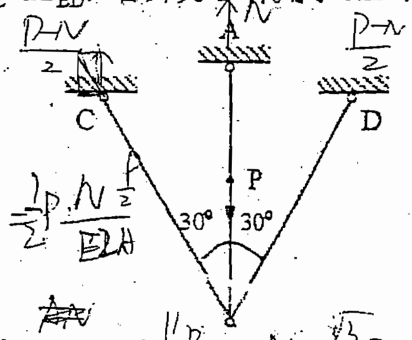
浙 江 大 学

2001 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

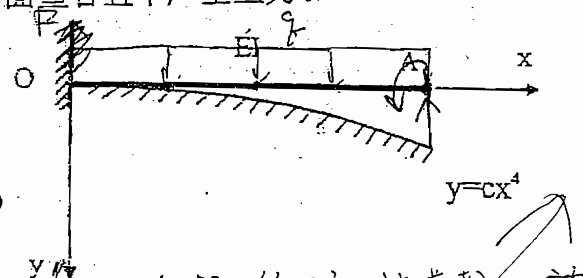
考试科目 材料力学（乙） 编号 480

注意：答案必须写在答题纸上，写在试题纸或草稿上均无效。

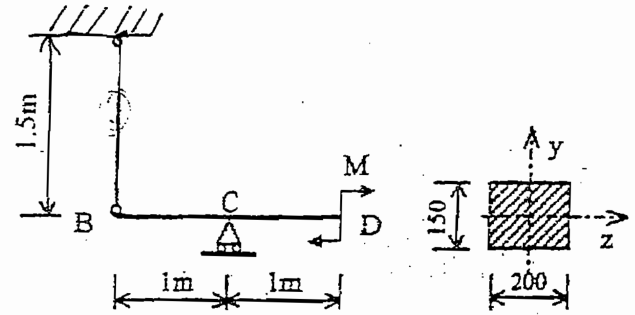
一、 如图所示，A、B、C、D 为铰支，各杆材料、长度均相同，AB 杆的横截面面积是其余各杆的 2 倍，即 $S_{AB}=2S_{BC}=2S_{BD}$，若外力 P 作用于 AB 杆中点，试计算各杆的内力。(20 分)



二、 一悬臂梁 OA，O 端固定，在其底部有一光滑曲面 $y=cx^4$，其中 c 为已知常数。已知梁的抗弯刚度为 EI，长为 b，问在梁上应作用何种形式载荷才能使梁恰好与曲面重合且不产生压力。(15 分)



三、 两端球铰支杆 AB 和横梁 BCD 材料均为 Q235 钢，E=206GPa，σ_p=200MPa，[σ]=160MPa。AB 杆长 1.5m，横截面为 50mm×60mm 的矩形截面。BCD 杆长 2m，中点 C 处有一可动铰支座，D 端受弯矩 M 的作用，其横截面为 150mm×200mm 的矩形截面，放置方位如图所示。规定的稳定安全系数 n_{st}=3，求弯矩 M 的许可值。 (20 分)

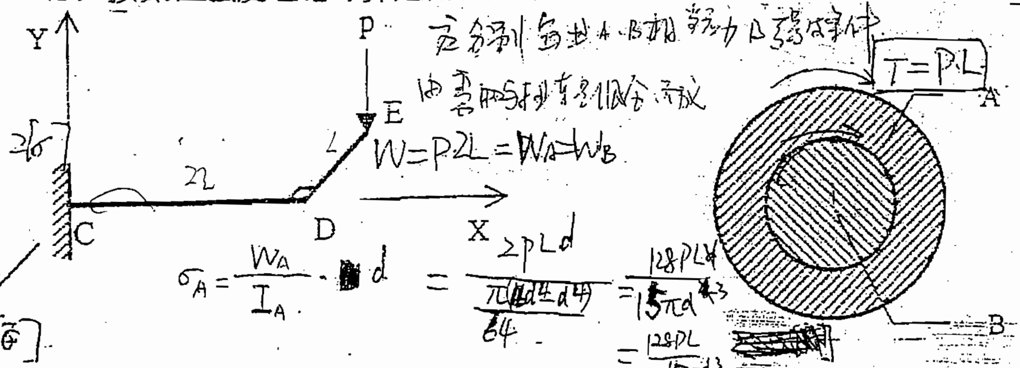


四、 图示线弹性折杆 CDE 是由外径为 2d 的空心管 A 和直径为 d 的实心杆 B 紧密套合而成的(A 与 B 在结合处无相对位移)。C 端固定，D 点刚性连接，CD⊥DE，E 点受大小为 P 的载荷作用，P 力与 CDE 构成的平面垂直。CD 长 2L，DE 长 L。材料 A 的弹性模量为 3E，剪切弹性模量为 3G，许用应力为 2[σ]。材料 B 的弹性模量为 E，剪切弹性模量为 G，许用应力为 [σ]。

（1）指出危险截面的位置；

（2）画出危险点的应力状态；

（3）按第三强度理论计算危险点的相当应力，并写出折杆的强度条件。 (20 分)

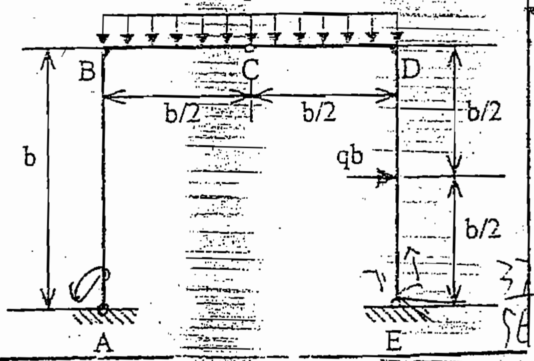


五、 如图所示结构，A 端固定，C、E 铰支，B、D 刚性连接，各杆抗弯刚度均为 EI，AB、DE 杆长为 b，CB、CD 杆长为 b/2，不计剪力、轴力对刚架变形的影响，试求：

（1）A、E 点的支座反力；

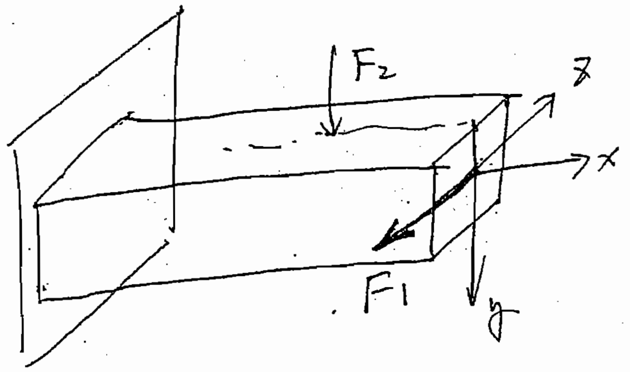
（2）C 点左右两截面相对转角；

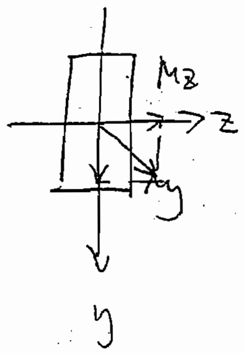
（25 分）



组合变形

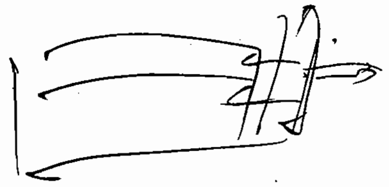
两垂直面对称弯曲





$$\frac{M_y}{I_y} z_0 - \frac{M_z}{I_z} y_0 = 0$$

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = \frac{I_y}{I_z} \tan\varphi$$



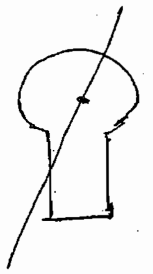
$F_1 + F_2 = F$

$F_1 \cdot l_1 + \ldots = F \cdot e$

拉伸、弯曲

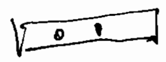
(偏心拉伸压)

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

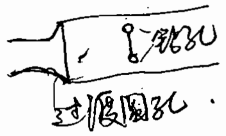


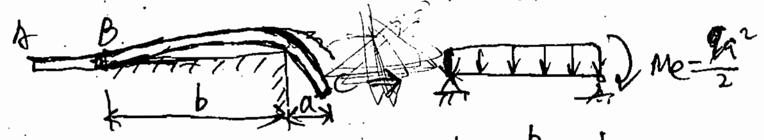
1. 试样拉伸率等于其纵向线应变?

答：否。纵向线应变为一点处线应变，当全长范围内为均匀变形时各处应变才相等。故 $\Delta l = \varepsilon \cdot l$，而其伸长 Δl 包含弹性变形与塑性变形总量；试样伸长率 δ 为试样经局部颈缩后，在其全长范围内为非均匀变形，且其塑性伸长量 $\Delta l = l_1 - l$ 仅为试样的塑性变形部分（弹性部分随卸载即消失），因此两者并不一样。

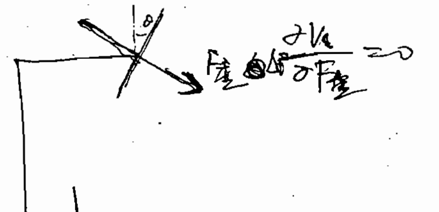
2.  裂缝宽与圆孔直径相同，拉伸时裂缝处先断裂（应力集中）

[illegible]中心的圆孔与几何形状[illegible]

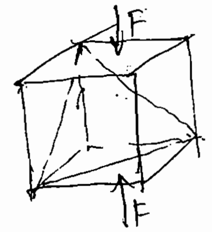


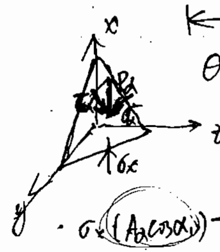


$\theta_B = \theta_{BM} - \theta_{Bq} = 0$

3. 

$F_{\text{全}} \cdot \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{\text{全}}} = 0$



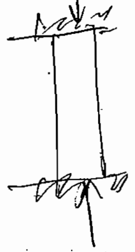


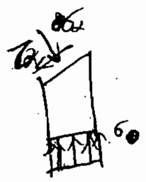
$\sigma_x (A_\alpha \cos\alpha) - p_\alpha \cdot A_\alpha = 0$

$\therefore p_\alpha = \ldots$

$\therefore \sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \ldots$

$\tau_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2} = \ldots$

4. 



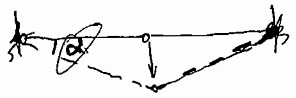
铸铁内摩擦系数 f

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = \sigma_0 \sin\alpha \cos\alpha \end{cases}$$

破坏发生在某斜截面上由 τ_α 与摩擦阻力 $f\sigma_\alpha$ 之差…

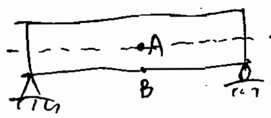
$$\tau_\alpha - f\sigma_\alpha = \sigma_0 (\sin\alpha\cos\alpha - f\cos^2\alpha)$$

令 $\frac{d(\tau_\alpha - f\sigma_\alpha)}{d\alpha} = 0$ 则 $\Rightarrow \alpha =$ ____

5. 

（几何非线性弹性问题）

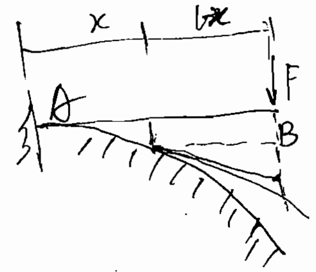
$F_N = \frac{F}{2\sin\alpha}$ （轴力与几何非线性）

6. 

中性层A点处正应力为零，下缘B点处切应力为零? ×

应理：在梁横截面上A点处正应力为零，B点处切应力为零。

事实上通过A的斜截面正应力不为零，B亦如此。

7. 

1° 当梁不与刚性柱面接触时，

$$w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

2° 当梁末端A与柱面接触时，

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{F_0 l}{EI}$$

$$\Rightarrow F_0 = \frac{EI}{Rl}$$

3° 当 $F > F_0$ 时，梁与柱接触部分的 x，则 $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{F(l-x)}{EI} \Rightarrow x = l - \frac{EI}{FR}$

… $+ w_B$ …

$$\begin{cases}\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\begin{matrix}\tau_{max} \\ \tau_{min}\end{matrix} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_\alpha = \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha \\ -\dfrac{\gamma_\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\alpha - \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha\end{cases}$$

以 ε_α. ε_x. ε_y. $-\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $-\frac{\gamma_\alpha}{2}$ 代入应力关系即可.

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

移轴: $I_x = I_{xc} + a^2A$. $I_{xy} = I_{x_cy_c} + abA$.

转轴: $I_{x_1} = \dfrac{I_x+I_y}{2} + \dfrac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$

$I_{x_1y_1} = \dfrac{I_x-I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$.

