



第一章 机械振动基础知识

主讲：祝毅

(yiz@zju.edu.cn)

2022年春

机械工程学院

流体动力与机电系统国家重点实验室

内容提要

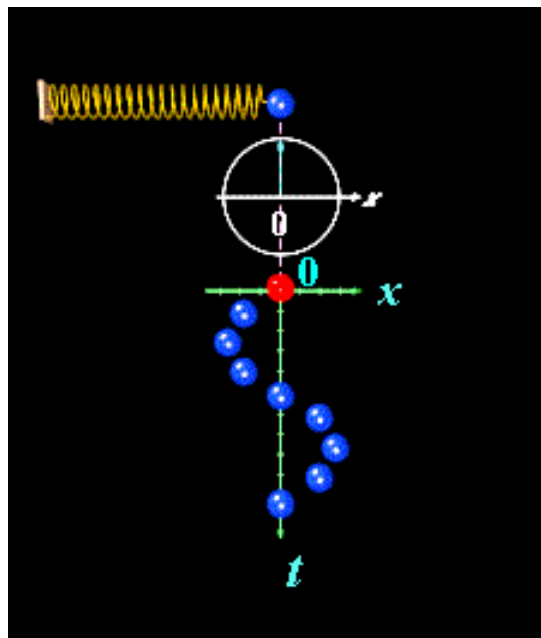
- 机械振动的概念
- 机械振动的运动学描述
- 自由度与广义坐标
- 机械振动系统的基本要素
- 机械振动系统的研究方法

内容提要

- **机械振动的概念**
- **机械振动的运动学描述**
- **自由度与广义坐标**
- **机械振动系统的基本要素**
- **机械振动系统的研究方法**

1 机械振动的概念

- 物体或质点在其平衡位置附近所作的往复运动，称为机械振动。



内容提要

- 机械振动的概念
- 机械振动的运动学描述
- 自由度与广义坐标
- 机械振动系统的基本要素
- 机械振动系统的研究方法

2 机械振动的运动学描述

- 机械振动的函数表达方法
- 简谐振动
- 周期振动
- 简谐振动的合成

2 机械振动的运动学描述

- 机械振动的函数表达方法
- 简谐振动
- 周期振动
- 简谐振动的合成

2.1 机械振动的函数表达方法

- 机械振动是研究机械系统的某些物理量（如位移、速度和加速度）在某一数值近旁随时间 t 变化的规律， $x=x(t)$
 - 周期振动
 - 非周期振动
 - 随机振动

2.1.1 周期振动（1）

- 周期振动可用周期函数来表示；
- 周期函数是定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间，每隔一定时间函数值将周而复始出现。可表示为

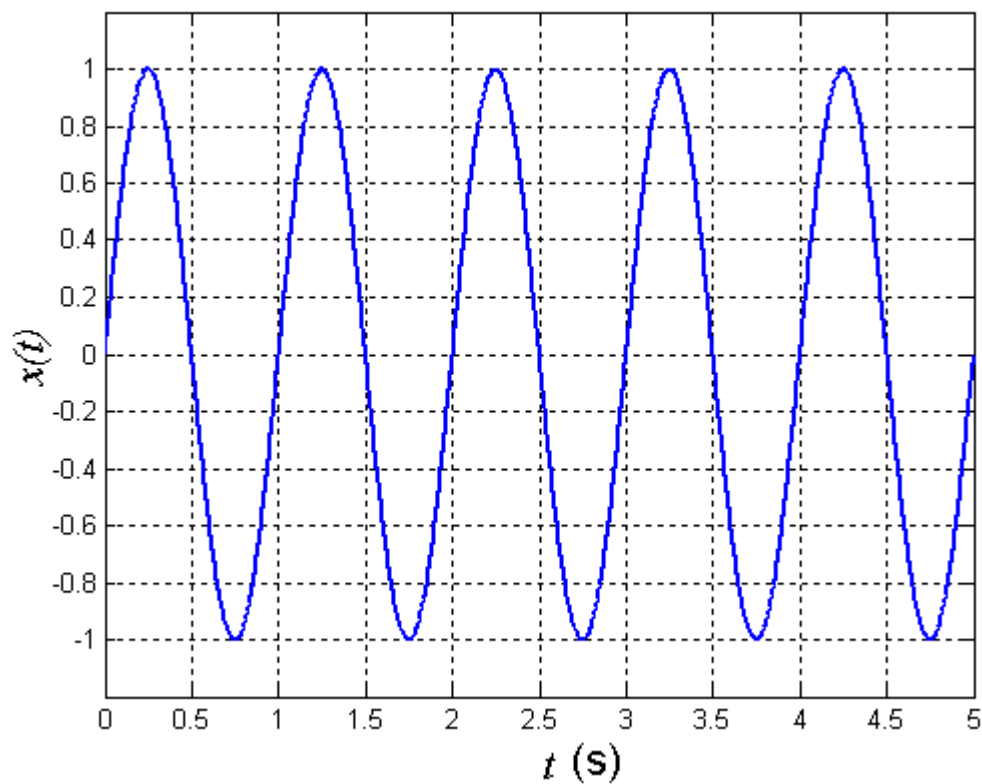
$$x(t) = x(t + nT), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中 T 为周期； $f = 1/T$ 为频率。

