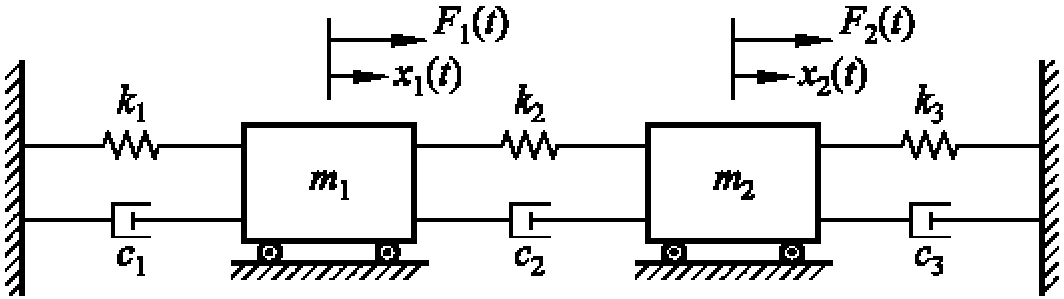
# 复习
# 第三章 两自由度系统

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 有阻尼自由振动

# 1 基本假设

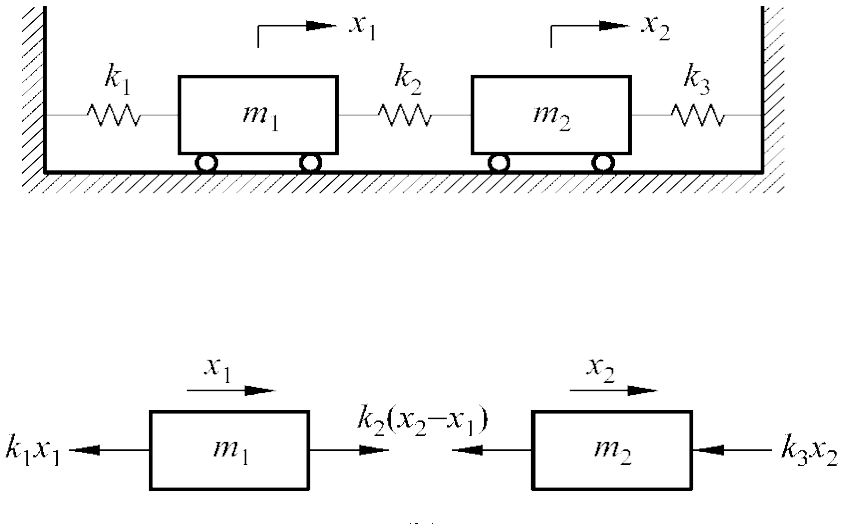
- 振动系统需要由两个独立坐标描述其运动。
- 典型的集总系统模型如下图。




- 系统为线性、时不变集总参数系统。

# 2.1 物理模型和数学方程

- 物理模型



# 2.1 物理模型和数学方程

- 数学方程

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

二阶常系数线性齐次常微分方程组

# 2.1 物理模型和数学方程

- 数学方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$k_1+k_2=k_{11},\quad -k_2=k_{12}=k_{21},\quad k_2+k_3=k_{22}$$

## 2.2 无阻尼自由振动的解

$x_1 = u_1 f(t), \qquad x_2 = u_2 f(t), \qquad u_1, u_2$ 为常数

$$\left.\begin{aligned} m_1 u_1 \ddot{f}(t) + (k_{11}u_1 + k_{12}u_2) f(t) = 0 \\ m_2 u_2 \ddot{f}(t) + (k_{21}u_1 + k_{22}u_2) f(t) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{k_{11}u_1 + k_{12}u_2}{m_1 u_1} = \frac{k_{21}u_1 + k_{22}u_2}{m_2 u_2} = \lambda$$

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \qquad f(t) = C\sin(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\lambda}$$

# 2.2 无阻尼自由振动的解

$$\frac{k_{11}u_1+k_{12}u_2}{m_1u_1}=\frac{k_{21}u_1+k_{22}u_2}{m_2u_2}=\lambda=\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}(k_{11}-\omega^2m_1)u_1+k_{12}u_2=0\\ k_{21}u_1+(k_{22}-\omega^2m_2)u_2=0\end{aligned}\right\}$$

方程具有**非零解**的条件为$u_1$和$u_2$的系数行列式等于零。

$$\varDelta(\omega^2)=\det\begin{bmatrix}k_{11}-\omega^2m_1 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-\omega^2m_2\end{bmatrix}=0$$

特征行列式

$$\Rightarrow \quad \varDelta(\omega^2)=m_1m_2\omega^4-(m_1k_{22}+m_2k_{11})\omega^2+k_{11}k_{22}-k_{12}^2=0$$

特征方程或频率方程

# 2.2 无阻尼自由振动的解

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{m_1k_{22}+m_2k_{11}}{m_1m_2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m_1k_{22}+m_2k_{11}}{m_1m_2}\right)^2 - 4\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}{m_1m_2}}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{m_1k_{22}+m_2k_{11}}{m_1m_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m_1k_{22}+m_2k_{11}}{m_1m_2}\right)^2 - 4\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}{m_1m_2}}}\end{aligned}\right\}$$

第一阶固有频率

第二阶固有频率

$$\left.\begin{aligned}(k_{11}-\omega^2 m_1)u_1 + k_{12}u_2 &= 0 \\ k_{21}u_1 + (k_{22}-\omega^2 m_2)u_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

# 2.2 无阻尼自由振动的解

- 系统的固有振型

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \qquad r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2}$$

$$x_1 = u_1 f(t), \qquad x_2 = u_2 f(t)$$ **固有振型**

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = u_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix}, \qquad u^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = u_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