主惯性轴: $\begin{matrix}I_{x0} \\ I_{y0}\end{matrix} = \dfrac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

脆性断裂: $\sigma_{r1} = \sigma_1 \le [\sigma]$ $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3) \le [\sigma]$ $\sigma_{rM} = \sigma_1 - \dfrac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 \le [\sigma_t]$

塑性屈服: $\sigma_{r3} = \sigma_1-\sigma_3 \le [\sigma]$ $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} \le [\sigma]$

匀加速直线运动 $K_d = 1+\dfrac{a}{g}$

自由落体 $K_d = 1+\sqrt{1+\dfrac{2H}{\Delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

匀速下降骤停: $K_d = 1+\sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

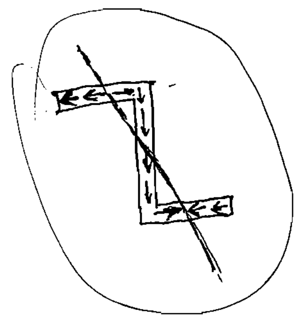
水平冲击 $K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

$\lambda = \dfrac{\mu l}{i}$ $F_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

卡一: $F_i = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i}$ (线性、非线性)

卡二: $\Delta_i = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$ (线性).

余能: $\Delta_i = \dfrac{\partial V_c}{\partial F_i}$ (线性、非线性)



?

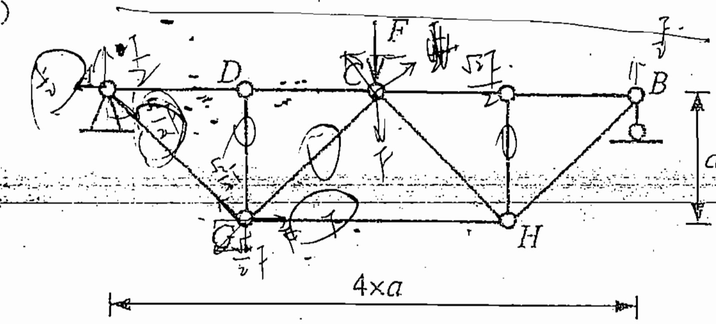
浙 江 大 学

二〇〇六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学（乙） 编号 456

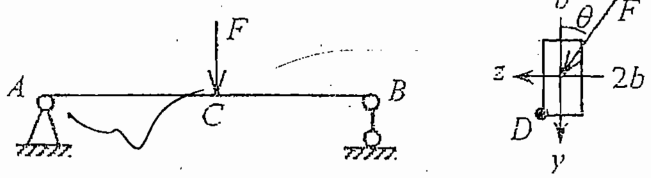
注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、图示平面桁架，AB 水平，各杆横截面均为直径 d 的圆形，材料的弹性模量为 E，铰 C 受铅直力 F 作用，各杆重不计。求：（1）杆内最大正应力；（2）铰 C 的铅直位移；（3）按压杆的临界力确定力 F 的临界值（设各杆均为大柔度杆）。（30 分）



（题一图）

二、图示简支梁 AB，长度 $AC=BC=L$，矩形横截面的边长分别为 b、$2b$，材料的弹性模量为 E。梁 C 处受横向力 F 作用，其与 y 轴成角度 $\theta=30°$，梁重不计。求：（1）梁内最大弯曲正应力；（2）截面 C 上中性轴与 y 轴的夹角；（3）截面上点 D 所在的梁纵向线的伸长量。（30 分）



（题二图）

三、构件中某点的单元体各面应力分量如图所示，材料的弹性模量为 E，切变模量为 G，泊松比为 ν。求：（1）该点的三个主应力；（2）用图示三个相互垂直面上的应力计算应变能密度；（3）用三个主平面上的应力计算应变能密度；（4）并利用两个应变能密度表达式证明材料常数的关系 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$。（30 分）

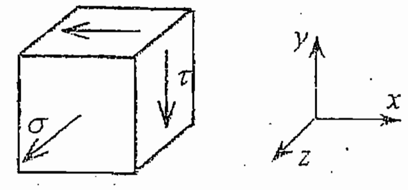
$\sigma_1=\sigma \quad \sigma_2=\tau \quad \sigma_3=-\tau$

$V_\varepsilon=\frac{1}{2E}\sigma^2+\frac{\tau^2}{2G}$

$V_\varepsilon'=\frac{1}{2E}(\sigma_1^2+2\tau^2+2\mu\tau^2)$

$\therefore V_\varepsilon'=V_\varepsilon'' \Rightarrow G=\frac{E}{2(1+\mu)}$

$V_\varepsilon=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)]$

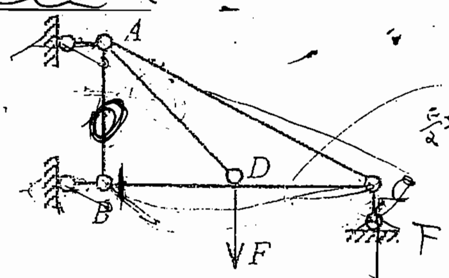


（题三图）

四、图示水平悬臂梁 AB，长为 L，横截面为薄壁槽形，壁厚 δ，腹板高为 h，上下翼缘宽为 b，b、$h>>\delta$。梁自由端 B 受铅直力 F 作用，梁重不计。求：（1）梁横截面上中性轴处的横力弯曲切应力；（2）翼缘上切应力的合力；（3）由力系合成关系确定弯曲中心，即使梁保持平面弯曲的力 F 作用线位置。（30 分）

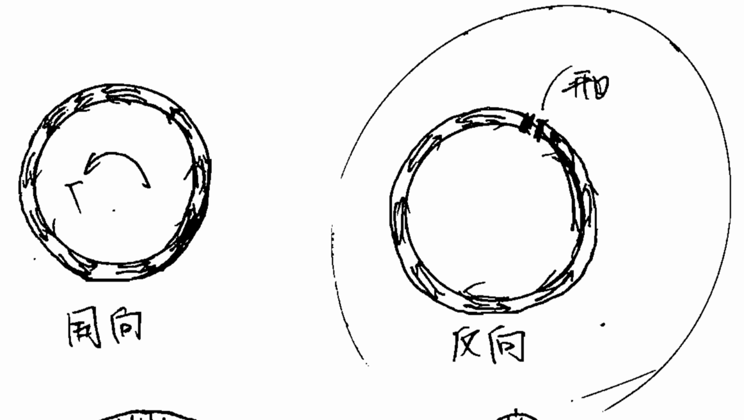
（题四图）

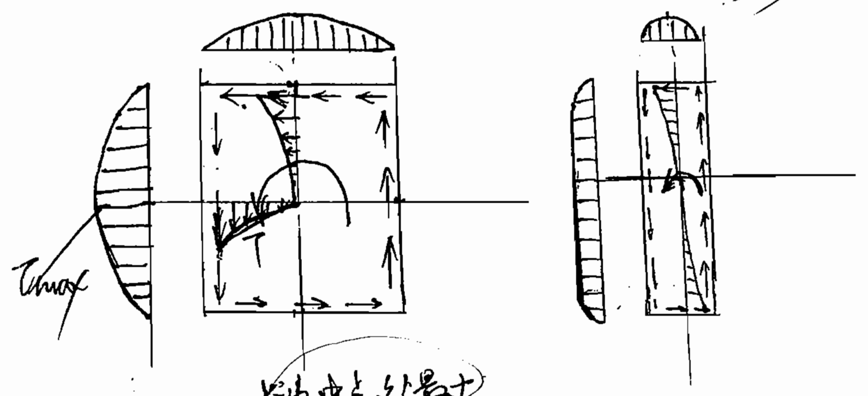
五、图示超静定结构，杆 AB 铅直，BC 水平，长度 $AB=BD=CD=a$，各杆横截面均为直径 d 的圆形，材料的弹性模量为 E。结构初始无内力，各杆重不计，杆 BC 于 D 处受铅直力 F 作用，略去剪切应变能的影响。求：（1）无杆 AD 时，杆 AC 的内力、点 D 的铅直位移；（2）有杆 AD 时，杆 AC 与 AD 的内力。（30 分）



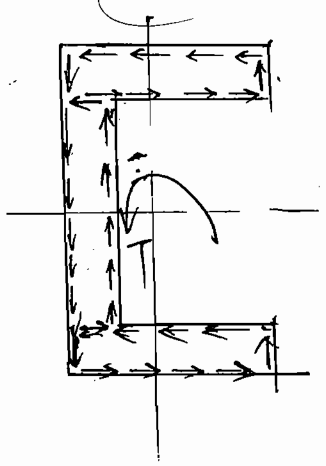
（题五图）

扭转.

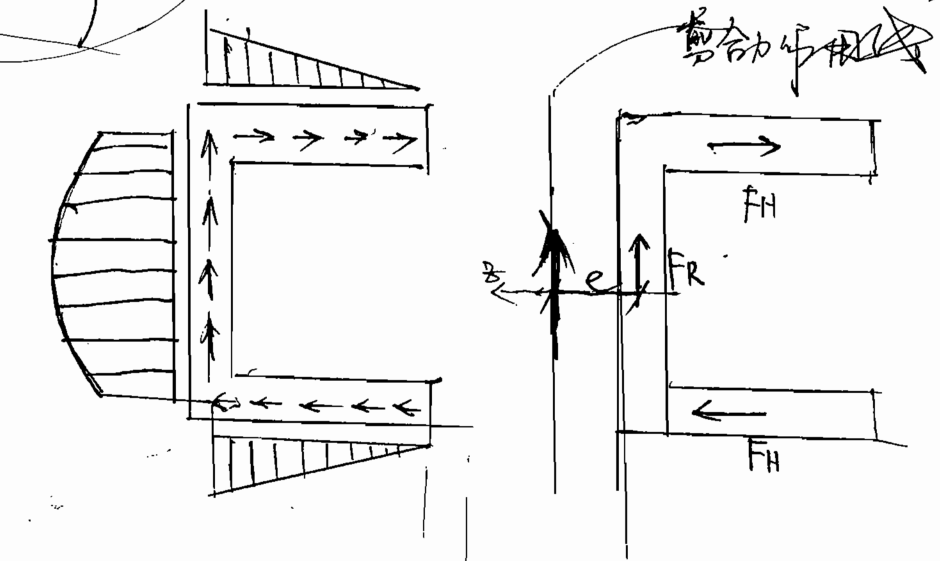


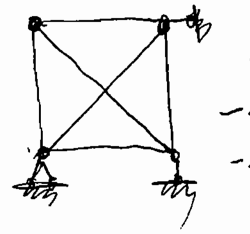


长边中点处最大.

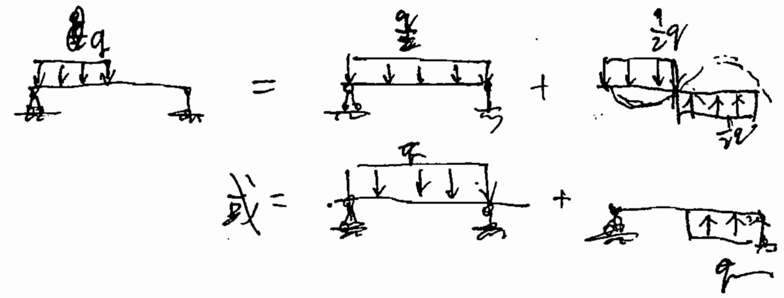


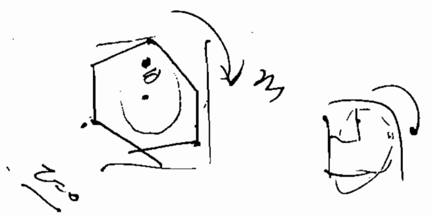
横力弯曲.





二次超静定.
一超为支座反力.
一超为杆内力.



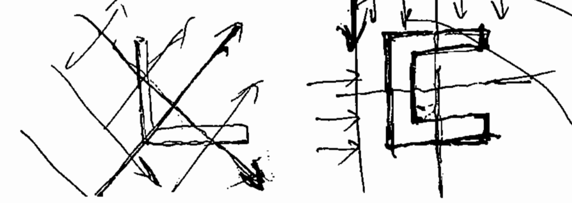


* 纯弯曲，中性轴通过截面形心.

挠度线与中性轴垂直. ~~挠度线与横力作用面一致~~

根据横向外力作用线是否与横截面的形心主惯性轴之~~平行~~来判断一根梁是否发生平面弯曲.

