第7章　级　数

§ 7.1　级数的敛散性及基本性质

一、 级数收敛的定义

中国古代哲学家庄周所著的《庄子•天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭". 其含义就是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限地进行下去. 每天截下的木棒长度分别为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

将它们相加

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

便得到无穷多个数的"和". 从直观上可知，上面的"和"等于1.

但是无穷多个数的"和"不一定有确定的含义，例如

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1)+\cdots$$

在上面的和式中，若写作

$$[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots+[(-1)+1]+\cdots$$

其"和"为0.若写作

$$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots+[(-1)+1]+\cdots$$

其"和"便等于1. 这样就得到两个不同的结果，自然就提出了下面的问题：如何定义无穷多个数相加后的"和".

将无穷多个数$\{a_n\}: a_1$，$a_2,\cdots$，$a_n,\cdots$写作和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{7.1.1}$$

称之为**无穷级数**，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. 这仅仅是形式的记号，并不一定有明确的

含义，即不一定有确定的“和”．为此我们引进下面概念.

定义 7.1.1　给定数列 $\{a_n\}$，将其每一项依次用“+”号连接起来的表达式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

称**无穷级数**. 由于其通项 a_n 都是常数，也称之为**常数项级数**，记作 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

在级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 中，前 n 项的和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，称为该级数的**部分和**. 所得到的数列 $\{S_n\}$ 称为**部分和数列**.

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的通项 a_n 与其部分和数列 $\{S_n\}$ 之间有如下关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}. \tag{7.1.2}$$

定义 7.1.2　若级数(7.1.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S (即 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$)，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **收敛**，此时称部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限 S 为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的**和**. 记作

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=S=\lim_{n\to+\infty}S_n.$$

若级数 (7.1.1) 的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **发散**.

定理 7.1.3（级数收敛的必要条件）　级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明：因为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，记其部分和为 S_n，和为 S. 则

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S.$$

从而有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

例7.1.4 讨论**等比级数**（也称**几何级数**） $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ 的敛散性. (其中：$a \neq 0$，$q \neq 0$).

解： 设该几何级数的部分和为 S_n.

(1) 当 $q = 1$ 时，$S_n = na$，级数发散.

(2) 当 $q = -1$ 时，$S_{2n} = 0$，$S_{2n-1} = a$ $(n = 1,2,\cdots)$，级数发散.

(3) 当 $|q| \neq 1$ 时，$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

(i). 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，级数收敛，且其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

(ii). 当 $|q| > 1$ 时，级数发散.

总之，对于几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} aq^n$ $(a \neq 0，q \neq 0)$ 有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & (|q| < 1) \\ \text{发散} & (|q| \geq 1) \end{cases}.$$

例7.1.5 讨论级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$ 的敛散性.

解： 当 $k \in \mathbb{N}^+$ 时，有

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

则

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛，且该级数的和为 $\dfrac{1}{4}$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛或发散(简称为**敛散性**)是通过级数的部分和数

列$\{S_n\}$的敛散性来判断的，根据数列极限的柯西收敛准则，不难得到级数收敛的柯西收敛准则.

定理 7.1.6（级数收敛的柯西准则） 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛的充要条件是对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall p\in\mathbb{N}^+$均有

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|<\varepsilon. \tag{7.1.3}$$

例7.1.7 利用柯西收敛准则证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

证明：当$k\geq 2$，且$k\in\mathbb{N}^+$时，有

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

对任意正整数p，有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)k}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

所以，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，对$\forall p\in\mathbb{N}^+$均有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

例7.1.8 利用柯西收敛准则证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散.

证明：取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对$\forall N\in\mathbb{N}^+$，$\exists\, n_0\in\mathbb{N}^+$，使得$n_0>N$，取$p_0=n_0$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+n_0}\frac{1}{k}&=\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}\\&>\frac{1}{n_0+n_0}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0.\end{aligned}$$

根据柯西收敛准则，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散.

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$称为**调和级数**，由例 (7.1.8) 可知，

调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

二、 收敛级数的基本性质

定理 7.1.9 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 均收敛,则

对任意 k_1, $k_2 \in R$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(k_1a_n+k_2b_n\right)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(k_1a_n+k_2b_n\right)=k_1\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+k_2\sum_{n=1}^{+\infty}b_n .$$

由柯西收敛准则可知，级数收敛与否取决于：对任意给定的正数 ε，是否存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任意正整数 p，使得式 (7.1.3) 恒成立. 由此可知，级数是否收敛与级数的前面有限项无关.

定理 7.1.10 去掉、添加或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性.

由此定理可得，若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛,则级数

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}+\cdots \tag{7.1.4}$$

也收敛，且其和 $r_n=S-S_n$. 其中 S 为收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的和.

式 (7.1.4) 称为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的**余项**(误差).

定理 7.1.11 收敛级数任意添加括号后所得级数仍然收敛，且其和不变.

事实上，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 添加括号所得到的新级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$，其部分和数列 $\{T_n\}$ 为原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛,则其部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. 又收敛数列的任何子数列都收敛,$\{T_n\}$ 为收敛数列 $\{S_n\}$ 的子数列，$\{T_n\}$ 当然收敛.

注意：发散级数添括号后所得到的级数可能收敛. 例如

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

很显然，该级数为发散的；但添加括号后

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

所得的级数是收敛的.

§ 7.2　正项级数

一、 正项级数的收敛性判别法

每一项均为正数的级数称为**正项级数**. 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$，其部分和数列$\{S_n\}$（$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$）显然是单调递增的，根据数列的单调有界收敛准则有以下定理.

定理 7.2.1　正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充分必要条件为部分和数列$\{S_n\}$有界. 即，存在正数$M>0$，对$\forall n \in \mathbb{N}^+$都有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le M.$$

级数收敛是根据其部分和数列是否存在极限来判断的，但要精确计算出级数的部分和S_n并非易事，而判断S_n是否有界要简单很多.

