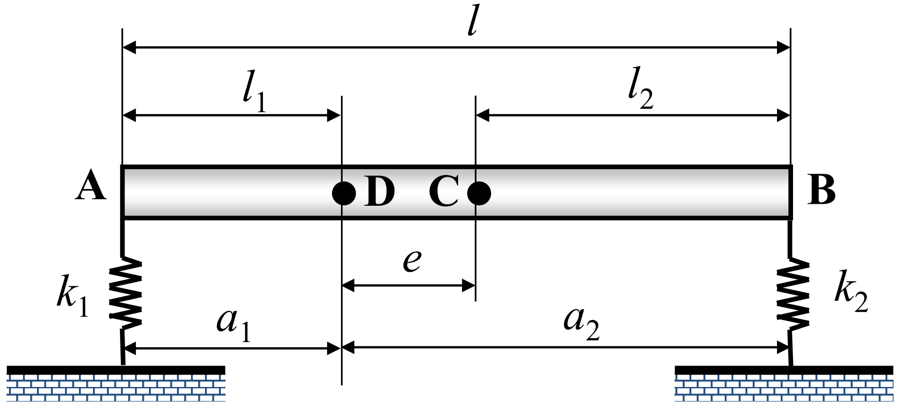
$$k_{12} = k_2 a_2 - k_2 a_1$$

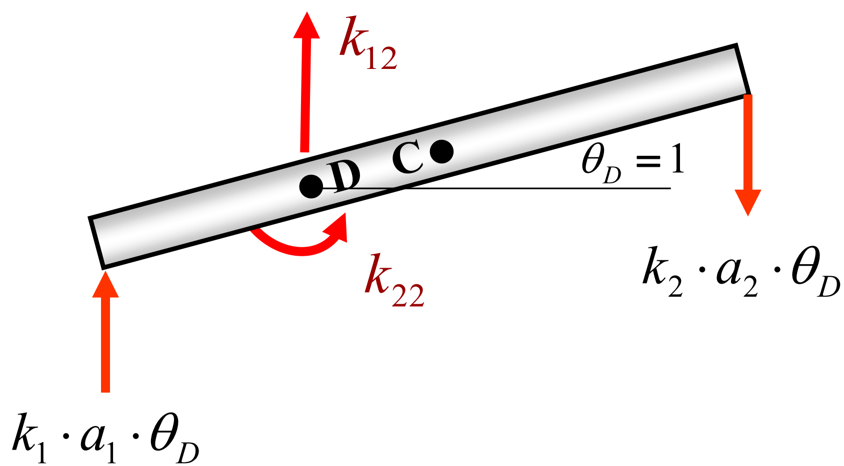
对D点取矩：

$$k_{22} = k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2$$

刚度矩阵：

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a_2 - k_1 a_1 \\ k_2 a_2 - k_1 a_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix}$$