平行即可



浙 江 大 学

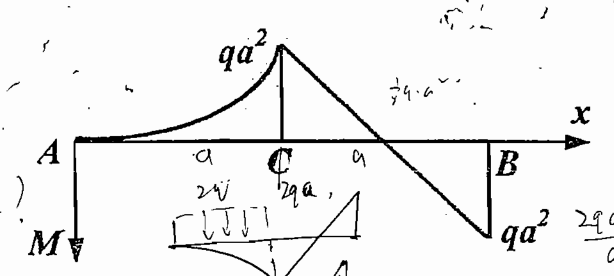
二〇〇八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学（乙） 编号 835

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

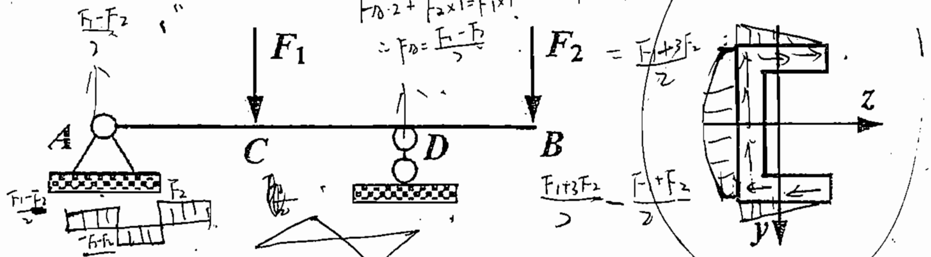
一、梁 ACB 的长度 $AC=CB=a$，平面弯曲的弯矩图如图所示，其中 AC 段的弯矩曲线为抛物线，且于 A 处与 x 轴相切，CB 段的弯矩曲线为直线。求：（1）梁 AC 段与 CB 段的弯矩方程，（2）梁 ACB 的剪力图。

（20 分）



二、外伸梁 AB 受横向力 F_1、F_2 作用，如图所示，设支座 A 与 D 的约束力方向均向上，横截面为薄壁槽形。求：（1）作梁 AB 的弯矩图，（2）画出 BD 段中槽形截面上弯曲切应力的方向，并说明其大小变化规律，（3）当 BD 段自由扭转时，画出槽形截面周边上扭转切应力的方向，并说明各边最大切应力点的位置，（4）梁上是否存在纯剪切应力状态点？如果存在，指出其在横截面上的位置。

（20 分）



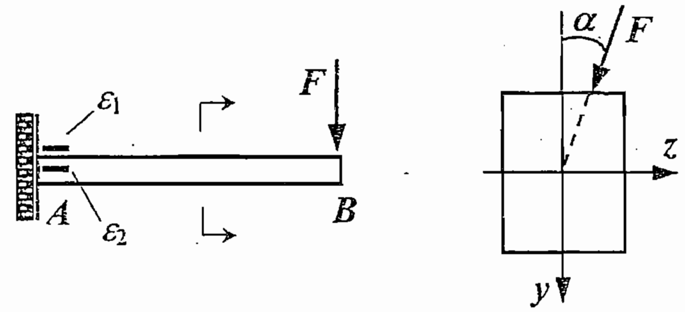
三、由 45°应变花测得构件表面上某点处的线应变 $\varepsilon_0=400\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45}=260\times10^{-6}$，$\varepsilon_{90}=-80\times10^{-6}$，材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\nu=0.3$。求：（1）该点与应变方向相应的正应力 σ_0、σ_{90} 与 σ_{45}，（2）该点的主应力 σ_1、σ_2 与 σ_3，及最大切应力。

（30 分）

四、图示水平悬臂梁 AB，长为 L，矩形横截面高为 h、宽为 b，材料弹性模量为 E。梁 B 端受横向力 F 作用，该力偏离梁横截面铅直对称轴一个角度 α。求：（1）梁的最大弯曲正应力，（2）固定端截面的中性轴方程，（3）如果在梁 A 端上表面与侧面

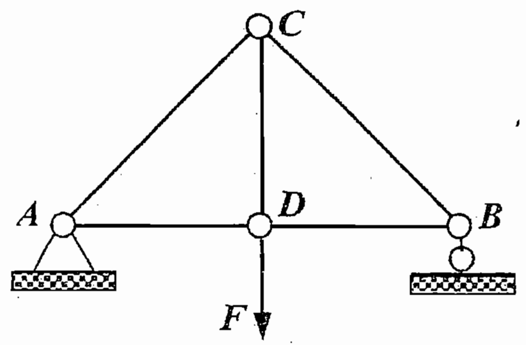
中间分别布置纵向应变片如图所示，测得线应变 ε_1、ε_2，用该应变表达力 F 及其偏角 α（不计剪力影响）。

（25 分）



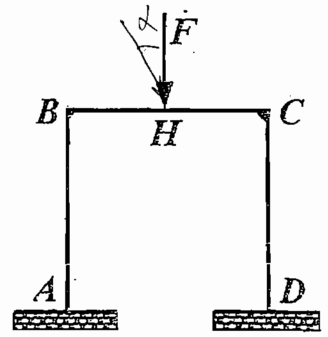
五、平面三角形桁架如图所示，杆长 $AD=BD=CD=a$，杆 CD 铅直，AB 水平，铰 D 受铅直力 F 作用。各杆的拉压刚度均为 EA，许用正应力均为$[\sigma]$，杆重不计。求：（1）铰 D 的铅直位移，（2）按强度条件确定杆 CD 与 AD 横截面面积的合理比值，（3）杆 AC 的柔度，及临界压力（设该杆两端铰均为球铰，矩形横截面的边长分别为 b、$2b$，材料弹性模量为 E，欧拉公式适用的柔度界限值 $\lambda_P=4a/b$）。

（25 分）



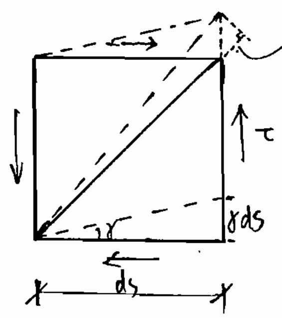
六、图示平面刚架 $ABCD$，A 端与 D 端固定，AB 与 CD 铅直，BC 水平，杆长 $AB=CD=2a$，$BH=CH=a$，H 处受铅直力 F 作用。各杆的弯曲刚度均为 EI，不计杆重、拉压与剪切的应变能。求：（1）BH 段截面上的剪力，（2）用能量法计算截面 H 上的轴力与弯矩，（3）如果力 F 倾斜，偏向 B 端一个角度 α，此时截面 H 上的轴力。

（30 分）



证明：$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ 的三种方法.

1°



$\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma ds$（伸长量）45°方向..

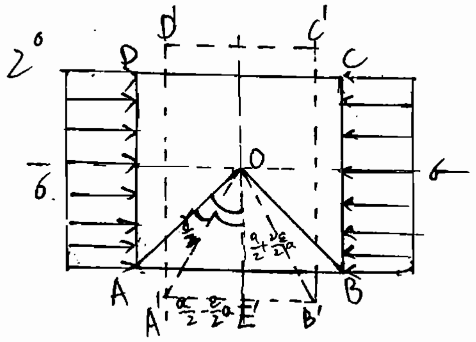
$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma ds\Big/\sqrt{2}ds=\frac{\gamma}{2}=\frac{\tau}{2G} \quad \text{——(1)}$$

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{45^\circ}-\nu(\sigma_{45^\circ}+0)\right]=\frac{1+\nu}{E}\tau \quad \text{-- -(2)}$$

其中 $\sigma_{45^\circ}=\tau$，$\tau_{45^\circ}=0$．$\sigma_{-45^\circ}=-\tau$

由(1)(2)得 $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$

2°



$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}}\approx\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{2-\gamma}{2+\gamma} \quad \text{——(1)}$$

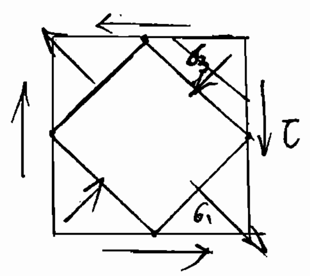
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\varepsilon}{\frac{a}{2}+\frac{\nu a}{2}\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon}{1+\nu\varepsilon} \quad \text{——(2)}$$

由(1)(2)得 $\frac{2-\gamma}{2+\gamma}=\frac{1-\varepsilon}{1+\nu\varepsilon}\Rightarrow\gamma(1+\nu)\varepsilon$（略去高阶微量）

其中 $\gamma=\frac{\tau_{45^\circ}}{G}$，$\tau_{45^\circ}=\frac{\sigma}{2}$．$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$

$\therefore\ G=\frac{E}{2(1+\nu)}$

3°



纯剪下应变能密度：$u=\frac{\tau^2}{2G}$ ---- (1)

也可用主单元体表示．$\sigma_1=\tau$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau$．

则 $u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$

$=\frac{1}{E}(1+\nu)\tau^2$ ．—— (2)

由(1)(2)得 $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$

浙 江 大 学

一九九九 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学（乙） 编号 047

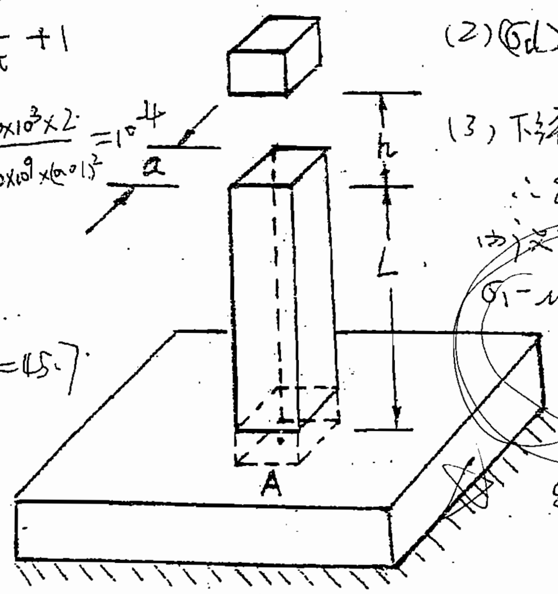
注意：答案必须写在答题纸上，否则无效

一、（1）试写出目前常用的四个强度理论的强度条件表达式，并说明各理论适用于什么破坏类型。

（2）若横力弯曲梁横截面上危险点的正应力为σ、剪应力为τ（不计挤压），试按第四强度理论推导出其相当应力的表达式。 （20分）

$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$

二、正方形截面立柱，横截面边长 a=10cm，长 L=2m，材料的弹性模量 E=20GPa，泊松比 ν=0.2。其下端插入刚性基础中（无间隙，且在动载计算中，插入部分的轴向变形可不计）。当上端受到重量为 P=10kN 的重物从高度 h=10cm 处落下的冲击作用时，在线弹性范围内、稳定的情况下，试求：（1）动荷系数；（2）立柱横截面上的最大动应力；（2）假定横截面上应力均匀分布，立柱下端插入刚性基础部分中一点 A 的主应力、主应变。（不计表面接触的摩擦） （20分）



$K_d=\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}}+1$

$\Delta_{st}=\frac{PL}{EA}=\frac{10\times10^3\times2}{20\times10^9\times(0.1)^2}=10^{-4}$

$\sigma_{st}=\frac{P}{A}=\frac{10\times10^3}{(0.1)^2}=1\,MPa$

$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2\times0.1}{10^{-4}}}=45.7$

(2) $(\sigma_d)_{max}=K_d\cdot\sigma_{st}=45.7\,MPa$

(3) 下端刚性基础 $\because \varepsilon_1=\varepsilon_2=0$

$\sigma_3=(\sigma_d)_{max}=-45.7\,MPa$

$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=0$

$\sigma_2-\mu(\sigma_1+\sigma_3)=0$

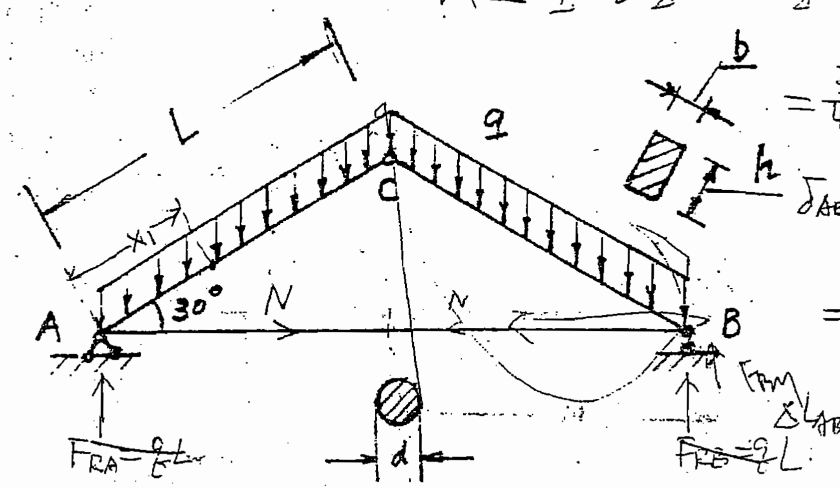
$\sigma_1=\sigma_2=-11.4\,MPa$

$\varepsilon_3=\frac{1}{E}(\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2))$

$=\frac{1}{20\times10^9}[-45.7-0.2(-22.8)]\times10^6$

$=-2.057\times10^{-3}$

三、简支三角形构架，各杆材料的弹性模量均为 E=10GPa。圆杆 AB 的截面直径 d=6cm，矩形截面杆 AC 与 BC 的尺寸相同，长度 L=2m，矩形截面边长 h=10cm、 b=4cm。在铅垂向下集度 q=3kN/m 的均布荷载作用下，试求：（1）杆 AB 的内力，支座 B 相对 A 的位移；（2）杆 AC 上危险截面、危险点的位置，最大正应力（绝对值）。（不计剪应力） （20分）



$M=\frac{\sqrt3}{2}Lq\frac{\sqrt3}{2}x_1-\frac{F_N}{2}x_1-\frac{\sqrt3}{2}x_1 q\frac{\sqrt3}{2}x_1/2$

$=\frac{3}{4}Lqx_1-\frac{F_N}{2}x_1-\frac{3}{8}x_1^2q$

$\delta_{AB}=2\int_0^L\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F_N}dx$

$=\frac{1}{EI}\left(\frac{F_N L^3}{6}-\frac{5}{32}qL^4\right)$

$\Delta L_{AB}=\frac{F_N(\sqrt3 L)}{EA}$

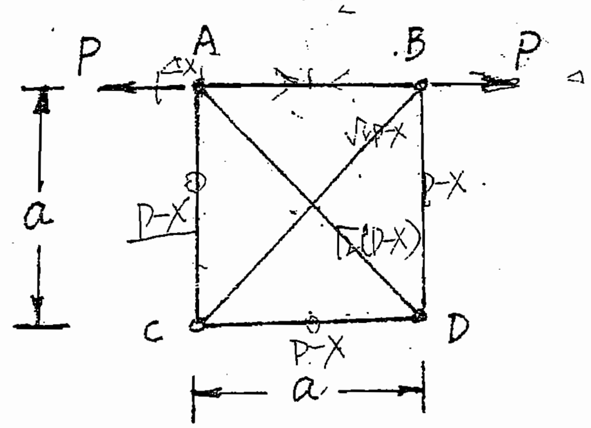
$F_N=\frac{\frac{5}{32}qL^4}{\frac{L^3}{6}-\frac{\sqrt3 L\cdot I}{A}}$

$=5.63\,kN$

$\frac{\partial M}{\partial x}=0$ 时 M 最大

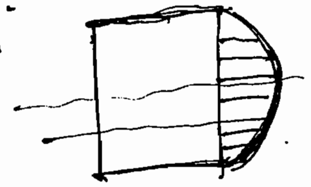
$x=L-\frac{2F_N}{3q}=0.70\,(m)$

四、正方形桁架，边长为 a，在节点 A、B 处受到一对大小为 P 的水平力作用。各杆材料的弹性模量均为 E，杆 AD 与 BC 的横截面积为 2A，其余四根杆的横截面积为 A。试求：（1）杆 AB 的内力；（2）节点 A、B 的相对位移；（3）若将两个 P 力同时转过180^0，使其指向 AB 杆，上述结果会不会变化？可能出现什么问题？ （20分）



横力弯曲时最大切应力

1°



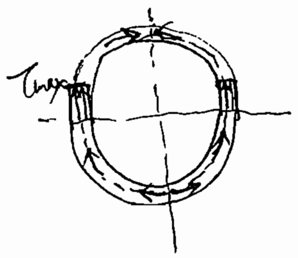
$$\tau = \frac{F_S S^*}{I_z b}$$

$$S^* = \int_y^{\frac{h}{2}} y b\, dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

当 $y = 0$ 时 $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F_S}{A}$.