# 2.2 无阻尼自由振动的解

- 无阻尼自由振动的通解

在一般情况下，两自由度系统的自由振动是两种不同频率的固有振动的叠加，其结果通常不再是简谐振动。

$$x(t)=x^{(1)}(t)+x^{(2)}(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\r_1\end{bmatrix}\sin(\omega_1 t+\phi_1)+C_2\begin{bmatrix}1\\r_2\end{bmatrix}\sin(\omega_2 t+\phi_2)$$

式中常数$C_1$和$C_2$以及相角$\varphi_1$和$\varphi_2$由初始条件确定。

# 小结

- 两自由度系统就是求固有频率及其对应的固有振型
  - 列方程，解的形式
  - 将解的形式代入，Au=0具有非零解，得到特征行列式
  - 特征行列式=0得到固有频率
  - 根据每个固有频率求其对应的固有振型

# 2.3 坐标耦合和主坐标

- 坐标耦合
  - 一般情况下，两自由度以上的振动系统的微分方程组都会出现耦合项，如果以矩阵形式表示，则耦合项体现在非对角元素上。

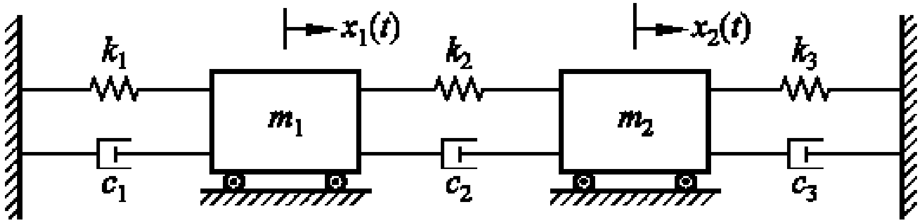
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}}_{\text{主坐标}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

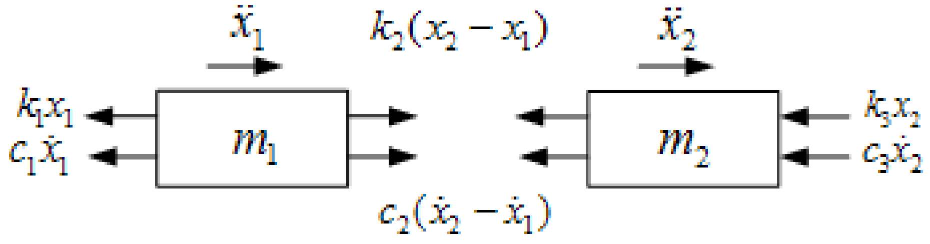
# 3.1 有阻尼系统物理模型和数学方程

- 物理模型

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}e^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{B}=\mathbf{0}$$

# 3.2 有阻尼自由振动的解

为了得到非零解：

$$(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{B}=\mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \det(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{C}+\mathbf{K})=0$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} m_{11}\lambda^2+c_{11}\lambda+k_{11} & m_{12}\lambda^2+c_{12}\lambda+k_{12} \\ m_{21}\lambda^2+c_{21}\lambda+k_{21} & m_{22}\lambda^2+c_{22}\lambda+k_{22} \end{vmatrix}=0$$

解得四个根： $\lambda_i (i=1,2,3,4)$

称为特征值。

$$\begin{bmatrix} m_{11}\lambda_i^2+c_{11}\lambda_i+k_{11} & m_{12}\lambda_i^2+c_{12}\lambda_i+k_{12} \\ m_{21}\lambda_i^2+c_{21}\lambda_i+k_{21} & m_{22}\lambda_i^2+c_{22}\lambda_i+k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{bmatrix}=0$$

$$\frac{B_{2i}}{B_{1i}}=-\frac{m_{11}\lambda_i^2+c_{11}\lambda_i+k_{11}}{m_{12}\lambda_i^2+c_{12}\lambda_i+k_{12}}=-\frac{m_{21}\lambda_i^2+c_{21}\lambda_i+k_{21}}{m_{22}\lambda_i^2+c_{22}\lambda_i+k_{22}}=r_i$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=B_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix}e^{\lambda_1 t}+B_{12}\begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix}e^{\lambda_2 t}+B_{13}\begin{bmatrix} 1 \\ r_3 \end{bmatrix}e^{\lambda_3 t}+B_{14}\begin{bmatrix} 1 \\ r_4 \end{bmatrix}e^{\lambda_4 t}$$

# 第三章 两自由度系统

主讲：祝毅

（yiz@zju.edu.cn）

2022年春

# 内容提要

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动
- 吸振器的工作原理

# 内容提要

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动
- 吸振器的工作原理

# 4 简谐激励下的强迫振动

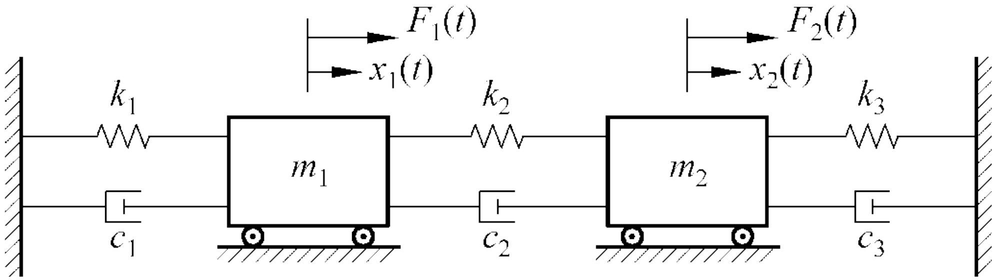
- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的解
- 实例分析