由定理 7.2.1 容易得到如下关于正项级数的敛散性判别法.

二、 正项级数的比较判别法

定理 7.2.2（比较判别法）　对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$，如果存在自然数 N，当$n > N$时，有$a_n \le b_n$. 则

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$也收敛；

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$必发散.

证明：由于改变级数的有限项，不改变级数的敛散性，不妨假设对任意自然数n都有$a_n \le b_n$. 记级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的部分和分别为$S_n$、$T_n$，则：$S_n \le T_n$.

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，记其和为 T，则：$T_n \le T$. 从而有，$S_n \le T_n \le T$. 由定理(7.2.1) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散时，若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，根据 (1) 的结论，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 这与条件 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散矛盾.

为了便于实际应用，比较判别法常常以极限形式表示.

定理 7.2.3（极限判别法） 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$，若 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$，则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

下面给出 (1) 的证明，其它情况由读者完成.

证明： 若 $\lim_{n\to+} \frac{a_n}{b_n} = l$，且 $0 < l < +\infty$，对 $\varepsilon = \frac{l}{2}$，$\exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon = \frac{l}{2}.$$

即

$$\frac{1}{2} l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l.$$

从而

$$\frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n.$$

如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{2} b_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} l b_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

例7.2.4 判断 p-级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解：根据例(7.1.8)，当 $p\le 1$ 时，$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$；而调和级数发散，因此，当 $p\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时，对函数 $f(x)=\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\ge 1)$在区间$[n,\ n+1]$上应用 拉格朗日中值定理，$\exists\theta_n\in(0,1)$ 使得

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{(n+1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}=-\frac{p-1}{(n+\theta_n)^p}.$$

则

$$\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)=\frac{1}{(n+\theta_n)^p}>\frac{1}{(n+1)^p}.$$

又正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)$收敛,根据比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

总之，当 $p\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散；当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

例7.2.5 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\frac{2n+1}{5^n}$ 的敛散性.

解：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $0<\sin x<x$. 因此，$0<3^n\sin\frac{\pi}{5^n}<\pi\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\pi\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 收敛,根据比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\frac{2n+1}{5^n}$ 也收敛.

例7.2.6 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$的敛散性.

解：因为当 $x\to 0$ 时，$x-\ln(1+x)=x-[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)=\frac{1}{2}.$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数的极限判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 也收敛.

例7.2.7 设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}dx\ (n=1,2,\cdots)$，试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的敛散性.

解： 本题要计算出 a_n 的具体数值有难度，而题目要求仅仅是判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的敛散性，通过适当的“缩放”，估计通项 a_n 的取值范围即可.

由于

$$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，因此，原级数也收敛.

例7.2.8 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都是正项级数，且 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

成立. 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 也发散.

证明： 不失一般性可以认为对任意正整数上述不等式均成立，则

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\ \cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}},\cdots.$$

各式两边相乘可得 $\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}$. 从而有 $0<a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n$.

由比较判别法可知，结论 (1)、(2) 均成立.

三、 正项级数的比值与根值判别法

定理 7.2.9【比值判别法、 D′Alembert[30]**（达朗贝尔）判别法】**

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\ (0\le l\le+\infty)$. 则

(1) 当 $0\le l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明：(1) 当 $l<1$ 时，取 $\varepsilon_0>0$，且 $\varepsilon_0<1-l$，则 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有

$$l-\varepsilon_0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon_0.$$

记 $l+\varepsilon_0=r$，则：$0<r<1$. 由上式可得，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<r^{n-N}.$$

即

$$a_{n+1}<a_{N+1}\cdot r^{n-N}.$$

而级数 $\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^{n-N}$ 收敛，根据比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $l>1$ (或 $+\infty$) 时，取 $\varepsilon_0=\frac{l-1}{2}$，则 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon_0=\frac{l+1}{2}>1.$$

因此，当 $n>N$ 时，$a_{n+1}>a_n$；即级数 $\{a_n\}(n>N)$ 单调递增. 从而，

---

[30] **D’Alembert**（达朗贝尔，1717-1783），法国数学家、物理学家.达朗贝尔认为求解物理（力学，包括天体力学）问题是数学的目标.在动力学基础的建立、流体力学研究和天体力学的研究中（月球运动理论，关于地球形状和自转理论）都作出了很大贡献，也是数学分析（极限、级数和微分方程等）的开拓者.

级数的通项$\{a_n\}$的极限不等于0. 所以，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

例7.2.10 讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)q^n$的敛散性. $(q>0)$

解：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}=q.$$

所以

(1) 当$0<q<1$时，级数收敛； (2) 当$q>1$时，级数发散；

(3) 当$q=1$时，$a_n=n+1$，级数显然发散.

例7.2.11 判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

解：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{\mathrm{e}}>1.$$

所以，级数发散.

定理 7.2.12（柯西根值判别法） 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$是正项级数，且

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho.\ (0\le\rho\le+\infty)$$

则

(1) 当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

本定理的证明，可参考定理 7.2.9 的证明，由读者自行完成.

例7.2.13 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$ 的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{3}=\frac{1}{3}<1$，因此，级数收敛.

当然，本题也可以用比值判别法求解.

例7.2.14 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3+(-1)^n\cdot 2}{2^n}$ 的敛散性.

解：由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}\cdot 2}{3+(-1)^n\cdot 2}=\begin{cases}\frac{5}{2} & (n\text{ 为奇数})\\ \frac{1}{10} & (n\text{为偶数})\end{cases}.$$

因此，用比值判别法无法判断其敛散性；可用根值或其它判别法判断.

【方法一】：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n\cdot 2}=\frac{1}{2}<1$，因此，级数收敛.

【方法二】：由于 $0<a_n<\frac{5}{2^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{2^n}$ 收敛，所以原级数也收敛.