2.1.1 周期振动（2）

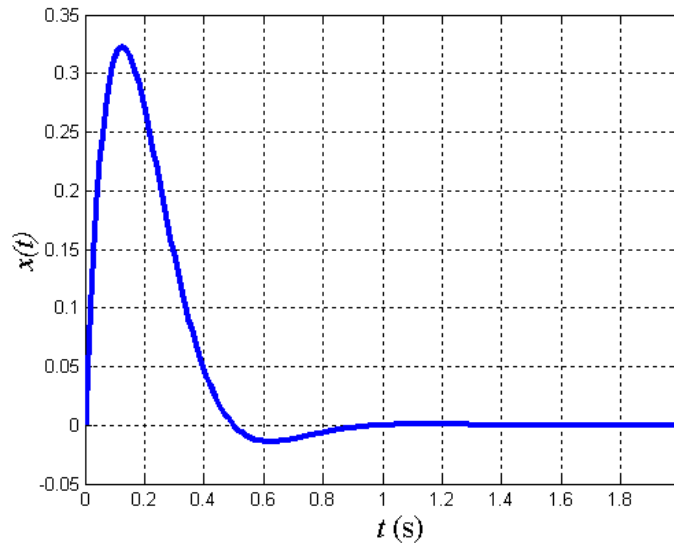
- 正弦振动

$$x(t) = \sin 2\pi t$$



2.1.2 非周期振动

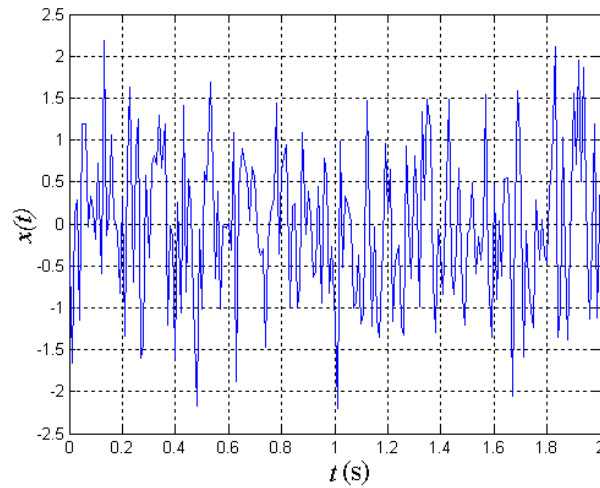
- 机械系统受到冲击产生的振动，旋转机械启动时的振动，它们没有周期，为非周期振动。



