第十三章

能量方法（1）

第十三章 能量方法

§ 能量法

§ 弹性变形势能及功能原理

1.弹性变形能 (应变能) V_ε

—构件由于发生弹性变形而储存的能量(如同弹簧,任意弹性体都可以视为某种广义弹簧), 表示为 V_ε 。

单位：1J=1N·m

2.变形体的功能原理

—弹性范围内，构件受静载外力产生变形的过程中，能量守恒，即：外力功=应变能

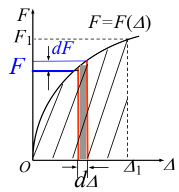
略去动能及能量损耗 ⇒ $W=V_\varepsilon$ (7.1)

注意 静载的定义: 外力从0缓慢增加到终值F_1 外力作用点的位移从0增加到Δ_1

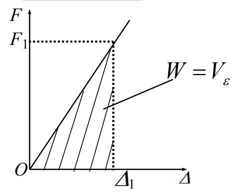
外力功 $W=\int_0^{\Delta_1}Fd\Delta$ (7.2)

对线弹性小变形的结构: $W=\frac{1}{2}F_1\Delta_1$ (7.3)

(力与位移的关系为线性)

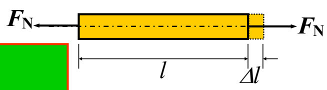


任意受静载构件



线弹性小变形结构

1.轴向拉压的应变能



$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}F_N\cdot\Delta l=\frac{F_N^2 l}{2EA}$$

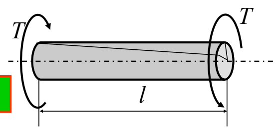
轴力沿x变化: $V_\varepsilon=\int_l\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}$ (7.5)

对桁架结构: $V_\varepsilon=\sum_i\frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_iA_i}$

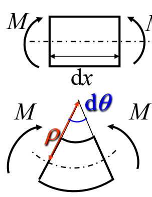
2.扭转应变能

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}T\varphi=\frac{T^2 l}{2GI_P}$$

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{T^2(x)}{2GI_P}dx$$ (7.6)



3.弯曲应变能 (一般可略去剪力引起的剪切应变能)



$\because \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$

$d\theta=\frac{dx}{\rho}$

切取梁中一小段:

$$\therefore dV_\varepsilon=\frac{Md\theta}{2}=\frac{M}{2}\cdot\frac{dx}{\rho}=\frac{M^2dx}{2EI}$$

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{M^2(x)}{2EI}dx$$ (7.7)

各种基本变形的应变能统一表达式:

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{(\text{湖晋亏}^2}{2\text{甲揿亏}}dx$$ (7.8)

	拉压	扭转	弯曲
内力	F_N	T	M
刚度	EA	GI_P	EI

4.组合变形应变能

组合变形分解为各基本变形后（因为各基本变形是互不耦合的），分别计算并求和：

$$V_\varepsilon=\sum_i \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_iA_i}+\int_l \frac{T^2(x)}{2GI_P}dx+\int_l \frac{M^2(x)}{2EI}dx \qquad (7.9)$$

注意 一般，应变能与内力（或载荷）不是线性关系，故多个载荷作用时，求应变能不可随意用叠加法。

45

注意：外力功和应变能的计算一般不满足叠加原理

即一般情形下F_1和F_2分别单独作用引起的应变能数值之和 $V_{\varepsilon1}+V_{\varepsilon2}$不等于两者共同作用引起的应变能 V_ε

