

第八章  
组合变形

1

第八章 组合变形

§8.1 组合变形和叠加原理

§8.2 拉伸或压缩与弯曲的组合

§8.3 偏心压缩与截面核心

§8.4 扭转与弯曲的组合

§8.x 承压薄壁圆筒的强度计算

2

§8.1 组合变形和叠加原理

1、概念

构件在荷载作用下发生两种或两种以上的基本变形, 则构件的变形称为组合变形。

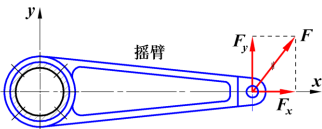
(1) 若其中一种是主要的, 其余变形引起的应力或变形很小, 则构件可按主要的基本变形进行计算。

(2) 当几种变形所对应的应力或变形属同一量级时, 则构件的变形则需要看成简单变形的组合。

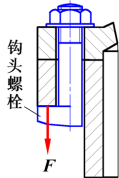
3

§8.1 组合变形和叠加原理

2、工程实例



弯拉组合  
横向载荷 + 轴向载荷



偏心拉伸  
外力平行但偏离轴线

4

§8.1 组合变形和叠加原理

2、工程实例



弯扭组合: 辘轳从深井中提水

5

§8.1 组合变形和叠加原理

2、工程实例



压弯组合: 吊车吊起重物

6

§8.1 组合变形和叠加原理

2、工程实例



压弯组合：吊车立柱的偏心压缩

7

§8.1 组合变形和叠加原理

2、工程实例



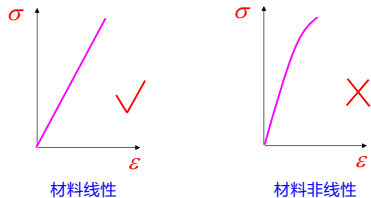
拉弯组合：钻床立柱的偏心拉伸

8

§8.1 组合变形和叠加原理

3、处理组合变形的的基本方法：叠加法

内力，应力，应变，变形等与外力之间成线性关系。



材料线性

材料非线性

11

§8.1 组合变形和叠加原理

3、处理组合变形的的基本方法：叠加法

1) 外力分析

将外力简化并沿主惯性轴分解，将组合变形分解为基本变形，使之每个力（或力偶）对应一种基本变形。

2) 内力分析

求每个外力分量对应的内力方程和内力图，确定危险截面。分别计算每一种基本变形下构件的应力和变形。

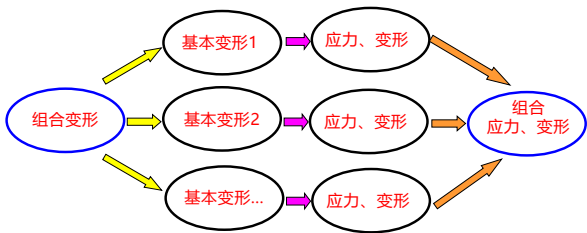
3) 应力分析

画出危险截面的应力分布图，利用叠加原理将基本变形下的应力和变形叠加，建立危险点的强度条件。

12

§8.1 组合变形和叠加原理

3、处理组合变形的的基本方法：叠加法



组合变形

基本变形1

基本变形2

基本变形...

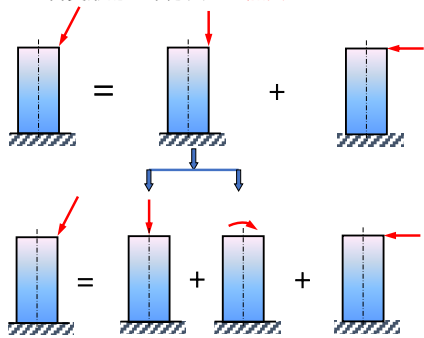
应力、变形

组合应力、变形

13

§8.1 组合变形和叠加原理

3、处理组合变形的的基本方法：叠加法



组合变形

基本变形1

基本变形2

基本变形...