$$x(t) = e^{-2\pi t} \sin 2\pi t$$

2.1.3 随机振动

- 车辆在行进过程中的振动，不能用确定的时间函数来表达，不可能预测某一个时刻的振动物理量的确定值。

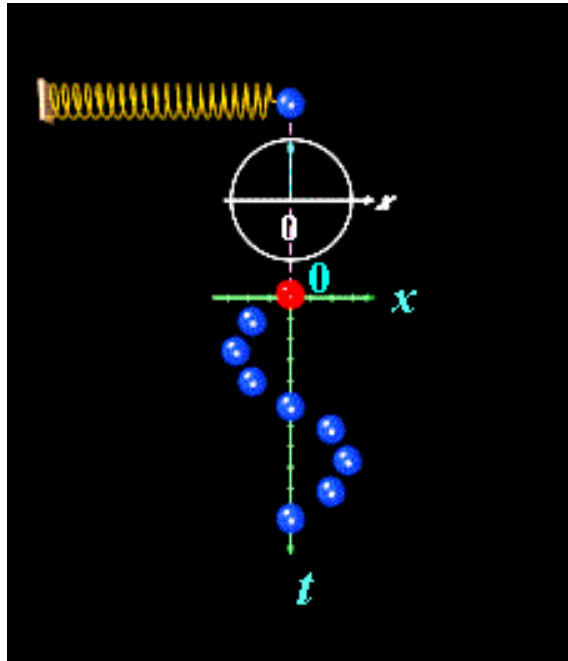


2 机械振动的运动学描述

- 机械振动的函数表达方法
- 简谐振动
- 周期振动
- 简谐振动的合成

2.2 简谐振动

- 当物体作三角函数（正弦或余弦）运动规律振动时，称为简谐振动。



位移： $x(t) = A \sin \omega t$

振幅： A 角频率： $\omega = 2\pi f$

速度：

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

加速度：

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

2 机械振动的运动学描述

- 机械振动的函数表达方法
- 简谐振动
- 周期振动
- 简谐振动的合成

2.3 周期振动

- 振动规律为非三角函数的周期函数，统称为周期振动。对于实际周期振动信号，可以进行傅里叶级数展开：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\omega t + \psi_n)$$
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt \end{cases}, \quad \psi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$$

2 机械振动的运动学描述

- 机械振动的函数表达方法
- 简谐振动
- 周期振动
- 简谐振动的合成

2.4 简谐振动的合成

- 同方向振动的合成
 - 两个同频率的简谐振动
 - 两个不同频率的简谐振动
- 两垂直方向振动的合成
 - 两个同频率的简谐振动
 - 两个不同频率的简谐振动

2.4.1 同方向振动的合成

- 两个同频率振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x = A \sin(\omega t + \psi)$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{(A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2)^2 + (A_1 \sin \psi_1 + A_2 \sin \psi_2)^2} \\ \psi = \tan^{-1} \frac{A_1 \sin \psi_1 + A_2 \sin \psi_2}{A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2} \end{cases}$$

2.4.1 同方向振动的合成

■ 两个不同频率振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \\ x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

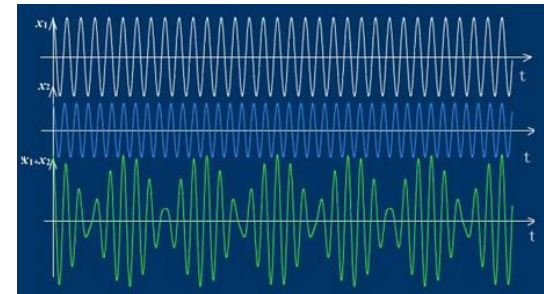
考虑： $\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$ ， 而 $\delta\omega \ll \omega_1$

当 $A_2 = A_1 = A$ ， $x \approx 2A \cos \frac{\delta\omega}{2} t \sin \omega_1 t$

当 $A_2 \ll A_1$ ， $x \approx A_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \cos \delta\omega t\right) \sin \omega_1 t$

$$= A_1 \sin \omega_1 t + \frac{A_2}{2} \sin(\omega_1 - \delta\omega)t + \frac{A_2}{2} \sin(\omega_1 + \delta\omega)t$$

