内容提要

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 能量法求固有频率
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动

振动类型

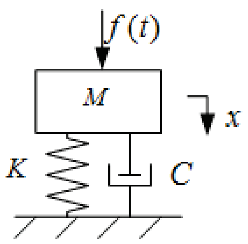
按激励特性划分：

- **自由振动** - 没有外部激励，或者外部激励除去后，系统自身的振动。
- **强迫振动** - 系统在作为时间函数的外部激励下发生的振动，这种外部激励不受系统运动的影响。
- **自激振动** - 系统由系统本身运动所诱发和控制的激励下发生的振动。
- **参激振动** - 激励源为系统本身含随时间变化的参数，这种激励所引起的振动。

一、基本假设

1 基本假设（1）

- 系统运动只沿一个方向，只用一个坐标就可以定义。
- 系统仅由三个基本元件（质量元件、弹性元件和阻尼元件）组成，且构成下图模型。



1 基本假设（2）

- 系统参数全部为常数，系统是**线性、时不变**参数系统
  - 线性系统的定义
    - 齐次性
    - 叠加性

对于一个函数 y=f(x) 来说，如果他有线性性，则必须要满足两个法则：比例性和叠加性

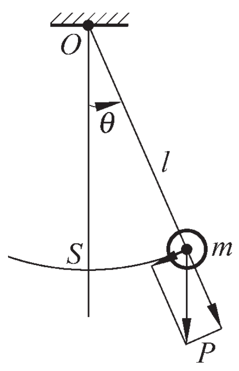
1. **比例性**：对于任意的 a ，都有 $ay = f(ax)$ 成立，即 x 扩大倍， y 也扩大 a 倍。
2. **叠加性**：若 $y_1 = f(x_1)$ ， $y_2 = f(x_2)$ ，则 $(y_1 + y_2) = f(x_1 + x_2)$

  - 系统可以采用常系数、线性常微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2 x = f(t)$$

1 基本假设（3）

- 举例——单摆：可绕轴转动的细长杆加上端部的重锤(杆的质量和锤的体积可忽略不计)，组成单摆。



力学方程

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

数学方程

$$l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

简化方程

$$l\ddot{\theta}+g\theta=0\ (\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6}+\cdots)$$

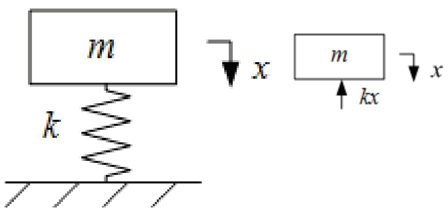
二、无阻尼自由振动

2 无阻尼自由振动

- 物理模型和数学方程
- 特征方程和无阻尼自由振动的解
- 系统的固有频率
- 实例分析

2.1 物理模型和数学方程

- 无阻尼—— $c=0$
- 自由振动—— $f(t)=0$
- 初始条件—— $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0$



力学方程： $m\ddot{x}=-kx$

数学方程：

$$m\ddot{x}+kx=0$$

2.2 特征方程和无阻尼自由振动的解（1）

- 数学模型

$$m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow \ddot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=0,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

特征方程

令 $x=Be^{\lambda t},B\neq 0$

$$\lambda^2Be^{\lambda t}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}Be^{\lambda t}=0 \longrightarrow \lambda^2+\omega_{\mathrm{n}}^{2}=0$$

$$\longrightarrow \lambda_1=\mathrm{i}\omega_n,\lambda_2=-\mathrm{i}\omega_n$$

特征值

2.2 特征方程和无阻尼自由振动的解（2）

- 数学模型的解

$$x = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

将 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ 代入，得：

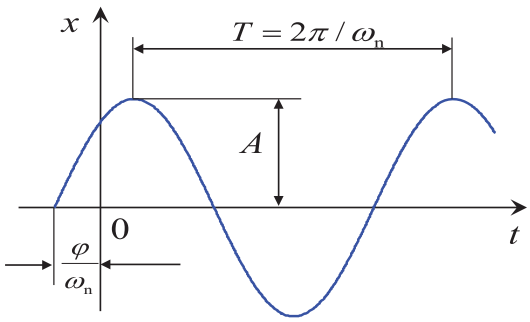
$$\begin{cases} B_1 = \left(x_0 + \dfrac{v_0}{\mathrm{i}\omega_n}\right) \Big/ 2 \\ B_2 = \left(x_0 - \dfrac{v_0}{\mathrm{i}\omega_n}\right) \Big/ 2 \end{cases}$$

2.2 特征方程和无阻尼自由振动的解（3）

- 数学模型的解

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2},$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{x_0\omega_n}{v_0}$$

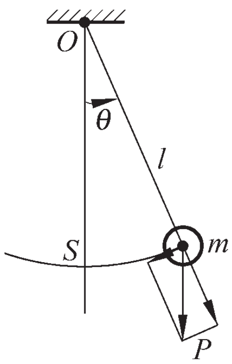
2.3 系统的固有频率

- 系统的固有频率仅和系统参数有关，和初始条件无关。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.4 实例分析（1）

- 单摆：可绕轴转动的细长杆加上端部的重锤(杆的质量和锤的体积可忽略不计)，试确定重锤的运动方程及振动固有频率。



•运动方程

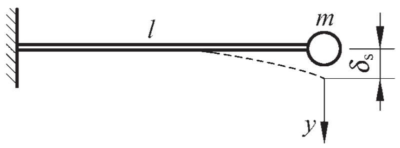
$$l\ddot{\theta}+g\theta=0$$

•固有频率

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad 或 \qquad f_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

