附录I 平面图形的几何性质



为什么要研究平面图形的几何性质?

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \qquad \tau = \frac{T\rho}{I_P} \qquad \sigma = \frac{My}{I_z}$$

材料力学的研究对象为杆件，杆件的横截面是具有一定几何形状的平面图形。

杆件的承载能力，与截面大小和几何形状有关。

§I.1 静矩和形心

平面图形的几何性质包括：

形心

静矩

惯性矩

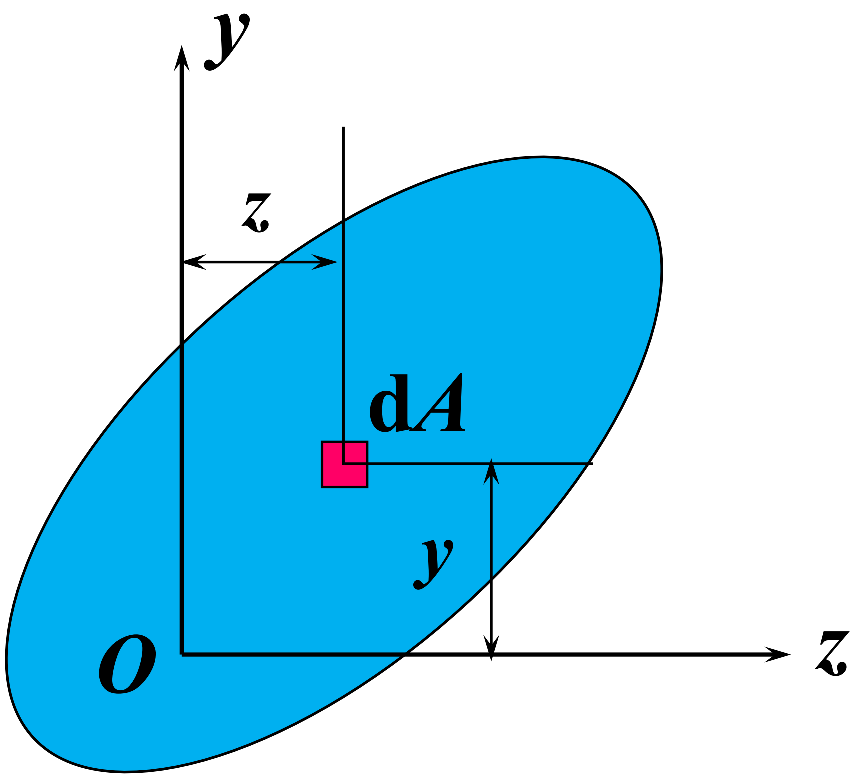
极惯性矩

惯性积

……

§I.1 静矩和形心

形心　平面图形的几何中心



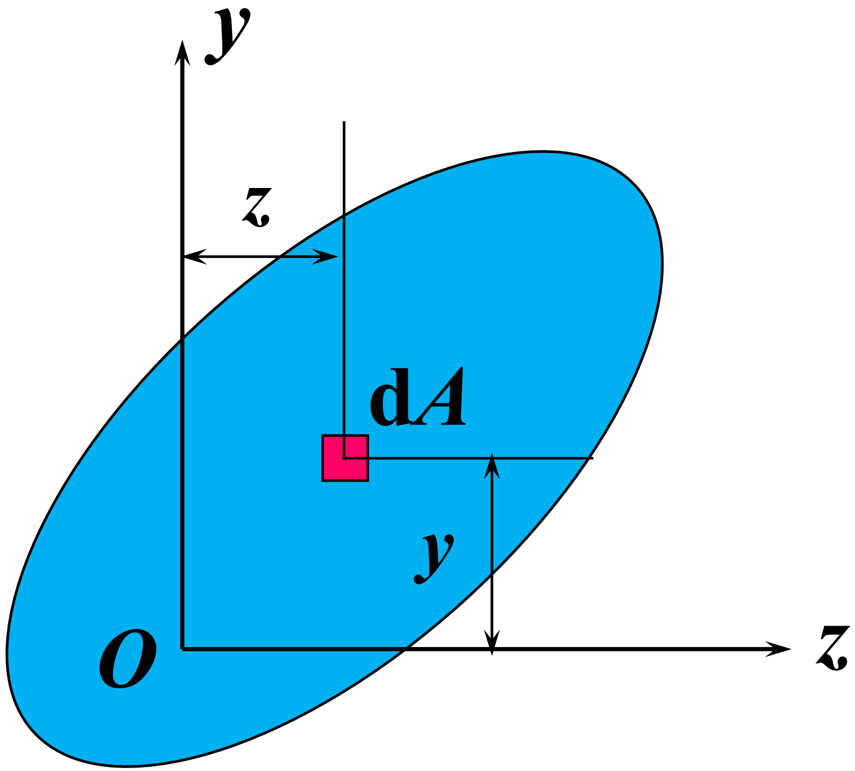
形心的计算公式

