下面就这次考试的试卷情况做一个简单分析.

数列极限计算利用归结原理化为函数极限

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{\tan x+x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2 x}\right)$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x+x}{x}\cdot\frac{\arcsin x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+1)^2}\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

分母为一阶无穷小量，与分子一阶无穷小量匹配，再分拆即可.

注意：本题不能用洛必达法则；上课时比这更难的题目也讲过.

$$I=\lim_{x\to 0}\left(e^{(x+1)^2}\cdot\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=e.$$

4. $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x.$

$\left(\text{上课时例题，要求大家练习一下 } x^k\arctan x\ (k=0,1,2,-2-3)\text{ 的积分}\right)$

$$I=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+x)-x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

$$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x}=u}{=}2\int\arctan x\mathrm{d}x=\cdots\cdots.\ (\text{有根号去根号})$$

5. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

由于 $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t < \int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t < \int_1^2 \mathrm{e}^{-n}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-n}$.（函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-nt^2}$ 在 $t=1$ 处取最大值.）

而 $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t \ge \int_1^{1+\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-(n+1)}$，因此，$\frac{\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} \le \left(\int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \le \mathrm{e}^{-1}$.

所以
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_1^2 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

6. 不定积分与反常积分两题，请见教材 *P*149，不定积分部分.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right) = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = 0+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\bigg|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

7. 外摆线参数方程的导数计算，上课讲过哦；隐函数参数方程的极值讲过吧.

而且摆线的最大值，应该是圆的直径吧！很明显啦.

8. 周期函数平均值证明，上课时也讲过.

9. 零点存在性证明，做差即可.

令 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$，则

$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0$，$g(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t > 0$.

根据零点存在定理，$\exists c\in(0,1)$ 使得 $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t = \int_c^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.

唯一性，证明求导即可：$g'(x) = f(x)+\frac{1}{f(x)} \ge 2$.

10. 第11题利普西斯连续证明，稍有难度，画个图很容易找到证明思路.

(1) 当 $x_1 < x_2 < x_3 \in (0,1)$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，

记 $\varphi(u，x_2)=\dfrac{f(u)-f(x_2)}{u-x_2}$，则 $\varphi(u)$ 在 $(0,1)$ 内关于 u 单调递增.

(2) 取定点 $c\in(0，a)$，$d\in(b,1)$，则：对 $\forall\, t_1 < t_2 \in [a，b]$ 有 $\left(\text{当 } t_1 = t_2 \text{ 时显然成立}\right)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(a)-f(t_1)}{a-t_1} \le \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \le \frac{f(t_2)-f(b)}{t_2-b} \le \frac{f(b)-f(d)}{b-d}.$$

(当 $t_1 = a$ 或 $t_2 = b$ 时，可略去中间两项.)

(3) 取 $L=\max\left\{\left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|,\left|\dfrac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right\}$，则

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right| \le \max\left\{\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|,\left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right\} = L \Rightarrow \left|f(t_1)-f(t_2)\right| \le L\left|t_1-t_2\right|.$$

11. 最后一题的证明方法很多很多.

【方法一】：题目中没有一阶导数的信息，在极小值点 $x=c$ 处 **Taylor** 展开.

再根据 $c\in(0,\frac{1}{2})$ 或 $c\in[\frac{1}{2},1)$ 分别讨论即可.

但不少同学用的是 **Piano** 余项形式，**Piano** 余项能用来精确证明吗？

上课讲过哦！

【方法二】：利用 **Darboux** 定理，反证：构造 $g(x)=f(x)-(4x^2-4x)$.

若结论不成立，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上为严格凸函数，而 $g(0)=g(1)=0$，因此，

对任意 $x\in(0,1)$ 有，$g(x)>0$. 这与 $f(x)$ 的最小值为 -1 矛盾.

(**Darboux** 定理可是证明“神器”哦！)

【方法三】：假设 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取最小值，则 $0<c<1$. 记

$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{c(1-c)}x(x-1)$，则：$g(0)=g(c)=g(1)=0$.

运用两次 **Rolle** 定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $g''(\xi)=0$.

因此 $\quad f''(\xi)=\dfrac{2}{c(1-c)}\ge 8.\quad\left(\text{当 } 0<c<1 \text{ 时，有 } c(1-c)\le\dfrac{1}{4}\right)$

还有其他方法可以证明，