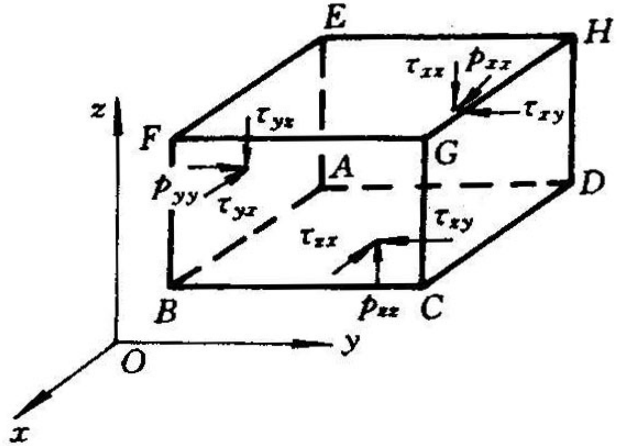
第 三 章
流体动力学基础（2）

——伯努利方程

3-5 实际流体的运动微分方程式

一、作用在流体微元上的应力



流体微元上的应力

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

应力矩阵

二、本构方程

确定应力与应变的方程式叫本构方程。

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=2\mu\varepsilon_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=2\mu\varepsilon_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=2\mu\varepsilon_{zx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}=p-2\mu\theta_{xx}=p-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\\ p_{yy}=p-2\mu\theta_{yy}=p-2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\\ p_{zz}=p-2\mu\theta_{zz}=p-2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\text{其中}$$

$$p=\frac{1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})$$

p： 在平衡流体，代表一点上的流体静压强；

在理想流体，代表一点上的流体动压强；

在不可压实际流体，代表一点上的流体动压强的算术平均值。

$$\begin{bmatrix}p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{bmatrix}+2\mu\begin{bmatrix}-\theta_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & -\theta_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & -\theta_{zz}\end{bmatrix}$$

不可压实际流体的运动方程式—— N-S 方程（推导参见教材）

$$
\left.\begin{aligned}
f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\
f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}
$$

想一想理想流体、静止情况下的方程。

封闭方程组

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \\
f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \\
f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}$$

3-6 伯努利方程式及其应用

一、流线上的伯努利方程式

假设单位质量流体质点某瞬时的速度为 $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$， 经 d$t$ 时间，质点沿流线移动一段微小距离 d$\boldsymbol{s}$ = d$x\boldsymbol{i}$+d$y\boldsymbol{j}$+d$z\boldsymbol{k}$ = v_xd$t\,\boldsymbol{i}$+ v_yd$t\,\boldsymbol{j}$+ v_zd$t\,\boldsymbol{k}$，为求出单位质量流体移动 d$\boldsymbol{s}$ 距离与外力作功的能量关系，将 d$\boldsymbol{s}$ 的三个投影分别与 N-S 方程的三个式子相乘，然后相加，得

$$
\begin{aligned}
& f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right) + \\
& \qquad \nu \nabla^2 v_x \mathrm{d}x + \nu \nabla^2 v_y \mathrm{d}y + \nu \nabla^2 v_z \mathrm{d}z \\
& \qquad = v_x \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_y \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_z \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+\nu\nabla^2 v_x\mathrm{d}x+\nu\nabla^2 v_y\mathrm{d}y+\nu\nabla^2 v_z\mathrm{d}z=v_x\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_z\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

下面分别对式中的四类项进行简化

1. 质量力项，假设质量力有势

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=-\frac{\partial W}{\partial x}\mathrm{d}x-\frac{\partial W}{\partial y}\mathrm{d}y-\frac{\partial W}{\partial z}\mathrm{d}z=-\mathrm{d}W$$

2. 压强项

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

3. 粘性摩擦力项

$$\nu\nabla^2 v_x\mathrm{d}x+\nu\nabla^2 v_y\mathrm{d}y+\nu\nabla^2 v_z\mathrm{d}z=\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=f\mathrm{d}s\cos\pi=-f\mathrm{d}s$$

4. 导数项

$$v_x\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_z\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z=\mathrm{d}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

将结果代回原式，则可得

$$-\mathrm{d}W-\frac{\mathrm{d}p}{\rho}-f\mathrm{d}s=\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

