第八章

组合变形（2）

1

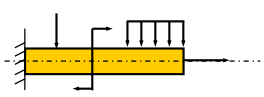
第八章 组合变形

2

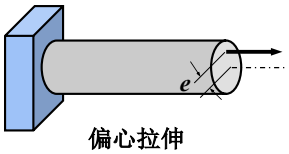
——拉（压）弯组合、偏心拉压

拉（压）弯组合——载荷为轴向力+横向力（或轴向平面内力偶）

偏心拉压——所受轴向力作用线不与轴线重合（偏心力）



拉弯组合



偏心拉伸

3

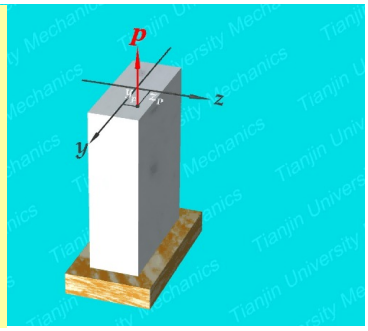
例题

§ 组合变形

例 题 3

矩形截面偏心拉伸

载荷作用在杆顶面任意（y_p，z_p）位置，求与轴线垂直的横截面上任意点（y，z）的应力。



4

例题

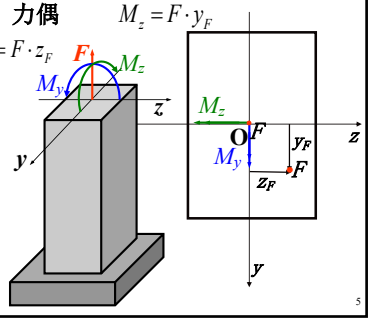
§ 组合变形

例 题 3

解：1.分解　偏心拉伸力F向截面的形心O处简化得

轴向拉力F，　力偶　$M_z = F \cdot y_F$

力偶　$M_y = F \cdot z_F$



5

例题

§ 组合变形

例 题 3

2.分算　在任意横截面上的点（y，z）处：

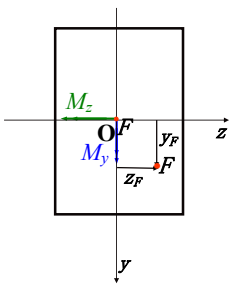
拉压正应力　$\sigma' = \dfrac{F}{A}$

以z为中性轴弯曲正应力　$\sigma'' = \dfrac{M_z y}{I_z} = \dfrac{F y_F y}{I_z}$

以y为中性轴弯曲正应力　$\sigma''' = \dfrac{M_y z}{I_y} = \dfrac{F z_F z}{I_y}$

3.叠加

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{F}{A} + \frac{F y_F y}{I_z} + \frac{F z_F z}{I_y}$$



6

例题

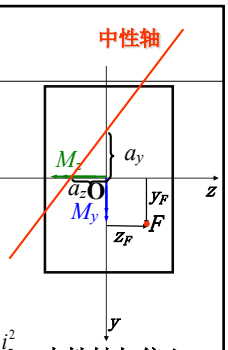
例 题 3

§ 组合变形

总应力为 $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_F y}{I_z} + \frac{Fz_F z}{I_y}$

$= \frac{F}{A}(1 + \frac{y_F}{I_z/A} y + \frac{z_F}{I_y/A} z)$

$= \frac{F}{A}(1 + \frac{y_F}{i_z^2} y + \frac{z_F}{i_y^2} z)$



截面上的中性轴：

令 $\sigma = 0$ 得中性轴方程

$1 + \frac{y_F}{i_z^2} y + \frac{z_F}{i_y^2} z = 0$ 截距 $\begin{cases} a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} \\ a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} \end{cases}$