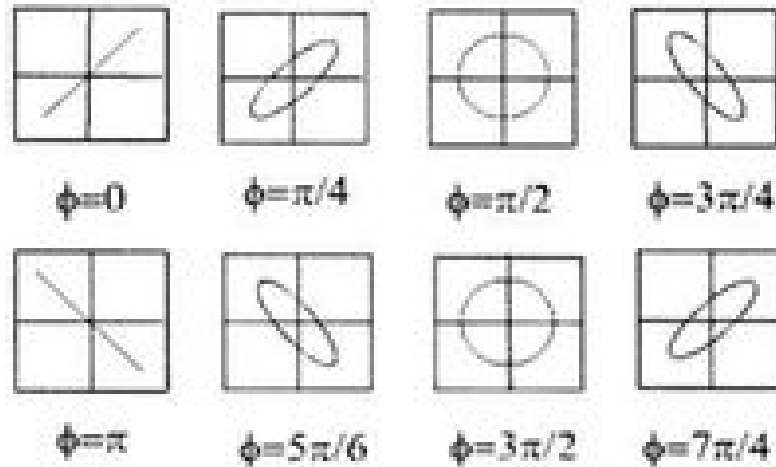
“拍”



2.4.2 两垂直方向振动的合成

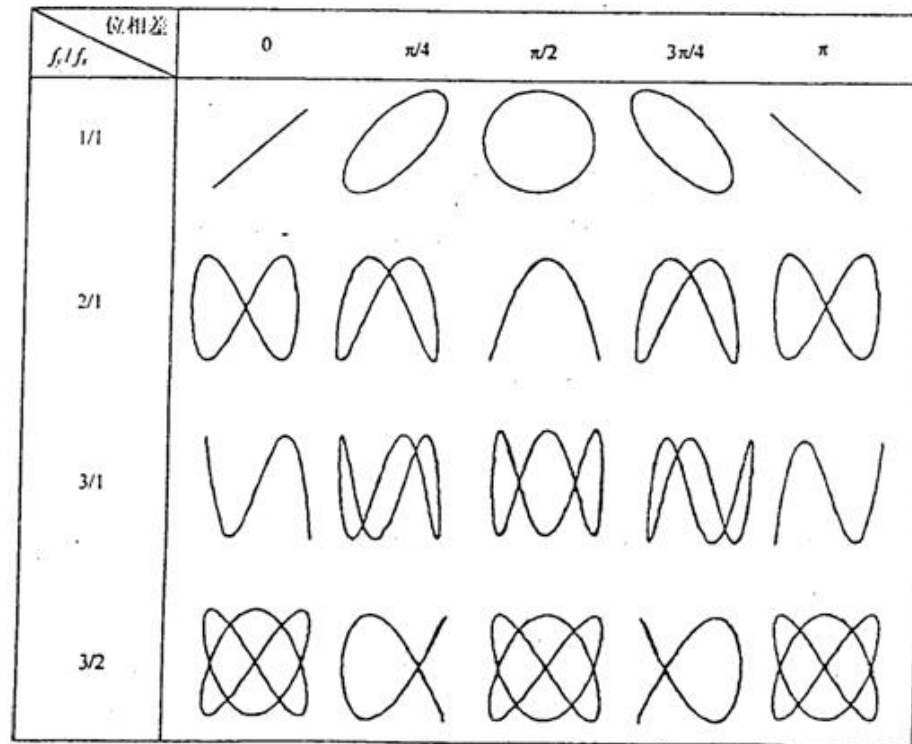
- 同频率振动的合成

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t \\ y = B \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



