# 浙江大学 2009-2010 学年秋冬学期《微积分 I》课程期末考试试卷

一、求导数或微分(每小题 6 分，共 18 分)

（1）设 $y=\arcsin\sqrt{x-1}+x^{e^{2x}}$，求 $dy$.

（2）设 $y=y(x)$ 由参数式 $\begin{cases} x=\int_0^{t^2}\cos s^2 ds, \\ y=\sin t^4, \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（3）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

二、求极限(每小题 6 分，共 18 分)

（4）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$，　　（5）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$，

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x^2}}$.

三、求积分(每小题 6 分，共 24 分)

（7）$\displaystyle\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$，　（8）求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$，（9）$\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+2|x|)\sqrt{4-x^2}dx$，

（10）已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)dx$.

四、(本题 8 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径、收敛区间及收敛域，并求其和函数.

五、(本题 8 分)

设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在一阶导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，并设 $F(x)=\int_0^{x^2}f(u)du$，已知当 $x\to 0$ 时 $F(x)$ 与 $Ax^n$ 为等价无穷小，求 $A$ 与 $n$ 的值.

六、(本题 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线 $L$，

（1） 求 $L$ 的方程;

（2）以曲线 $y=e^x$，切线 $L$ 及 $x$ 轴负向为边界构成的向左无限伸展的平面区域记为 $D$，求 $D$ 的面积;

（3）将 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周生成的旋转体记为 $V$，求 $V$ 的体积.

七、(本题 8 分)

证明函数 $f(x)$ 极值的第二充分条件定理:

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在二阶导数，$f'(x_0)=0, f''(x_0)=A>0(A<0)$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小（大）值.

并请举例说明：上述定理仅是充分条件而非必要条件，即：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在二阶导数，$f'(x_0)=0$，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小（大）值，但 $f''(x_0)$ 并不一定为正（负）.

八、(本题 6 分)

（1）写出 $f(x)=e^{x^2}+e^{-x^2}$ 展成 $x$ 的幂级数展开式，并写出其收敛域;

（2）积分 $\int_0^1(e^{x^2}+e^{-x^2})dx$ 与积分 $\int_0^1(e^{x^3}+e^{-x^3})dx$ 谁大谁小，并请说明理由.