中性轴与偏心拉力作用点分布于形心两侧

7

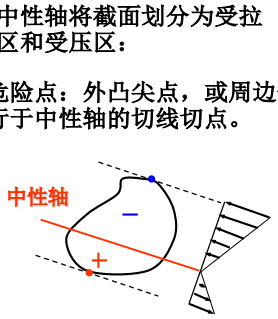
例题

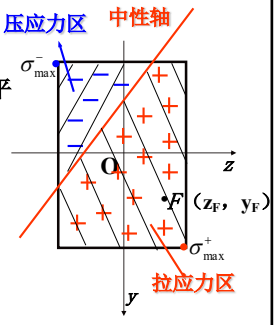
例 题 3

§ 组合变形

中性轴将截面划分为受拉区和受压区：

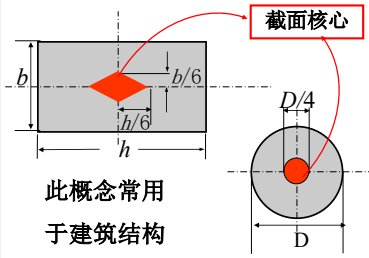
危险点：外凸尖点，或周边平行于中性轴的切线切点。



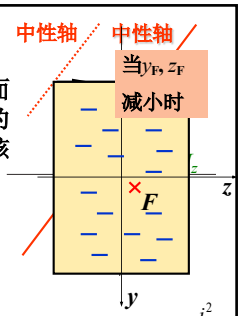


8

截面核心的概念：对偏心压缩杆轴向压力F 作用点若在靠近横截面形心的某一区域内，则横截面上的正应力均为压应力，该区域称为该截面的核心。



此概念常用于建筑结构



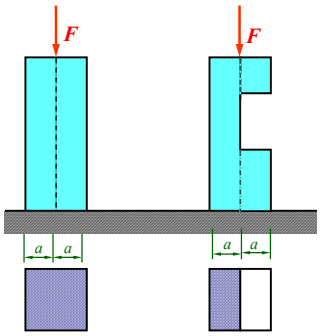
截距 $\begin{cases} a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} \\ a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} \end{cases}$

9

§8.3 偏心压缩和截面核心

例题8.5

正方形截面立柱的中间处开一个槽，使截面面积为原来截面面积的一半。求开槽后立柱的的最大压应力是原来不开槽的几倍。



33

§8.3 偏心压缩和截面核心

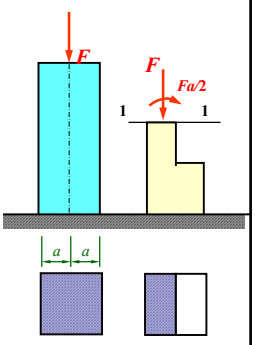
例题8.5

解：未开槽前立柱为轴向压缩

$\sigma_1 = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{F}{(2a)^2} = \frac{F}{4a^2}$

开槽后1-1是危险截面

危险截面为偏心压缩



34

§8.3 偏心压缩和截面核心

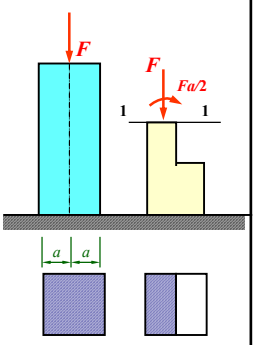
例题8.5

解：将力F 向1-1形心简化

$\sigma_2 = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{2a \cdot a} + \frac{Fa/2}{\frac{1}{6} 2a \cdot a^2} = \frac{2F}{a^2}$