2° 薄壁环



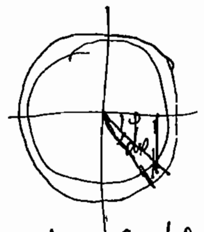
假设 (1) 横截面上切应力的大小沿壁厚无变化.

(2) 切应力方向与圆周相切

$$S^* = \underbrace{\pi r_0 \delta}_{面积} \times \underbrace{\frac{2r_0}{\pi}}_{形心} = 2r_0^2\delta$$

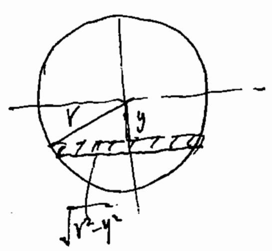
$$S^* = \int_0^\pi \delta r\, d\varphi \cdot r\sin\varphi = 2r^2\delta$$

故 $\tau_{max} = \frac{F_S S^*}{I_z b} = 2\frac{F_S}{A}$



$dA = \delta r\, d\varphi$

3° 圆截面梁



$dA = 2\sqrt{r^2-y^2}\, dy$

$$\int_0^r 2\sqrt{r^2-y^2}\cdot y\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^3 \sin\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{d^3}{12}$$

$\therefore \tau_{max} = \frac{F_S S^*}{I_z b} = \frac{4}{3}\frac{F_S}{A}$.

浙 江 大 学

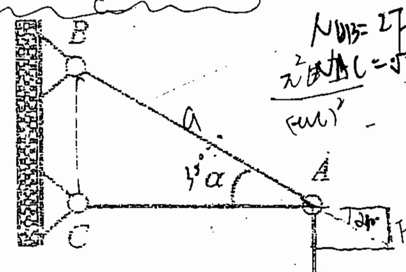
二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学(乙) 编号 456

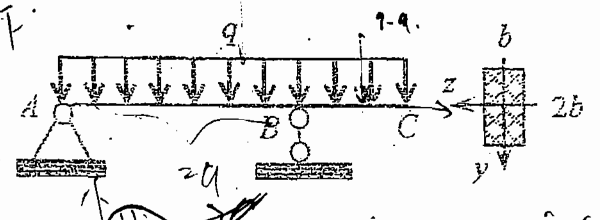
注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

位移 + 稳定

一、图示构架 ABC，杆 AC 水平，$\alpha=30°$，杆 AB 长为 a，两杆横截面均为直径 d 的圆形，材料的弹性模量为 E。铰 A 受铅直力 F 作用，各杆重不计。试求：（1）杆内最大正应力；（2）铰 A 的铅直与水平位移；（3）按稳定性计算力 F 的临界值(设各杆均为大柔度杆)；（4）校核结构的安全性时，需分析哪些构件的什么问题？（25 分）



（题一图）



（题二图）

剪力弯矩图 应力

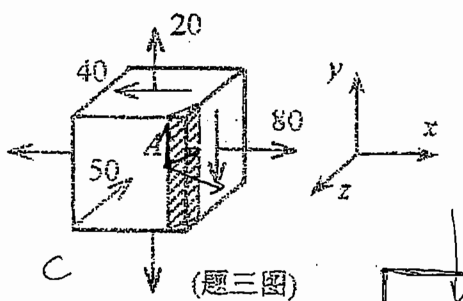
二、水平外伸梁 ABC 如图所示，长度 $AB=2BC=2a$，矩形横截面的边长分别为 b、$2b$，材料的弹性模量为 E。梁上受铅直均布力作用，其集度为 q，梁重不计。试求：（1）作剪力图与弯矩图；（2）梁内最大正应力与最大切应力；（3）梁下边缘的总伸缩。（25 分）

应力分析

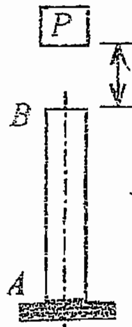
三、构件中某点的单元体各面应力分量如图所示（应力单位为 MPa），材料的弹性模量 $E=200$GPa，泊松比 $\nu=0.3$。试求：（1）该点的三个主应力与主应变；（2）按第三与第四强度理论的相当应力；（3）图中阴影表示的斜截面 ABC 平行于 y 轴，其法线与 x 轴、z 轴所成角度相等，该截面上的正应力为多少？（25 分）

$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



（题三图）



（题四图）

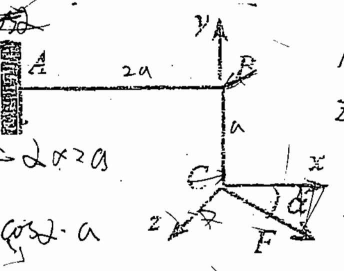
动载荷

四、图示铅直杆 AB，长为 l，横截面为边长 a 的正方形，材料的弹性模量为 E。重为 P 的重物从 B 端上方 h 处自由落下冲击杆。杆重不计，且碰撞过程中计算动应力的有关假定成立。试求：（1）当重物沿杆轴线冲击杆时，杆 B 端的最大动位移 Δ_d、动荷因数 K_d、最大动应力 $\sigma_{d\max}$；（2）当重物由杆轴线偏左距离 e 处冲击杆时，动荷因数 K_d 与最大动应力 $\sigma_{d\max}$（设杆稳定）。（25 分）

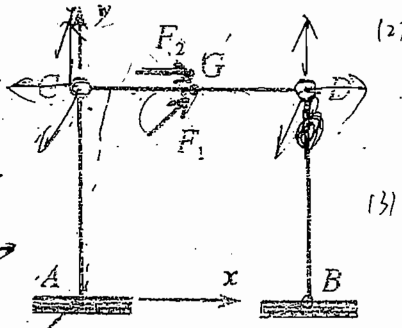
$K_d = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$

组合变形 应力分析

五、图示刚架，杆 AB 水平，BC 铅直，长度 $AB=2BC=2a$，各杆横截面均为直径 d 的圆形，C 端受水平面 xz 上的力 F 作用，$\alpha=30°$，杆重不计。试求：（1）A 端横截面上的内力，图示危险点的位置(给出所在半径与 y 轴的夹角)；（2）最大弯曲正应力与最大扭转切应力；（3）刚架因横力弯曲的最大切应力。（25 分）



（题五图）



（题六图）

超静定

六、图示结构，杆 AC 与 BD 铅直，CD 水平，各杆长均为 a，横截面均为直径 d 的圆形，材料的弹性模量为 E。杆 CD 中点 G 处受到沿 z 轴反向的力 F_1 与沿 x 轴向的力 F_2 作用。杆重不计，略去拉压与剪切变形(应变能)的影响。试求：（1）当 $F_2=0$ 时，铰 C 处的约束力，点 G 的水平位移，铰 C 与 D 间的相对位移；（2）当 $F_1=0$ 时，铰 C 处的 x 方向约束力。（25 分）

能量法

应变能 ① $V_\varepsilon = W = \int_0^{\Delta_1} F d\Delta$ ② $V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon dV$

线弹性 $V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA}dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p}dx + \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI}$

余能 ① $V_c = W_c = \int_0^{F_1} \Delta dF$ ② $V_c = \int_V v_c dV$

卡氏第一 $V_\varepsilon = W = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\Delta_i} f_i d\Delta_i$

条件

$$\begin{cases} dV_\varepsilon = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i} d\Delta_i \\ dW = F_i d\Delta_i \end{cases} \qquad F_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \Delta_i}$$

(一切受力状态下弹性杆件)

卡氏二 $V_c = W_c = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_i} \Delta_i dF_i$

$$\begin{cases} dW_c = \Delta_i dF_i \\ dV_c = \frac{\partial V_c}{\partial F_i} dF_i \end{cases} \qquad \Delta_i = \frac{\partial V_c}{\partial F_i}$$

(非线性弹性杆件，结构) 余能定理

对于线弹性杆件或结构 $V_\varepsilon = V_c$

(卡二) $\therefore \Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$

先求再积分：

卡二 $\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \int_l \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx + \int_l \frac{T(x)}{GI_p} \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$

桁架杆件 $\Delta_i = \sum \frac{N_i l_i}{EA_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial P}$

理论力学中质点质点系的虚位移原理

平衡于杆件 外力与内力对任意虚位移所做总虚功为 0

$W_e + W_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \Delta_i = \int_l (M d\theta + F_S d\lambda + F_N d\delta + T d\varphi)$$

(非线，线，非弹，弹)

线弹 推导出

单位力法 (某一截面某一指定方向位移 Δ)

施加单位力 1，引起截面内力 $\bar{F}_N$ $\bar{M}$ $\bar{F}_S$ $\bar{T}$

$1 \cdot \Delta = \int_l (\bar{F}_N d\delta + \bar{M} d\theta + \bar{F}_S d\lambda + \bar{T} d\varphi)$

对于线弹 $1\Delta = \int_l \bar{F}_N \frac{F_N dx}{EA} + \int_0^l \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int_0^l \bar{F}_S \frac{\alpha F_S}{GA} dx + \int_0^l \bar{T} \frac{T dx}{GI_p}$

桁架 只有 F_N 有

$$1 \cdot \Delta = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{Ni} \frac{F_{Ni} l_i}{EA_i}$$

图乘法 $\Delta = \int \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI} dx = \frac{\omega \bar{M}_C}{EI}$

等截面直杆 (直梁，杆系刚架)

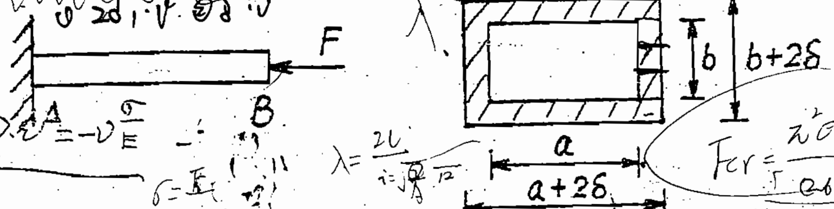
ω 为 $M(x)$ 图面积，$\bar{M}_C$ 为 $M(x)$ 图形心对应 $\bar{M}(x)$ 图中的值 (纵坐标)

二〇〇四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

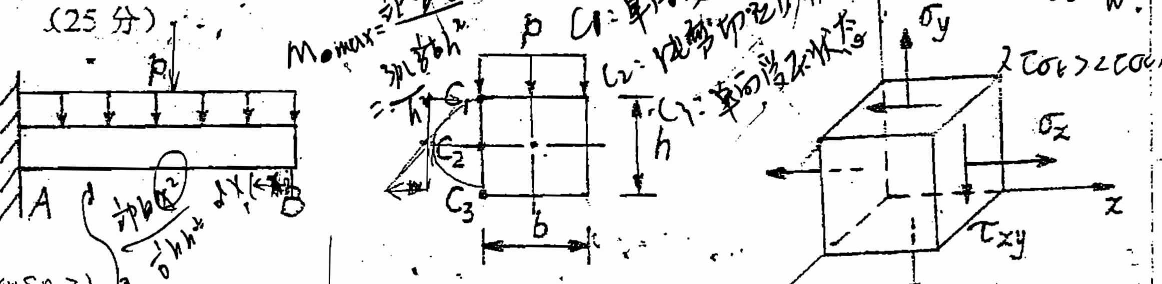
考试科目 材料力学（乙）　　编号 456

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、空心矩形截面直杆 AB，长为 L，横截面尺寸如图所示，δ 远小于 a 与 b，$a=2b$。材料的弹性模量为 E，泊松比为 ν，杆 B 端受到轴向压力 F 作用。试求：(1) 按轴向压缩理论，杆内的最大正应力；(2) 杆 B 端的水平位移；(3) 杆横截面厚度的变化；(4) 该压杆的柔度；(5) 按欧拉公式计算的临界应力。（25 分）