2.4 实例分析（2）

- 一轻质悬臂梁，长为l，弯曲刚度为EI，其中自由端有一个集中质量m。列出系统振动的运动方程，确定其固有频率。



•梁右端横向振动时的弹簧常数

$$k = \frac{F}{\delta_s} = \frac{F}{Fl^3/3EI} = \frac{3EI}{l^3}$$

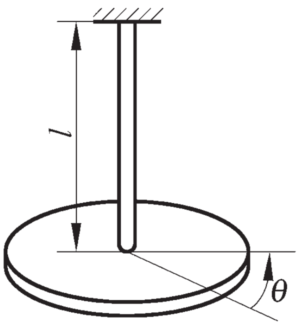
•运动方程 $m\ddot{y} + \frac{3EI}{l^3} y = 0$

•固有频率

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} \quad 或 \quad f_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

2.4 实例分析（3）

- 扭摆，如图所示。圆轴的扭转弹簧系数为k(N·m/rad)，质量不计，圆盘对转轴的转动惯量为I。设有力矩作用在圆盘上，使圆盘转过某一角度θ后突然释放，求扭摆的振动微分方程及固有频率。



•运动方程

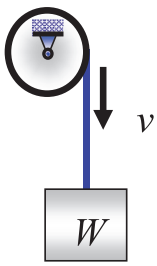
$$I\ddot{\theta}+k\theta=0$$

•固有频率

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{k}{I}} \quad 或 \quad f_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}}$$

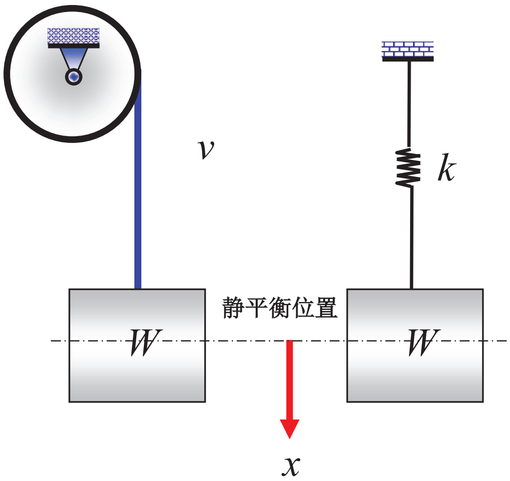
2.4 实例分析（4）

- 提升机系统：提升重物重量 $W=1.47\times10^{5}\,\mathrm{N}$ ，钢索的弹簧常数为 $k=5.78\times10^{6}\,\mathrm{N/m}$ 。重物以每秒15米的速度向下传送，今钢索上端突然被卡住，试求钢索中的最大张力。



2.4 实例分析（5）

- 提升机系统（续）



将坐标原点取在绳被卡住瞬时重物所在位置。

$$x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = v_0$$

重物的振动方程为

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gk}{W}}$$

2.4 实例分析（6）

- 提升机系统（续）

绳中的最大张力等于静张力与因振动引起的动张力之和：

$$T_{\max} = T_s + kA = W + k\frac{v_0}{\omega_n} = W + v_0\sqrt{\frac{W}{g}k}$$

$$= 1.47\times10^5 + 0.74\times10^5 = 2.21\times10^5 (N)$$

为了减少振动引起的动张力，应当降低升降系统的刚度

三、能量法求固有频率

3 能量法求固有频率

- 能量法的原理
- 运动方程的建立
- 固有频率的求法

3.1 能量法的原理

- 对于能量无耗散的振动系统，在自由振动时系统的机械能守恒。

$$T + U = \text{常数} \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = 0$$

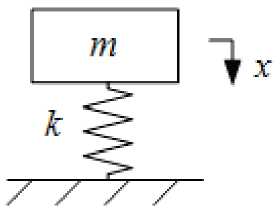
T ——动能　　U ——势能

- 动能和势能的最大值相等

$$T_{\max} = U_{\max}$$

3.2 运动方程的建立

- 无阻尼单自由度系统



考虑某一个时刻 t 的位移为 $x(t)$ ，速度为 $\dot{x}(t)$ 。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}+kx)\dot{x}=0 \Rightarrow m\ddot{x}+kx=0$$

3.3 固有频率的求法（1）

- 由运动方程可以解得

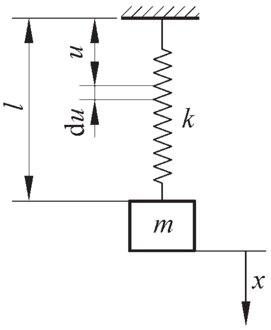
$$x(t) = A\sin(\omega_n t + \psi)$$

- 动能的最大值和势能的最大值相等

$$\frac{1}{2}m(\omega_n A)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.3 固有频率的求法（2）

- 实例：图示弹簧-质量系统，若计及弹簧质量，且弹簧长度为 l （悬挂质量后），质量均匀分布，单位长度质量为 ρ ，试确定系统的固有频率。



- 当系统有位移 x 和速度 $\dot{x}$ 时，弹簧距离上端 u 处微段 $\mathrm{d}u$ 具有位移 ux/l ，速度 $u\dot{x}/l$ 。

- 弹簧的总动能为：

弹簧质量

$$T_1=\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{u\dot{x}}{l}\right)^2 \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho l}{3}\cdot\dot{x}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_t}{3}\cdot\dot{x}^2$$

3.3 固有频率的求法（3）

- 系统总动能：$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_t}{3} \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$
- 系统总势能：$U = \frac{1}{2} k x^2$
- 根据前面所述：$x(t) = A\sin(\omega_n t + \psi)$
- 系统固有频率：$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m + \dfrac{m_t}{3}}}$

四、有阻尼自由振动