2.4.2 两垂直方向振动的合成

■ 不同频率振动的合成



3 自由度与广义坐标

- 自由度
- 广义坐标

3.1 自由度

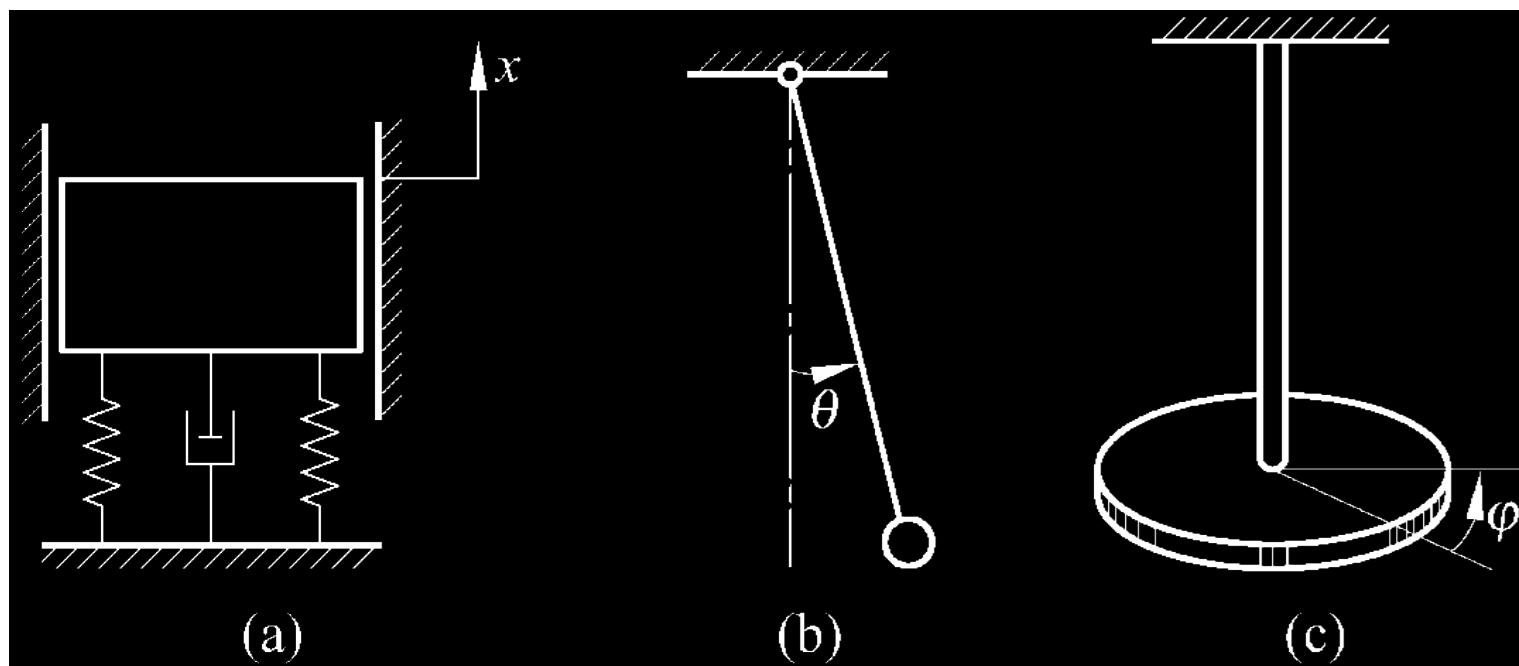
- 物体在运动时，为了确定位置所需的独立坐标数就是该物体所在系统的自由度。
 - 一个质点在空间做自由运动，自由度为3。
 - 一个刚体在空间做自由运动，自由度为6。
 - 弹性体、塑性体和流体等变形连续体，由于有无限多个质点组成，所以自由度为无限多个。为了简化分析，通常将连续体简化为由有限个质点组成的系统。

3.2 广义坐标

- 当系统受到 r 个约束时，其自由度数 N 为系统无约束时的自由度数 n 与约束条件数 r 之差。
- 当系统的自由度数为 N 时，系统需要且仅需要有 N 个坐标来定义，这 N 个坐标称之为广义坐标。