二、矩形截面悬臂梁 AB，长为 L，横截面尺寸如图所示。材料的弹性模量为 E，梁上表面受到法向均匀分布的表面力作用，单位面积的作用力为 p。试求：(1) 梁内的最大弯曲正应力；(2) 梁中间横截面上图示点 C_1、C_2、C_3 分别处于何种应力状态；(3) 梁下层的伸缩量；(4) 当 $L=10h$ 时，梁内最大弯曲正应力与上表面压应力之比；(5) 如果梁由脆性材料制成，许用压应力大于许用拉应力，那么再另外增加外作用力能否提高梁的安全性，从强度角度给出简单分析说明。（25 分）

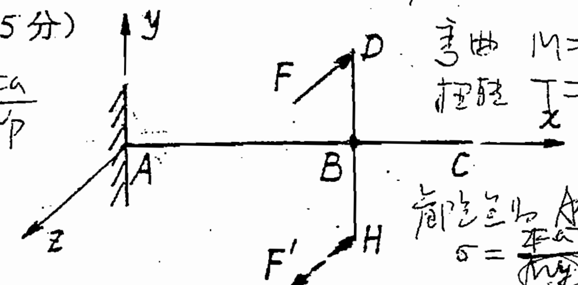


（题二图）　　（题三图）

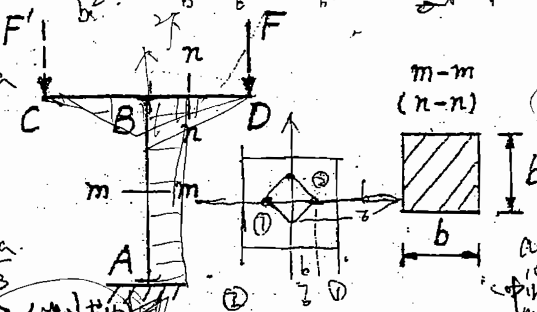
三、构件上某点处于二向应力状态，如图所示，已知 x 与 y 方向截面上的三个应力 $\sigma_x=8\text{MPa}$，$\sigma_y=4\text{MPa}$，$\tau_{xy}=6\text{MPa}$。试求：(1) 三个主应力；(2) 最大切应力，及其所在两个相互垂直方向截面上的正应力；(3) 正应力为零且法线垂直于 z 轴方向截面上的切应力；(4) 应变计能否沿正应力为零的方向粘贴测量，给出简单分析说明。（25 分）

四、图示刚架，直杆 DBH 垂直于直杆 ABC，长度 $BD=BH=a$，$AB=2BC=2a$，各杆的横截面均为直径 d 的圆。D 端受到沿 z 轴反向的集中力 F 作用，不计相应于剪力的切应力。

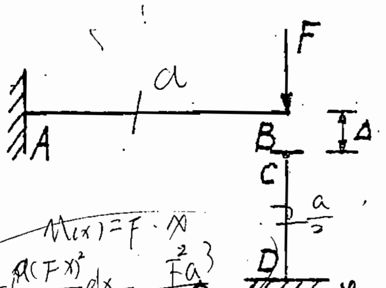
试求：(1) 危险截面的位置及其上的内力 (2) 危险点的应力 (3) 危险点的主应力；(4) 按第三强度理论的最大相当应力 (5) 如果在 H 端再作用沿 z 轴方向的集中力 F'，其大小 $F'=F$，试按第三强度理论分析杆 AB 安全性的变化。（25 分）



五、图示 T 形刚架，直杆 CBD 垂直于直杆 AB，长度 $AB=2a$，$BC=BD=a$，各杆的横截面均为边长 b 的正方形。D 端受到平行于 BA 方向的集中力 F 作用，假定杆 AB 稳定。试求：(1) 杆 AB 的变形形式；(2) 危险截面的位置，及其上的内力；(3) 最大正应力；(4) 杆 AB 方形截面的截面核心形状；(5) 如果在 C 端再作用平行于 BA 方向的集中力 F'，其大小 $F'=F$，试分析刚架最大正应力的变化（设 $a=5b$）。（25 分）



六、图示水平悬臂直梁 AB，长为 a，横截面为直径 d 的圆，材料的弹性模量为 E，自由端 B 处受到铅直外力 F 作用。不计 AB 剪切与轴向变形的影响。试求：(1) 梁 AB 的应变能；(2) 梁 B 端的铅直位移；(3) 当梁 B 端下方有图示铅直杆 CD 时，梁变形过程中 B 端可能碰到杆的 C 端，试分析最终 B 端与 C 端的可能相互作用力与梁 B 端的铅直位移（设 B 与 C 的初始间距 $\Delta=(20Fa^3)/(\pi Ed^4)$，杆 CD 长为 $a/2$，横截面为直径 $d/4$ 的圆，$a=4d$，假定杆 CD 稳定）。（25 分）



$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

两端铰支 $\mu=1$ 一端铰另一固定 $\mu=0.7$

两端固定 $\mu=0.5$ 一端固一端自由 $\mu=2$

两端固定，但可沿横向相对移动 $\mu=1$

$\lambda_p=\sqrt{\frac{\sigma_p}{EI}}$ $\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}=\frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

大 $\lambda\geq\lambda_p$ $\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

中 $\lambda_p>\lambda>\lambda_s$

$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2}$

小 $\lambda<\lambda_s$ 属于强度问题

$w=f(x)$

$M(x)=F_{cr}\cdot w$

$EIw''=-M(x)=-F_{cr}\cdot w$

I 为截面最小形心主惯性矩

令 $\frac{F_{cr}}{EI}=k^2$

得常微分方程 $w''+k^2w=0$

$w=A\sin kx+B\cos kx$

$x=0$ $w=0$ $x=\frac{l}{2}$ $w=\delta$

$\Rightarrow B=0$ $\sin\frac{l}{2}k\ A=\delta$

再 $x=l$. $w=0$

$0=\frac{\delta}{\sin\frac{lk}{2}}\sin lk\Rightarrow 2\cos\frac{lk}{2}$

即 $\cos\frac{lk}{2}=0$ $\frac{lk}{2}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$

最小值 $lk=\pi$

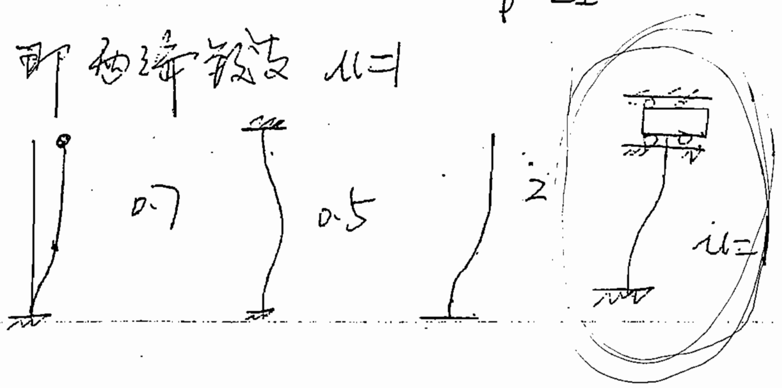
$p_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot A$

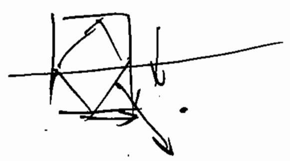
$=\frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2}$

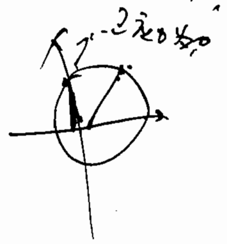
小层

$$F_{cr}=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot EI$$

即 两端铰支 $\mu=1$







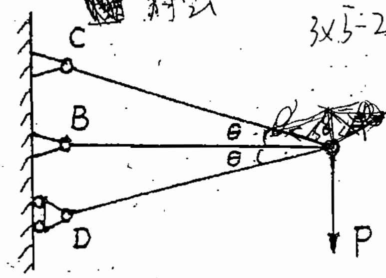
$\varepsilon=\frac{1}{E}(\sigma_2-\mu\sigma_{90^\circ+2})$

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学（乙） 编号 459

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、图示简单构架，水平杆 AB 长为 L，与斜杆 AC、AD 均成θ角。B、C 端均为固定铰支座，D 端为活动铰支座，CBD 在同一铅直线上。各杆的弹性模量均为 E，杆 AB 的横截面积是杆 AC 与 AD 的两倍，即 $A_{AB}=2A_{AC}=2A_{AD}=2A$。铰 A 处受铅直力 P 作用时，求：（1）判断图示结构为静定还是超静定，（2）各杆的内力，（3）各杆横截面上的应力，（4）各杆的伸缩量，（5）铰 A 的水平与铅直位移。（25 分）

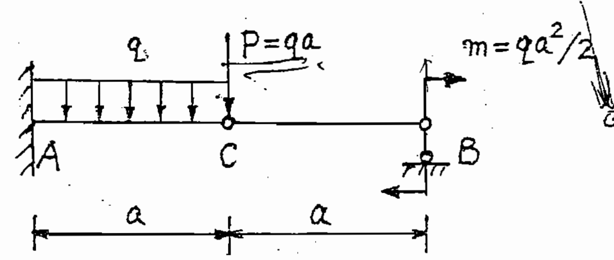


$3\times5-2\times4-1=0$

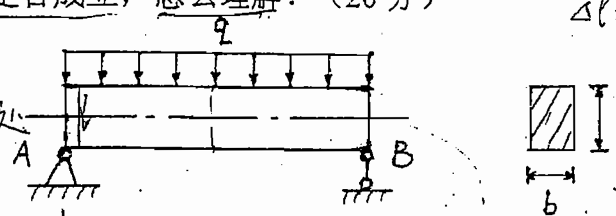
$N_{AB}=0$

$N_{AC}=-N_{AD}$

二、作图示组合梁的剪力图与弯矩图。（15 分）



三、简支梁 AB 如图示，长为 L，矩形横截面的高与宽分别为 h、b，材料的弹性模量为 E。受集度为 q 的均布力作用时，求：（1）最大剪应力，（2）最大正应力，（3）梁下边缘的总伸长，（4）横截面上正应力沿高度如何分布，在两端边界上是否成立，怎么理解？（20 分）



$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{bh}=\frac{3qL}{4bh}$

最大弯矩在中点 $M=\frac{qL^2}{8}$

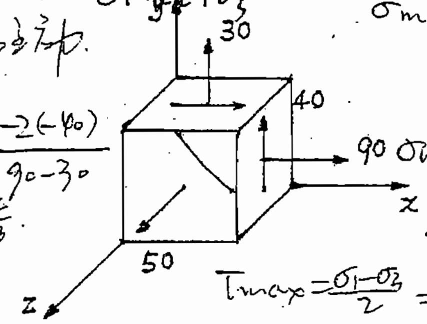
$=\frac{12}{Ebh^2}\left(\frac{qL^3}{16}-\frac{qL^3}{48}\right)=\frac{qL^3}{2Ebh^2}$

……200GPa，泊松比 $\nu=0.3$，求：（1）三个主应力，（2）最大剪应力，（3）三个主应变，（4）体积应变，（5）分别按最大拉应力理论、最大伸长线应变理论、最大剪应力理论及形状改变比能理论的相当应力。（35 分）

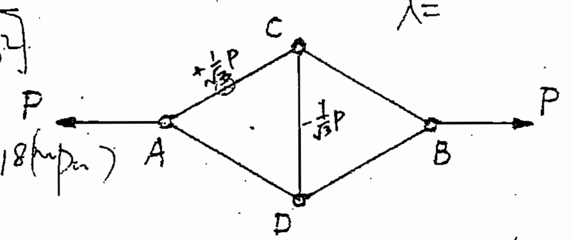
$W=u\cdot V=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\cdot abc$

$\sigma_{max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$

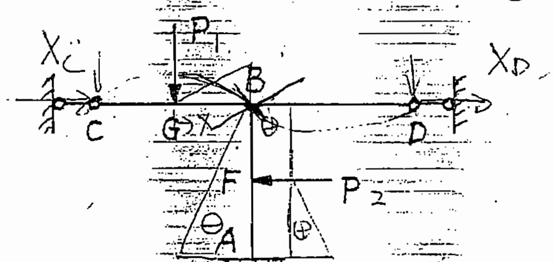
$=60+\sqrt{30^2+40^2}=110\text{MPa}$



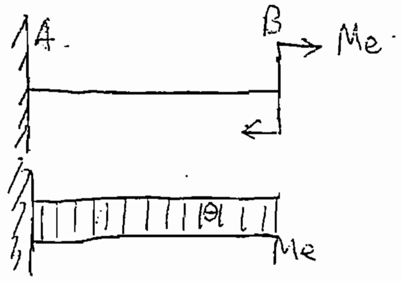
五、铰接平面四边形构架如图示，各细长直杆的长度均为 a，圆形横截面的直径均为 d，材料弹性模量同为 E。当受一对沿 AB 连线方向的水平拉力 P 作用时，求：（1）直杆 CD 的柔度，（2）大柔度 CD 杆的临界压力，（3）容许作用力[P]（稳定安全系数 $n_{st}=3$），（4）当荷载 P 低于许用值时，A 与 B 两点间的相对位移，（5）如果改变作用力 P 的方向，成为一对压力，则其容许值又为多少。（30 分）



