浙江大学 2004－2005 学年冬季学期

《理论力学》课程期末考试试卷

开课学院：<u> 机械与能源工程 </u>，　　考试形式：开卷，允许带任何文字资料入场

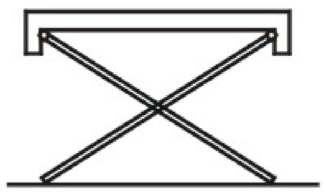
考试时间：2005 年 1 月 20 日，所需时间：<u>120 </u>分钟

考生姓名：________________学号：________________专业：__________________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

一．计算题

计算题（本题 20 分）：桌子的桌面 AB 受到梯形分布载荷的作用。AE 杆和 BD 杆分别在 A 点和 B 点桌面相铰接。AE 与 BD 杆铰接于 C 点。不计摩擦和各构件的重量，求铰链 A、C 处的约束反力。



解：先研究整体（图 2），将梯形分布载荷看作矩形和三角形分布载荷的叠加。矩形分布载荷的合力 F_1=100N/m×1.8m=180N;三角形分布载荷的合力 $F_2 = \frac{1}{2}$×1.8m×100N/m=90N，作用在距 B 端 0.6m 处。对整体

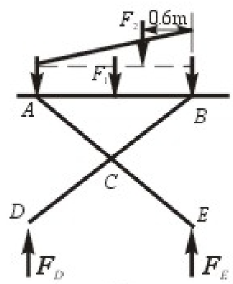


图2

$\sum M_D = 0 \quad F_E \times 1.8 - F_1 \times 1.2 = 0 \qquad F_E = 150$N

研究桌面 AB（图 3）

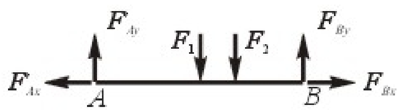


图3

$\sum M_B$=0　　$-F'_{Ay} \times 1.8 + F_1 \times 0.9 + F_2 \times 0.6 = 0 \qquad F'_{Ay} = 120$N

研究 ACE 杆（图 4）

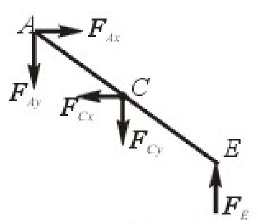


图4

$\sum M_C$=0　　$F_{Ay} \times 0.9 - F_{Ax} \times 0.6 + F_E \times 0.9 = 0 \qquad F_{Ax} = 405$N

$\sum F_x=0 \qquad F_{Cx}=F_{Ax}=405\text{N}$

$\sum F_y=0 \qquad F_E-F_{Ay}-F_{Cy}=0 \qquad\qquad F_{Cy}=F_E-F_{Ay}=30\text{N}$

二．计算题（本题 20 分）：图示机构中，套在 BC 杆上的套筒 E 可绕其中心 E 点转动，套筒 E 又与长为 $2\sqrt{2}r$ 的 ED 杆相铰接。在图示位置，AB 与 DE 两杆的角速度均为 w，角加速度均为零，ED 杆恰垂址直于 BC 杆，$\overline{BE}=\sqrt{2}r$，求此时 BC 杆的角速度 w_{BC} 和角加速度 a_{BC}。

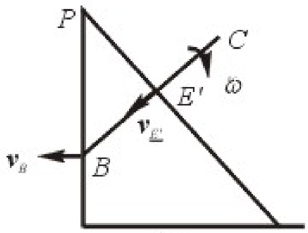


图1

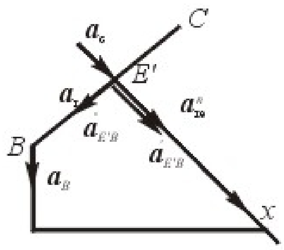


图2

解：以 BC 杆上与 E 重合点 E' 为动点，动系固结于套筒 E。故牵连速度，牵连加速度即 DE 杆上 E 点之 $\overline{v_E}$、$\overline{a_E}$

速度分析（图 1），v_B 已知，v_D＝r w，E 点相对速度，牵连速度均沿 BC，故 $\overline{v_E'}$（绝对速度）必沿 BC，BC 杆速度瞬心这 P，$\overline{PB}$＝2r，w_{BC}＝v_B/PB＝r w/2r＝w/2（↙）

加速度分析（图 2）$\overline{a_B}$＝rw^2（↙），E' 点的 $\overline{a_r}$ 沿 BC，$\overline{a_e{}^n}$ 由 E' 指向 D，$a_e{}^n=2\sqrt{2}$ rw^2