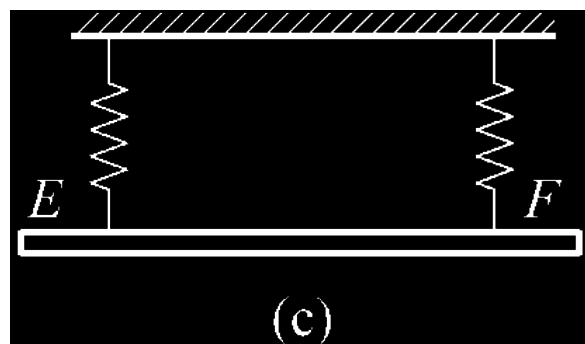
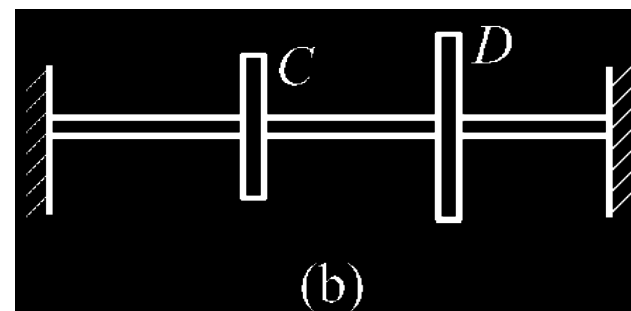
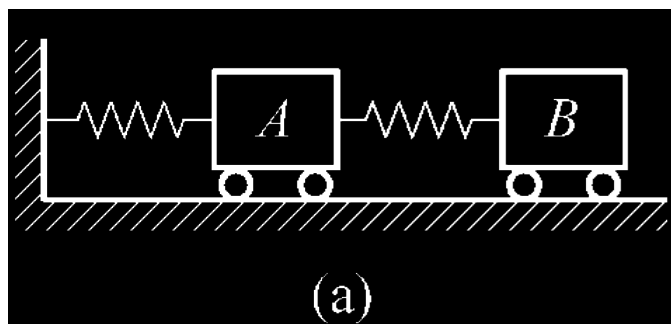
3.3 案例（1）