开槽后立柱的最大压应力 / 未开槽前立柱的最大压应力

$= \frac{2F/a^2}{F/4a^2} = 8$



35

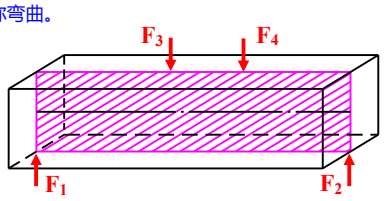
第八章 组合变形

40

§8.4 扭转与弯曲的组合

1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

当作用在梁上的载荷和支反力均位于纵向对称面内时，梁的轴线由直线弯成一条位于纵向对称面内的平面曲线，称为对称弯曲。



对称弯曲要满足的两个条件：

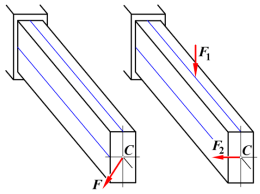
1. 梁要有对称面；　　2. 外力要作用在对称面内。

41

§8.4 扭转与弯曲的组合

1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

弯曲正应力分析



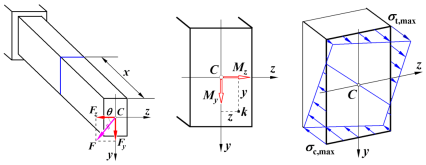
双对称截面梁的非对称弯曲

42

§8.4 扭转与弯曲的组合

1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

弯曲正应力分析



利用叠加法分析内力与应力

$$\sigma=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}$$

矢量沿坐标轴正向的弯矩M为正

弯曲正应力沿横截面线性分布

43

§8.4 扭转与弯曲的组合

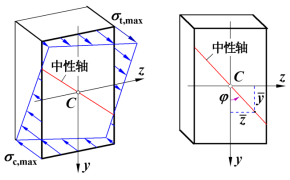
1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

中性轴的位置

$$\sigma=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}$$

$$\sigma(0,0)=0$$

$$\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}=0$$



44

§8.4 扭转与弯曲的组合

1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

中性轴的位置

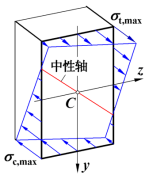
中性轴为通过横截面形心的直线

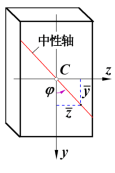
$$\frac{M_y \bar{z}}{I_z}-\frac{M_z \bar{y}}{I_y}=0$$

$$\tan\varphi=\frac{\bar{z}}{\bar{y}}$$

中性轴的方位角为：

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}$$





45

§8.4 扭转与弯曲的组合

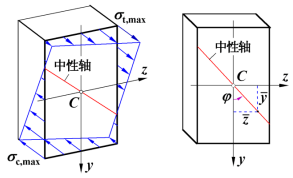
1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

中性轴的位置

M_y与M_z的合成弯矩的方位角

$$\theta = \tan^{-1}\frac{M_z}{M_y}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}$$



由于截面的$I_y \neq I_z$

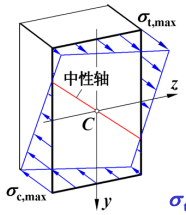
故$\theta \neq \varphi$

即中性轴与合成弯矩M所在的平面并不相互垂直，因此这种弯曲也称为斜弯曲。

§8.4 扭转与弯曲的组合

1、双对称截面梁的非对称弯曲（斜弯曲）

最大弯曲正应力

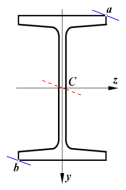


σ_{max}发生在离中性轴最远的各点处

$$\sigma_{t,max}=\sigma_{c,max}=\frac{M_y|z_a|}{I_y}+\frac{M_z|y_a|}{I_z}$$

矩形、工字形与箱形等具有外棱角截面：

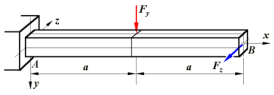
$$\sigma_{t,max}=\sigma_{c,max}=\frac{|M_y|}{W_y}+\frac{|M_z|}{W_z}$$



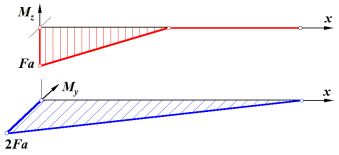
§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.6

$F_y = F_z = F$ = 1.0 kN，a = 800 mm，截面高h = 80 mm，宽b = 40 mm，$[\sigma]$ = 160 MPa，校核梁强度。



解：（1）内力分析

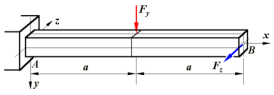


危险截面：截面 A　　$M_{yA} = 2Fa,\quad M_{zA} = Fa$

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.6

$F_y = F_z = F$ = 1.0 kN，a = 800 mm，截面高h = 80 mm，宽b = 40 mm，$[\sigma]$ = 160 MPa，校核梁强度。