应力、变形

组合应力、变形

14

第八章 组合变形

§8.1 组合变形和叠加原理

§8.2 拉伸或压缩与弯曲的组合

§8.3 偏心压缩与截面核心

§8.4 扭转与弯曲的组合

§8.x 承压薄壁圆筒的强度计算

15

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

1、受力特点

图示折杆ABC，已知杆各段的横截面面积均为A，弯曲刚度均为EI。试求自由端截面C的水平和铅垂位移。

解：(2) C截面的竖直位移

截面C的竖直位移主要三部分组成：

$$w_{y1} = \frac{Pa^3}{3EI} (\downarrow) \quad w_{y2} = \frac{2Pa^3}{EI}$$

(3) 由AB杆压缩变形引起的竖直位移 $w_{y3}$ 。

$$w_{y3} = \frac{Pa}{EA}$$

16

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

1、受力特点

作用在杆件上的外力既有轴向拉(压)力，还有横向力。

2、变形特点

杆件将发生拉伸(压缩)与弯曲组合变形。

17

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

3、示例

$F_1$ ：产生弯曲变形  
 $F_2$ ：产生拉伸变形

$F_y$ ：产生弯曲变形  
 $F_x$ ：产生拉伸变形

18

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

4、内力分析

横截面上内力

1、拉(压) 轴力  $F_N$

2、弯曲：  
弯矩  $M_z$   
剪力  $F_S$

因为引起的剪应力较小，故一般不考虑。

19

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

5、应力分析

横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

(1) 拉伸引起的正应力  
$$\sigma_N = \frac{F_N}{A}$$

(2) 弯曲引起的正应力  
$$\sigma_M = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

(3) 二者方向均垂直于截面  
$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

20

## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

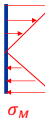
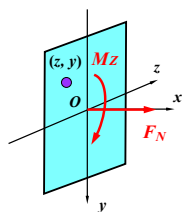
## 5、应力分析

横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

符号：



21

## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

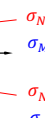
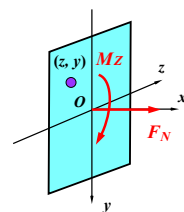
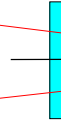
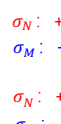
## 5、应力分析

横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

符号：



22

## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

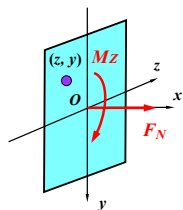
## 5、应力分析

横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

符号：

 $\sigma_N < \sigma_M$  $\sigma_N = \sigma_M$  $\sigma_N > \sigma_M$ 

23

## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

## 6、强度条件

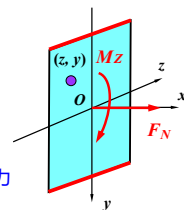
横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

由于危险点处的应力状态仍为单向应力状态，故其强度条件仍然为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$



24

## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

## 6、强度条件

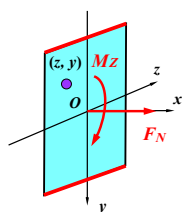
横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

注意：当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时，应分别校核杆件的拉、压强度条件。

$$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t] \quad \sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$$



25

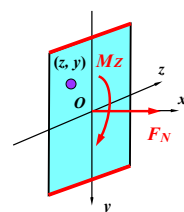
## §8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