$\overline{a_c}=2\overline{w}_e\times\overline{v_r}$，$w_e=w_{BC}=w/2$

E' 点的绝对速度 $v_a=PE'w_{BC}=\sqrt{2}r\cdot\frac{w}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}rw(【)$

E' 点的牵连速度 $v_e=ED\mathrm{g}w=2\sqrt{2}rw(【)$

E' 点的相对速度 $v_r=v_e-v_a=(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})rw(\mathbf{Z})$

故 $a_c=2\mathrm{g}\frac{w}{2}\mathrm{g}(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})rw=(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})rw^2$

E' 点绝对加速度为 $\overline{a}_a=\overline{a^n}_e+\overline{a}_r+\overline{a}_c$…………（1）

对平面运动的 BC 杆，用基点法求 $\overline{a}_{E'}$

$\bar{a}_{E'} = \bar{a}_B + \overline{a^t}_{E'B} + \overline{a^n}_{E'B}$…………（2）

（1）（2）两式左边相等，故$\overline{a^n}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c = \bar{a}_B + \overline{a^t}_{E'B} + \overline{a^n}_{E'B}$

上式投影于 x 轴：$2\sqrt{2}rw^2 + (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw^2 = rw^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^t{}_{E'B}$

$a^t{}_{E'B} = 3\sqrt{2}rw^2(\,]\,)$　　　$a_{BC} = \frac{a^t{}_{E'B}}{BE'} = 3w^2(\,]\,)$（本题运算简而概念性强）

解法二：

解：以套筒上的 E 为动点，动系固结于 BC 杆，此时动系作平面运动。$\bar{v}_e \bar{a}_e$ 即 BC 杆与 E 点的重合点E'点的$\bar{v}_{E'}$和$\bar{a}_{E'}$

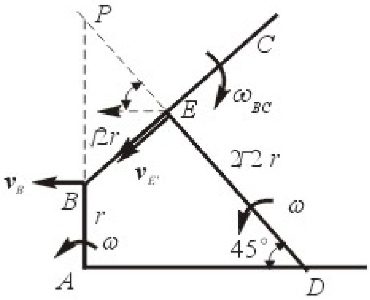


图1

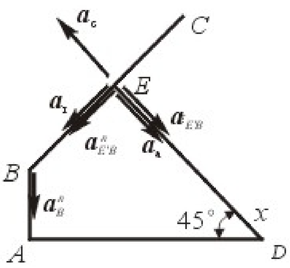


图2

速度分析：动点的$\bar{v}_r$沿 BC 杆，$\bar{v}_a$在此瞬时恰好沿 BC 杆、故$\bar{v}_e \perp \overline{AB}$，由此确定 BC 杆的速度瞬心为 P，且

$w_{BC} = \frac{v_B}{BP} = \frac{rw}{2r} = \frac{w}{2}(\,]\,)$

$\bar{v}_{E'} = EP \cdot w_{BC} = \sqrt{2}r \cdot \frac{w}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}rw(\,[\,)$

因$v_{E'} = v_e$，而$v_e = v_a = 2\sqrt{2}rw(\,[\,)$，故

相对速度$v_r = v_a - v_e = (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw(\,[\,)$　　$\frac{3\sqrt{2}}{2}rw^2$

加速度分析：$\bar{a}_a = \overline{a^n}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c$…………（1）

式中：$a_c = 2\sqrt{2}rw^2$，由 E 指向 D（图 2），

$\bar{a}_r$沿 BC，$\bar{a}_e$即$\bar{a}_{E'}$，而$\bar{a}_{E'} = \overline{a^n}_B + \overline{a^t}_{E'B} + \overline{a^n}_{E'B}$…………（2）

$\bar{a}_c = 2\bar{w}_e \times \bar{v}_r$　其中$w_e = w_{BC} = \frac{w}{2}(\,]\,)$　$v_r = (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw(\,[\,)$，故

$a_c = 2 \times \frac{w}{2} \times (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw = (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw^2(\,\wedge\,)$

将（2）式代入（1）式，并投影于 x 轴，得$2\sqrt{2}rw^2 = rw^2\frac{\sqrt{2}}{2} + a^t{}_{E'B} - (2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})rw^2$

故 $a^{t}{}_{E'B}=3\sqrt{2}rw^{2}$ ( ]) $a_{BC}=\dfrac{a^{t}{}_{E'B}}{BE'}=3w^{2}$ ( ])