# 4 简谐激励下的强迫振动

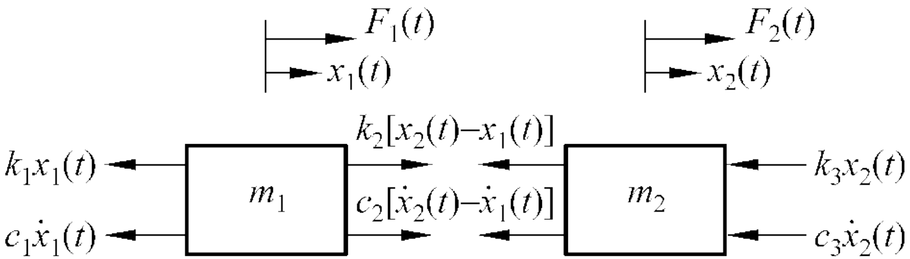
- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的解
- 实例分析

# 4.1 物理模型和数学方程

- 物理模型




(a)




(b)

# 4.1 物理模型和数学方程

- 数学方程

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F_1(t) - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= F_2(t) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

# 4 简谐激励下的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的解
- 实例分析

# 4.2 强迫振动的解

- 方程的一般形式

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

假设激励为： $F_1(t)=F_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$， $F_2(t)=F_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$

响应为: $x_1(t)=X_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$， $x_2(t)=X_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} (-\omega^2 m_{11}+\mathrm{i}\omega c_{11}+k_{11})X_1+(-\omega^2 m_{12}+\mathrm{i}\omega c_{12}+k_{12})X_2=F_1 \\ (-\omega^2 m_{21}+\mathrm{i}\omega c_{21}+k_{21})X_1+(-\omega^2 m_{22}+\mathrm{i}\omega c_{22}+k_{22})X_2=F_2 \end{aligned}\right\}$$

# 4.2 强迫振动的解

令 $Z_{ij}(\omega)=-\omega^2 m_{ij}+\mathrm{i}\omega c_{ij}+k_{ij},\quad (i,j=1,2)$ ，有

阻抗矩阵
(动刚度矩阵)

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}(\omega)X_1+Z_{12}(\omega)X_2=F_1 \\ Z_{21}(\omega)X_1+Z_{22}(\omega)X_2=F_2 \end{aligned}\right\}$$

导纳矩阵
(动柔度矩阵或频响函数矩阵)

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Z}(\omega)\cdot\mathbf{X}=\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}=[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}\mathbf{F}$$

其中， $$[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}=\frac{1}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)-Z_{12}^2(\omega)}\begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{21}(\omega) & Z_{11}(\omega)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

determinant

# 4.2 强迫振动的解

进而，

$$\left.\begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{Z_{22}(\omega)F_1 - Z_{12}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} \\ X_2(\omega) &= \frac{-Z_{21}(\omega)F_1 + Z_{11}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} = \frac{Z_{22}(\omega)F_1 - Z_{12}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} e^{i\omega t}$$

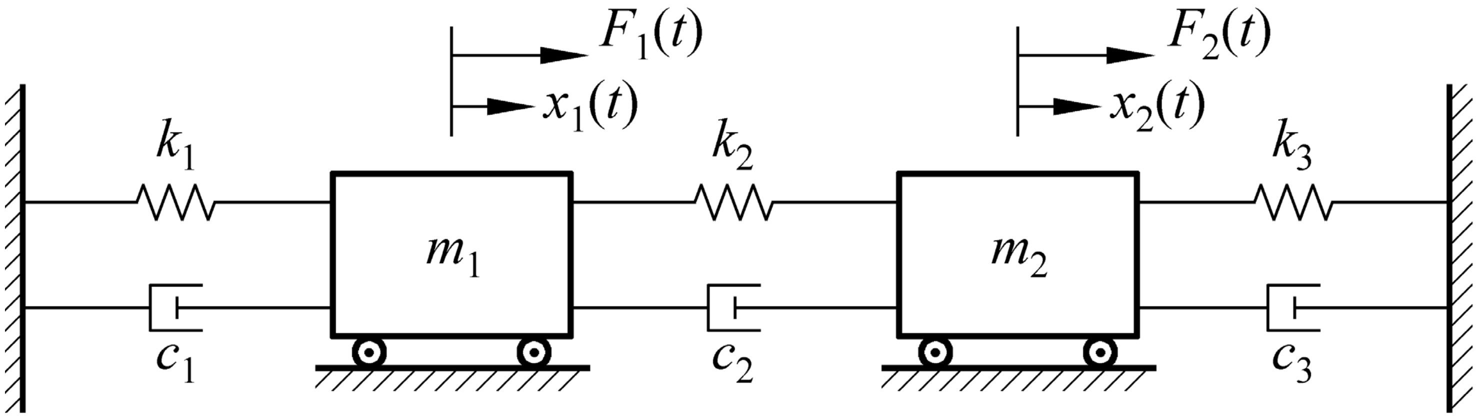
$$x_2(t) = X_2 e^{i\omega t} = \frac{-Z_{21}(\omega)F_1 + Z_{11}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} e^{i\omega t}$$

# 4 简谐激励下的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的解
- 实例分析

# 4.3 实例分析

- 考虑图所示系统，设$m_1=m$，$m_2=2m$, $c_1=c_2=c_3=0$, $k_1=k_2=k$, $k_3=2k$，并设$F_1(t)= F_0\sin\omega t$，$F_2(t)=0$。求系统的稳态响应，并绘出频率响应曲线。