【注意】：在比值判别法与根值判别法中，都没有给出当 $l=1$ 或 $\rho=1$ 时，级数的敛散性；对于 ***p*-级数** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}=1.$$

而当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\le 1$ 时，级数发散. 因此，对于 $l=1$ 或 $\rho=1$ 的情况，比值判别法或根值判别法都无法判断级数的敛散性；即级数可

能收敛也可能发散. 需要由其它判别方法来判断级数的敛散性.

四、 正项级数的积分判别法

对于 $\boldsymbol{p}$-级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 及形如 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p>0)$ 等的级数应用上面介绍的比值判别法等来判断其敛散性比较困难，为此引进积分判别法.

定理 7.2.15（柯西积分判别法） 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续、恒正且单调递减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 有相同的敛散性.

证明： 由于 $f(x)$ 单调递减，则当 $x\in[k,\ k+1]$ $(k\in\mathbb{N}^+)$ 时，有

$$f(k+1)\le f(x)\le f(k).$$

从而

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^n f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

记级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 的部分和为 S_n，则

$$S_n-f(1)\le\int_1^n f(x)dx\le S_{n-1}.$$

(1) 当广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，有

$$S_n\le f(1)+\int_1^n f(x)dx\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)dx.$$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 的部分和有界，所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛.

(2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛时，记其和为 S，则

$$\int_1^n f(x)dx \le S_{n-1} \le S.$$

根据广义积分的敛散性判别，广义积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$也收敛.

例7.2.16 判断级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性.

解：由于广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}\overset{\ln x=u}{=}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$,当$p>1$时收敛；当$p\le 1$时发散. 由正项级数的积分判别法，当$p>1$时，级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$收敛；当$p\le 1$时，级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$发散.

根据积分判别法，很容易得到：p-级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性.

由于广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & (p>1)\\ +\infty & (p\le 1)\end{cases}.$$

因此，当$p\le 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$发散；当$p>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

§ 7.3　一般项级数的敛散性判别

前面讨论了正项级数的敛散性判别，下面讨论一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $(a_n \in R)$ 的敛散性问题，我们先讨论一种特殊的一般项级数——“交错级数”的敛散性判别.

一、 交错级数

若 $a_n \geq 0\ (n = 1,2,\cdots)$，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为**交错级数**(或**交叉级数**). 具体为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots.$$

定理 7.3.1（莱泊尼兹判别法）　若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

(1) 对任意 $n \in N^+$ 均有 $a_n \geq 0$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即 $a_{n+1} \leq a_n\ (n = 1,2,\cdots)$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其和 $S \leq a_1$.

证明：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

$$0 \leq a_n < \varepsilon.$$

又数列 $\{a_n\}$ 单调递减，则

(1) 当 p 为偶数时，

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p} \leq a_{n+1}.$$

(2) 当 p 为奇数时，

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \le a_{n+1}.$$

因此，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^{+}$，当$n > N$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k-1} a_{n+k}\right| < a_{n+1} < \varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$收敛.

根据上面的证明过程，同样可得$S_n \le a_1$，因此，

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n \le a_1.$$

例7.3.2 判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$的敛散性.

解： 记$a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$，则：$\lim_{n\to} a_n = 0$. 且

$$a_n - a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{(n+2)\sqrt{n} - (n+1)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+n-1}{n(n+2)[(n+2)\sqrt{n} + (n+1)^{\frac{3}{2}}]} > 0.$$

因此，数列$\{a_n\}$单调递减. 由莱布尼茨判别法，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$收敛.

数列$\{a_n\}$的单调性，也可通过函数$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$单调性判别. 由于

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \le 0 \ (x \ge 1).$$

因此，函数$f(x)$单调递减，从而数列$\{a_n\}$也单调递减.

例7.3.3 判断级数$\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$的敛散性.

解： 由于$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n[\sqrt{n} - (-1)^n]}{n-1} = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} - \dfrac{1}{n-1}$，根据莱布尼茨判别法，级数$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$收敛，而调和级数$\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1}$发散.

所以，级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散.

例7.3.4 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性.

解： 由于 $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha$，则

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^{n-1}\sin(n\pi-\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n).$$

记 $a_n=\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$，则 $0<a_n\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

又数列 $a_n=\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 单调递减, 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛.

二、 级数的条件收敛与绝对收敛

下面讨论一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛情况，其中 a_n 为任意实数.

定义 7.3.5 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **绝对收敛**；若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **条件收敛**.

根据上面定义容易得到，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的；级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛的. 级数的绝对收敛与级数收敛之间有如下关系.

定理 7.3.6 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 必收敛.

证明： 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，由柯西收敛准则，对 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p\in\mathbb{N}^+$，有

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon.$$

因此 $$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right| \le \left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\cdots+\left|a_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

例7.3.7 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n(n+2)}$ 的敛散性.

解：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left|(x-1)^{n+1}\right|}{(n+1)(n+3)}\cdot\dfrac{n(n+2)}{\left|(x-1)^n\right|}=|x-1|$，因此

(1) 当 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $|x-1|>1$，即 $x<0$ 或 $x>2$ 时，级数发散；

(3) 当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，$|a_n|=\dfrac{1}{n(n+2)}$，级数绝对收敛.

所以，当 $0\le x\le 2$ 时，级数绝对收敛；当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，级数发散.

例7.3.8 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 的敛散性.

解：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\dfrac{\mathrm{e}}{3}<1$，所以级数绝对收敛；从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 收敛.

三、 Abel[31](阿贝尔)判别法与狄利克雷判别法*

[31] **Abel**（阿贝尔，1802-1829），挪威数学家.阿贝尔很早便显示了数学方面的才华.16 岁遇到了霍姆伯（Holmboe）介绍他阅读牛顿、欧拉、拉格朗日、高斯的著作，他很快被推进到当时数学研究的前沿阵地.他在笔记中写道："要想在数学上取得进展，就应该阅读大师的而不是他们的门徒的著作".阿贝尔积分、阿贝尔函数、阿贝尔积分方程、阿贝尔群、阿贝尔级数、阿贝尔部分和公式、阿贝尔基本定理、阿贝尔极限定理、阿贝尔可积性……很少有数学家能使自己的名字同近

下面介绍两个判别一般项级数收敛的方法，先引进一个公式.