$$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{A}$$

$$z_C = \frac{\int_A z\,dA}{A}$$

§I.1 静矩和形心

静矩（面积矩）



面积的计算公式

$$A = \int_A \mathrm{d}A$$

整个图形对于y轴的静矩

$$S_y = \int_A z dA$$

整个图形对于z轴的静矩

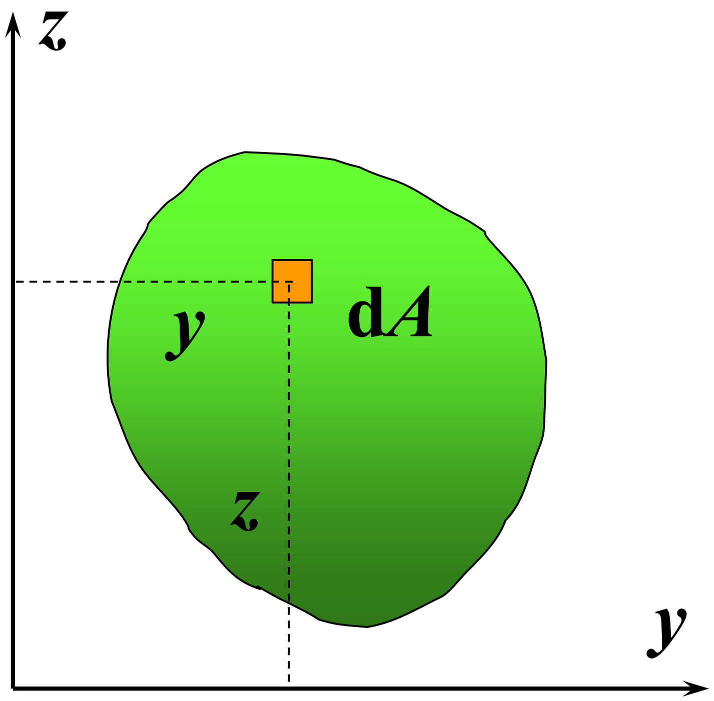
$$S_z = \int_A y dA$$

静矩与坐标轴的选取有关。

静矩与截面尺寸和形状有关。

单位：m^3 或 mm^3

静矩与形心的关系



形心 $$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{A} \qquad z_C = \frac{\int_A z\,dA}{A}$$