或

$$\mathrm{d}\left[W+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s\right]=0$$

则

$$W+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s=C(t)$$

—— 适用范围：非定常、质量力有势、不可压

$$W+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s=C$$

—— 适用范围：定常、质量力有势、不可压

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s=C$$

除以 g，则

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{g}\int f\mathrm{d}s=C$$

—— 适用范围：定常、重力场、不可压。

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=C$$

—— 适用范围：理想、定常、重力场、不可压。

那么，实际流体在定常、重力场、不可压条件下，在流线上任意两点间可列出伯努利方程为：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s$$

理想流体在相同条件下，在流线上任意两点间的伯努利方程为：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

伯努利方程式中各项的物理意义

z 代表单位重力流体的位能,或简称位置水头。

$\frac{p}{\rho g}$代表单位重力流体的压能,或简称压强水头。

$\frac{v^2}{2g}$代表单位重力流体的动能,也简称速度水头。

$\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s$ 代表单位重力流体沿流线从 1 点流动到 2 点克服粘性阻力所作的功,或所损失的能量。

二、粘性总流的伯努利方程式

粘性流体在定常、重力场、不可压条件下，在流线上任意两点间可列出伯努利方程为

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s$$

其中$\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s$ 用 h_f' 代替，则

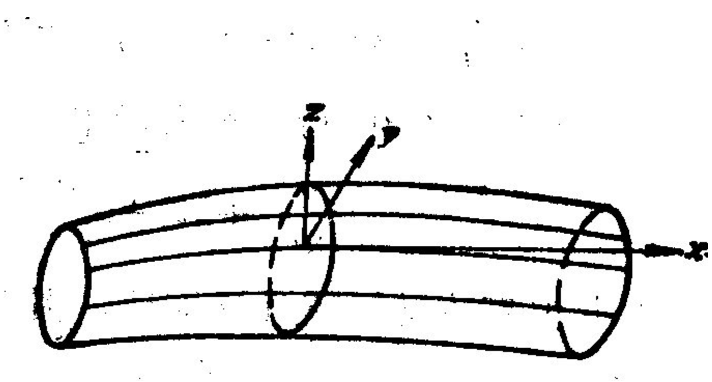
$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+h_f'$$

总流：是过流断面具有有限大小的流动，

将沿流线的伯努利方程推广到沿总流上去。将上式乘以ρ g$\mathrm{d}q_v$，然后对整个总流断面积分，这样就获得总流的能量关系式

$$\int_{A_1}\left(\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}\right)\rho g dq_v=\int_{A_2}\left(\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}\right)\rho g dq_v+\int_A h_f'\rho g dq_v$$

1) $\int_A \left(\frac{p}{\rho g}+z\right)\rho g dq_v$ 为单位时间内通过断面 A 的势能总和。



假设两个过流断面上的流动为缓变流动，在缓变流动情况下，过流断面可以近似地认为是一个平面。由于过流断面是与流线上的速度方向成正交的断面，故而在过流断面上没有任何速度分量。如果令 X 轴与过流断面相垂直，如图，则

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

N-S 方程的第 2 及第 3 式与流体静力学地平衡方程相同，这说明在缓变流时，yz 断面上各点保持流体静力学地规律 ，即

$$z+\frac{p}{\rho g}=C$$

$$\int_A \left(\frac{p}{\rho g}+z\right)\rho g dq_v = \left(\frac{p}{\rho g}+z\right)\rho g \int_A dq_v = \left(\frac{p}{\rho g}+z\right)\rho g q_v$$

2) $\int_A \frac{v^2}{2g}\rho g dq_v$ **为单位时间内通过断面 *A* 的动能总和。**

断面上速度 *v* 是变量，如果用平均流速 $\bar{v}$ **代替，则**

$$\int_A \frac{v^2}{2g}\rho g dq_v = \int_A \frac{v^2}{2}\rho dq_v = \alpha \frac{\rho \bar{v}^3}{2} A = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g}\rho g q_v$$