引理 7.3.9（阿贝尔变换） 设级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和分别为 A_n, B_n，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k.$$

证明： 记 $B_0 = 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1}$$

$$= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k$$

$$= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k.$$

推论 7.3.10（阿贝尔引理） 若数列 $\{a_n\}$ 与级数$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和数列 $\{B_n\}$ 满足：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 单调且存在 $M > 0$，对$\forall n \in N$ 均有 $|a_n| \le M$ ；

(2) 存在 $\varepsilon > 0$，对$\forall n \in N$ 均有$|B_n| \le \varepsilon$.

则：对 $\forall n \in \mathbb{N}^{+}$ 有，$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le 3A\varepsilon.$

证明： 根据 Abel 变换

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right|$$

$$\le |a_n B_n| + \sum_{k=1}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k|$$

代数学中这么多的概念和定理联系在一起.然而这位卓越的数学家却是一个命途多舛的早夭者，只活了短短的 27 年.尤其可悲的是，在他生前，社会并没有给他的才能和成果以公正的承认.

$$
\begin{aligned}
&\le A\varepsilon+\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k-a_{k+1}\right| \\
&=A\varepsilon+\varepsilon\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\right| \\
&=A\varepsilon+\varepsilon\left|a_1-a_n\right|\le 3A\varepsilon.
\end{aligned}
$$

下面讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

的敛散性判别.

定理 7.3.11（阿贝尔判别法） 设数列$\{a_n\}$单调有界，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛.

证明：由于数列$\{a_n\}$单调有界，则：$\exists M>0$，对$\forall n\in\mathbb{N}^+$均有$\left|a_n\right|\le M$.

又级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛，根据柯西收敛准则，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall p\in N^+$,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

若记$B_{n+k}=b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+k}=\sum_{i=1}^{k}b_{n+i}\ (k\in N^+)$，则当$n>N$，对$\forall k\in\mathbb{N}^+$均有

$$\left|B_{n+k}\right|\le\frac{\varepsilon}{3M}.$$

根据阿贝尔变换与阿贝尔引理，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{p}a_{n+k}b_{n+k}\right|$$

$$=\left|a_{n+p}B_{n+p}+\sum_{k=1}^{p-1}(B_{n+k}-B_{n+k+1})a_{n+k}\right|$$

$$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\sum_{k=1}^{p-1}\left|(B_{n+k}-B_{n+k+1})a_{n+k}\right|$$

$$\le 3M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.$$

由柯西收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

根据阿贝尔判别法，若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则容易判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\,(p>0)$，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$ 都收敛.

定理 7.3.12（狄利克雷判别法） 设数列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和有界，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明： 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon$.

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和 B_n 有界，即存在 $M>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 均有 $|B_n|\le M$.

由阿贝尔变换，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right|$$

$$\le 2M\varepsilon+M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})\right|$$

$$=2M\varepsilon+M\left|a_{n+p-1}-a_{n+p}\right|\le 4M\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

例7.3.13 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 对 $\forall x\in(0,2\pi)$ 均条件收敛.

证明： 记 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin nx$，则：$\{a_n\}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$ 的部分和

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin nx$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2}) \right)$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

因此，$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. 从而，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和有界.

根据狄利克雷判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收敛.

同样，有 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{x}{2} - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

即级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx$ 的部分和有界,从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 收敛.

因为 $\frac{|\sin nx|}{n} \ge \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$,而调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛. 所以，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 条件收敛. 同样，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 也条件收敛.

四、 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数的许多性质是条件收敛级数所没有的，下面给出绝对收敛级数的重排性质.

定理 7.3.14 绝对收敛级数任意改变项的位置后构成的级数也绝对收敛，且与原级数有相同的和.

先说明级数重排的概念.

设 $\sigma: N^+ \to N^+$ 是一一映射，即对 $\forall k \in \mathbb{N}^+$，$\sigma: k \to n_k$ 是一一映射. 级数

$$S:\ a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \tag{7.3.1}$$

重排后，得到级数

$$T:\ a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} + \cdots \tag{7.3.2}$$

级数的重排是相互的，即级数 (7.3.2) 是级数 (7.3.1) 的重排；同样，级数(7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排. 这两个级数的部分和分别记作 S_n 与 T_n.

证明：(1) 我们首先证明定理对收敛的正项级数成立.

假设级数 (7.3.1) 为收敛的正项级数，且其和为 S，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. 对重排后的级数 (7.3.2) 有

$$T_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}.$$

记 $m_k = \max\{n_1,\ n_2, \cdots,\ n_k\}$，则

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} \le \sum_{i=1}^{m_k} a_i = S_{m_k} \le S.$$

所以，重排后级数的部分和有界，从而重排级数收敛；设其和为 T. 则

$$T = \lim_{k\to+\infty} T_k \le S.$$

级数 (7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排，故，$S \le T$. 从而有

$$T = S.$$

(2) 下面再证明定理对任意绝对收敛级数成立.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛，记

$$a_n^+=\frac{1}{2}\left(|a_n|+a_n\right),\quad a_n^-=\frac{1}{2}\left(|a_n|-a_n\right),\ (n=1,2,\cdots).$$

显然，$a_n^+\geq 0$，$a_n^-\geq 0$；且 $a_n^+\leq |a_n|$，$a_n^-\leq |a_n|$，故正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+$、$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-$ 都收敛；且 $a_n=a_n^+-a_n^-$，从而有 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-$.

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 重排后得到新的级数，记作 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'$. 其对应的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^+$，$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^-$ 分别是级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+$、$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-$ 的重排，由(1)可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^+=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^-=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^+-\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'^-=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

即绝对收敛级数重排后所得级数依然收敛，且其和不变.