原因：因为内力(轴力，扭矩，弯矩)满足叠加原理，即

$F_N=F_{N1}+F_{N2} \qquad T=T_1+T_2 \qquad M=M_1+M_2$

但应变能 $V_\varepsilon=\int_l$ (湖晋号 / 兀甲揿号) dx

特例：当F_1和F_2产生的变形互不耦合时(如F_1仅产生拉压，F_2仅产生弯曲),它们分别引起的应变能才可以用叠加原理

故 $M^2=(M_1+M_2)^2\neq M_1^2+M_2^2$

即 $V_\varepsilon\neq V_{\varepsilon1}+V_{\varepsilon2}$

46

材料力学中的能量方法

基本概念

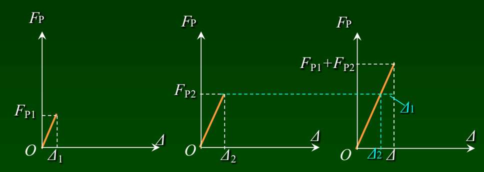
叠加原理的应用限制

47

材料力学中的能量方法

基本概念

线弹性，位移可以叠加



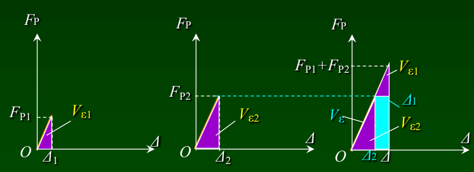
$\Delta=\Delta_1+\Delta_2$

48

材料力学中的能量方法

基本概念

线弹性,位移可以叠加,但应变能不能叠加



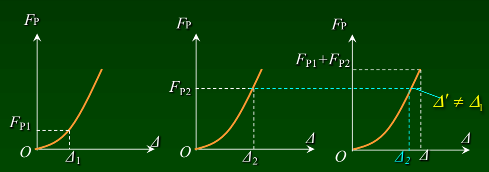
$V_\varepsilon\neq V_{\varepsilon1}+V_{\varepsilon2}$

49

材料力学中的能量方法

基本概念

非线性弹性，位移也不可以叠加

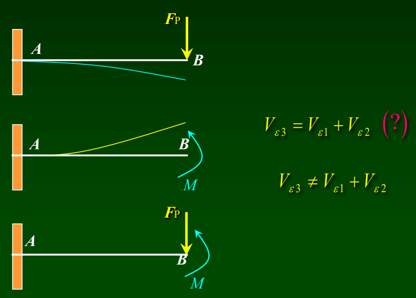


$\Delta\neq\Delta_1+\Delta_2$

50

材料力学中的能量方法

❑ *基本概念*



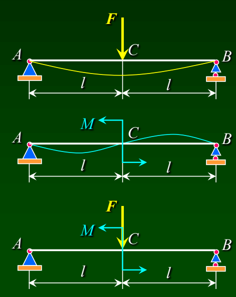
$V_{\varepsilon 3}=V_{\varepsilon 1}+V_{\varepsilon 2}$ (?)

$V_{\varepsilon 3}\neq V_{\varepsilon 1}+V_{\varepsilon 2}$

51

材料力学中的能量方法

❑ *基本概念*



$V_{\varepsilon 3}\neq V_{\varepsilon 1}+V_{\varepsilon 2}$ (?)

$V_{\varepsilon 3}=V_{\varepsilon 1}+V_{\varepsilon 2}$

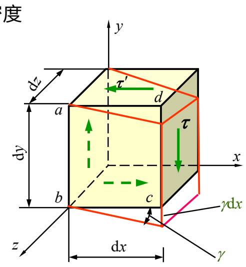
52

§13.2 杆件应变能的计算

5、纯剪切应力状态下的应变能密度

假设单元体左侧固定，因此变形后右侧将向下移动 γdx

因为位移很小，所以在变形过程中，上、下两面上的外力将不作功，只有右侧面的外力（$\tau dydz$）对相应的位移γdx作功。



53

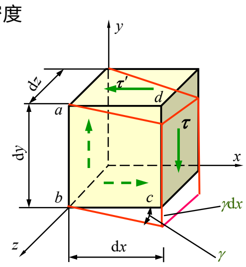
§13.2 杆件应变能的计算

5、纯剪切应力状态下的应变能密度

当材料在线弹性范围内内工作时，上述力与位移成正比，因此单元体上外力所作的功为

$$dW=\frac{1}{2}(\tau dydz)(\gamma dx)$$

$$=\frac{1}{2}\tau\gamma(dxdydz)$$



54

§13.2 杆件应变能的计算

5、纯剪切应力状态下的应变能密度

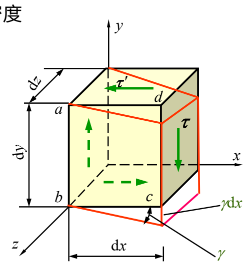
应变能密度为

$$v=\frac{dV_\varepsilon}{dV}=\frac{dW}{dV}$$

$$=\frac{dW}{dxdydz}=\frac{1}{2}\tau\gamma$$

将 $\tau=G\gamma$ 代入上式得

$$v=\frac{1}{2}G\gamma^2=\frac{\tau^2}{2G}$$



55

§13.2 杆件应变能的计算

5、纯剪切应力状态下的应变能密度

例：等直圆杆扭转时的应变能

$$v=\frac{1}{2}G\gamma^2=\frac{\tau^2}{2G}$$

$$V_\varepsilon=\int_V v\,dV=\int_l\int_A v\,dAdx$$

$$=\int_l\int_A\frac{(\frac{T}{I_p}\rho)^2}{2G}dAdx=\frac{l}{2G}(\frac{T}{I_p})^2\int_A\rho^2 dA$$