3) $\int_A h'_f \rho g dq_v$ **为单位时间内流体克服摩擦阻力作功而消耗的机械能。该项不易通过积分确定，可令**

$$\int_A h'_f \rho g dq_v = \rho g h_f q_v$$

h_f **表示总流中单位重量流体从断面 1-1 到 2-2 平均消耗的能量。**

则 1-1 到 2-2 的伯努利方程为

$$(\frac{p_1}{\rho g}+z_1)\rho g q_v+\frac{\alpha v_1^2}{2g}\rho g q_v=(\frac{p_2}{\rho g}+z_2)\rho g q_v+\frac{\alpha v_2^2}{2g}\rho g q_v+h_f\rho g q_v$$

即

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+h_f$$

总流能量方程（即伯努利方程）在推导过程中的限制条件

（1）恒定流；

（2）不可压缩流体；

（3）质量力只有重力；

（4）所选取的两过水断面必须是渐变流断面，但两过流断面间可以是急变流。

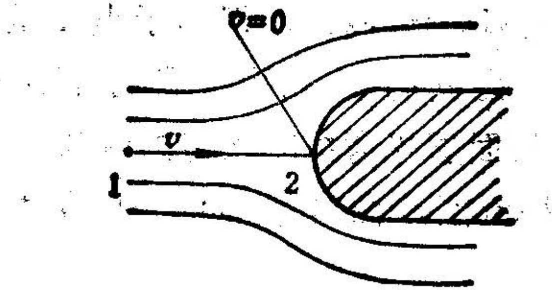
（5）总流的流量沿程不变。

（6）两过水断面间除了水头损失以外，总流没有能量的输入或输出。

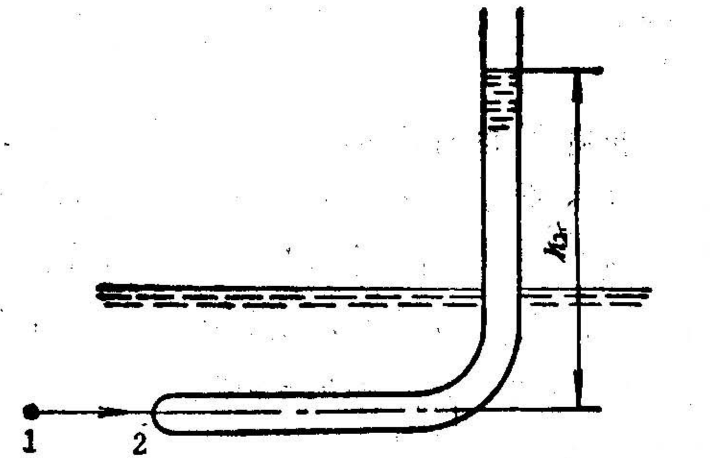
（7）式中各项均为单位重量流体的平均能（比能），对流体总重的能量方程应各项乘以 $\rho g q_v$，

三、伯努利方程式的应用

1. 皮托管



速度滞止图



皮托管

$$\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}+h_f$$

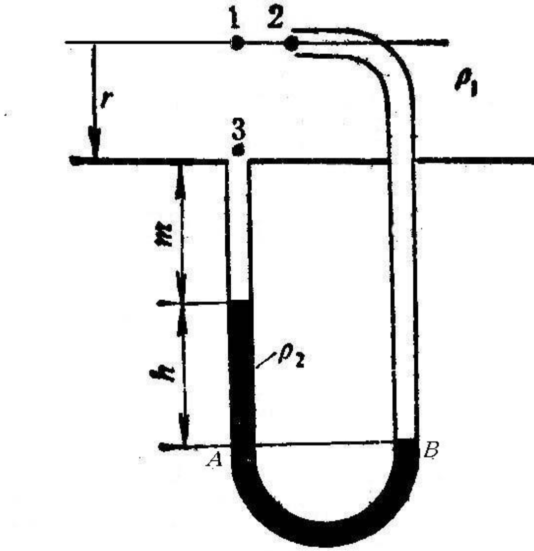
$$\rho g h_2 = p_2 = p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2}$$