## 6、强度条件

横截面上任意一点(z, y)处的正应力

计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$



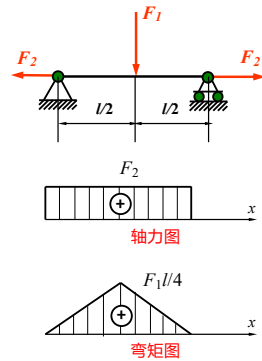
26

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.1

轴力  $F_N = F_2$ 弯矩  $M_{\max} = \frac{F_1 l}{4}$ 

杆的危险截面: 中间截面



27

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.1

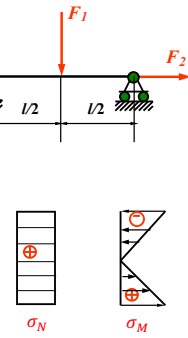
拉伸正应力  $\sigma_N = \frac{F_2}{A}$ 

最大弯曲正应力

$$\sigma_M = \pm \frac{M_{\max}}{W} = \pm \frac{F_1 l}{4W}$$

杆危险截面下边缘各点为危险点, 其拉应力为

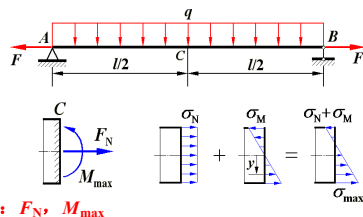
$$\sigma_{\max} = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_2}{A} + \frac{F_1 l}{4W}$$



28

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.2

内力:  $F_N, M_{\max}$ 

$$\sigma_N = \frac{F}{A} \quad \sigma_M = \frac{M_{\max} y}{I_z} \quad \sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max} y}{I_z}$$

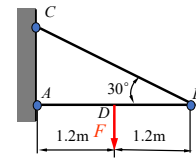
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

29

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.3

悬臂吊车如图所示。横梁用20a工字钢制成。其抗弯刚度  $W_z = 237 \text{ cm}^3$ , 横截面面积  $A = 35.5 \text{ cm}^2$ , 总受力  $F = 34 \text{ kN}$ , 横梁材料的许用应力为  $[\sigma] = 125 \text{ MPa}$ 。该校横梁AB的强度。



30

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.3

解: (1) 分析AB的受力情况

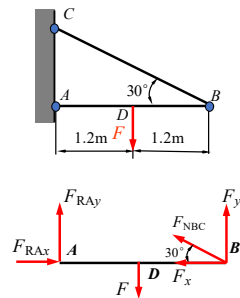
$$\sum m_A = 0$$

$$F_{NBC} \sin 30^\circ \times 2.4 - 1.2F = 0$$

$$F_{NBC} = F$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{RAx} = 0.866F$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{RAy} = 0.5F$$



31

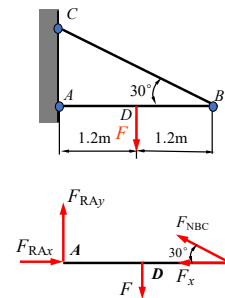
## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.3

解: (1) 分析AB的受力情况

AB杆为平面弯曲与轴向压缩组合变形。

中间截面为危险截面。最大压应力发生在该截面的上边缘。



32

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.3

解: (2) 压缩正应力

$$\sigma = -\frac{F_{RAX}}{A} = -\frac{0.866F}{A}$$

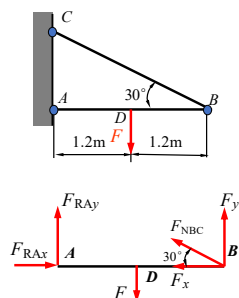
(3) 最大弯曲正应力

$$\sigma_{bmax} = \pm \frac{1.2F_{RAY}}{W_z} = \pm \frac{0.6F}{W_z}$$

(4) 危险点的应力

$$\sigma_{cmax} = \left| \frac{0.866F}{A} + \frac{0.6F}{W_z} \right|$$

$$= 94.37 \text{ MPa} < [\sigma]$$

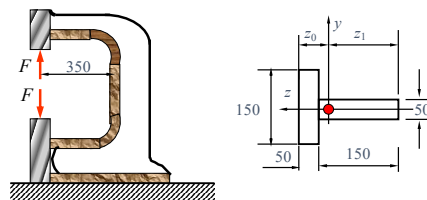


33

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.4

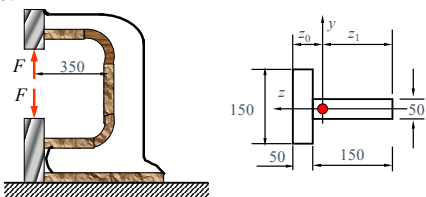
小型压力机的铸铁框架如图所示。已知材料的许用拉应力  $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$ ，许用压应力  $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$ 。试按立柱的强度确定压力机的许可压力  $F$ 。