三．计算题（本题 24 分）：匀质细杆 OC 和 AB 的质量分别为 m 和 4m，两杆在 C 点相铰接。OC 杆绕过 O 点的水平轴转动。AB 杆的 A 端可在光滑平面上滑动，O、A 两点在同一水平线上。OC＝r，AC=CB=2r。在图示瞬时，已知 OC 杆的角速度为 w，角加速度为零，$\angle COA=90°$。求此瞬时（1）、AB 杆的角加速度 a_{AB}；（2）、AB 杆在 A、C 两处受到的约束反力；（3）、支座 O 的反力；（4）、两杆运动到水平位置时两杆的角速度。

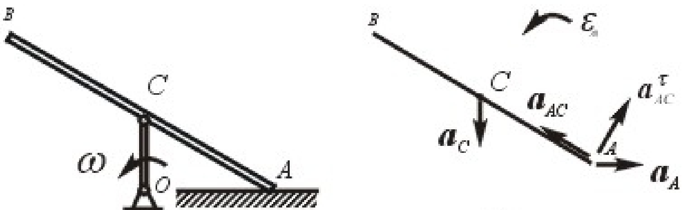


图1

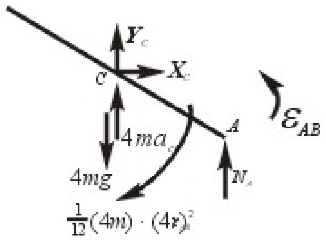


图2

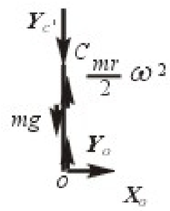


图3

解：（1）如图一，$a_c=rw^{2}(\downarrow)$

$\overline{a}_A=\overline{a}_c+\overline{a^{t}}_{AC}+\overline{a^{n}}_{AC}$ （**Q** 瞬时平动）

投影铅垂轴

$0=-rw^{2}+2re_{AB}\cos 30°$

$\therefore e_{AB}=w^{2}/\sqrt{3}$ (^)

（2）虚加局惯性力研究 AB 杆“平衡”（图二）

$\sum M_C=0$

$N_A \cdot 2r\cos 30°-\dfrac{1}{12}(4m)\cdot(4r)^{2}e_{AB}=0$

$\therefore N_A=\dfrac{16}{9}mrw^{2}$

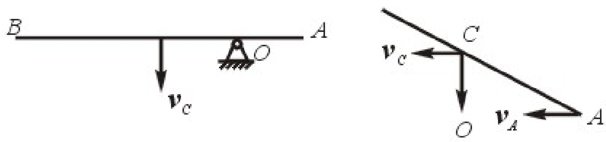
$\sum Y=0 \quad N_A+Y_C+4ma_C-4mg=0$

$Y_C=4m(g-a_C)-N_A=4mg-\dfrac{25}{9}mrw^{2}$

$\sum X=0 \quad X_C=0$

（3）研究 OC（图三）$\sum Y=0 \quad Y_O+\dfrac{mr}{2}w^{2}-mg-Y_C'=0$

$\therefore Y_O=Y_C'+mg-\dfrac{mr}{2}w^{2}=5mg-\dfrac{113}{18}mrw^{2} \quad \sum X=0 \;\; X_O=0$



（4）两杆水平时，$\overline{v}_c\downarrow$，设 OC 杆角速度为 w_1，则其动能为 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}mr^{2})w_1{}^{2}$。因 $\overline{v}_A$ 一

直水平，由 $\bar{v}_c$ 方向知，A 为 AB 杆的速度瞬心 $w_{AB} = v_C/2r = rw_1/2r = w_1/2$，AB 杆动能为 $\frac{1}{2}J_A w^2{}_{AB} = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}\cdot 4m\cdot(4r)^2](\frac{w_1}{2})^2 = \frac{8}{3}mr^2w_1{}^2$，初动能：OC 杆 $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}mr^2)w^2$，AB 杆（瞬时平动）：$\frac{1}{2}\cdot 4m\cdot(rw)^2 = 2mr^2w^2$

动能定理 $(\frac{1}{6}mr^2w_1{}^2 + \frac{8}{3}mr^2w_1{}^2) - (\frac{1}{6}mr^2w^2 + 2mr^2w^2) = mg\cdot\frac{r}{2} + 4mg\cdot r$

得出 $w_1 = \sqrt{(\frac{27g}{r} + 13w^2)/17}$ (^)

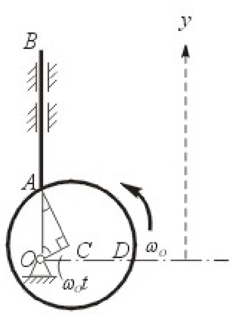
$$w_{AB} = \frac{w_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{27g}{r} + 13w^2)/17} \text{ (^)}$$