因为 $z_1=z_2$， $v_2=0$，这里流场为均匀，点 1 至 2 $h_f\approx 0$，所以

$$p_2 = p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2}$$

滞止压强　静压强　动压强

$$h_2 = \frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}$$



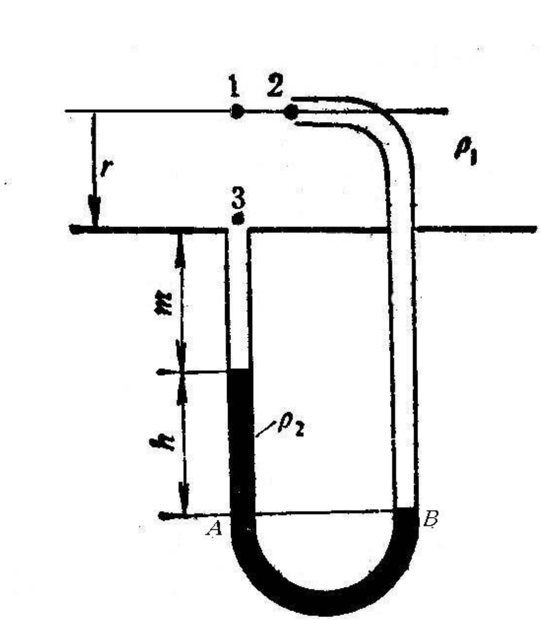
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho_1}} = \sqrt{2gh\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}$$

皮托管与测压管联合使用

由于皮托管结构会引起液流扰乱和微小阻力，故精确计算还要对速度公式加以修正

$$v_1 = C_v\sqrt{2gh\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}$$

C_v 为流速系数，一般条件下为 0.97~0.99



皮托管与测压管联合使用

$p_A = p_B$

$p_A = p_3 + \rho_1 g m + \rho_2 g h$

$p_B = p_2 + \rho_1 g (r+m+h)$

$p_2 - p_3 = gh(\rho_2 - \rho_1) - \rho_1 g r$

$p + \rho g z = c \quad p_1 + \rho_1 g z_1 = p_3 + \rho_1 g z_3$

或 $p_3 = p_1 + \rho_1 g (z_1 - z_3) = p_1 + \rho g r$

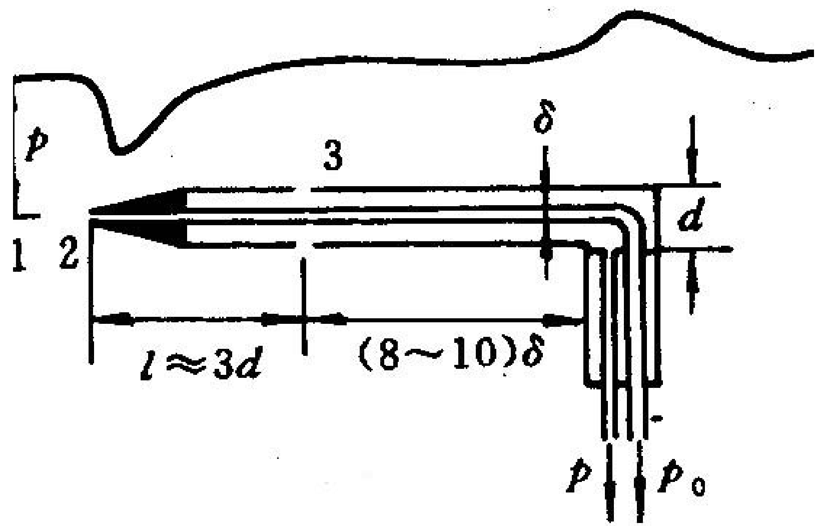
$p_2 - p_1 = gh(\rho_2 - \rho_1)$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2gh(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}$$