# 4.3 实例分析

根据已知条件，有

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}(-\omega^2 m_{11}+\mathrm{i}\omega c_{11}+k_{11})X_1+(-\omega^2 m_{12}+\mathrm{i}\omega c_{12}+k_{12})X_2=F_1 \\ (-\omega^2 m_{21}+\mathrm{i}\omega c_{21}+k_{21})X_1+(-\omega^2 m_{22}+\mathrm{i}\omega c_{22}+k_{22})X_2=F_2\end{aligned}\right\}$$

$$Z_{11}(\omega)=k_{11}-\omega^2 m_1=2k-\omega^2 m$$

$$Z_{12}(\omega)=Z_{21}(\omega)=k_{12}=-k$$

$$Z_{22}(\omega)=k_{22}-\omega^2 m_2=3k-2\omega^2 m$$

稳态响应为

$$x_1(t)=X_1(\omega)\sin\omega t=\frac{Z_{22}(\omega)F_1-Z_{12}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)-Z_{12}^2(\omega)}\sin\omega t=\frac{(3k-2\omega^2 m)F_0}{2m^2\omega^4-7mk\omega^2+5k^2}\sin\omega t$$

$$x_2(t)=X_2(\omega)\sin\omega t=\frac{-Z_{21}(\omega)F_1+Z_{11}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega)-Z_{12}^2(\omega)}\sin\omega t=\frac{kF_0}{2m^2\omega^4-7mk\omega^2+5k^2}\sin\omega t$$

# 4.3 实例分析

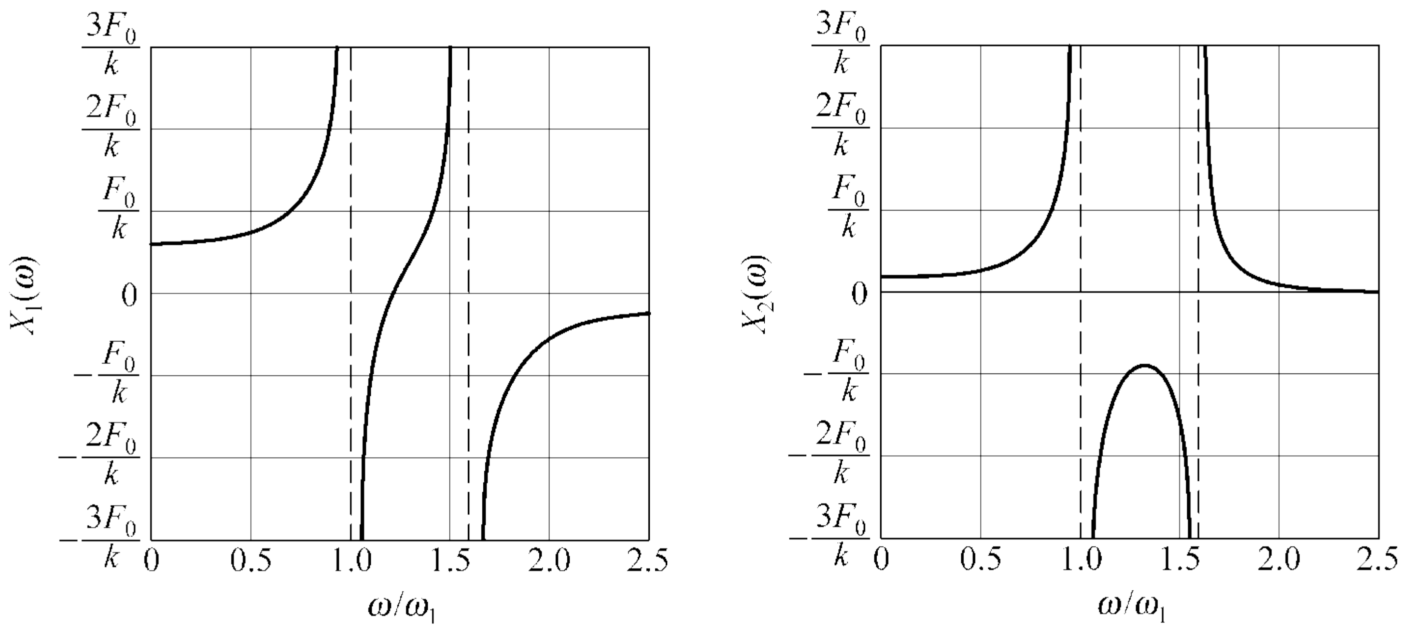
因此，稳态响应的幅值可以写成

$$X_1(\omega)=\frac{2F_0}{5k}\frac{3/2-(\omega/\omega_1)^2}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \qquad X_2(\omega)=\frac{F_0}{5k}\frac{1}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]}$$

其中，

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{5k}{2m}}=1.5814\sqrt{\frac{k}{m}}$$

# 4.3 实例分析



(a) (b)