静矩 $$S_y = \int_A z\,dA \qquad S_z = \int_A y\,dA$$

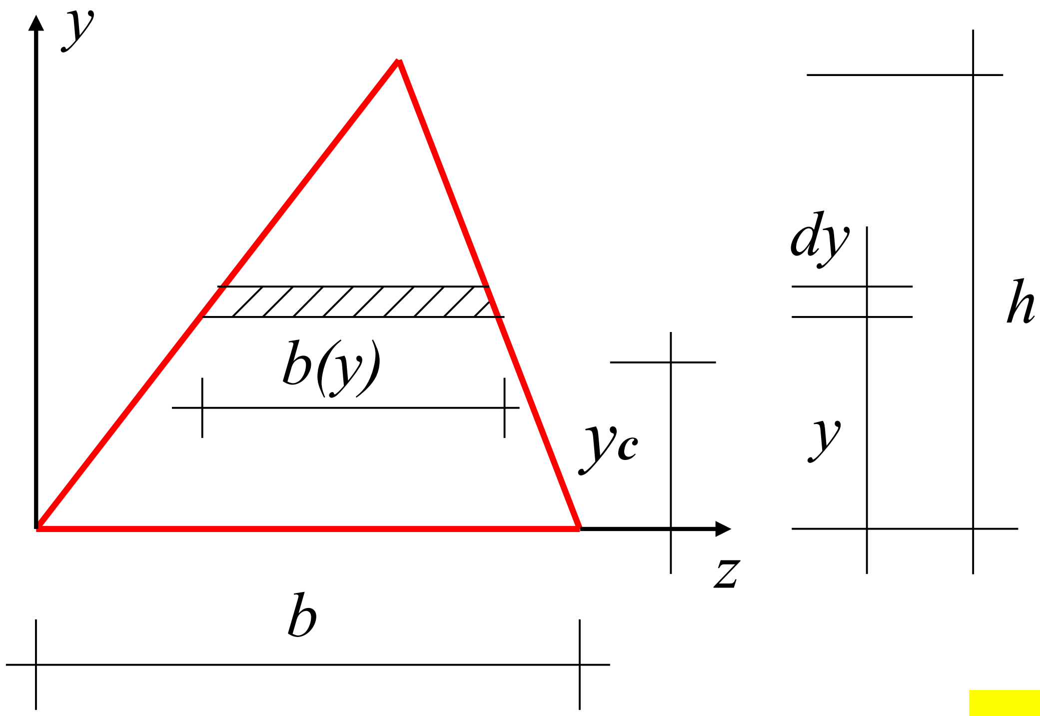
$$\boxed{S_z = y_C A} \qquad \boxed{S_y = z_C A}$$

平面图形的静矩S等于形心坐标乘以图形的面积A。

静矩为零意味着什么？

例题I.1

求三角形形心。



解：

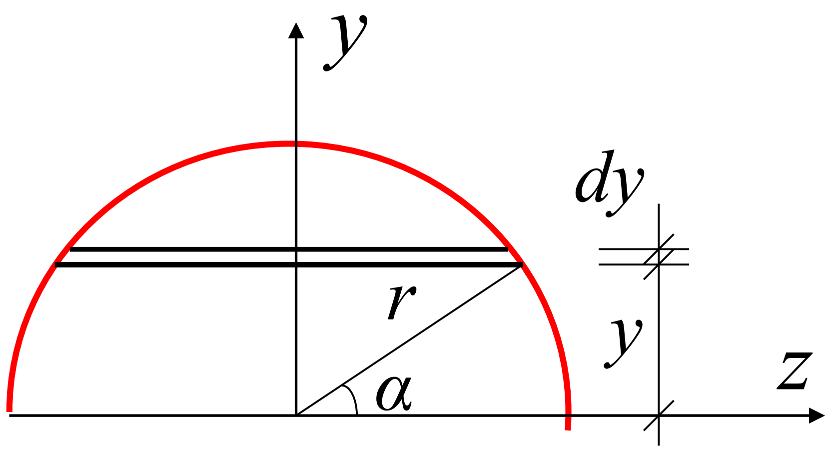
$$dA = b(y)dy$$
$$= b\cdot(h-y)/h\cdot dy$$

$$S_z = \int_A y dA$$
$$= \frac{b}{h}\int_0^h y(h-y)dy$$
$$= \frac{1}{6}bh^2$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