$$=\frac{T^2 l}{2GI_p}$$

56

§13.2 杆件应变能的计算

5、纯剪切应力状态下的应变能密度

例：等直圆杆扭转时的应变能

$$V_\varepsilon=\int_V v\,dV=\int_l\int_A v\,dA\,dx\ =\frac{T^2 l}{2GI_p}$$

将 $\varphi=\dfrac{Tl}{GI_p}$ 代入上式得

$$V_\varepsilon=\frac{GI_p}{2l}\varphi^2$$

57

§13.2 杆件应变能的计算

6、小结

		应力	功	应变
应变能密度	正应力	$v=\frac{1}{2E}\sigma^2$	$v=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$	$v=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$
	切应力	$v=\frac{1}{2G}\tau^2$	$v=\frac{1}{2}\tau\gamma$	$v=\frac{1}{2}G\gamma^2$
应变能		力	功	变形
	拉压	$V_\varepsilon=\frac{F^2 l}{2EA}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}F\Delta l$	$V_\varepsilon=\frac{EA}{2l}\Delta l^2$
	扭转	$V_\varepsilon=\frac{T^2 l}{2GI_p}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}T\varphi$	$V_\varepsilon=\frac{GI_p}{2l}\varphi^2$
	弯曲	$V_\varepsilon=\frac{M^2 l}{2EI}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}M\theta$	$V_\varepsilon=\frac{EI}{2l}\theta^2$

仅适用于满足$\sigma=E\varepsilon$的线性情况，其他形式需要求积分 $V_\varepsilon=W=\int_0^\Delta F\,d\Delta$

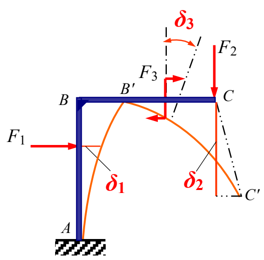
58

第十三章 能量方法

59

§13.3 应变能的普遍表达式

1、应变能的普遍表达式



$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}F\delta$$

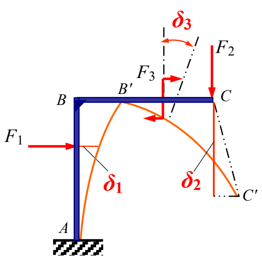
F：广义力，包括力和力偶。

δ：广义位移，包括线位移和角位移。

60

§13.3 应变能的普遍表达式

1、应变能的普遍表达式



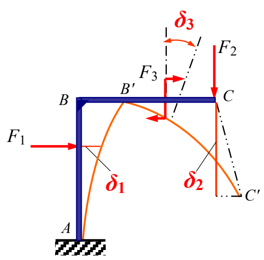
假设广义力按某一比例由零增至最后值，对应的广义位移也由零增至最后值。

对于线性结构，位移与荷载之间是线性关系。

61

§13.3 应变能的普遍表达式

1、应变能的普遍表达式



任一广义位移，例如δ_2可表示为

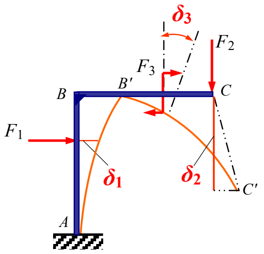
$$\delta_2=C_1F_1+C_2F_2+C_3F_3$$
$$=F_2\left(C_1\frac{F_1}{F_2}+C_2+C_3\frac{F_3}{F_2}\right)$$

C_1F_1、C_2F_2、C_3F_3分别表示力F_1、F_2、F_3在C点引起的竖向位移，C_1、C_2、C_3是比例常数。

62

§13.3 应变能的普遍表达式

1、应变能的普遍表达式



任一广义位移，例如δ_2可表示为

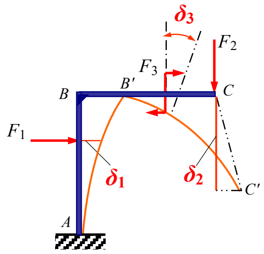
$$\delta_2 = C_1F_1 + C_2F_2 + C_3F_3$$
$$= F_2\left(C_1\frac{F_1}{F_2} + C_2 + C_3\frac{F_3}{F_2}\right)$$

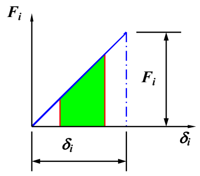
在比例加载时，F_1/F_2和F_3/F_2也是常数，δ_2与F_2之间的关系是线性的。同理，δ_1与F_1、δ_3与F_3之间也是线性的。

63

§13.3 应变能的普遍表达式

1、应变能的普遍表达式





在整个加载过程中结构的应变能等于外力的功

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}(F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + F_3\delta_3)$$