由于皮托管结构会引起液流扰乱和微小阻力，故精确计算还要对速度公式加以修正

$$v_1 = C_v \sqrt{2gh\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}}$$

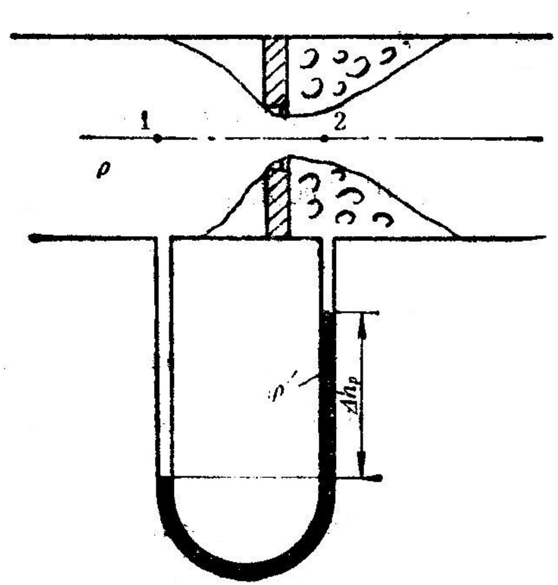
C_v 为流速系数，一般条件下为 0.97~0.99



皮托一静压管

2. 节流式流量计

工作原理：在管道中安装一个过流断面略小的节流元件，使流体流过时，速度增大、压强降低。利用节流元件前后的压强差来测定流量的仪器称作节流式流量计。节流式流量计有孔板、喷嘴和圆锥式（又叫文丘利）三种类型。



孔板流量计

$$\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_f$$

因为 $z_1=z_2$，如果暂不计能量损失 gh_f，且 α_1 与 α_2 均接近于 1，所以

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}$$

设孔板的断面为 A，该处的速度为 v，由连续性方程可得

$$v_1=\frac{A}{A_1}v, \qquad v_2=\frac{A}{A_2}v$$

代入伯努利方程：

$$v=\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[(\frac{A}{A_2})^2-(\frac{A}{A_1})^2\right]}}$$

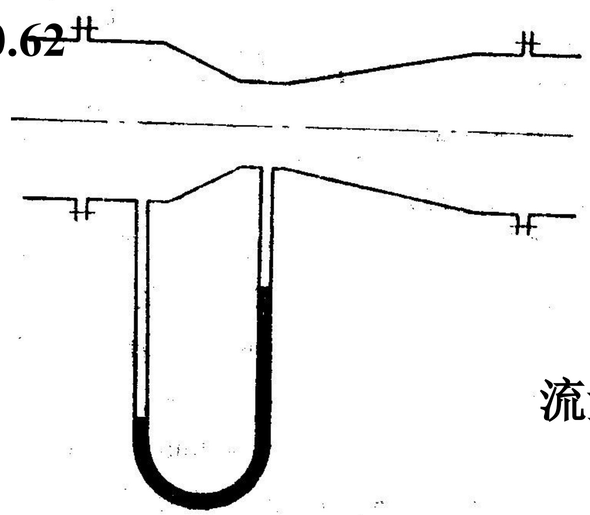
于是理论流量为：

$$q_T=vA=A\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[(\frac{A}{A_2})^2-(\frac{A}{A_1})^2\right]}}$$