# 内容提要

- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动
- 吸振器的工作原理

# 5 非简谐激励下的强迫振动

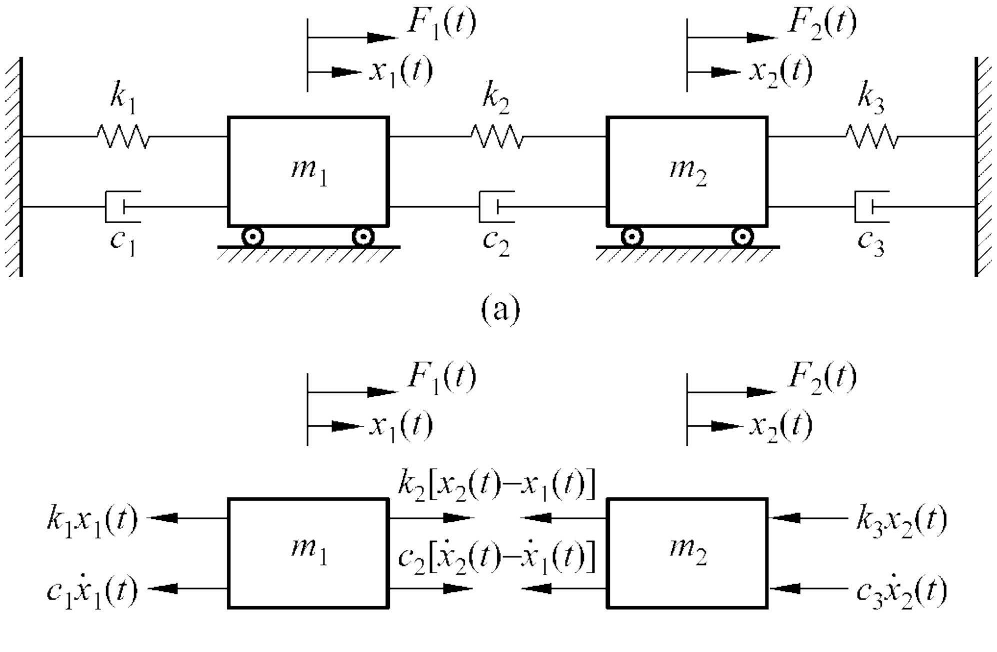
- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的求解方法

# 5 非简谐激励下的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的求解方法

# 5.1 物理模型和数学方程

- 物理模型




(a)

(b)

# 5.1 物理模型和数学方程

- 数学方程

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F_1(t) - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= F_2(t) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

# 5 非简谐激励下的强迫振动

- 物理模型和数学方程
- 强迫振动的求解方法

# 5.2 强迫振动的解

- 方程的一般形式

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \qquad \dot{x}(t)\Rightarrow sX(s)-x(0) \qquad \ddot{x}(t)\Rightarrow s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$$

两边拉氏变换，得（假设初始条件为0）

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}(s^2m_{11}+sc_{11}+k_{11})X_1(s)+(s^2m_{12}+sc_{12}+k_{12})X_2(s)=F_1(s)\\(s^2m_{21}+sc_{21}+k_{21})X_1(s)+(s^2m_{22}+sc_{22}+k_{22})X_2(s)=F_2(s)\end{aligned}\right\}$$

# 5.2 强迫振动的解

令 $Z_{ij}(s)=s^2m_{ij}+sc_{ij}+k_{ij},(i,j=1,2)$ ，有

$$\left.\begin{aligned}Z_{11}(s)X_1+Z_{12}(s)X_2&=F_1\\Z_{21}(s)X_1+Z_{22}(s)X_2&=F_2\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{Z}(s)\cdot\mathbf{X}=\mathbf{F}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}=[\mathbf{Z}(s)]^{-1}\mathbf{F}$

其中，$[\mathbf{Z}(s)]^{-1}=\dfrac{1}{\det[\mathbf{Z}(s)]}\begin{bmatrix}Z_{22}(s) & -Z_{12}(s)\\-Z_{21}(s) & Z_{11}(s)\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{Z_{11}(s)Z_{22}(s)-Z_{12}^2(s)}\begin{bmatrix}Z_{22}(s) & -Z_{12}(s)\\-Z_{21}(s) & Z_{11}(s)\end{bmatrix}$$

# 5.2 强迫振动的解

进而，

$$\left.\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{Z_{22}(s)F_1 - Z_{12}(s)F_2}{Z_{11}(s)Z_{22}(s) - Z_{12}^2(s)} \\ X_2(s) &= \frac{-Z_{21}(s)F_1 + Z_{11}(s)F_2}{Z_{11}(s)Z_{22}(s) - Z_{12}^2(s)} \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{反拉氏变换}} \begin{cases} x_1(t) = \ldots \\ x_2(t) = \ldots \end{cases}$$

# 内容提要

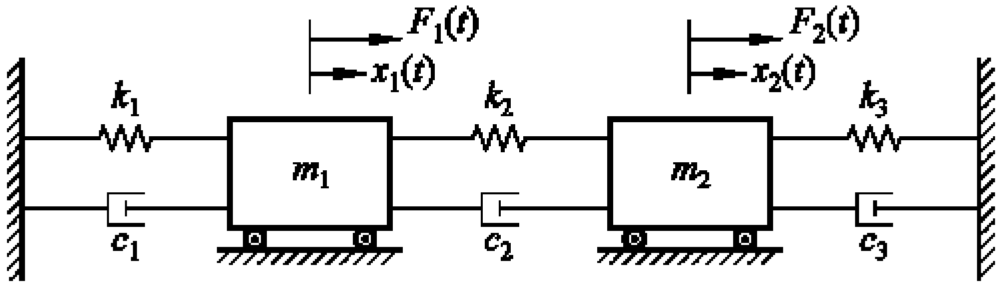
- 基本假设
- 无阻尼自由振动
- 有阻尼自由振动
- 简谐激励下的强迫振动
- 非简谐激励下的强迫振动
- 吸振器的工作原理