■ 单自由度



3.3 案例（2）

■ 两自由度



4 机械振动系统的基本要素

- 惯性——质量
- 恢复性——弹簧
- 阻尼——阻尼器

4.1 惯性元件

- 特征

- 反映机械系统的惯性特征；无弹性和耗能

- 定义

- 产生单位加速度所需加载的外作用力

$$M = \frac{F}{a}$$

- 符号



4.2 弹性元件

- 特征

- 反映机械系统的弹性特征；无惯性和耗能

- 定义

- 单位位移变化所需加载的外作用力

$$K = \frac{dF}{dx}$$

- 符号



4.3 阻尼元件

- 特征

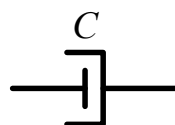
- 反映机械系统的耗能特征；无惯性和弹性

- 定义

- 单位速度变化所产生的阻力

$$C = -\frac{dF_d}{d\dot{x}}$$

- 符号

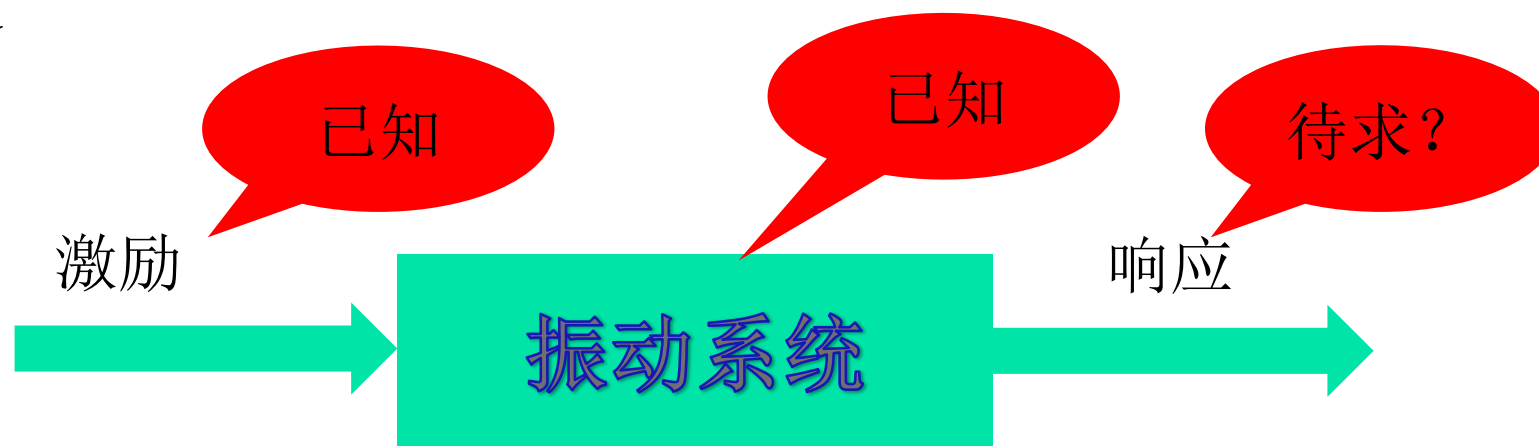


5 机械振动系统的研究方法

- 机械振动系统的分析
- 机械振动系统的识别
- 机械振动系统的反演

5.1 机械振动系统的分析

■ 问题

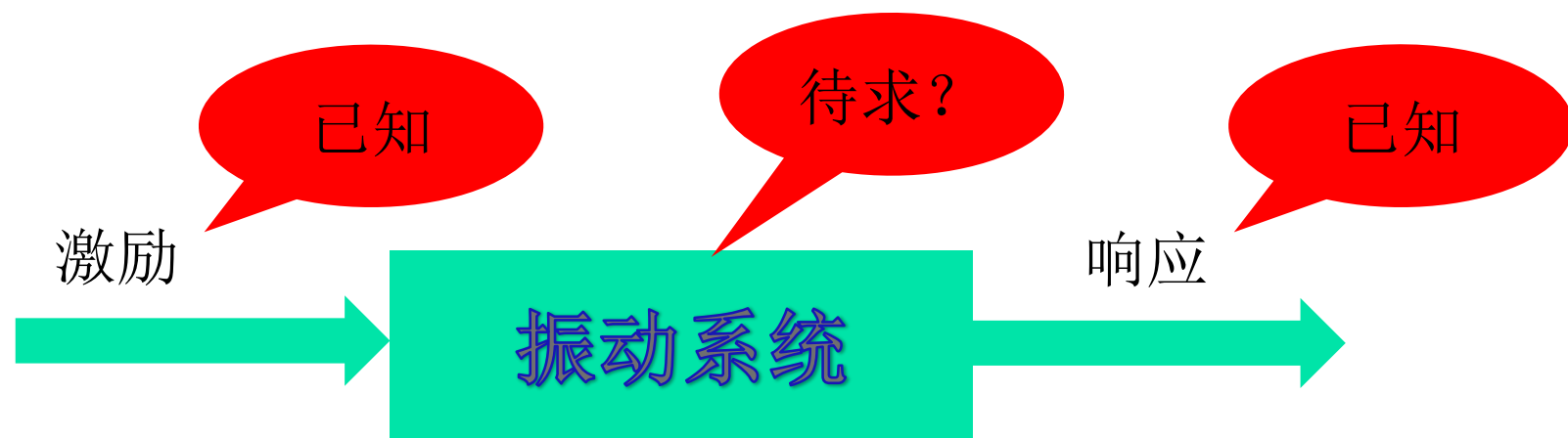


■ 案例

- 在机械产品设计阶段，对具体设计方案进行动力响应验算，若不符合要求再作方案修改，直到达到要求而最终确定设计方案。

5.2 机械振动系统的识别

■ 问题



■ 案例

- 测算未知系统的物理参数（如质量、刚度和阻尼系数等）或系统关于振动的固有特性（如固有频率、主振型等）。

5.3 机械振动系统的反演

■ 问题



■ 案例

- 一面锣，锣的机械特性已知，如何敲击锣可以达到预期的声响（锣的振动）。

第一章小结

- 机械振动的概念
- 机械振动的运动学描述
- 自由度与广义坐标
- 机械振动系统的基本要素
- 机械振动系统的研究方法

完