但条件收敛级数重排后所得到的级数不一定收敛，即使收敛其和也不一定是原级数的和.

在本章第 5 节中，有如下结论

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots \tag{7.3.3}$$

两边同乘 $\frac{1}{2}$ 后，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln 2&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\\&=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots\end{aligned}$$

两式相加，有

$$\frac{3}{2}\ln 2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots \tag{7.3.4}$$

式 (7.3.4) 是式 (7.3.3) 的重排，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛，其重排后所得到的级数尽管收敛，但其和发生了变化.

§7.4　幂级数及其和函数

本章讨论由幂函数列$\{a_n(x-x_0)^n\}$ (a_n，x_0 为实常数，$n=0,1,2,\cdots$) 构成的函数项级数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots. \tag{7.4.1}$$

称上述级数为**幂级数**. 它是一类最简单的函数项级数，可看成多项式函数的延伸. 幂级数在理论和实际中，都有着广泛的应用.

下面着重讨论$x_0=0$的幂级数，即

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \tag{7.4.2}$$

的形式. 在式 (7.4.1) 中，令$x-x_0=u$，就得到关于u的形如式 (7.4.2) 的幂级数.

一、 幂级数及其收敛半径

对于幂级数 (7.4.2)，当$x=0$时一定收敛；但x取其它值时，级数未必收敛. 由所有收敛点组成的集合称为幂级数的**收敛区间**或**收敛域**. 我们首先讨论幂级数在哪些点是收敛的，在哪些点是发散的？为此，我们引进下面定理.

定理 7.4.1（阿贝尔定理）　若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0\neq 0$处收敛，则对满足不等式$|x|<|x_0|$的所有 x 都收敛且绝对收敛；若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0\neq 0$处发散，则对满足不等式$|x|>|x_0|$的所有x都发散.

证明： 级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nx_0^n=0$. 从而存在 $M>0$，对$\forall n\in\mathbb{N}$有

$$|a_nx_0^n|\le M.$$

当$|x|<|x_0|$时，记$r=\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1\ (x_0\neq 0)$,有

$$|a_n x^n|=|a_n x_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leq M\ r^n.$$

而级数$\sum_{n=0}^{+\infty}M\ r^n$收敛，因此，级数$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n x^n|$也收敛.

故，当$|x|<|x_0|$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$绝对收敛.

定理的第二部分可用反证法证明.

设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$在$x=x_0$处发散，若存在$|\overline{x}|>|x_0|$，且$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n \overline{x}^n$收敛. 根据上面的结论，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x_0^n$ 在$x=x_0$处绝对收敛,这与其发散矛盾.

根据定理 7.4.1，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$，若在$x=x_0\neq 0$处收敛，则在区间$(-|x_0|,|x_0|)$内该幂级数绝对收敛；若在$x=x_0\neq 0$处发散，则在区间$[-|x_0|,|x_0|]$外该幂级数均发散.

推论 7.4.2 如果幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$不在整个实数轴上收敛，也不是仅在$x=0$处收敛，则存在正数$r$使得幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$有

(1) 当$|x|<r$时，幂级数绝对收敛；

(2) 当$|x|>r$时，幂级数发散.

当$x=-r$或$x=r$时，幂级数可能收敛也可能发散.

上面推论中的正数r称为幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的**收敛半径**；再由幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$x=\pm r$处的收敛情况可确定其收敛域：$(-r，r),(-r，r],[-r，r),[-r，r]$. 我们称上述区间为幂级数的**收敛区间或收敛域**.

如果幂级数仅在$x=0$处收敛，其收敛半径$r=0$;如果幂级数在整个实数轴上都收敛，则其收敛半径$r=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

定理 7.4.3　对于幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l.$$

则该幂级数的收敛半径r满足

(1) 当$0<l<+\infty$时，$r=\frac{1}{l}$；(2) 当$l=0$时，$r=+\infty$；(3) 当$l=+\infty$时，$r=0$.

证明：记$u_n(x)=a^n x^n$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l|x|.$$

由达朗贝尔比值判别法

(1) 若$0<l<+\infty$，则当$l|x|<1$，即$|x|<\frac{1}{l}$时，幂级数收敛；当$|x|>\frac{1}{l}$时，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$发散，其通项$\left|a_n x^n\right|$不趋向于 0；从而幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$也发散. 故幂级数的收敛半径$r=\frac{1}{l}$.

(2) 如果$l=0$，则：对$\forall x\in R$均有$l|x|=0<1$，故，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$收敛. 从而，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$也收敛，因此，幂级数的收敛半径$r=+\infty$.

(3) 如果$l=+\infty$，除$x=0$外，其他点处幂级数都发散，故$r=0$.

类似地，可利用柯西根值判别法得到幂级数收敛半径的计算.

定理 7.4.4 对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho.$$

则该幂级数的收敛半径r满足

(1) 当$0<\rho<+\infty$时，$r=\dfrac{1}{\rho}$;

(2) 当$\rho=0$时，$r=+\infty$

(3) 当$\rho=+\infty$时，$r=0$.

例7.4.5 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区间.

解： 因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，所以幂级数的收敛半径$r=1$.

当$x=1$时，调和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$发散;

当$x=-1$时，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛.

综上可得，幂级数的收敛区间是：$[-1,1)$.

例7.4.6 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间.

解：【方法一】：令$x^2=t$，考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4.$$

所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$的收敛半径$r=\dfrac{1}{4}$.

因此，当$t=x^2<\dfrac{1}{4}$，即$|x|<\dfrac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$收敛；

当$t=x^2>\dfrac{1}{4}$，即$|x|>\dfrac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$发散.

所以，幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径$r=\frac{1}{2}$.

当$x=\pm\frac{1}{2}$时，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$的敛散性.