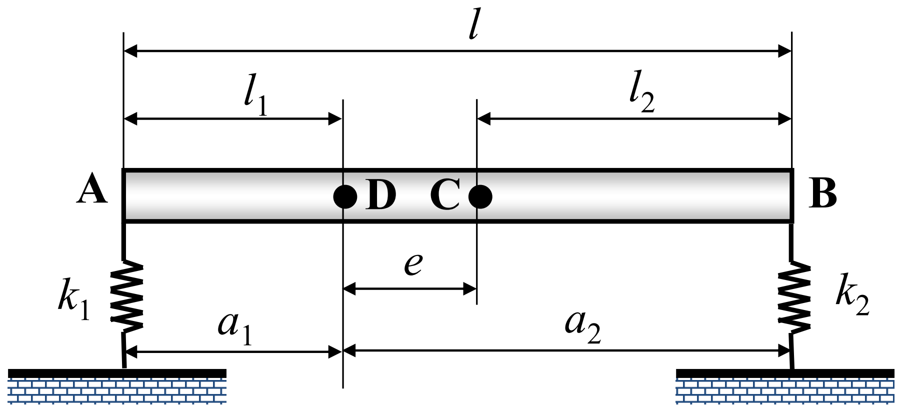




4.3 耦合与坐标变化

求质量矩阵

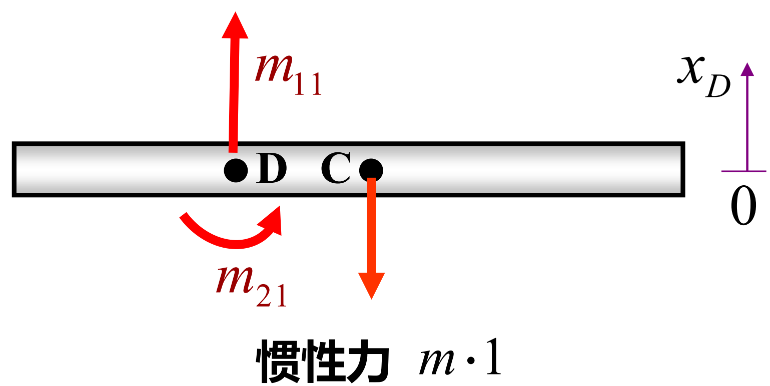
令： $\ddot{x}_D = 1 \qquad \ddot{\theta}_D = 0$



质心C所受的惯性力： $m \cdot 1$

力平衡：

$$m_{11} = m \cdot 1 = m$$



力矩平衡：

$$m_{21} = m \cdot 1 \cdot e = me$$

4.3 耦合与坐标变化

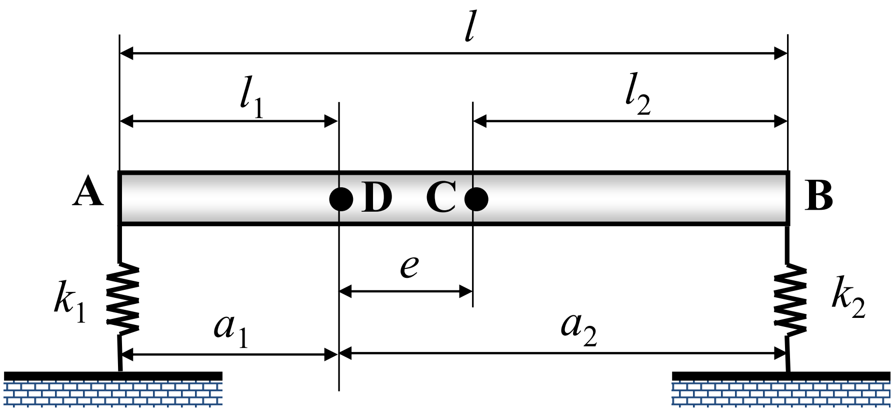
$m_{11} = m \qquad m_{21} = me$

令：$\ddot{x}_D = 0 \qquad \ddot{\theta}_D = 1$

质心C所受的惯性力矩：$I_C \cdot 1$

质心C所受的惯性力：

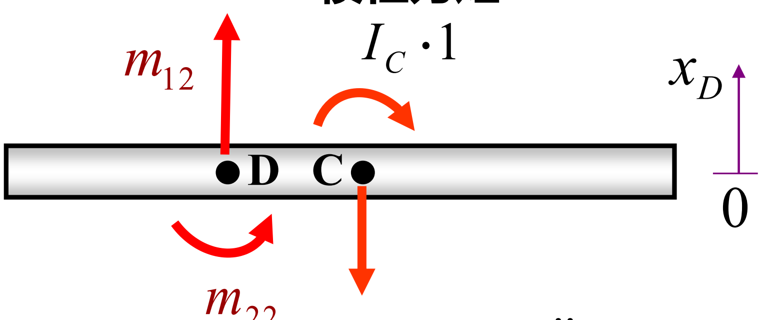
$$m \cdot \ddot{\theta}_D e = me$$



力平衡：$m_{12} = me$

对D点取矩：$m_{22} = I_C \cdot 1 + me \cdot e$

$$= I_C + me^2$$



质量矩阵：

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}$$

4.3 耦合与坐标变化

质量矩阵

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a_2 - k_1 a_1 \\ k_2 a_2 - k_1 a_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix}$$