例题I.2

求半圆形形心。



解:

$$dA = 2r\cos\alpha dy$$

$$= 2r^2\cos^2\alpha d\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$dy = r\cos\alpha d\alpha$$

$$S_z = \int_A y dA = 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha \sin\alpha d\alpha = \frac{2}{3}r^2$$

$$y_c = \frac{4r}{3\pi}$$

§I.1 静矩和形心

组合截面的静矩和形心问题

- 将组合截面分解成简单图形
- 计算简单图形对轴的静矩
- 代数和即为组合截面对轴的静矩
- 计算截面形心。

组合截面的静矩和形心问题

- 将组合截面分解成简单图形
- 计算简单图形对轴的静矩
- 代数和相加即为组合截面对轴的静矩
- 计算截面形心。

$$S_z = A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2} + \cdots + A_n y_{Cn} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}$$

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

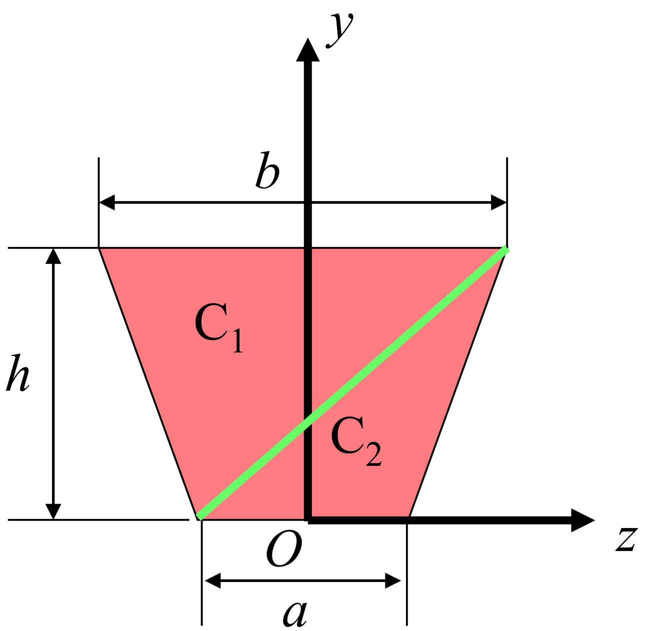
例题I.3　试确定图示梯形面积的形心位置，及其对底边的静矩。

解：图形对底边的静矩

$$S_z = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}bh\right)\left(\frac{2}{3}h\right) + \left(\frac{1}{2}ah\right)\left(\frac{h}{3}\right)$$

$$= \frac{h^2}{6}(a+2b)$$

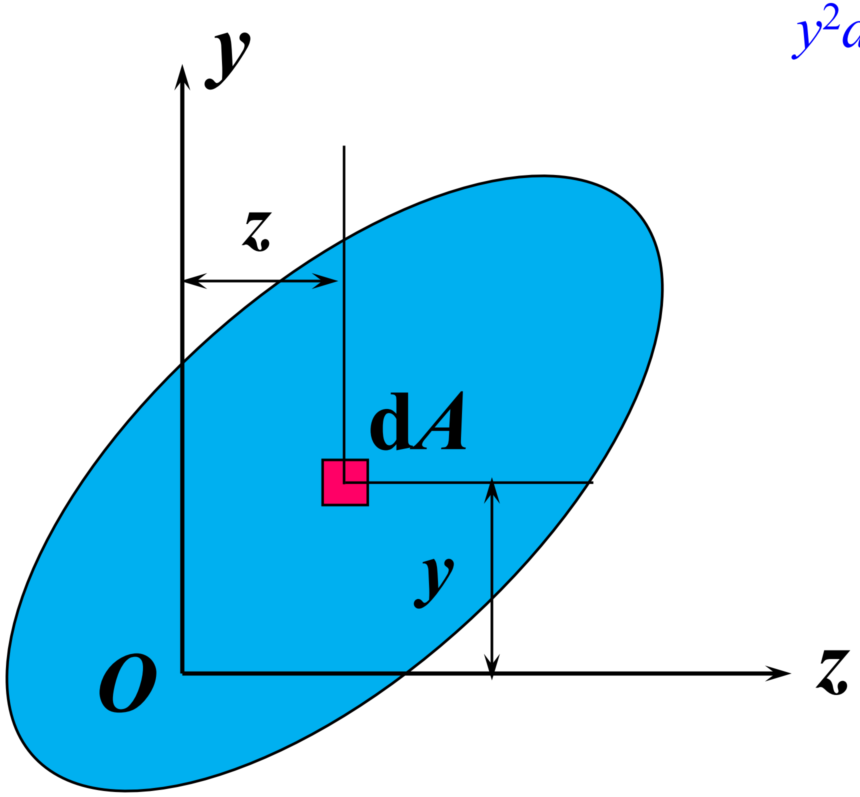


形心位置

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{h^2}{6}(a+2b)}{\frac{h}{2}(a+b)} = \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