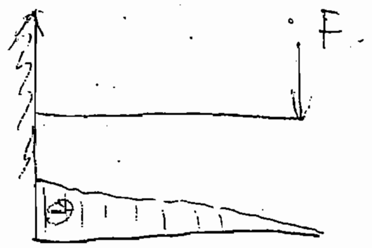
六、图示超静定刚架，各杆长 AB=BC=BD=a，横截面积均为 A，抗弯刚度同为 EI。拉压与剪切应变能远小于弯曲应变能，可略去。杆 CD 水平，AB 铅直。杆 AB 中点 F 处受水平力 P 作用，BC 中点 G 处受铅直力 P 作用。求：（1）铰 C 与 D 处的约束力，（2）C 与 D 点的铅直位移，（3）B 点的水平位移。（25 分）



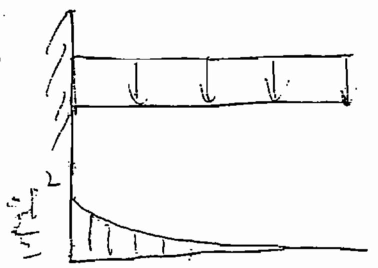
$F_c=F_D=0$



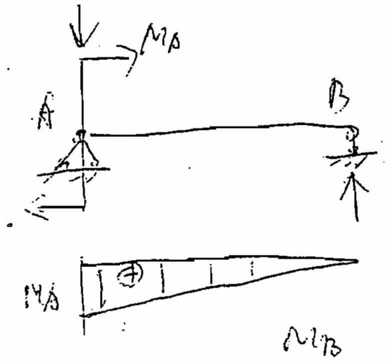
$$w=\frac{M_e x^2}{2EI} \qquad \begin{cases}\theta_B=\dfrac{M_e l}{EI}\\ w_B=\dfrac{M_e l^2}{2EI}\end{cases}$$



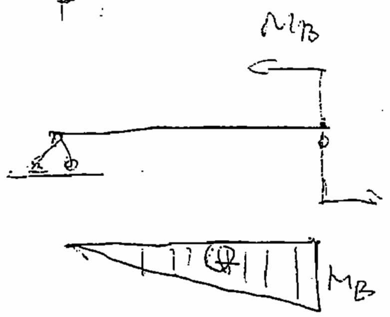
$$w=\frac{Fx^2(3l-x)}{6EI} \qquad \begin{cases}\theta_B=\dfrac{Fl^2}{2EI}\\ w_B=\dfrac{Fl^3}{3EI}\end{cases}$$



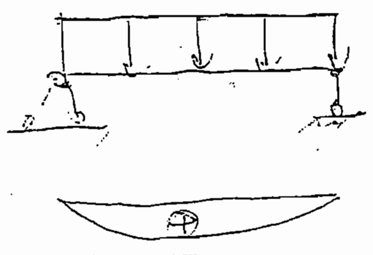
$$\begin{cases}\theta_B=\dfrac{ql^3}{6EI}\\ w_B=\dfrac{ql^4}{8EI}\end{cases}$$



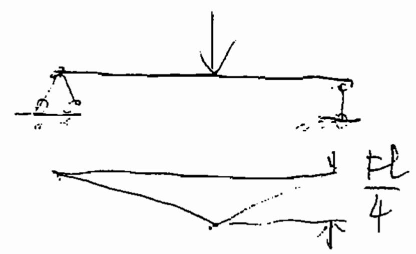
$$\begin{cases}\theta_A=\dfrac{M_A l}{3EI}\\ \theta_B=-\dfrac{M_A l}{6EI}\\ w_C=\dfrac{M_A l^2}{16EI}\end{cases}$$



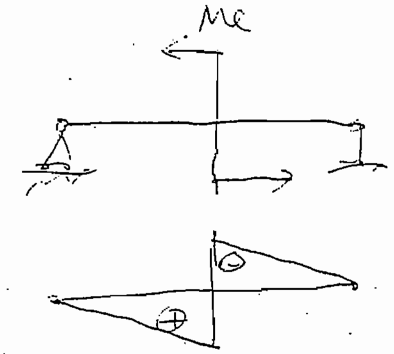
$$\begin{cases}\theta_A=\dfrac{M_B l}{6EI}\\ \theta_B=-\dfrac{M_B l}{3EI}\\ w_C=\dfrac{M_B l^2}{16EI}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\theta_A=\dfrac{ql^3}{24EI}\\ \theta_B=-\dfrac{ql^3}{24EI}\\ w_C=\dfrac{5ql^4}{384EI}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\theta_A=\dfrac{Fl^2}{16EI}\\ \theta_B=-\dfrac{Fl^2}{16EI}\\ w_C=\dfrac{Fl^3}{48EI}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\theta_A=\theta_B=\dfrac{M_e l}{24EI}\\ w_C=0\end{cases}$$

$W=cx^6$

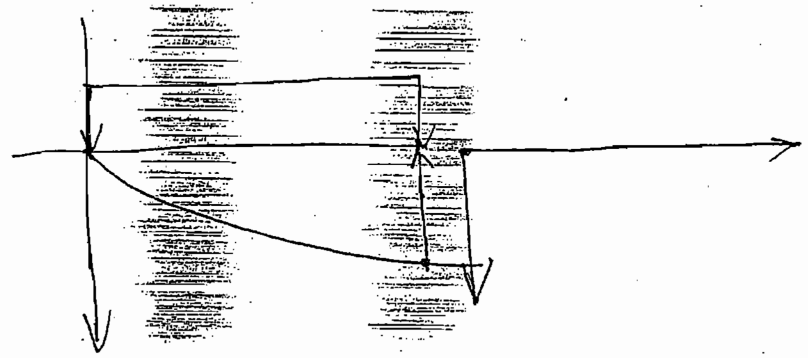
$\therefore \dfrac{d^2w}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$

$M(x)=-EI\cdot 12cx^2$ $\quad x=0,\ M=0 \quad F_s=0$

$F(x)=-EI\cdot 240cx$ $\quad x=b,\ M=-EI\,12cb^2 \quad F_s=-EI\,240cb$

$q(x)=-EI\,24c$

$q\cdot l\cdot\frac{l}{2}$ $\quad 8l\cdot b$

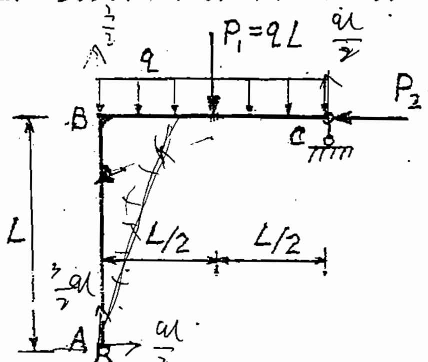


二〇〇2年攻读硕士学位研究生入学考试试题

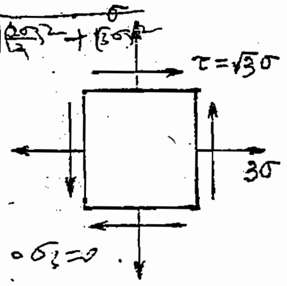
考试科目 材料力学（乙） 编号 489

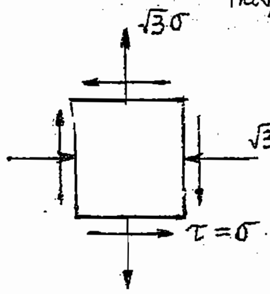
注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、作图示刚架的轴力图、剪力图与弯矩图。（20分）



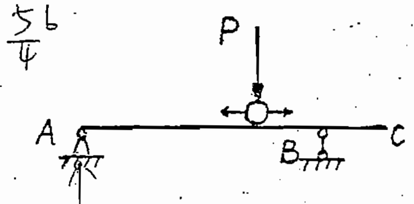
二、平面应力状态的单元体分别如图所示，求（1）三个主应力，（2）最大剪应力，（3）单元体相应点处于单轴应力状态、纯剪切应力状态或一般平面应力状态？（20分）

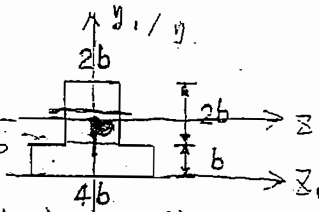




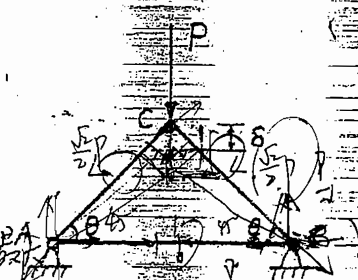
三、水平折杆ABC，圆截面直径均为d，长度AB=BC=L，A端固定，C端同时受铅直力P与水平力P作用。按最大剪应力理论，求下列各处的最大相当应力（1）杆BC的B端截面，（2）杆AB的B端截面，（3）杆AB的A端截面（不计拉伸与压缩的正应力和弯曲剪应力）。（20分）

四、外伸梁ABC，长度AB=6L，BC=L，横截面为⊥形，尺寸如图示，受移动荷载P作用。材料的许用拉应力为$[\sigma_t]$，许用压应力为$[\sigma_c]$，$[\sigma_t]=[\sigma_c]/2$。求许用荷载[P]。（25分）





五、平面三角形桁架，AC=BC=L，θ=45°，各杆的抗拉强度均为EA。A与B两端由固定铰支承，杆AB水平，铰C处受到铅直力P作用。假定结构是稳定的，用能量法求（1）铰A处的水平反力，（2）铰C的铅直位移，（3）若铰C下方有光滑水平支座，初始时两者间距δ=PL/2EA，则铰A处的水平反力又是多少？（15分）



杆件受冲击荷载时的动应力计算.

①不计冲击物的变形，且冲击物与被冲击物接触后无回弹.

②被冲击物的质量与冲击物相比很小可略去不计，而冲击应力瞬时传遍被冲击物，且材料服从胡克定律.

③冲击过程中声热等能量损耗很小，可略去不计.

3) 应用机械能守恒定律　最大动位移 Δ_d 及冲击动应力 σ_d.

$$P(h+\Delta_d)=\frac{1}{2}\left(\frac{EA}{l}\right)\Delta_d^2$$

$\frac{Pl}{EA}=\Delta_{st}$　$\Delta_{st}(h+\Delta_d)=\frac{1}{2}\Delta_d^2$

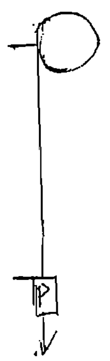
$$\Delta_d^2-2\Delta_{st}\Delta_d-2\Delta_{st}h=0 \qquad \frac{2\Delta_{st}\pm\sqrt{(2\Delta_{st})^2+8\Delta_{st}h}}{2}$$

$$=\Delta_{st}\pm\sqrt{\Delta_{st}^2+2\Delta_{st}h}$$

>0 取+

$$\Delta_d=\Delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}\right)$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$$



$$\frac{Pv^2}{2g}+P(\Delta_d-\Delta_{st})=\frac{1}{2}F_d\cdot\Delta_d-\frac{1}{2}P\Delta_{st}$$

$\Delta_{st}=\frac{Pl}{EA}$　$F_d=\Delta_d\frac{EA}{l}$　$\frac{Pl}{EA}=\Delta_{st}$　$P=\frac{\Delta_{st}EA}{l}$

$$\frac{Pv^2}{2g}+P(\Delta_d-\Delta_{st})=\frac{1}{2}\frac{EA}{l}\Delta_d^2-\frac{1}{2}P\Delta_{st}$$

$$\frac{v^2}{2g}\Delta_{st}+\Delta_{st}\Delta_d-\Delta_{st}^2=\frac{1}{2}\Delta_d^2-\frac{1}{2}\Delta_{st}^2$$

$$\Delta_d^2+\Delta_{st}^2-2\Delta_{st}\Delta_d-\frac{\Delta_{st}v^2}{g}=0$$

$$\therefore \Delta_d^2-2\Delta_{st}\Delta_d+\Delta_{st}^2\left(1-\frac{v^2}{g\Delta_{st}}\right)=0$$

$$\frac{2\Delta_{st}+\sqrt{4\Delta_{st}^2-4\Delta_{st}^2\left(1-\frac{v^2}{g\Delta_{st}}\right)}}{2}=\Delta_{st}\left(1+\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\right)$$

$$\Delta_d=\Delta_{st}\left(1+\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\right)$$

5

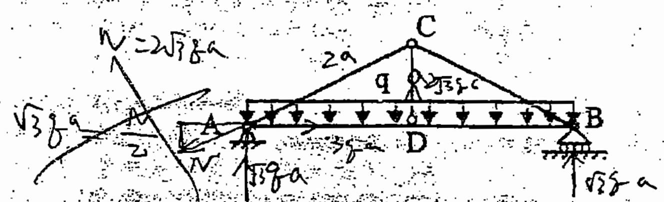
浙 江 大 学

2000年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学（乙） 编号 412

注意：答案必须写在答题纸上，写在试题纸或草稿上均无效。

一、图示铰接的三角形结构，各杆的抗拉(压)与抗弯刚度分别为 EA、EI(EA>>EI)，杆长 AC=BC=2CD=2a。杆 AB 受均布荷载作用，荷载集度为 q 。不计剪力对位移的影响，试作杆 AB 的内力图（含内力矩图）。（20 分）