运动微分方程

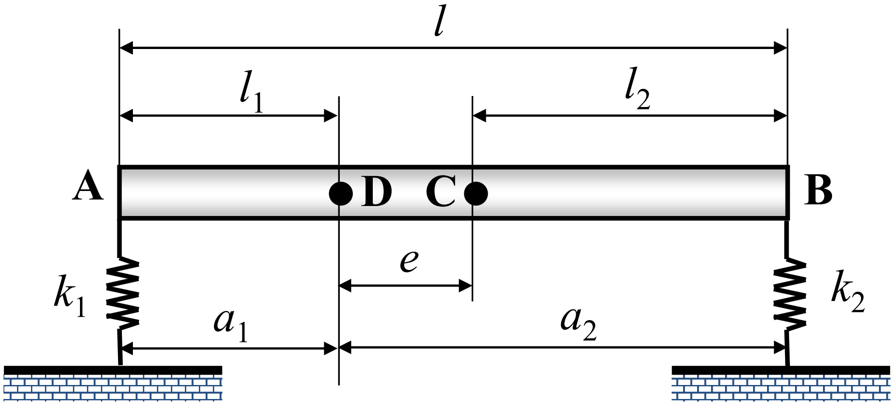
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}}_{\text{存在惯性耦合}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a_2 - k_1 a_1 \\ k_2 a_2 - k_1 a_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{存在弹性耦合}}\begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$

4.3 耦合与坐标变化

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & \cancel{k_2 a_2 - k_1 a_1} \\ \cancel{k_2 a_2 - k_1 a_1} & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$

如果D点选在这样一个特殊位置，使得：

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

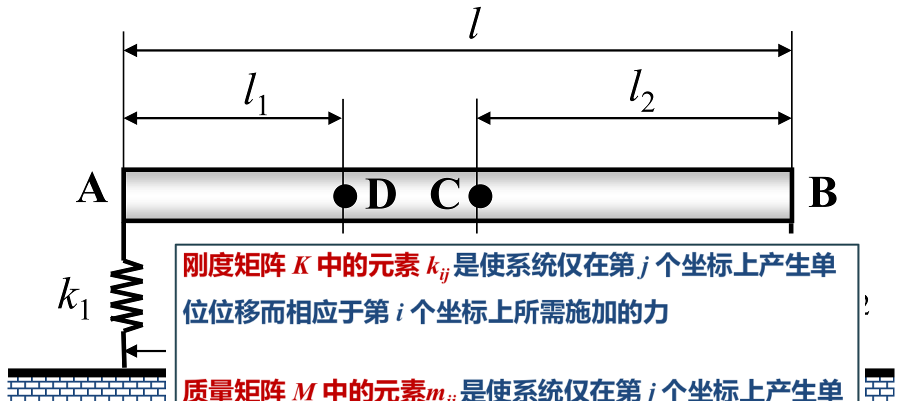


$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$

只存在惯性耦合，而不出现弹性耦合

4.3 耦合与坐标变化

$$\begin{bmatrix} m & \cancel{me} \\ \cancel{me} & I_C+\cancel{me}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2a_2-k_1a_1 \\ k_2a_2-k_1a_1 & k_1a_1^2+k_2a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$



如果D点选在质心C：

$$e=0$$

刚度矩阵 K 中的元素 k_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位位移而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

质量矩阵 M 中的元素 m_{ij} 是使系统仅在第 j 个坐标上产生单位加速度而相应于第 i 个坐标上所需施加的力

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2 \\ k_2a_2-k_1a_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

m_{ij}、k_{ij} 又分别称为质量影响系数和刚度影响系数。根据它们的物理意义可以直接写出系统质量矩阵 M 和刚度矩阵 K，从而建立作用力方程，这种方法称为影响系数方法

只存在弹性耦合，而不出现惯性耦合

P_C、M_C ：**作用在质心上的外力合力和合力矩**

4.3 耦合与坐标变化

问：能否找到这样一种坐标使得系统的运动微分方程既不出现惯性耦合，也不出现弹性耦合？

即：

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

若能够，则有：

$$m_{11}\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 = P_1 \qquad m_{22}\ddot{x}_2 + k_{22}x_2 = P_2$$