四．辨析题（本题包括 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）：以下各小题的解法是否正确？如认为有错误，请说明错在哪里？

1. 偏心凸轮的偏心距 OC＝b，轮半径 r=$\sqrt{3}b$。凸轮以匀角速度 w_o 绕 O 轴转动。设某瞬时 OC 与 CA 成直角，试求此瞬时从动杆 AB 的速度与加速度。

解：用求导法求解。以 O 为坐标原点， y 轴向上为正。因 AB 杆平动，A 点的速度和加速度即 AB 杆的速度和加速度。记 $\angle COD = w_o t$，显然，$\angle CAO = \angle COD = w_o t$ 于是，

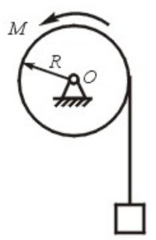
$$y_A = \overline{OA} = \sqrt{3}b/\cos w_o t = \sqrt{3}b\sec w_o t$$



将上式对时间 t 求导一次得 $\dot{y} = \nu_{AB}$，再求一次得 $\ddot{y} = a_{AB}$（具体求导结果略）

答：错在关系式 $\angle CAO = \angle COD = w_0 t$ 仅在 $\angle ACO = 90°$ 的特定情况下才成立，一般搁置时无此关系。而求导法必须建立任何时刻均成立的几何关系式。（答出划红线部分可给满分）

2. 起重卷筒半径为 R，对转轴的转动惯量为 J_1，卷筒受到的主动转矩为 M。被提升重物的质量为 m，求重物上升的加速度。



解：以卷筒和重物组成的系统为研究对象，列出刚体定轴转动微分方程：

$$J\alpha = (J_1 + mR^2)\cdot\alpha = M - mgR$$

故　　$a = Ra = {(M - mgR)R}\big/{(J_1 + mR^2)}$，加速度方向朝上。

答：错在 $J = J_1 + mR^2$ 这一步。重物作平动，从未定义过。平动刚体对某轴的转动惯量，若把重物看作质点，它到转轴 O 的距离是不断变化的，并非 R。正确做法是应用动量矩定理 $\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_1 w + mRw\mathrm{g}R) = (J_1 + mR^2)a = M - mgR$

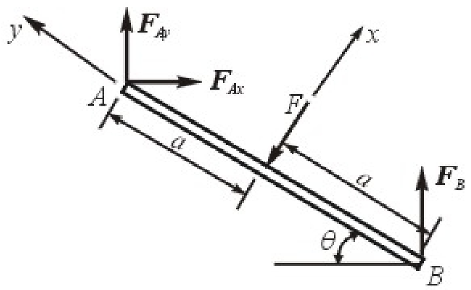
$a = Ra = {(M - mgR)R}\big/{(J_1 + mR^2)}$，加速度方向朝上。

常见错：$Ja = J_1 a = M - mgR$ 得 3 分，只说不对，未指明错处，且列出正确解法，得 3 分。

3. AB 杆受到平面力系作用而平衡。其中 A、B 处的约束反力未知，B 处为活动铰支座，只有一个约束反力，其余力的大小、方向、作用点均已知。

解：用如下方程求未知力：$\sum M_A = 0$　，$\sum M_B = 0$　，$\sum F_X = 0$　。……（具体方程式略具体方程式略）

答：错在：用二力矩式方程求解平面任意力系的平衡问题时，两矩心的连线 AB 不应垂直于 x 轴，否则，力系虽满足平衡方程，却是可能不平衡的（如合成为过 AB 的合力）。在现在情况下，第三个方程不是独立的，可由前两个方程得出。因此无法求出三个未知力。将原题作简化，列出方程：



（1）$\sum M_A = 0$　　$F_B \mathrm{g} 2a\cos q - Fa = 0$

$$F_B = \frac{F}{2\cos q}$$

（2）$\sum M_B = 0$　　$-F_{Ax}\mathrm{g}2a\sin q - F_{Ay}\mathrm{g}2a\cos q + Fa = 0$

（3）$\sum F_x = 0$　　$-F + F_B\cos q + F_{Ay}\cos q + F_{Ax}\sin q = 0$

将 F_B 代入（3），显见（3）式与（2）相同。

$\sum M_A = 0$　$\sum M_B = 0$ 已说明力系不可能合成为力偶，如果力系不平衡，它只能合成为过 $\overline{AB}$ 的合力，或者说合力在垂直于 $\overline{AB}$ 方向的投影必为零，因而方程 $\sum F_x = 0$ 就是多余的。