二、某塑性材料构件内，存在三点处于平面应力状态，其单元体分别如图 a、b、c 所示（σ>0）。

（1） 试分别求其主应力，并说明属于何种简单的平面应力状态。

（2） 若按照最大剪应力强度理论，则哪一点最易屈服？

（20 分）

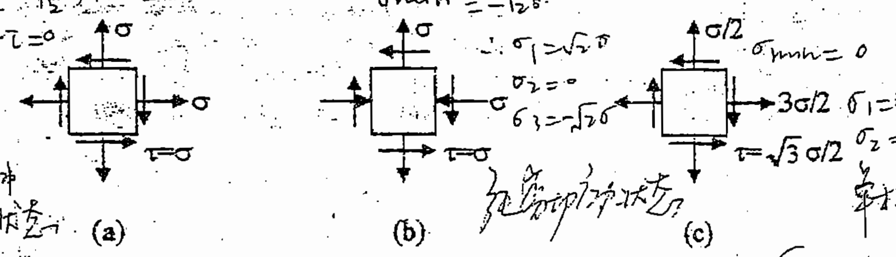
$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{max}}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2+\tau^2} = \sigma + \tau = 2\sigma$

$\sigma_{min} = \sigma - \tau = 0$

$\sigma_{max} = 0 + \sqrt{2}\sigma = \sqrt{2}\sigma$

$\sigma_{min} = -\sqrt{2}\sigma$

$\sigma_{max} = \sigma + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma)^2} = 2\sigma$



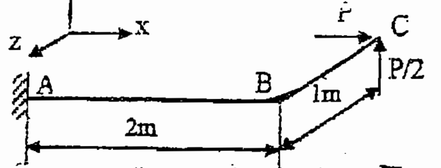
$\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 单向拉伸状态

$\sigma_1 = \sqrt{2}\sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sqrt{2}\sigma$ 纯剪切应力状态

$\sigma_{min} = 0$, $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 单向拉伸

$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma$　　$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{2}\sigma$　　$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma$

三、折杆 ABC 水平，A 端固定，AB⊥BC，C 端受到水平力 P 与铅垂力 P/2 的作用，P=160N。杆 AB 的横截面为圆形，其直径 d=3cm，杆 BC 的横截面为矩形，其高与宽分别为 h=4cm，b=2cm。长度尺寸如图所示，不计弯曲剪应力。试按形状改变比能强度理论，分别确定杆 AB 与 BC 的危险截面、其上的危险点位置及其相当应力。（20 分）



对 AB 杆 A截面为危险截面

拉伸：$F = P$　$\sigma_F = \frac{F}{A} = \frac{4P}{\pi D^2}$

弯矩 $|\vec{M_z}| = \frac{P}{2}\cdot 2 = P$　$|\vec{M_y}| = P\cdot 1$　$|\vec{M}| = \sqrt{2}P$

扭转 $T = \frac{P}{2}\cdot 1$　$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{8P}{\pi D^3}$

$\sigma_m = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{2}P}{\frac{\pi D^3}{32}} = \frac{32\sqrt{2}P}{\pi D^3}$

$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2+\sigma_3^2+\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_3]} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_3}$

$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2+\tau^2}$

$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2+\tau^2}$

$\sigma_{r4} = \sqrt{2(\frac{\sigma^2}{4}+\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2)+\tau^2} = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$ = 85.633 MPa

$\sigma = \sigma_m + \sigma_F = \frac{32\sqrt{2}\times 160}{3.14\times(0.03)^3} + \frac{4\times 160}{3.14\times 0.03^2}$ = 85.407 MPa

$\tau = \frac{8P}{\pi D^3} = \frac{8\times 160}{\pi\, 0.03^3} = 15.098$ MPa

对 BC 杆：B截面为危险截面 $\sigma = \frac{P}{I_y}\cdot\frac{b}{2} + \frac{\frac{P}{2}}{I_x}\cdot\frac{h}{2}$

$= \frac{6P}{hb^2} + \frac{3P}{bh^2} = \frac{6\times 160}{0.04\times 0.02^2} + \frac{3\times 160}{0.02\times 0.04^2} = 60+15=75$ MPa

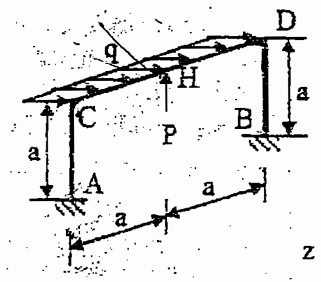
四、图示矩形刚架结构，A 端与 B 端固定，AC⊥CD、BD⊥CD。杆 CD 受到水平均布荷载 q 的作用，并有铅垂力 P 作用于其中点 H，各杆的长度尺寸如图所示，横截面均为圆形，其直径 d=a/20。材料的拉压弹性模量为 E，剪切弹性模量为 G=E/2.5。不计剪力对位移的影响，试求：

(1)固定端 A [redacted]的反力及反力偶；

(2)杆 CD [redacted]中点 H 的水平与铅垂位移。

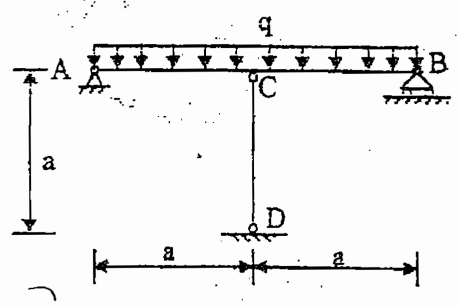
（20 分）

三次超静定 结构荷载对称

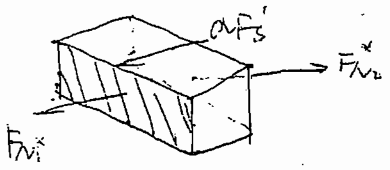


五、简支梁 AB 于中点 C 由铅垂杆 CD 支承，AB⊥CD。梁 AB 受到集度为 q 的均布荷载作用，各杆材料的弹性模量均为 E，横截面为直径 d=a/20 的圆形，长度尺寸如图所示，不计弯曲剪应力的影响。许用应力 [σ]=E/1000，稳定安全系数为 n_{st}=3，试求许用最大荷载集度[q]。

（20 分）。



梁横截面上切应力推论



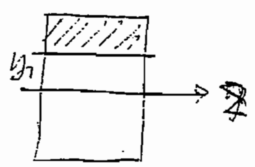
A^* 为距中性轴为 y_1 的横截面（面积）

$$F_{N1}^* = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \int_{A^*} \frac{M y_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y_1 dA = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N2}^* = \int_{A^*} \sigma_2 dA = \int_{A^*} \left(\frac{M+dM}{I_z}\right) y_1 dA = \frac{M+dM}{I_z} S_z^*$$

$$dF_S' = \tau' b dx$$

$$\therefore F_{N2}^* - F_{N1}^* - dF_S' = 0$$



$$\tau' = \frac{dM}{b}\frac{S_z^*}{I_z dx} \qquad \left(\frac{dM}{dx}\right) = F_S$$

$$S_z^* = \int y\, dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y \cdot b\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{y_1}^{\frac{h}{2}} \cdot b$$

$$= \frac{F_S S_z^*}{b I_z} = \frac{F_S}{b I_z}\cdot\left(\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)\right)$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F_S}{A} \qquad = \frac{F_S}{2 I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_S S^*}{I_z \cdot b} = \frac{6F_S}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{F_S}{2\cdot\frac{bh^3}{12}}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6F_S}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\tau_{max} =$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{xy}^2}$$

推导挠曲线近似方程

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{y \cdot d\theta}{dx} = \frac{y}{\rho}$$

物理 $\sigma = \frac{yE}{\rho}$ 静力

$$M_z = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho}$$

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{M(x)}{EI}$$

$M<0$

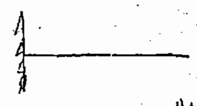
$w''>0$

$$w'^2 \ll 1 \qquad \therefore w'' = -\frac{M(x)}{EI}$$

挠曲线近似微分方程

$$EIw = -\iint [M(x)dx]dx + C_1 x + C_2$$

$$C_1 = EIw'|_{x=0} = EI\theta_0 \qquad C_2 = EIw_0$$

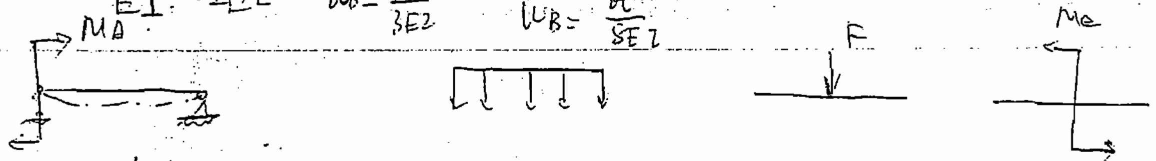


$\frac{1}{2}M_e\theta = \frac{1}{2}\frac{M_e l}{EI}$ $\theta = \frac{M_e l}{EI}$

$\theta_B = \frac{M_e l}{EI}$ $w_B = \frac{M_e l^2}{2EI}$

$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$ $w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$

$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$ $w_B = \frac{ql^4}{8EI}$



$$\theta_A = \frac{M_A l}{3EI}$$

$$\theta_B = \frac{-M_A l}{6EI}$$

$$w_C = \frac{M_A l^2}{16EI}$$

卡氏第二定理

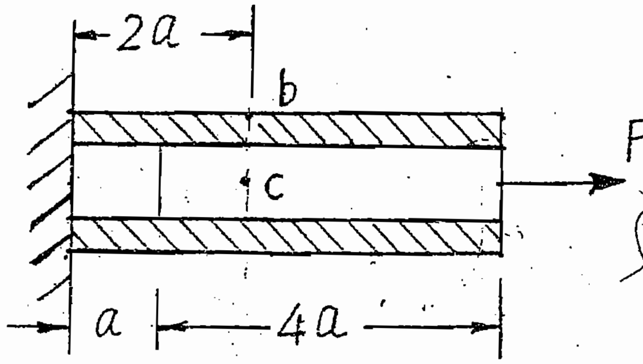
$$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \int_l \frac{F_N(x)}{EA}\frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i}dx + \int_l \frac{T(x)}{GI_p}\frac{\partial T(x)}{\partial F_i}dx + \int_l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial F_i}dx$$

浙 江 大 学

一九九八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 材料力学(乙) 编号 047

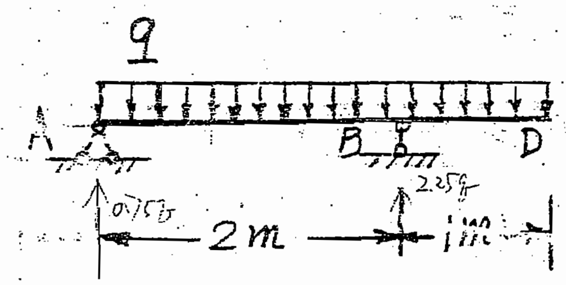
(一) [10分] 一圆杆紧插在一套管中(如图)，杆端加P力后恰好能将杆自套管中拉出。设刚拉动时摩擦力均匀分布于两者接触的圆柱面上。杆的横截面面积为A_1，套管的横截面面积为A_2，两者材料的弹性模量皆为E。试求：① 杆刚拉动时套管的伸长量；② 此时圆杆上C点的轴向线应变ε_c及套管上b点的轴向线应变ε_b。



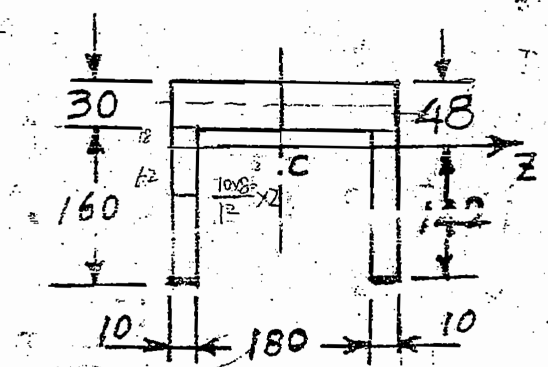
$=91.210\,MPa$

(二) [25分] 外伸梁ABD受均布荷载作用如图(a)所示，其横截面的形状和尺寸如图(b)所示，图中的C为形心。试求：① 画出弯矩图；② 计算形心主惯性矩I_z；③ 若材料的许用拉应力$[\sigma_t]=20\,MPa$，许用压应力$[\sigma_c]=40\,MPa$，确定q的许用值。

(尺寸单位为mm)

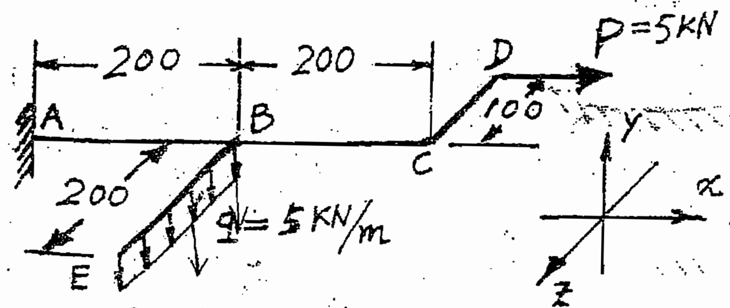


(a)