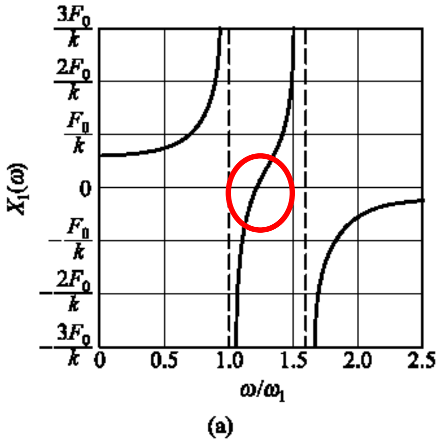
# 6 吸振器的工作原理

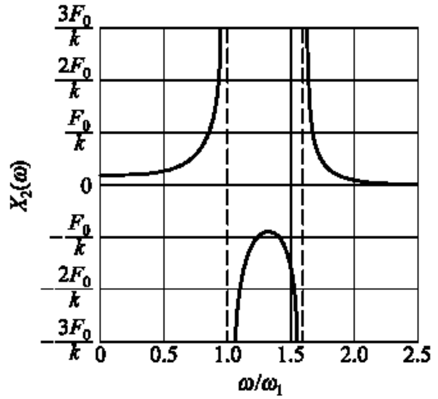
- 吸振器的基本设想
- 无阻尼吸振器
- 有阻尼吸振器
- 吸振器的应用

# 6.1 吸振器的基本思想

- 两自由度强迫振动




$$F_1(t)= F_0\sin\omega t,\ \ F_2(t)=0$$

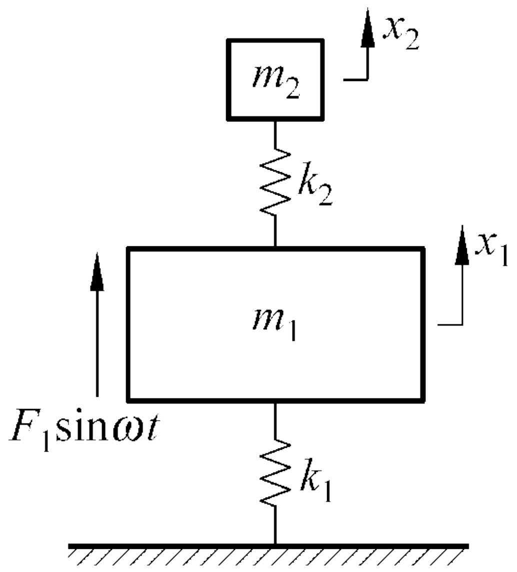
$$c_1=c_2=c_3=0$$

# 6.2 无阻尼吸振器

- 物理模型
- 数学方程
- 方程的解及其分析

# 6.2.1 物理模型

- 考虑该系统，由质量$m_1$和弹簧$k_1$组成的系统称为主系统，而由质量$m_2$和弹簧$k_2$组成的附加系统称为减振器。



# 6.2.2 数学方程

- 根据牛顿第二定律列出方程：

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1\sin\omega t \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{aligned}\right\}$$

# 6.2.3 方程的解及其分析

假设其解为

$$x_1 = X_1 \sin \omega t, \qquad x_2 = X_2 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{(k_2 - \omega^2 m_2) F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2} \\ X_2 &= \frac{k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2} \end{aligned}\right\}$$

# 6.2.3 方程的解及其分析

- 假设

$\omega_n = \sqrt{k_1 / m_1}$ ——主系统的固有频率；

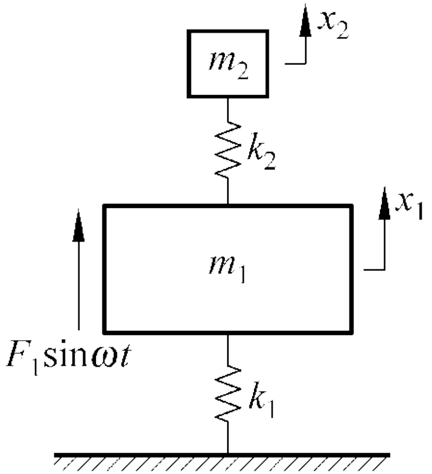
$\omega_\alpha = \sqrt{k_2 / m_2}$ ——减振器的固有频率；

$x_{st} = F_1 / k_1$ ——主系统的静变形；

$\mu = m_2 / m_1$ ——减振器质量对主质量的比值。

# 6.2.3 方程的解及其分析

- 于是有




$$\left.\begin{aligned}X_1&=\frac{[1-(\omega/\omega_\alpha)^2]x_{st}}{[1+\mu(\omega_\alpha/\omega_n)^2-(\omega/\omega_n)^2][1-(\omega/\omega_\alpha)^2]-\mu(\omega_\alpha/\omega_n)^2}\\X_2&=\frac{x_{st}}{[1+\mu(\omega_\alpha/\omega_n)^2-(\omega/\omega_n)^2][1-(\omega/\omega_\alpha)^2]-\mu(\omega_\alpha/\omega_n)^2}\end{aligned}\right\}$$

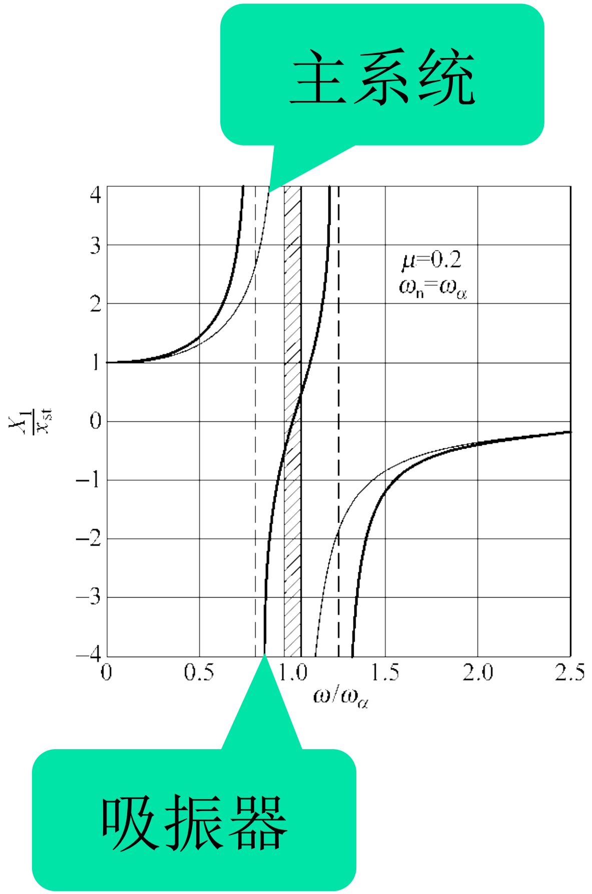
$$\omega=\omega_\alpha \Longrightarrow X_2=-\left(\frac{\omega_n}{\omega_\alpha}\right)^2\frac{x_{st}}{\mu}=-\frac{F_1}{k_2} \Longrightarrow x_2=-\frac{F_1}{k_2}\sin\omega t$$