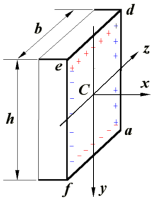


解：（2）应力分析

危险点：d, f

$$\sigma_{max}=\frac{|M_{yA}|}{W_y}+\frac{|M_{zA}|}{W_z}=\frac{2Fa}{\frac{hb^2}{6}}+\frac{Fa}{\frac{bh^2}{6}}$$

$$=146.5\,\text{MPa}$$

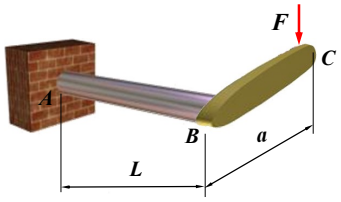


（3）强度校核　$\sigma_{max} < [\sigma]$

第八章 组合变形

§8.4 扭转与弯曲的组合

2、弯曲与扭转的组合



1）研究对象：
圆截面杆

2）受力特点：
杆件同时承受转矩和横向力作用

3）变形特点：
发生扭转和弯曲两种基本变形

§8.4 扭转与弯曲的组合

3、内力分析

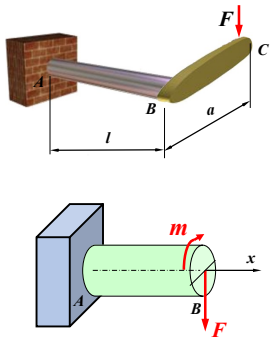
设AB为直径为d的等直圆杆，B端具有与AB成直角的刚臂。研究AB杆的内力。

将力F向AB杆右端截面的形心B简化得：

横向力 F（引起平面弯曲）

力偶矩 $m = Fa$（引起扭转）

AB杆为弯、扭组合变形

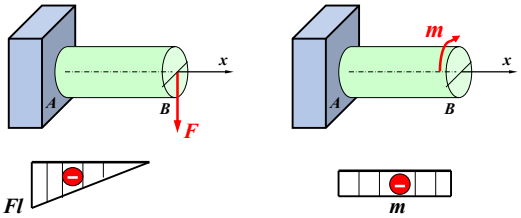


52

§8.4 扭转与弯曲的组合

3、内力分析

画内力图确定危险截面



固定端A截面为危险截面

53

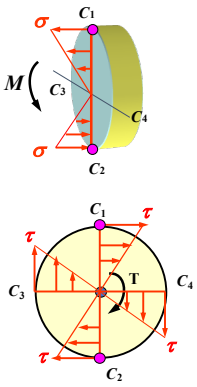
§8.4 扭转与弯曲的组合

4、应力分析

危险截面（A截面）上的最大弯曲最大正应力σ发生在C_1、C_2处。

最大扭转切应力τ发生在截面周边上的各点处。

危险截面上的危险点为C_1和C_2点。



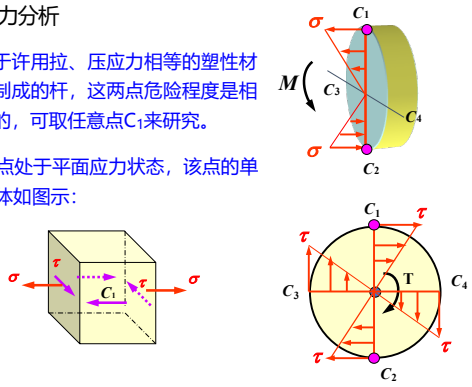
54

§8.4 扭转与弯曲的组合

4、应力分析

对于许用拉、压应力相等的塑性材料制成的杆，这两点危险程度是相同的，可取任意点C_1来研究。

C_1点处于平面应力状态，该点的单元体如图示：



55

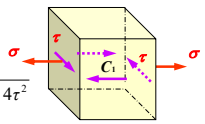
§8.4 扭转与弯曲的组合

5、强度分析

1）主应力计算

$$\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$\sigma_2=0$$



对于圆形截面杆有

$$\sigma=\frac{M}{W}\qquad \tau=\frac{T}{W_t}\qquad W_t=2W=\frac{\pi d^3}{16}$$

式中W为抗弯截面系数，W_t为抗扭截面系数，M、T为轴危险截面的弯矩和扭矩。

56

§8.4 扭转与弯曲的组合

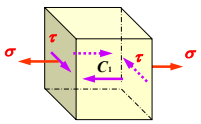
5、强度分析

2）根据第三强度理论，求相当应力

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{M}{W})^2+4(\frac{T}{W_t})^2}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}$$

$$\Rightarrow\ \sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\le[\sigma]$$

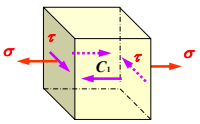


57

§8.4 扭转与弯曲的组合

5、强度分析

3）根据第四强度理论，求相当应力