—— 克拉贝依隆原理

（只限于线性结构）

64

§13.3 应变能的普遍表达式

2、应变能的应用

1、计算应变能；

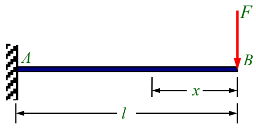
2、利用功能原理求变形。

65

§13.3 应变能的普遍表达式

例题13.1

试求图示悬臂梁的应变能，并利用功能原理求自由端B的挠度。



解：$M(x) = -Fx$

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{M_e^2(x)}{2EI(x)}dx$$

$$= \int_0^l \frac{(Fx)^2}{2EI}dx = \frac{F^2l^3}{6EI}$$

$$W = \frac{1}{2}F \cdot w_B$$

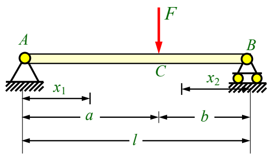
由$V_\varepsilon = W$得 $\quad w_B = \dfrac{Fl^3}{3EI}$

66

§13.3 应变能的普遍表达式

例题13.2

试求图示简支梁的应变能，并利用功能原理求C截面的挠度。



解：

$M(x) = \dfrac{Fb}{l}x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$

$M(x) = \dfrac{Fa}{l}x_2 \quad (0 \le x_2 \le b)$

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{M_e^2(x)}{2EI(x)}dx$$

$$= \int_0^a \frac{\left(\frac{Fb}{l}x_1\right)^2}{2EI}dx_1 + \int_0^b \frac{\left(\frac{Fa}{l}x_2\right)^2}{2EI}dx_2$$

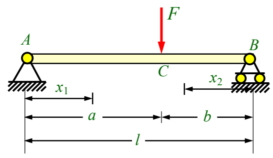
$$= \frac{F^2b^2}{2EIl^2}\frac{a^3}{3} + \frac{F^2a^2}{2EIl^2}\frac{b^3}{3} = \frac{F^2a^2b^2}{6EIl}$$

67

§13.3 应变能的普遍表达式

例题13.2

试求图示简支梁的应变能，并利用功能原理求C截面的挠度。



解：

$M(x) = \dfrac{Fb}{l}x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$

$M(x) = \dfrac{Fa}{l}x_2 \quad (0 \le x_2 \le b)$

$$V_\varepsilon = \frac{F^2a^2b^2}{6EIl}$$

$$W = \frac{1}{2}F \cdot w_C$$

由$V_\varepsilon = W$得 $\quad w_C = \dfrac{Fa^2b^2}{3EIl}$

68

§13.3 应变能的普遍表达式

例题13.3

试求图示曲杆的应变能，并利用功能原理求B截面的垂直位移。

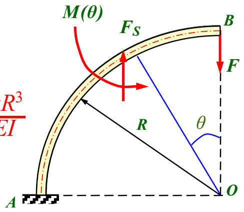
解： $M(\theta)=FR\sin\theta$

$$V_\varepsilon=\int_0^l \frac{M^2(\theta)}{2EI}R\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(FR\sin\theta)^2}{2EI}R\,d\theta=\frac{\pi F^2R^3}{8EI}$$

$$W=\frac{1}{2}F\cdot\delta_B$$

由$V_\varepsilon=W$得 $\delta_B=\dfrac{\pi FR^3}{4EI}$



69

第十三章 能量方法

70

§ 互等定理

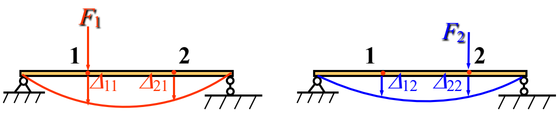
在线弹性、小变形条件下，有以下两个定理：

1.功互等定理

记： F_j 为作用于点 j 的广义力

Δ_{ij}为由于F_j的作用在 i 点引起的广义位移

同一结构，两种受力状态 { 1点受F_1—— 引起位移 Δ_{11} Δ_{21}；2点受F_2—— 引起位移 Δ_{12} Δ_{22}



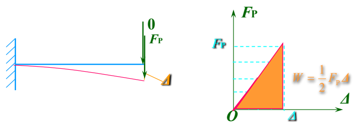
71

71

材料力学中的能量方法

基本概念

作用在弹性杆件上的力，其加力点的位移，随着杆件受力和变形的增加而增加，在这种情形下，力所作的功为变力功。



对于材料满足胡克定律、又在小变形条件下工作的弹性杆件，这时，力所作的变力功为

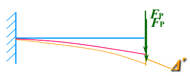
$$W=\frac{1}{2}F_P\Delta$$

72

材料力学中的能量方法

基本概念

弹性体在一定的变形状态保持平衡，这时，如果某种外界因素使这一变形状态发生改变，作用在弹性体上的力，由于加力点的位移，也作功，但不是变力功，而是常力功：



W马$F_P\Delta'$

上述功的表达式中，力和位移都是广义的。F_P可以是一个力，也可以是一个力偶；当F_P是一个力时，对应的位移Δ和Δ'都是线位移，当F_P是一个力偶时，对应的位移Δ和Δ'都是角位移。