4. 图示为曲柄滑槽机构，均质曲柄 OA 绕水平轴 O 作匀角速度转动。已知曲柄 OA 的

为 m_1，OA＝r，滑槽 BC 的质量为 m_2（重心在点 D）。滑块 A 的重量和各处摩擦不计。求当曲柄转至图示位置时，滑槽 BC 的加速度、轴承 O 的约束力以及作用在曲柄上的力偶矩 M。

解：以图示机构为研究对象。设初位置时机构静止，曲柄 OA 水平，图示位置为末位置，此时 OA 的角速度为 w，滑块 A 速度为 n，且 $n = rw \cdot \sin j$，由系统的动能定理得

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 r^2)w^2 + \frac{1}{2}m_2(rw\sin j)^2 = Mj - m_1 g \cdot \frac{r}{2}\sin j$$

上式两边对时间 t 求导，考虑到 $\frac{dj}{dt} = w$，$\frac{dw}{dt} = 0$ 解得

$$M = \frac{1}{2}m_1 gr\cos wt + \frac{1}{2}m_2 r^2 w^2 \sin 2wt$$（其余不知量的求解过程略）

答：错在 M 并非常量，所作之功不能用 Mj 计算。可改用动能定理的微分形式，M 所作之元功为 Mdj。

五．能力素质测试题（在以下三小题中，任选两题，每小题 6 分，答对两题为满分 12 分。若解答三题，则以得分最高的两题计分。）

1. 一头粗、一头细的匀质铁棒的质心在 C 点。在 C 点的正上方 D 点处焊接一根细铁丝，并用细铁丝将铁棒悬挂起来。铁棒将在什么位置（答铁棒的轴线在水平位置、铅垂位置或某一倾斜位置）保持平衡？为什么？

如果过 C 点沿垂直轴线方向钻了一个小孔，孔里穿过一条刚性的细杆，将细杆水平放置并使铁棒绕细杆转动。此时铁棒将停在什么位置？

答：铁丝悬挂铁棒的悬挂点 D 略高于重心 C（图 1），根据二力平衡公理，仅当重力和线拉力共线，即棒水平时才能平衡；若棒略有倾斜（图 2），重力和线拉力将不共线，此两力组成的力偶将迫使铁棒重新回到水平位置。

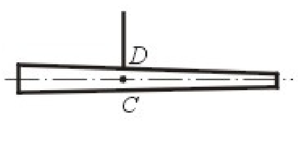


图1

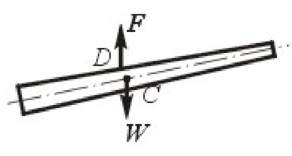


图2

中心钻孔的铁棒是严格地支承在它的重心上的。中心钻孔的铁棒转动时，其重心位置和势能始终保持不变，因此它能在任何位置上保持平衡（即停住），这是随遇平衡问题。许多人认为它“会停在水平位置”，是受“线挂铁棒”的影响。这种习惯思维模式，对正确分析问题是很有害的。

2.　你坐在凳子上，两脚离地、搁在凳子的横档上。你能否连人带凳从房间的一端到达另一端？如果不能，请说明理由。如果能，请说明是什么外力作用的结果。

答：能。外力是地极对凳子的摩擦力。只答“能”，给 3 分，说“重力”－1，与利用假肢走路一样，两脚离地后，可把凳子当作你的脚，人凳系统移动的原因和你能用双脚在房间里走动一样，靠的是地面的摩擦力。不过人凳的移动更需要技巧。

3.　载货汽车紧急制动时，前、后轮停止转动，沿路面滑行。如果货车的重心位置设计不当，或货物的安放位置不当，紧急制动将引发事故。有人说，此时货车将前轮抬起，绕后轮转动，最终翻车，四轮朝天；也有人说，货车将后轮抬起，绕前轮转动，最终也是四轮朝天式的翻车。第三种意见认为，货车可能向任何方向翻转。你认为哪种说法对？请说明理由。

答：以汽车连同货物为研究对象。其受力如右图所示。虚加惯性力 $\overline{F}_{IR}$ 后，假想系统“平衡”。由 $\sum M_B = 0$，可求出 F_{N1}。在此式中，$\overline{Q}$ 和 $\overline{F}_{IR}$ 均产生逆时过境方向的矩，因此 $\overline{F}_{IR}$ 如 F_{N1} 增加，由 $\sum M_A = 0$，可求出 F_{N2}。在此式中，$\overline{Q}$ 和 $\overline{F}_{IR}$ 分别产生顺时针方向和逆时针方向的矩，因此 $\overline{F}_{IR}$ 使 $\overline{F}_{N2}$ 减少。可见惯性力使前轮反力增大而后轮反力减小，有使汽车绕前轮翻转的趋势。