$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$$

$$=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{(\frac{M}{W})^2+3(\frac{T}{W_t})^2}=\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W}$$

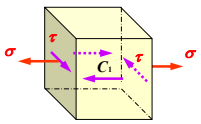
➡ $\sigma_{r4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\le[\sigma]$

58

§8.4 扭转与弯曲的组合

5、强度分析

4）强度校核



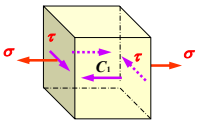
$$\sigma_r\le[\sigma]$$

59

§8.4 扭转与弯曲的组合

5、强度分析

5）讨论



$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$$

σ是危险点的正应力，τ是危险点的切应力

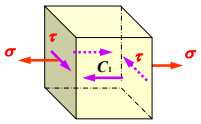
- 该公式适用于图示的平面应力状态，且横截面不限于圆形截面；
- 该公式适用于弯+扭组合变形、拉（压）+扭转的组合变形、以及拉（压）+扭转+弯曲的组合变形；
- 切应力的方向可以不用考虑。

60

§8.4 扭转与弯曲的组合

5、强度分析

5）讨论



$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\le[\sigma]$$

W为抗弯截面系数，M、T为轴危险截面的弯矩和扭矩。

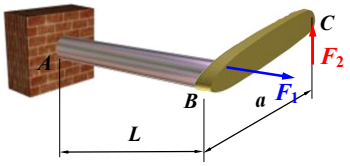
- 该公式仅适用于塑性材料发生弯+扭组合变形时，且其截面为实心圆截面或空心圆截面。

$$W=\frac{\pi d^3}{32}\qquad W=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

61

§8.4 扭转与弯曲的组合

6、弯拉（压）扭组合



1）研究对象：
圆截面杆

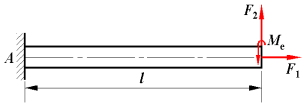
2）受力特点：
杆件同时承受转矩、横向力和纵向力作用

3）变形特点：
发生拉伸、扭转和弯曲三种基本变形

62

§8.4 扭转与弯曲的组合

6、弯拉（压）扭组合

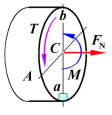


4）危险截面：
截面A

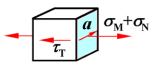
5）危险点a：

$$\sigma_a=\sigma_M+\sigma_N=\frac{M}{W}+\frac{F_N}{A}$$

$$\tau_a=\tau_T=\frac{T}{W_t}=\frac{T}{2W}$$



6）应力状态：
单向应力状态 + 纯剪切

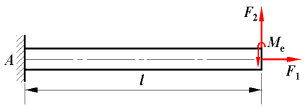


63

§8.4 扭转与弯曲的组合

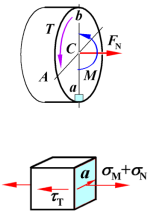
6、弯拉（压）扭组合

7）强度条件：



$$\sigma_{r3}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+4\tau_T^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+3\tau_T^2}\le[\sigma]$$