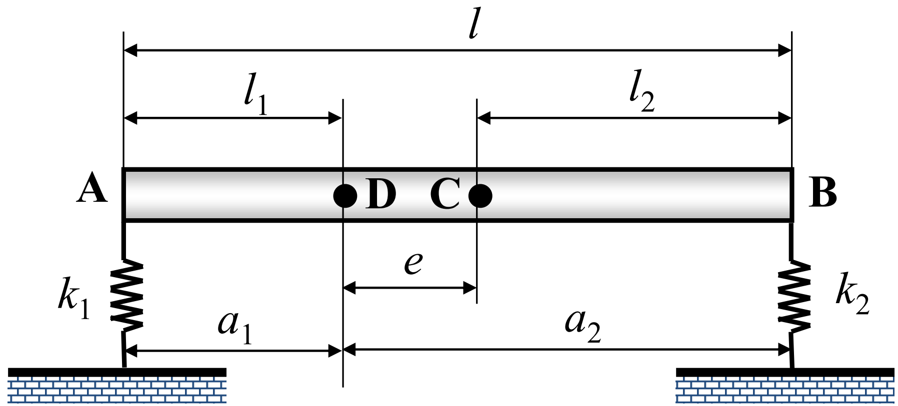
方程解耦，变成了两个单自由度问题

使系统运动微分方程的全部耦合项全部解耦的坐标称为主坐标

4.3 耦合与坐标变化

选取D点的垂直位移及角位移作为坐标

选取质心C点的垂直位移及角位移作为坐标



$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2a_2 - k_1a_1 \\ k_2a_2 - k_1a_1 & k_1a_1^2 + k_2a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2a_2 - k_1a_1 \\ k_2a_2 - k_1a_1 & k_1a_1^2 + k_2a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_C \\ M_C \end{bmatrix}$$

讨论：能对同一个系统选取两个不同的坐标，它们所描述的运动微分方程之间有着怎样的联系？

4.3 耦合与坐标变化

$$\underline{\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{\theta}_D \end{bmatrix} + \underline{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2a_2 - k_1a_1 \\ k_2a_2 - k_1a_1 & k_1a_1^2 + k_2a_2^2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{\theta}_C \end{bmatrix} + \underline{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2a_2 - k_1a_1 \\ k_2a_2 - k_1a_1 & k_1a_1^2 + k_2a_2^2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_C \\ \theta_C \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} P_C \\ M_C \end{bmatrix}}$$

令： $\boldsymbol{X}_D = \begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}_D = \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\boldsymbol{M}_D}\ddot{\boldsymbol{X}}_D + \underline{\boldsymbol{K}_D}\boldsymbol{X}_D = \underline{\boldsymbol{F}_D}$

令： $\boldsymbol{X}_C = \begin{bmatrix} x_C \\ \theta_C \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}_C = \begin{bmatrix} P_C \\ M_C \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\boldsymbol{M}_C}\ddot{\boldsymbol{X}}_C + \underline{\boldsymbol{K}_C}\boldsymbol{X}_C = \underline{\boldsymbol{F}_C}$

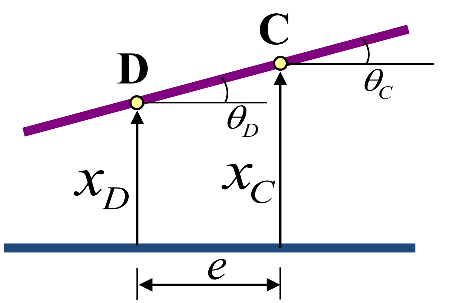
4.3 耦合与坐标变化

$$M_D \ddot{X}_D + K_D X_D = F_D \qquad X_D = [x_D,\ \theta_D]^T \qquad F_D = [P_D,\ M_D]^T$$

$$M_C \ddot{X}_C + K_C X_C = F_C \qquad X_C = [x_C,\ \theta_C]^T \qquad F_C = [P_C,\ M_C]^T$$

D点和C点的坐标之间的关系：

$$x_C = x_D + e\theta_D \qquad \theta_C = \theta_D$$



写成矩阵形式： $X_D = TX_C \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_D \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

坐标变换矩阵

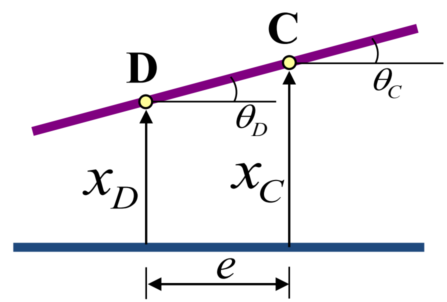
4.3 耦合与坐标变化

$$M_D\ddot{X}_D + K_D X_D = F_D \qquad X_D = [x_D,\ \theta_D]^T \qquad F_D = [P_D,\ M_D]^T$$

$$M_C\ddot{X}_C + K_C X_C = F_C \qquad X_C = [x_C,\ \theta_C]^T \qquad F_C = [P_C,\ M_C]^T$$