记$a_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$,有

$$a_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2n}.$$

因此，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$发散，所以，幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间是$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

【方法二】: 记$u_n(x)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4x^2.$$

因此，当$4x^2<1$，即$|x|<\frac{1}{2}$时，幂级数收敛；当$4x^2>1$，即$|x|>\frac{1}{2}$时，幂级数发散. 所以，幂级数的收敛半径$r=\frac{1}{2}$.

当$x=\pm\frac{1}{2}$时，级数发散. (理由如**方法一**)

所以，幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间是$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$.

例7.4.7 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$的收敛区间.

解：记$x-1=t$，考虑幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{3^n\cdot n}$. 有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}.$$

因此，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{3^n\cdot n}$的收敛半径$r=3$.

当 $t=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；当 $t=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛区间为 $[-3, 3)$.

故，当 $-3\le x-1<3$，即 $-2\le x<4$ 时，幂级数收敛.

所以，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛区间是 $[-2, 4)$.

二、 幂级数和函数的分析性质

假设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛区间为 I，定义区间 I 上的函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \ (\forall x\in I).$$

称 $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的**和函数**. 幂级数和函数 $S(x)$ 的定义域即为幂级数的收敛域 (收敛区间).

幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{7.4.3}$$

经过逐项求导，逐项求积后，分别得到幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_{n-1}x^n+\cdots \tag{7.4.4}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \tag{7.4.5}$$

可以证明，这三个幂级数中，有一个幂级数的收敛半径为 r，则另外两个幂级数的收敛半径也是 r. 即，幂级数经过逐项求导或求积后，其收敛半径不变. 但收敛域有可能发生变化. 请读者自己举例说明.

幂级数的和函数有很多重要的性质，下面不加证明给出这些性质，具体证明读者可参考一般“数学分析”教材.

定理 7.4.8（和函数的连续性） 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛区间为$I$，则它的和函数$S(x)$在区间$I$上连续.

定理 7.4.9（和函数的逐项可积性） 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛区间为$I$，则它的和函数$S(x)$在$I$的任何有限子区间$[a, b]$上都可积，且有

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

特别地，对$\forall x \in I\ (x \neq 0)$有，

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

即，幂级数的和函数在收敛区间内可积，且可逐项求积.

定理 7.4.10（和函数的逐项可导性） 设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径为$r > 0$，和函数为$S(x)$，则在$(-r, r)$内$S(x)$可导，且有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

即幂级数在收敛开区间$(-r, r)$内可导，且可逐项求导.

下面我们利用上面幂级数的三个分析性质，来计算某些幂级数的和函数.

三、 幂级数的和函数

下面可以看到，我们常常利用几何级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.\ (-1 < x < 1)$$

来求其它幂级数的和函数.

例7.4.11 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解：由例 (7.4.5) 可知，幂级数的收敛区间是$[-1,1)$. 记$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$，则

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

两边同时求积，有

$$S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x).\ (-1\le x<1)$$

例7.4.12 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$的和函数.

解：由例 (7.4.7) 可知，幂级数的收敛区间是$[-2,4)$.

记$\frac{x-1}{3}=t$,由上题可得

$$S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}=-\ln(1-t).\ (-1\le t<1)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}=S(\frac{x-1}{3})=-\ln(1-\frac{x-1}{3})=\ln 3-\ln(4-x).\ (-2\le x<4).$$

例7.4.13 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$的收敛区间与和函数.

解： (1) 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$的收敛半径$r=1$; 当$x=\pm1$时，级数均发散;因此，幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

(2) 记$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1.$$

两边同时求导

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=xS(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.\ (-1<x<1)$$

例7.4.14 计算：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+2)}{3^n}$.

解：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n$, 容易得到，该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 又

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n.$$

记 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^n$, $S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$，其收敛域均为 $(-1,1)$.

由于

$$S_1(x)=x^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)''\right)=x^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)''=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$S_2(x)=x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

则

$$S(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{3x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}.\ (|x|<1)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+2)}{3^n}=S(\frac{1}{3})=3.$$

§7.5　函数的幂级数展开

一、泰勒级数

上一节讨论了幂级数的和函数，且所求的和函数在收敛开区间 $(-r，r)$ $(r>0)$ 内存在任意阶导数；反过来，给定函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某领域内有任意阶导数，是否存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{7.5.1}$$

成立？

在式 (7.5.1) 成立时，又如何确定 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$？

在本教材上册泰勒定理一节中，曾介绍过：若 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内存在 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \tag{7.5.2}$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

在式 (7.5.2) 中，若令 $n\to+\infty$，右边的幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

是否收敛？若收敛，是否收敛于 $f(x)$？

定理 7.5.1　如果式 (7.5.1) 在 $|x-x_0|<r(0<r\le+\infty)$ 时成立，则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.(n=0,1,2,\cdots) \tag{7.5.3}$$

特别地，记 $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

证明：假设式 (7.5.1) 在$|x-x_0|<r\ (0<r\le+\infty)$时成立，有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

在区间$(x_0-r，x_0+r)$内两边求导，有

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+\cdots.$$

再令$x=x_0$，有

$$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),\cdots，a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\cdots.$$

因此

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

定理 7.5.2（泰勒定理） 设$f(x)$在x_0的某领域内存在任意阶导数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

定义 7.5.3 以式(7.5.3) 为系数的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称为$f(x)$在$x=x_0$处的**泰勒级数**；特别地，在$x_0=0$处的泰勒级数称为**麦克劳林级数.**

定理 7.5.2 的证明作为练习由读者自行完成.

由上面定理可知，若函数$f(x)$在某区间$|x-x_0|<r(x>0)$内可以展开成关于$(x-x_0)$的幂级数，即式 (7.5.1) 成立，则所得的幂级数必为$f(x)$

在 $x=x_0$ 处的泰勒级数. 即函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数展开式是唯一的，这便是函数幂级数展开的唯一性.

二、 常见函数的幂级数展开

例7.5.4 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的麦克劳林级数.