§I.2 惯性矩、惯性积、极惯性矩和惯性半径

惯性矩



y^2dA：微面积dA对z轴的惯性矩。

整个图形对z轴的惯性矩

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

整个图形对y轴的惯性矩

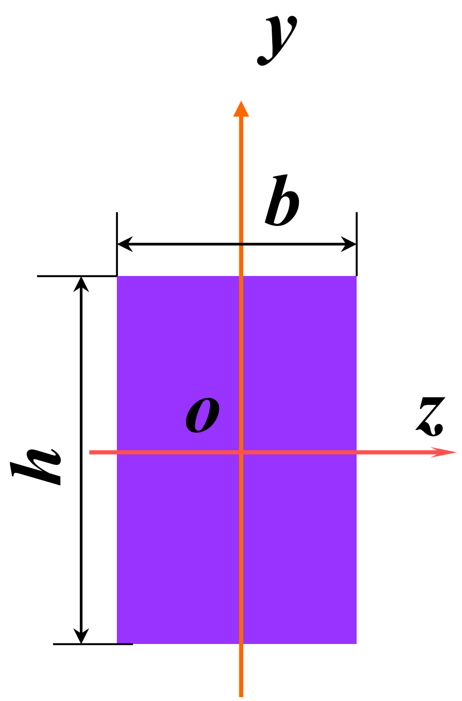
$$I_y = \int_A z^2 dA$$

面积的二次矩，单位：m^4或mm^4

整个图形对y轴和z轴的惯性半径

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

例题I.4 求矩形截面惯性矩。



解:

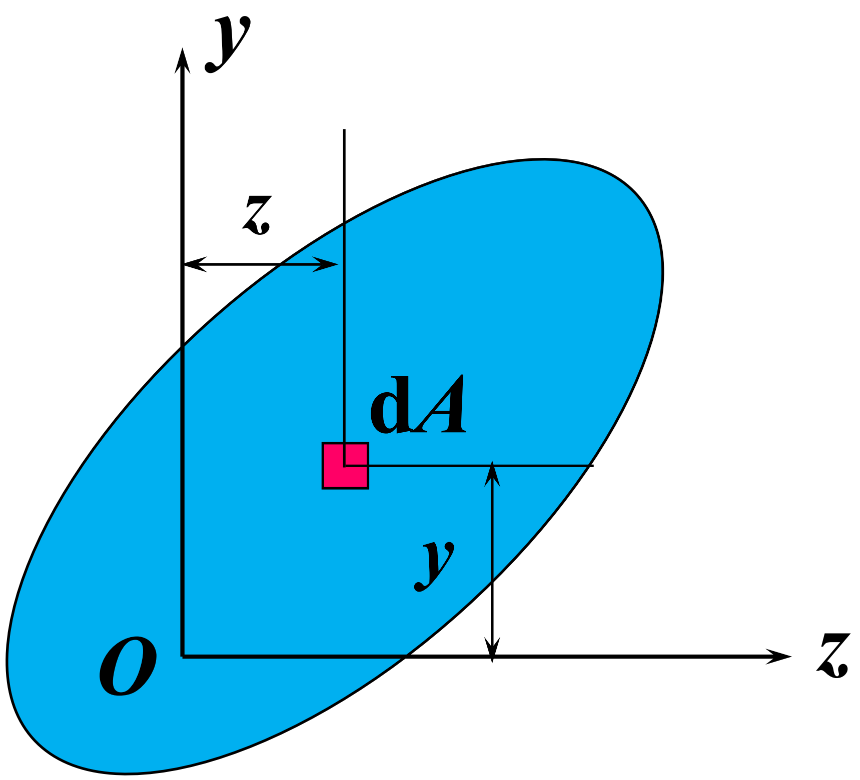
$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy$$

$$= b \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{bh^3}{12}$$

同理: $$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = h \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