$$k_2x_2=-F_1\sin\omega t$$

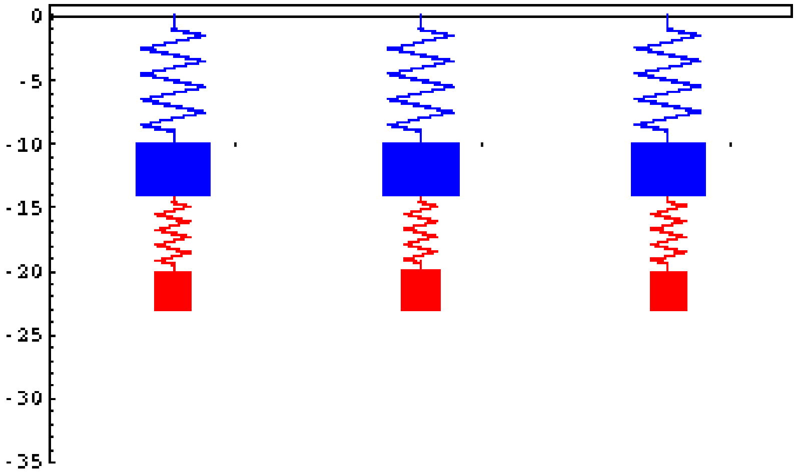
在任何瞬时，减振器弹簧中的力正好平衡了主质量上的作用力。

# 6.2.3 方程的解及其分析

- 从图中可以看出，当$\omega=\omega_\alpha$时，$X_1=0$，主系统不作振动。
- 图中阴影部分是减振器工作良好的频率范围。
- 附加减振器后，系统由单自由度变为两自由度，出现了两个共振频率。
- 控制有附加减振器的振动系统的两个固有频率相距较远为好。



# 6.2.3 方程的解及其分析




左图：第一阶共振频率响应

中间：吸振器

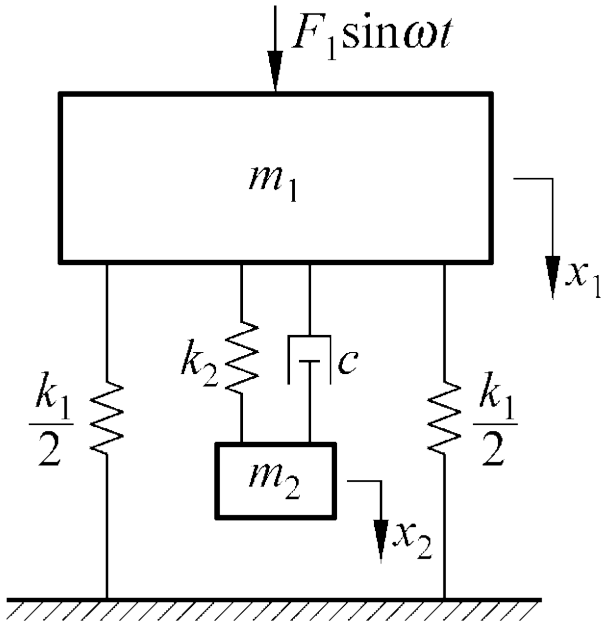
右图：第二阶共振频率响应

# 6.3 有阻尼吸振器

- 物理模型
- 数学方程
- 方程的解及其分析

# 6.3.1 物理模型

- 考虑图示系统，有质量$m_1$和弹簧$k_1$组成的系统是主系统。



# 6.3.2 数学方程

- 根据牛顿第二定律可以得到

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \sin\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

假设

$$F_1(t) = F_1 e^{\mathrm{i}\omega t}, x_1(t) = \bar{X}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, x_2(t) = \bar{X}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

代入原方程，可得

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + \mathrm{i}\omega c & -(k_2 + \mathrm{i}\omega c) \\ -(k_2 + \mathrm{i}\omega c) & k_2 - \omega^2 m_2 + \mathrm{i}\omega c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 解得

$$\bar{X}_1 = \frac{F_1}{\det\left[Z(\omega)\right]}[k_2 - \omega^2 m_2 + \mathrm{i}\omega c], \qquad \bar{X}_2 = \frac{F_1}{\det\left[Z(\omega)\right]}[k_2 + \mathrm{i}\omega c]$$