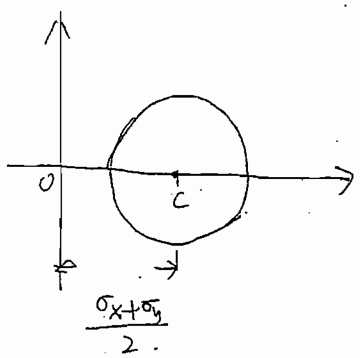
(b)

(三) [20分] 在图示结构中ABC沿x轴方向，EB及CD沿z轴方向，在D处作用着x轴方向的力P=5kN，在BE上作用着铅垂均布荷载q=5kN/m，已知ABC为圆截面杆，其直径d=40mm，试求ABC杆上危险点的第三强度理论相当应力。(略去剪力产生的剪应力)



(尺寸单位为mm)

$=85.838\,MPa+3.981\,MPa=89.809\,MPa$



$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2$$

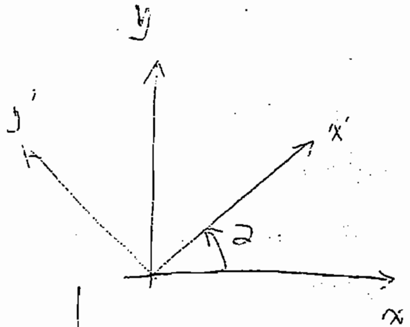
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

主应力 $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2} > 0$$

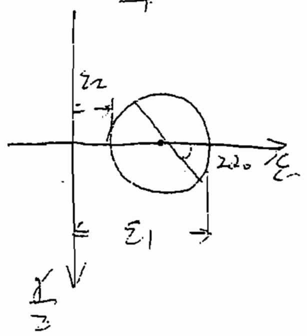
$$2\alpha_0 = \arctan\left(\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}\right)$$

$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}$



$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

$$\boxed{-\frac{\gamma_\alpha}{2}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\alpha$$



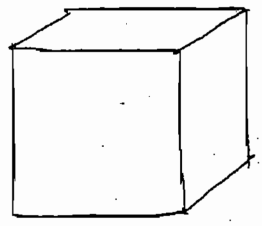
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\right]$$

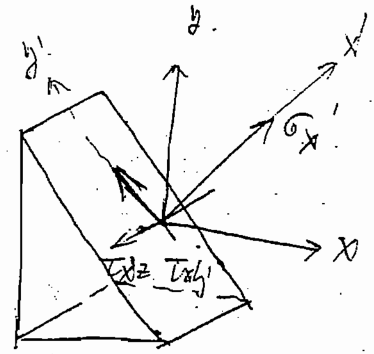
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y) - \sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\right]$$

$$2\alpha_0 = \arctan\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

空间应力





τ_{xy} σ_x' ~~[illegible]~~ 仅与 σ_x σ_y τ_{xy} 有关

用平面应力状态斜截面应力公式

τ_{xz} 用切应力互等定理

τ_{zx} τ_{zy} 在垂直 z 面内合成 和 分解

各向同性材料的体应变

$$\theta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$$= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

一点处应变能密度
$$\begin{cases} = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\varepsilon_2\sigma_2+\sigma_3\varepsilon_3) = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right] \\ \nu_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}) \end{cases}$$

体积改变 $\frac{1}{2}\theta\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$

畸变能密度 $\frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$

2

① 两相互垂直平面内的弯曲 $\sigma_x=\frac{M_y}{I_y}\cdot z-\frac{M_z}{I_z}\cdot y$ $\tan\theta=\frac{z_0}{y_0}=\frac{I_y}{I_z}\tan\varphi$

② 拉伸与弯曲

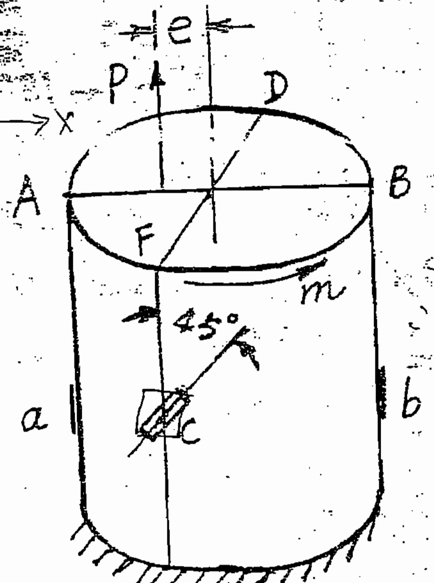
$\frac{F_N}{A}+\frac{M_{y\max}}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}$

偏心拉伸

$\frac{F}{A}\left(1+\frac{z_F z}{i_y^2}+\frac{y_F y}{i_z^2}\right)$

③ 扭转与弯曲

(四) [25分] 图示立柱受偏心距为e的偏心拉力P及扭转力偶矩m共同作用，在通过直径AB的纵截面与圆柱面交线的a、b点各贴一片沿轴向的电阻片，测出其线应变为 $\varepsilon_a=520\times10^{-6}$，$\varepsilon_b=-9.5\times10^{-6}$。FD直径与AB垂直，在过FD的纵截面与圆柱表面交线上的c点贴一片与轴线方向夹角为45°的电阻片，测出其线应变为 $\varepsilon_c=200\times10^{-6}$，若柱直径 $d=100$ mm，材料的弹性模量 $E=200$ GPa，横向变形系数 $\nu=0.3$，试求P、e以及m。



$F=P$ $M=Pe$ $T=m$

a: $\varepsilon_x=520\times10^{-6}$ $\sigma_F+\sigma_M$

b: $\varepsilon_x=-9.5\times10^{-6}$ $\sigma_F-\sigma_M$

c: σ_F $\varepsilon_{-45^\circ}=200\times10^{-6}$

$\varepsilon_x E=\sigma_F+\sigma_M=104$

$\varepsilon_x E=\sigma_F-\sigma_M=-1.9$

$\sigma_F=51.05$ $\sigma_M=52.95$

$\sigma_F=\frac{P}{A}$ $P=\sigma\cdot A=\frac{\pi D^2}{4}\cdot\sigma_F=401$ kN

$\sigma_M=\frac{M}{W}$ $\frac{52.95\times\frac{\pi D^3}{32}}{401}=0.013$ m

$40=\frac{\sigma_F}{2}+\tau-\nu\left(\frac{\sigma_F}{2}-\tau\right)$

$40=0.7\times\frac{\sigma_F}{2}+1.3\tau$

$\frac{T}{W_p}=\tau=\frac{40-0.7\times\frac{\sigma_F}{2}}{1.3}$

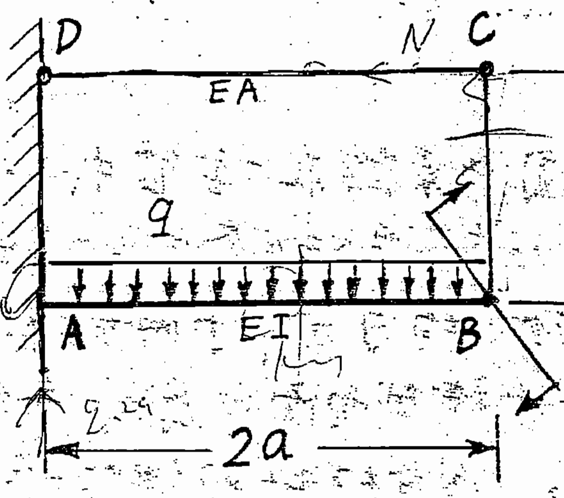
$\varepsilon_{45^\circ}\cdot E=\sigma_{45^\circ}-\nu\sigma_{-45^\circ}$

$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_F+0}{2}+\frac{\sigma_F-0}{2}\cos(90^\circ)-\tau\sin(90^\circ)=\frac{\sigma_F}{2}+\tau$

$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_F+0}{2}+\frac{\sigma_F-0}{2}\cos 90^\circ-\tau\sin 90^\circ=\frac{\sigma_F}{2}-\tau$

$m=\frac{W_p\cdot(40-0.7\times\frac{\sigma_F}{2})}{1.3}$ $W_p=\frac{\pi D^3}{16}$ $=3.34$ kN·m

(五) [20分] 图示结构中拉杆CD的抗拉刚度为EA，刚架ABC的抗弯刚度为EI，不计ABC中的剪力与轴力的影响，试求拉杆CD的轴力。



变形叠加。

协调：$\Delta l=u_C$

$\Delta l=\frac{N\cdot 2a}{EA}$

$u_C=\theta_B\cdot a-u_C'(N)$

$\theta_B=\theta_B(q)+\theta_B(m)+\theta_B(N)$

$=\frac{q(2a)^3}{6EI}+\frac{qa^2(2a)}{EI}-\frac{Na(2a)}{EI}$

N引起的刚架竖直部分弯曲的影响

$u_C'(N)=\frac{Na^3}{3EI}$

$\theta\cdot a-u_C(N)$

$\left(\frac{q\cdot 8a^3}{6EI}+\frac{qa^3\cdot 2}{EI}-\frac{N2a^2}{EI}\right)\cdot a-\frac{Na^3}{3EI}=\Delta l=\frac{N2a}{EA}$

$\frac{10qa^4}{3EI}=N\left(\frac{2a}{EA}+\frac{7a^3}{3EI}\right)=N\cdot\frac{6aI+7a^3A}{3EAI}$

$N=\frac{10qa^3A}{6I+7a^2A}$

$u_C(N)=\frac{Na^3}{3EI}$

$M_1=2qa\cdot x-\frac{qx^2}{2}-qa^2$ $\frac{dM}{dx}=0$

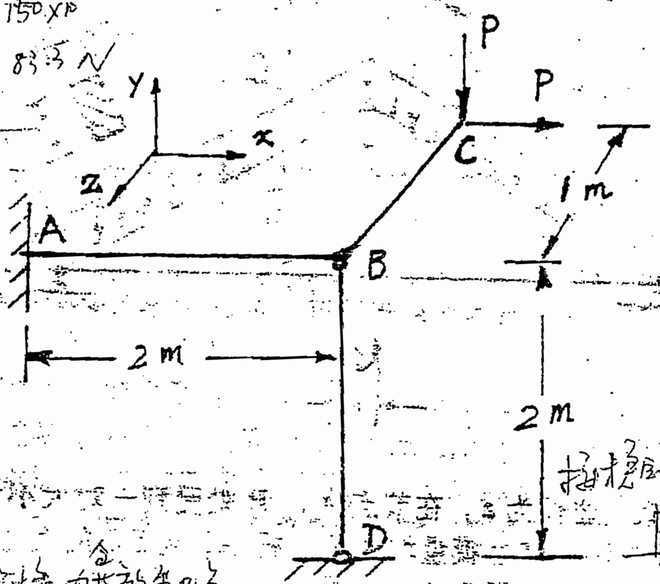
$M_2=qa^2-N\cdot x$

4

五、折杆 ABC 水平放置，A 端固定，$AB\perp BC$，B 处由铅垂杆 BD 支承，B、D 处皆为球形铰支座。C 端受到大小均为 P 的水平力与铅垂力作用。各杆材料的弹性模量均为 E=100GPa，各杆的横截面均为圆形，其直径 d=2cm，长度尺寸如图示。不计弯曲剪应力。按第三强度理论计算，许用应力[σ]=150Mpa。稳定性按欧拉公式计算，稳定安全系数 n_{st}=3。在线弹性范围内，试求许用最大荷载[P]。（20分）

$1.80\times10^{6}P \le 150\times10^{6}$

$P \le 83.3\,N$

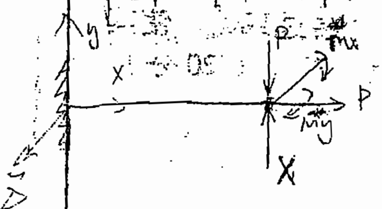


$P_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2}I = \frac{3.14^2\cdot 100\times10^{9}}{4}\cdot\frac{\pi 2^4\times10^{-8}}{64} = 1.938\,KN$

按稳定设计 $\frac{P_{cr}}{X} \ge n_{st}$ $X \le \frac{P_{cr}}{n_{st}}$

$P \le 645.96\,N$

一次超静定 B段的约束解除，剪力方向如右



A截面 扭转 $T = P\cdot1$

拉伸 $F = P$ $\sigma_F = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$

弯曲 $M_y = P$ $\sigma_M = \frac{M}{W} = \frac{P\cdot32}{\pi d^3}$

B点竖向位移

$\frac{Pl^3}{3EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = \frac{X\cdot l}{EA}$

σ_{max} 在右侧

$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{16P}{\pi d^3}$

$\sigma_F + \sigma_M = \frac{4dP+32P}{\pi d^3}$

第三强度理论 $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$

$\frac{8P}{3EI} = \left(\frac{2}{EA}+\frac{8}{3EI}\right)X$

$\frac{64\times8P}{3\pi d^4} = \left(\frac{2\times4}{\pi d^2}+\frac{8\times64}{3\pi d^4}\right)X$

$64\times8P = (6d^2+8\times64)X$

$X = \frac{64}{64}P = P$

$= \sqrt{\left(\frac{4dP+32P}{\pi d^3}\right)^2+4\left(\frac{16P}{\pi d^3}\right)^2}$

$= \frac{P}{\pi\times8\times10^{-6}}\sqrt{(0.08+32)^2+32^2} = 1.80\times10^{6}P$