实际流量 q_v 小于理论流量 q_T，我们用下列通用形式来表示流量

$$q_v = C_q A\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

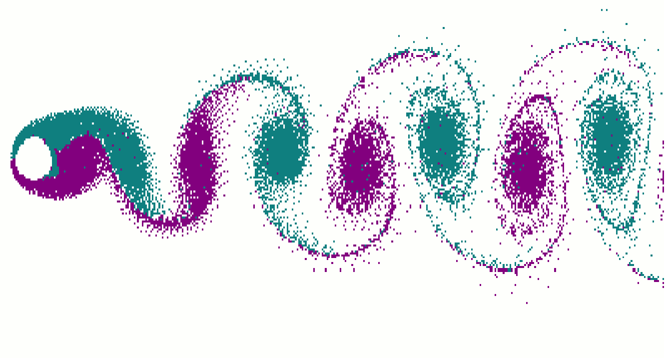
—— C_q 为流量系数，对锐缘的孔板流量计约为 0.6~0.62

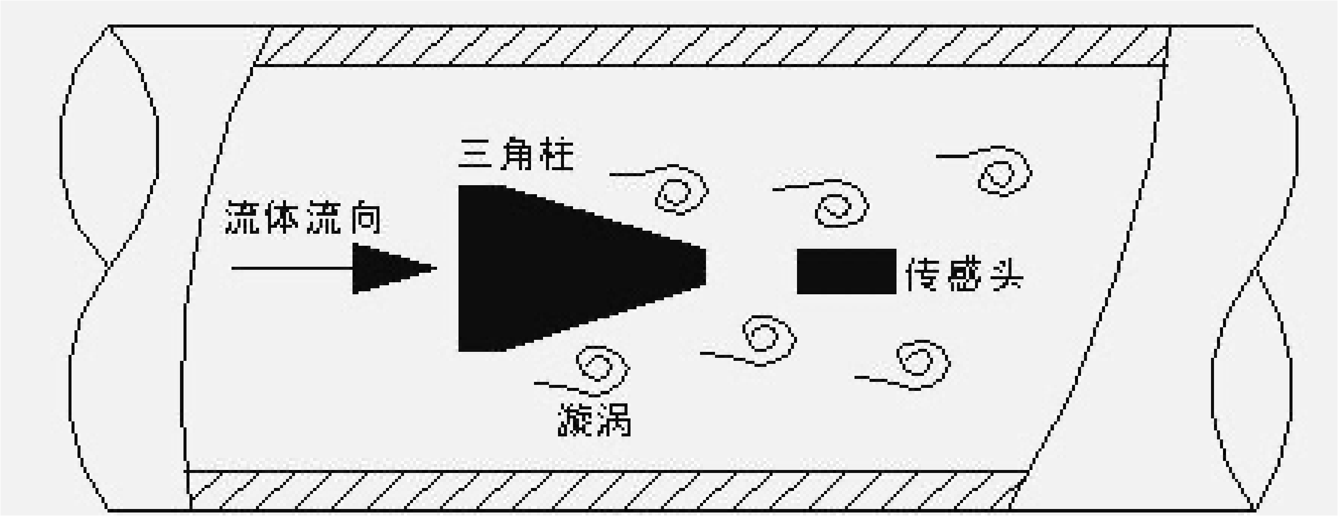


流量系数 C_q 可达 0.98 。

文丘利流量计

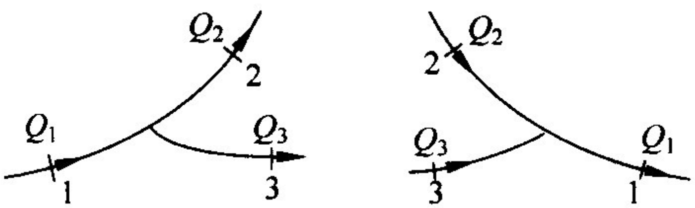
补充：涡街流量计





四、伯努利方程的推广应用

1. 推广到沿程有分流或汇流的情况



一维分流与汇流

对过流截面 1 、 2 和 1 、 3 分别列伯努利方程：

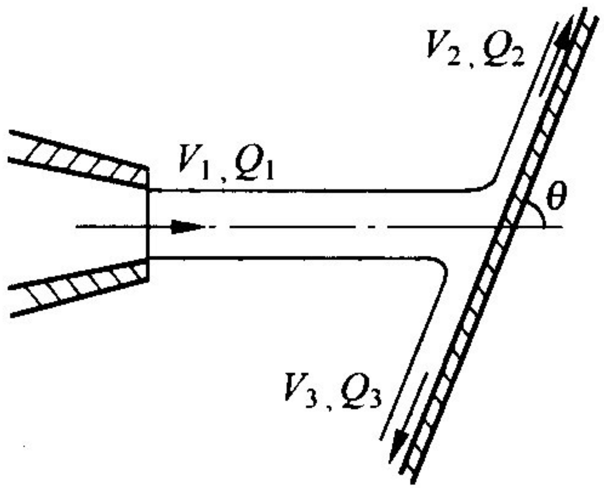
$$\left.\begin{aligned}\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1&=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2,\\\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1&=\frac{V_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3.\end{aligned}\right\}$$

按质量守恒： $Q_1=Q_2+Q_3$

根据总机械能守恒：

$$\rho g Q_1\left(\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)=\rho g Q_2\left(\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)+\rho g Q_3\left(\frac{V_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3\right).$$

如图　　所示，一股水射流冲击平板，已知流动定常，入射流速度为 V_1，流量为 Q_1. 设分流速度分别为 V_2 和 V_3，流量为 Q_2 和 Q_3. 各流股在垂直纸面方向宽度均为 1. 不计重力和流动损失，求证：$V_1 = V_2 = V_3$.