D点和C点的坐标之间的关系：

$$x_C = x_D + e\theta_D \qquad \theta_C = \theta_D$$

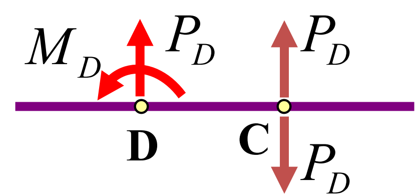


写成矩阵形式： $X_D = TX_C \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

坐标变换矩阵

F_D和F_C的关系

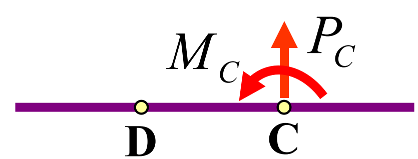
在C点加一对大小相等、方向相反的力 P_D



得： $P_C = P_D \qquad M_C = -eP_D + M_D$

写成矩阵形式： $F_C = \underline{T}^T F_D$

$$\begin{bmatrix} P_C \\ M_C \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} P_D \\ M_D \end{bmatrix}$$

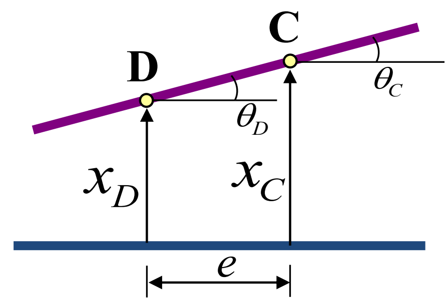


4.3 耦合与坐标变化

$$M_D\ddot{X}_D + K_D X_D = F_D \qquad X_D = [x_D,\ \theta_D]^T \qquad F_D = [P_D,\ M_D]^T$$

$$M_C\ddot{X}_C + K_C X_C = F_C \qquad X_C = [x_C,\ \theta_C]^T \qquad F_C = [P_C,\ M_C]^T$$

D点和C点的坐标之间的关系：

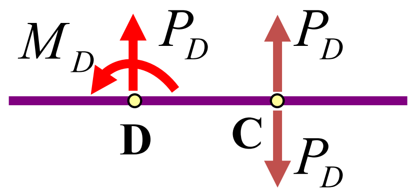


$$x_C = x_D + e\theta_D \qquad \theta_C = \theta_D$$

写成矩阵形式： $X_D = TX_C$ $\qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

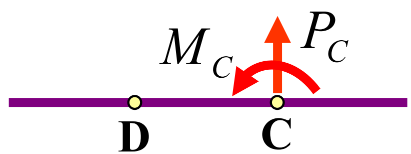
坐标变换矩阵

F_D和F_C的关系



在C点加一对大小相等、方向相反的力 P_D

得： $P_C = P_D \qquad M_C = -eP_D + M_D$



写成矩阵形式： $F_C = T^T F_D$

T **非奇异，因此：** $F_D = (T^T)^{-1} F_C$

4.3 耦合与坐标变化

$$\underline{M_D\ddot{X}_D + K_D X_D = F_D} \qquad X_D = [x_D,\ \theta_D]^T \qquad F_D = [P_D,\ M_D]^T$$

$$\underline{M_C}\ddot{X}_C + \underline{K_C}X_C = \underline{F_C} \qquad X_C = [x_C,\ \theta_C]^T \qquad F_C = [P_C,\ M_C]^T$$

$$\underline{X_D = TX_C} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{F_C = T^T F_D} \qquad F_D = (T^T)^{-1} F_C$$

代入，并左乘 T^T ：

$$\underline{T^T M_D T}\ddot{X}_C + \underline{T^T K_D T}X_C = \underline{T^T F_D} = \underline{F_C}$$

$$\boxed{T^T M_D T = M_C} \qquad T^T K_D T X_C = K_C$$

验证：
$$M_D = \begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix} \qquad M_C = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_C + me^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix}$$

4.3 耦合与坐标变化

结论：

假设对同一个系统所选择的两种不同的坐标X和Y有如下的变换关系：

$$X = TY$$

其中T是非奇异矩阵，如果在坐标X下系统的运动微分方程为：

$$M\ddot{X} + KX = P$$

那么在坐标Y下的运动微分方程为：

$$T^T MT\ddot{Y} + T^T KTY = T^T P$$

如果恰巧Y是主坐标： $T^T MT$ $T^T KT$ 对角阵