浙江大学2012~2013学年秋冬学期

《微积分(I)》课程期末考试试卷解答(A卷).

1. $\frac{dy}{dx}=(\sin 2x)^x(2x\cot 2x+\ln\sin 2x)+8(\arcsin 2x)^3\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2. $y'=3f'(xy)(xy'+y)+\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$y'=\left(3f'(xy)y+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)/(1-3xf'(xy))$.

3. $\frac{dx}{dt}=2(3t+1)$, $\frac{dy}{dt}=(3t+1)\sin t^2$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sin t^2$. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{t\cos t^2}{2(3t+1)}$. $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\pi}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2(3\sqrt{\pi}+1)}$.

4. $\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=2\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

令 $\sqrt[3]{x}=t$, $x=t^3$, $dx=3t^2dt$.

原式 $=2\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}=6\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=6\left[\int_0^1dt-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right]=6(1-\frac{\pi}{4})$.

5. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(1-\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$=\left[(1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}\right]_1^{+\infty}=1-0=1$.

另法、令 $x=\sec t$.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=1$.

6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+\sin x)}+\frac{1}{\ln(1-\sin x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)+\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin x)\ln(1-\sin x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{-(\sin x)^2}=1$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{1-\sqrt{1-x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\frac{1}{2}x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{x}=\dfrac{2}{3}.$

8. 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{\sin^2 t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(1-(1-\cos t)\right)^{\frac{1}{1-\cos^2 t}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1-(1-\cos t)\right)^{\frac{1}{(1-\cos t)(1+\cos t)}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}.$

9. $R=3$, 收敛区间 $(-1,5)$, 收敛域 $[-1,5)$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{3-x}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n,\quad |x|<3.$

$\dfrac{1}{x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1.$

所以

$f(x)=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4}\left((-1)^{n+1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n,\qquad |x|<1.$

11. $\dfrac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)}=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x}{1+x^2},$

原式 $=\displaystyle\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx+\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\ln(1+x^2)\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)$

$=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2)-\displaystyle\int\frac{2\,dx}{x(1+x^2)}\right]+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)$

$=-\dfrac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)$

$=-\dfrac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C.$

12.(Ⅰ) 要证存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\int_0^{\xi}f(x)dx=(1-\xi)f(\xi)$. 命

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt-(1-x)f(x).$$

有 $F(0)=-f(0)<0$, $F(1)=\int_0^1 f(t)dt>0$. 由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$. 即(Ⅰ)成立.

(Ⅱ) 由 $F'(x)=f(x)+f(x)-(1-x)f'(x)>0$, 当 $x\in[0,1]$. 所以 $F(x)$ 至多1个零点. 故(Ⅰ)中的 ξ 唯一.

[注]也可以用反证法证(Ⅰ)中 ξ 唯一. 设存在 $\xi_1\in(0,1)$, $\xi_2\in(0,1)$, $\xi_1<\xi_2$, 使

$$F(\xi_1)=\int_0^{\xi_1}f(t)dt-(1-\xi_1)f(\xi_1)=0,$$

$$F(\xi_2)=\int_0^{\xi_2}f(t)dt-(1-\xi_2)f(\xi_2)=0.$$

因为 $\xi_1<\xi_2$, 所以 $\int_0^{\xi_1}f(t)dt<\int_0^{\xi_2}f(t)dt$, $(1-\xi_1)f(\xi_1)>(1-\xi_2)f(\xi_2)$, 从而 $F(\xi_1)<F(\xi_2)$. 矛盾.

13. $F(x)=x\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(u)du+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}du$,

$F'(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(u)du+\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})-f(\frac{1}{x})$,

$F''(x)=f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^3}f'(\frac{1}{x})=\frac{x-1}{x^3}f'(\frac{1}{x})$.

由于 $f'<0$, 所以当 $0<x<1$ 时 $F''(x)>0$, 曲线 $y=F(x)$ 凹. 当 $1<x<+\infty$ 时, $F''(x)<0$. 曲线 $y=F(x)$ 凸. 点 $(1,0)$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点 ($F(1)=0$).

14.(Ⅰ) $a_{n+2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan^2 x+1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,d\tan x=\frac{1}{n+1}$.

由于当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时 $0<\tan x<1$, 所以 $0<a_{n+1}<a_n$, $\{a_n\}$ 单减,
正项

所以
$$2a_{n+2}<a_{n+2}+a_n<2a_n,$$
从而 $$2a_{n+2}<\frac{1}{n+1}<2a_n,$$
于是 $$a_n>\frac{1}{2(n+1)},\quad a_{n+2}<\frac{1}{2(n+1)},\quad a_n<\frac{1}{2(n-1)}.$$
即证明了
$$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}.$$

(II) 由 $a_n>\frac{1}{2(n+1)}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足莱布尼茨定理条件，收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.