73

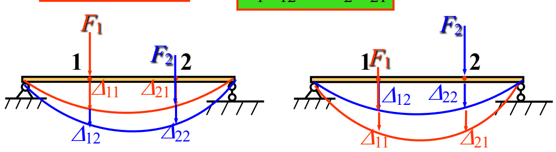
若将两种受力状态叠加，计算全部广义力的功，可按以下两种加载方式计算：

（1）先加F_1，后加 F_2： $W=\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+F_1\Delta_{12}$

（2）先加F_2，后加 F_1： $W'=\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+F_2\Delta_{21}$

∵功与加载次序无关，故 $W=W'$

功互等定理 $\therefore F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$ (7.17)



74

74

功互等定理　$\therefore F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$　(7.17)

功互等定理：第一组广义力在第二组广义力引起的位移上作的功，等于第二组广义力在第一组广义力引起的位移上所作之功。

（2）位移互等定理

在(7. 17)式中，令$F_1=F_2$ 即广义力的数值相等，则有：

位移互等定理　$\Delta_{12}=\Delta_{21}$　(7.18)

注意：力是广义力，F_1与F_2可以量纲不同

(如一个是集中力:N，另一个是集中力偶:N·m)，

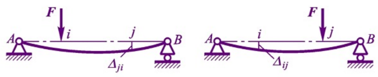
故Δ_{12}与Δ_{21}也可量纲不同，仅数值相同。

75

75

材料力学中的能量方法

互等定理

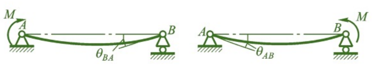


? = ?

76

材料力学中的能量方法

互等定理

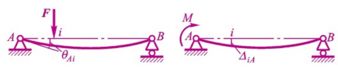


? = ?

77

材料力学中的能量方法

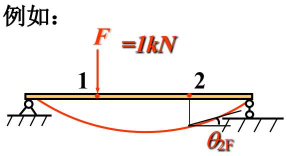
互等定理

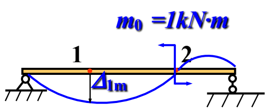


? = ?

78

例如：





由功互等定理：

$$\therefore F\Delta_{1m}=m_0\theta_{2F}$$

若令F=1kN，m_0= 1kN·m

$$\therefore \Delta_{1m}=\theta_{2F}$$

则二位移量仅数值相等！

79

79

利用互等定理的示例

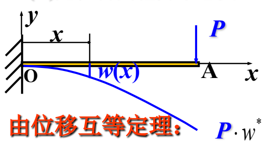
如图，在悬臂梁的自由端A安装一个挠度计，可测出自由端A的挠度值。当集中力 *P* 从固定端O向右移动时，挠度计的读数w^*是力 *P* 作用位置 *x* 的函数，即$w^*=w^*(x)$ ，该方程 $w^*=w^*(x)$ 还__(B)______。

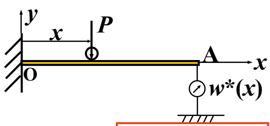
(A)表达了力 *P* 作用点的挠度与 *x* 的关系；

(B)为该梁在自由端受铅垂力 *P* 时的挠曲线方程；

(C)为该梁在自由端受铅垂力 *P* 时的转角方程；

(D)无任何其他力学意义。



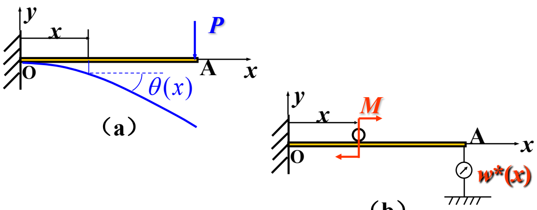


由位移互等定理：　$P\cdot w^*(x)=P\cdot w(x)$　$\boxed{\therefore w^*(x)=w(x)}$

80

80

思考：若想测定原题中悬臂梁自由端受集中力作用下**各截面的转角** $\theta(x)$ ，如何利用原有装置？



（b）

利用功互等定理 $P \cdot w^{*}(x) = M \cdot \theta(x)$

$$\boxed{\therefore \theta(x) = \frac{P}{M} w^{*}(x)}$$

81

81