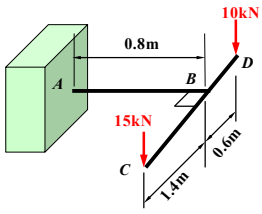


64

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.7

空心圆杆AB和CD杆焊接成整体结构，受力如图。AB杆的外径 D=140 mm，内、外径之比 $\alpha=d/D$=0.8，材料的许用应力 $[\sigma]$=160 MPa。试用第三强度理论校核AB杆的强度。



65

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.7

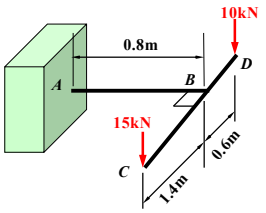
解：1）将力 F 向AB轴的B截面形心简化

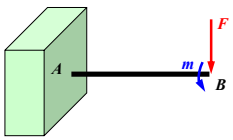
$F=25$ kN

$m=15\times1.4-10\times0.6$

$=15$ kN·m

AB杆为扭转和平面弯曲的组合变形。





66

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.7

解：2）作出弯矩图和扭矩图

固定端截面为危险截面

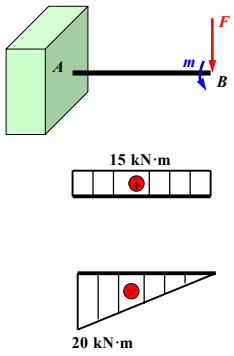
$T=15$ kN·m

$M_{max}=20$ kN·m

$W=\dfrac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$

$\sigma_{r3}=\dfrac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}$

$=157.26$ MPa $<[\sigma]$



67

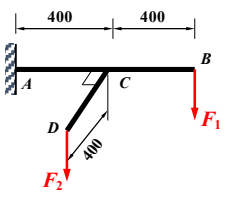
§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

F_1=0.5 kN，F_2=1 kN，$[\sigma]$=160 MPa。

（1）用第三强度理论计算AB的直径。

（2）若AB杆的直径 d=40 mm，并在B端加一水平力 F_3 = 20 kN，校核AB杆的强度。



68

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

解：1）将力 F 向AB轴的C截面形心简化

$F_2=1$ kN　　$m=0.4$ kN·m

AB 为弯、扭组合变形

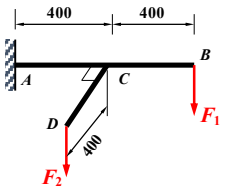
固定端截面是危险截面

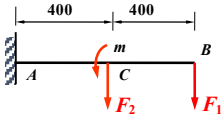
$M_{max}=0.8F_1+0.4F_2=0.8$ kN·m

$T_{max}=0.4$ kN·m

$\sigma_{r3}=\dfrac{\sqrt{M_{max}^2+T_{max}^2}}{W}\le[\sigma]$

$d=38.5$ mm





69

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

解：2）在B端加拉力F_3

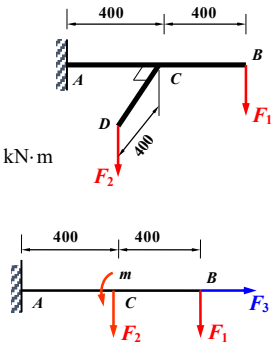
AB为弯+扭+拉组合变形

固定端截面是危险截面

$M_{max}=0.8F_1+0.4F_2=0.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$T_{max}=0.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$F_N=F_3=20\ \text{kN}$



70

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

解：2）在B端加拉力F_3

固定端截面最大的正应力为

$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}+\frac{F_N}{A}=143\ \text{MPa}$

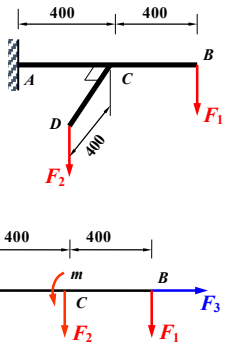
最大切应力为

$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_t}=31.8\ \text{MPa}$

由第三强度理论

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$

$=157\ \text{MPa}\le[\sigma]$



71

作业

8.13, 8.14, 8.25

72