解：由于 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$，则：$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$；且其余项

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(x+1)!}x^{n+1}.\text{(其中：}0<\theta<1，n=1,2,\cdots)$$

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，取 $M>0$ 使得 $|x|\le M$，则

$$|R_n(x)|\le\frac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n.$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$，记 $u_n=\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+2}=0.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$ 收敛，从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$.

根据泰勒定理，有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ (-\infty<x<+\infty).$$

特别地，当 $x=1$ 时，有

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

进一步，有

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}.(0<\theta_n<1)$$

此结论的证明由读者自行完成，根据此结论容易证明 e 为无理数.

例7.5.5 求 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数.

解： 由于 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$, 则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}(m=1,2,\cdots).$$

且其余项

$$R_n(x)=\frac{\sin[\theta x+\dfrac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}.\ (0<\theta<1)$$

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$， 取$M>0$ 使得 $|x|\le M$ ，有

$$|R_n(x)|\le\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.\ (n\to+\infty)$$

所以

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

同样，有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (-\infty<x<+\infty).$$

下面不加证明给出函数 $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林级数.

例7.5.6 求函数 $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林级数.

解： 根据泰勒定理可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (-1<x\le 1).$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ \ (-1<x<1).$$

特别地，当 $x=1$ 时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

上面我们根据泰勒定理给出了一些常见函数的麦克劳林级数，下面我们根据一些已知函数的麦克劳林级数，利用幂级数的分析性质计算某些函数的麦克劳林级数或泰勒级数.

例7.5.7 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的麦克劳林级数.

解：根据例 (7.5.6)，取 $\alpha=-1$ 有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1).$$

则
$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

两边求定积分

$$\arctan x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为 $-1\le x\le 1$，所以

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1\le x\le 1).$$

例7.5.8 求函数 $f(x)=\arcsin x$ 的麦克劳林级数.

解：在例 (7.5.6) 中，令 $\alpha=\frac{1}{2}$，用 $(-x^2)$ 代替 x,可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

两边求定积分 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$

$$=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+\cdots. \quad (-1<x<1)$$

例7.5.9 将函数 $f(x)=\sin^2 x$ 展开为 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的泰勒级数.

解：令 $x-\frac{\pi}{4}=u$，则

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2u)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}. \quad (-\infty<x<+\infty)$$

例7.5.10 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$ 展开成关于 $(x-1)$ 的幂级数，并计算 $f^{(n)}(1)$ 的值．$(n=1,2,\cdots)$.

解： 由于

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{4}-1}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{2}+1}.$$

而

$$\frac{1}{\frac{x-1}{4}-1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}\ (-3<x<5)\text{；}$$

$$\frac{1}{\frac{x-1}{2}+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\ (-1<x<3)\ .$$

因此

$$f(x)=-\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}-1}{3\times 2^{2n+3}}(x-1)^n.\ (\text{其中：}\ -1<x<3)$$

由此可得， $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n+1}-1}{3\times 2^{2n+3}}$.

根据幂级数泰勒展开式的唯一性，有

$$f^{(n)}(1)=n!a_n=\frac{[(-1)^{n+1}2^{n+1}-1]n!}{3\times 2^{2n+3}}.\ (n=1,2,\cdots)$$

例7.5.11 计算： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{\ln(1+x^2)(e^{-x^3}-1)}$.

解： 由于

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5),$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{\ln(1+x^2)(e^{-x^3}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{x^2\cdot(-x^3)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\right]-x^3}{x^5}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{4}.$$

例7.5.12 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ 的收敛区间与和函数.

解：(1) 记 $u_n(x)=(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)}$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{2n}\cdot x^2=0.$$

所以，级数的收敛半径为 $+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$，当 $x=0$ 时，$S(0)=0$;

当 $x\neq 0$ 时,有

$$\int_0^x\frac{2S(x)}{x}dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-x\right)=\frac{\sin x-x}{x}.$$

因此

$$\frac{2S(x)}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

【注】：本题还可以用下面方法求解.

由于 $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，则

当 $x\neq 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$，因此

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)}=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

三、 幂级数在近似计算中的应用

运用幂级数的展开可以近似计算许多初等函数在某些点处的函数值，如三角函数、根式函数、指数函数与对数函数等，也可根据函数的展开式近似计算某些函数的定积分值，并且可根据幂级数展开式的余项 $R_n(x)$ 估计所得近似值的误差.

例7.5.13 计算 $\ln 2$ 的近似值，并使误差不超过 10^{-4}.

解： 由于当 $-1<x\leq 1$ 时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

其误差(余项)

$$|R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta)^{n+1}}\right|\leq\frac{1}{n+1}.$$

如果误差要求不超过 10^{-4}，则要运算到 $n=10^4$. 计算量很大，下面对上面的计算方法做进一步的修正.

将展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\ (-1<x\leq 1).$$

用 $(-x)$ 代替 x，有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\ (-1\leq x<1).$$

两式相减，有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)\quad(-1<x<1).$$

令$\frac{1+x}{1-x}=2$，则：$x=\frac{1}{3}$. 将其代入上式，有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

若取前 4 项作为$\ln 2$的近似值，则其误差

$$R_4=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\cdots\right)<\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\times 3^9}<\frac{1}{70000}<10^{-4}.$$

于是，有

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931.$$

例7.5.14　计算定积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$的近似值，要求误差不超过$10^{-4}$.

解：由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可补充定义$\frac{\sin x}{x}$在$x=0$处的函数值为$1$，则：函数$\frac{\sin x}{x}$在$[0,1]$上连续，积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$为常义积分.

由$\sin x$的麦克劳林展开，可得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots.$$

所得到的级数为交错级数，取前 3 的和，其误差$R_4\le\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<10^{-4}$.

所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.9461.$$

习题 7.1

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

(1) 写出该级数的前 5 项，并求该级数前 n 项的部分和 S_n；

(2) 根据级数收敛的定义判断级数是否收敛？若收敛，求级数的和.