惯性积



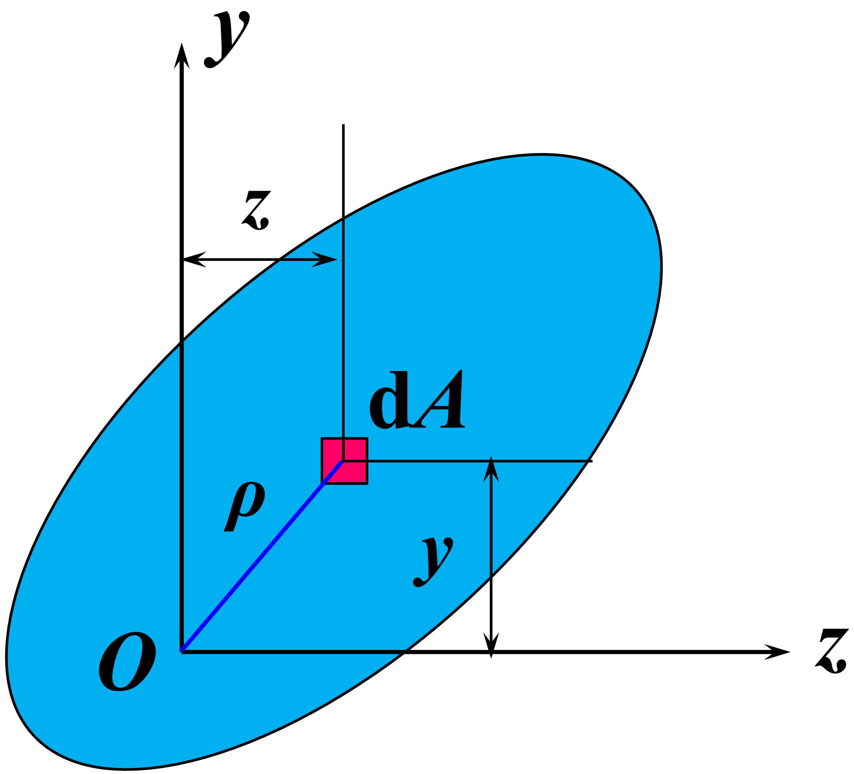
整个图形对y, z的惯性积

$$I_{yz}=\int_A yz\,dA$$

单位：m^4 或 mm^4

- 惯性积是对一个坐标系定义的；
- 若坐标系中有一根轴为平面图形的对称轴，则图形的惯性积为零。

极惯性矩



整个图形对O点的极惯性矩

$$I_P=\int_A \rho^2 dA$$

$$I_P=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A=\int_A \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}A$$

$$I_P=I_z+I_y$$

思考：极惯性矩与轴的选取有关吗？

平面图形的几何性质

1、整个图形对于y轴的静矩

$$\boxed{S_y = \int_A z dA}$$

静矩是代数量。可正、可负，也可为零。

2、均质物体的重心是几何中心。在平面图形中，称为形心。

$$\boxed{y_C = \frac{\int_A y dA}{A}} \qquad \boxed{z_C = \frac{\int_A z dA}{A}}$$

平面图形的几何性质

3、静矩和形心之间的关系

$$S_z = y_C A \quad , \quad S_y = z_C A$$

截面对通过形心轴的静矩等于零；如截面对轴的静矩等于零，该轴一定通过形心。

4、整个图形对z轴的惯性矩

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

惯性矩只能是正。

平面图形的几何性质

5、整个图形对O点的极惯性矩 $\boxed{I_P = \int_A \rho^2 dA}$

6、整个图形对y轴的惯性半径 $\boxed{i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}}$