射流冲击平板后分流

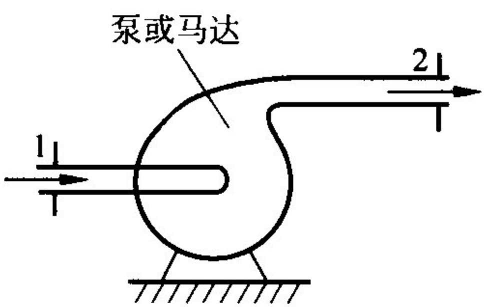
2. 推广到沿程有能量输入或输出的情况

1 和 2 截面列伯努利方程：

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\pm H=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2$$

“+” 号：水泵、风机、压缩机等，流体获得能量；

“–” 号：水轮机、马达、气轮机等，流体消耗能量。



沿程能量交换

输入或输出的理论总功率：

$$N=\rho gQH$$

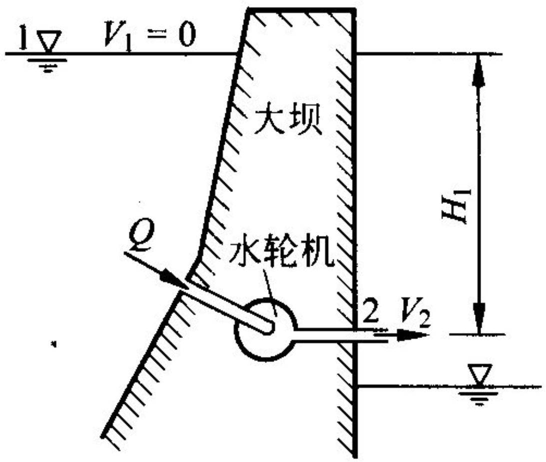
泵在单位时间内对通过的液体所作的功叫做泵的有效功率或输出功率，用 N_T 表示，公式为

$$N_T = \rho g q_v H$$

因为泵内的能量损失，泵的输入功率 N 要大于输出功率 N_T，输出功率与输入功率之比为泵的效率

$$\eta = \frac{N_T}{N}$$

例　　水力发电功率估算.



水力发电示意图

1 和 2 截面列伯努利方程：

$$H_1 - H = \frac{V_2^2}{2g}$$

或

$$H = H_1 - \frac{V_2^2}{2g}$$

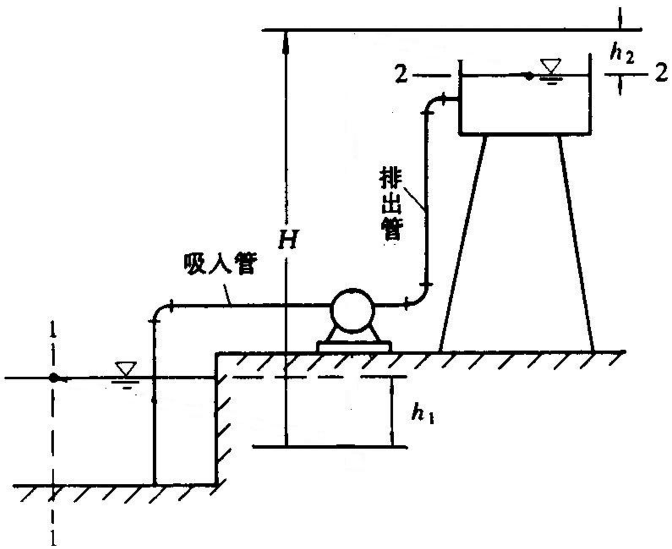
水轮机产生的理论总功率：

$$N = \rho g Q H = \rho Q \left(g\, H_1 - \frac{1}{2} V_2^2 \right)$$

沿程有能量输入或输出的伯努利方程

沿总流两断面间装有水泵、风机或水轮机等装置，流体流经水泵或风机时将获得能量，而流经水轮机时将失去能量。设单位重量液体所增加或减少的能量用 H 来表示，则总流的伯努利方程为

$$\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{\alpha v_1^2}{2g}\pm H=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{\alpha v_2^2}{2g}+h_f$$



上式中，H 前面的正负号，获得能量为正，失去能量为负。对于水泵，H 为扬程。

水池通过泵将水送至水塔。列出水池液面（1-1 断面）至水塔液面（2-2 断面）的伯努利方程，因为液面敞开在大气中，液面上流速 v_1 和 v_2 近似于 0，所以

$$H=z_2-z_1+h_f$$

作　业

3-2， 3-6， 3-11， 3-15， 3-21， 3-22
， 3-30