2. 求 8 进制无限循环小数$(24.076076076\cdots)_8$的值.

3. 求下列级数的前 n 项的部分和，并根据级数敛散性的定义，判断级数是否收敛？若收敛，求该级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$；

(5) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$；　　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

4. 证明：若级数$\sum a_n$ 收敛，则 $\sum ka_n$(k 为实常数) 也收敛；反之是否成立？

5. 对于级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$，下列陈述是否正确？为什么？

(1) 若$\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都发散，则：$\sum(a_n+b_n)$ 也发散；

(2) 若$\sum a_n$收敛，$\sum b_n$发散，则：$\sum (a_n + b_n)$必发散.

6. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$也收敛；反之成立吗？

若不成立 请举例说明，并给出在级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛的条件下，

级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充要条件.

7. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$.

8. 试举例说明：若级数$\sum a_n$对某固定的正整数p满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right)=0.$$

此级数仍可能发散.

习题 7.2

9. 用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(1+\dfrac{1}{n})-1\right]$；

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\mathrm{e}-(1+\dfrac{1}{n})^n\right]$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left[\sqrt[n]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right]$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$.

10. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n+1}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\tan\dfrac{\pi}{3^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{5^n-3^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}\,(a>0)$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3}$；

11. 用适当的方法判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$；

(3) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})$；　(4) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln n)^p}$；

(5) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$；　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$；　(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}dx}$；

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}$；　(10)* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$. $(a>0)$

12. 利用级数收敛的必要条件证明下列等式

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n!}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

13. 对收敛的正项级数 $\sum a_n$.

(1) 证明：当 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum n^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sqrt{a_n}$ 也收敛；

(2) 当 $\alpha=0$ 时，上面级数是否收敛？若不收敛请举出反例.

14. 若$a_n > 0$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = q$，试证：

(1) 当$q > 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛; (2) 当$0 \le q < 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

15. 设$x_n (n = 1,2,\cdots)$为方程$\tan x = x$的正根，且从小到大排列，试证：

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$收敛.

16. 已知正项数列$\{a_n\}$严格单调递增，求证：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\text{收敛}.$$

习题 7.3

17. 判别下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+3}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$；　　(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}$；

18. 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足：$a_n\le b_n\le c_n\ (n\in N^+)$，若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$均收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛.

19. 讨论级数$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$的敛散性. $(\alpha\in R)$

20. 若级数$\sum a_n$收敛，数列$\{b_n\}$满足$\lim_{n\to+\infty}b_n=1$，试问：级数$\sum a_nb_n$是否收敛？若收敛，请证明你的结论；若发散，请举反例说明.

21. 若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$条件收敛，试问：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$是否收敛？为什么？(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$收敛吗？为什么？

22. 设$f(x)$在$x=0$的某领域内有 2 阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a(a\geq 0)$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$的敛散性.

23. 设 $f(x)$ 为偶函数，且在 $x=0$ 的某领域内有二阶连续导数，$f(0)=1$，$f''(0)=2$. 试证：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(f(\dfrac{1}{n})-1\right)$绝对收敛.

24. 设$a_n>0$，且$\{a_n\}$单调递减，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$发散，试判断级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=e^x-1+\int_0^x tf(x-t)dt$.

试证：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$条件收敛.

26. 设$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$，证明：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$收敛.

27. 用阿贝尔或狄利克雷判别法判别下列级数的敛散性*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}\ (x>0)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}\ (0<x<2\pi，\ \alpha>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos^2 n}{n}$.

28. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛，证明：当 $q > p$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^q}$ 收敛.

29. 设 $a_n > 0$，且 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 的敛散性.

习题 7.4

30. 求下列幂级数的收敛区间

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3^n}{n^2}+\dfrac{n}{2^n}\right)x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{n(\ln n)^\alpha}\,(\alpha<1)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^3(2x-1)^{2n}}{(3n)!}$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 3^n x^{2n}$.

31. 求下列幂级数的收敛区间与和函数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n-1}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$.

32. 证明下列级数收敛，并计算级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

33. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

习题 7.5

34. 证明 Taylor 定理.

35. 将 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 Maclaurin 级数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

36. 将下列函数展开成关于 x 的幂级数，并求其收敛区间

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(2) $(x+1)e^{2x}$；

(3) $\sin^2 x$；

(4) $\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$；

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}$；

(6) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(7) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(8) $\dfrac{1}{x^2-5x-14}$；

(9) $\ln(2-x-x^2)$；

(10) $\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

37. 设 $f(x)=\sin 3x\cos x$，计算： $f^{(n)}(0).\ (n=1,2,\cdots)$

38. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并计算 $f^{(n)}(0).\ (n=1,2,\cdots)$

39. 计算：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{n!}$ 的值.

40. 利用函数的幂级数展开，计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2[\ln(1+x)-\sin x]+x^2}{x(\sqrt{1-2x}-1)\cdot\arcsin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\arcsin x}{\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}-1)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\cos x)-2\sin^2 x}{x^4}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{\ln(1-2x^3)\cdot\arcsin x}$.

41. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\displaystyle\int_b^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=c$ (c 为实常数)，求：常数 a、b、c 的值.

42. 当 $x\to 0$ 时，$\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^t\cos t dt-x-\dfrac{x^2}{2}$ 与 Ax^n 为等价无穷小，求：常数 A 与 n 的值.

43. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛区间与和函数，并计算 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}2^n$ 的值.

44. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x^2-6x-4)^n}{n\cdot 12^n}$ 的收敛域与和函数.

45. 将下列函数在指定点 x_0 处展开成 Taylor 级数

(1) $\ln(x+1)$，$x_0=2$； (2) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$，$x_0=-2$.

46. 利用函数幂级数的展开式，计算下列定积分的近似值

(1) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}dx$ (精确到 10^{-4})； (2) $\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{x^3+1}$ (精确到 10^{-4}).