34

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.4

解: (1) 确定形心位置  $A = 15 \times 10^{-3} \text{ m}^2$   $Z_0 = 7.5 \text{ cm}$ 

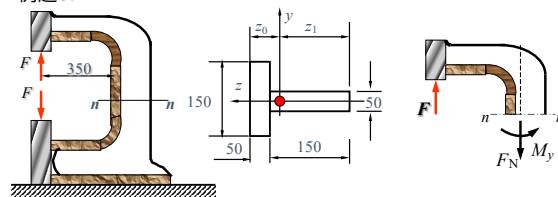
计算截面对中性轴的惯性矩

$$I_y = 5310 \text{ cm}^4$$

35

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.4



解: (2) 分析立柱横截面上的内力和应力

在  $n-n$  截面上有轴力  $F_N$  及弯矩  $M_y$ 

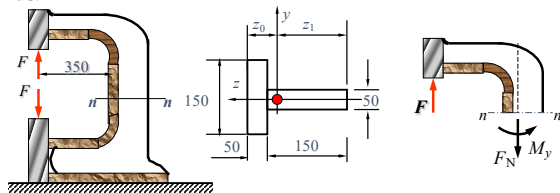
$$F_N = F$$

$$M_y = [(35 + 7.5) \times 10^{-2}] F = 42.5 \times 10^{-2} F$$

36

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.4



解: (2) 分析立柱横截面上的内力和应力

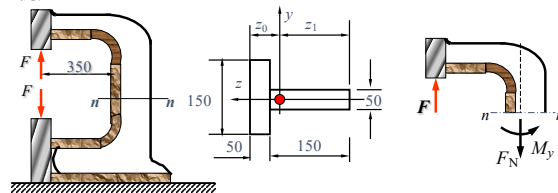
由轴力  $F_N$  产生的拉伸正应力为

$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{15} \text{ MPa}$$

37

## §8.2 拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合

例题8.4



解: (2) 分析立柱横截面上的内力和应力

由弯矩  $M_y$  产生的最大弯曲正应力为

$$\sigma''_{tmax} = \frac{M_y z_0}{I_y} = \frac{42.5 \times 7.5 F}{5310} \text{ MPa} \quad (+)$$

38

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

例题8.4

解：(2) 分析立柱横截面上的内力和应力  
由弯矩 $M_y$ 产生的最大弯曲正应力为

$$\sigma''_{cmax} = \frac{M_y z_1}{I_y} = \frac{425 \times 12.5 F}{5310} \text{ MPa} \quad (-)$$

39

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

例题8.4

解：(3) 叠加：在界面内侧有最大拉应力

$$\sigma_{tmax} = \sigma' + \sigma''_{tmax} = \frac{F}{15} + \frac{425 \times 7.5 F}{5310} \leq [\sigma_t]$$

→  $[F] \leq 45.1 \text{ kN}$

40

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

例题8.4

解：(3) 叠加：在界面外侧有最大压应力

$$\sigma_{cmax} = |\sigma' + \sigma''| = \left| \frac{F}{A} - \frac{425 \times 12.5 F}{5310} \right| \leq [\sigma_c]$$

→  $[F] \leq 171.3 \text{ kN}$

41

§8.2 拉伸（或压缩）与弯曲的组合

例题8.4

解：(4) 因此

$$[F] \leq 45.1 \text{ kN}$$

42

作业

图中所示悬臂梁中，集中力 $F_1$ 和 $F_2$ 分别作用在铅垂对称面和水平对称面内，并且垂直于梁的轴线。已知 $F_1=1.6 \text{ kN}$ ， $F_2=800 \text{ N}$ ， $l=1 \text{ m}$ ，许用应力 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ 。若截面为圆形，试确定梁的横截面尺寸。

8.2, 8.6

47