其中，

$$\det\left[Z(\omega)\right] = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 + \mathrm{i}\omega c & -(k_2 + \mathrm{i}\omega c) \\ -(k_2 + \mathrm{i}\omega c) & k_2 - \omega^2 m_2 + \mathrm{i}\omega c \end{vmatrix}$$

$$= (k_1 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - \omega^2 k_2 m_2 + \mathrm{i}\omega c(k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 因而有

$$X_1 = \left|\bar{X}_1\right|$$

$$= F_1 \sqrt{\frac{(k_2-\omega^2 m_2)^2+\omega^2 c^2}{[(k_1-\omega^2 m_1)(k_2-\omega^2 m_2)-\omega^2 k_2 m_2]^2+\omega^2 c^2 (k_1-\omega^2 m_1-\omega^2 m_2)^2}}$$

$$X_2 = \left|\bar{X}_2\right|$$

$$= F_1 \sqrt{\frac{k_2^2+\omega^2 c^2}{[(k_1-\omega^2 m_1)(k_2-\omega^2 m_2)-\omega^2 k_2 m_2]^2+\omega^2 c^2 (k_1-\omega^2 m_1-\omega^2 m_2)^2}}$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 引入符号

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}},\qquad x_{st}=\frac{F_1}{k_1},\qquad \mu=\frac{m_2}{m_1}$$

$$\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1},\qquad \lambda=\frac{\omega}{\omega_1},\qquad \zeta=\frac{c}{2m_2\omega_1}$$

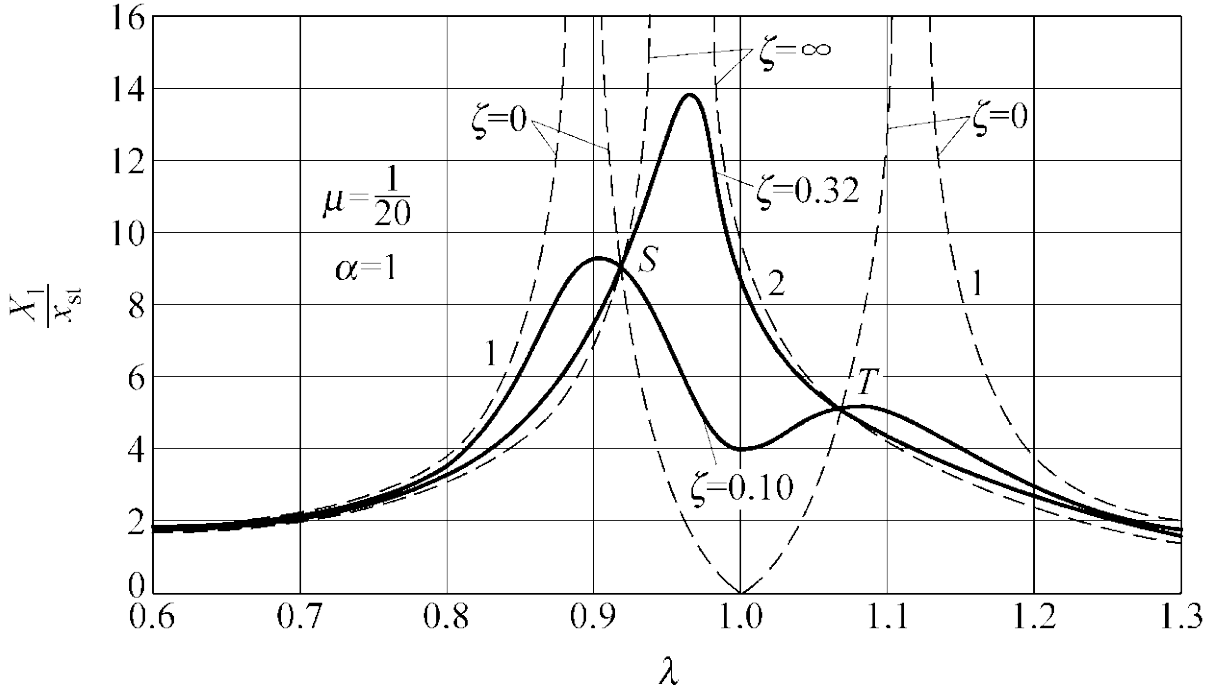
从而有

$$\frac{X_1}{x_{st}}=\sqrt{\frac{(\alpha^2-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}{[(1-\lambda^2)(\alpha^2-\lambda^2)-\mu\alpha^2\lambda^2]^2+(2\zeta\lambda)^2(1-\lambda^2-\mu\lambda^2)^2}}$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

$$\zeta = \frac{c}{2m_2\omega_1}$$

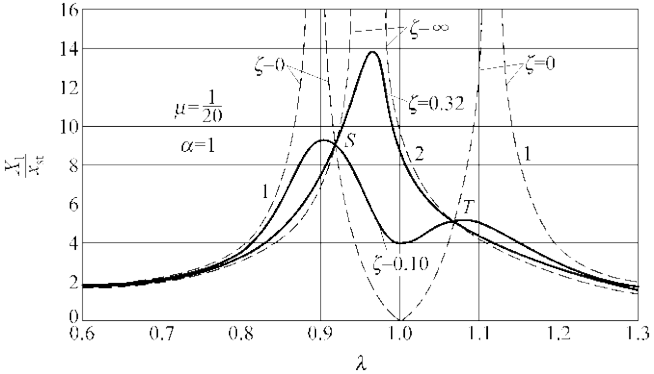
- 对应于$\mu=m_2/m_1=1/20$，$\alpha=\omega_2/\omega_1=1$的主系统振幅频率响应曲线



# 6.3.3 方程的解及其分析

- 当$\zeta=0$时，相当于无阻尼强迫振动。当$\lambda=0.895$和$\lambda=1.12$时有两个共振频率。主系统振幅的无量纲表达式为

$$\frac{X_1}{x_{st}}=\left|\frac{(\alpha^2-\lambda^2)}{(1-\lambda^2)(\alpha^2-\lambda^2)-\mu\alpha^2\lambda^2}\right|$$

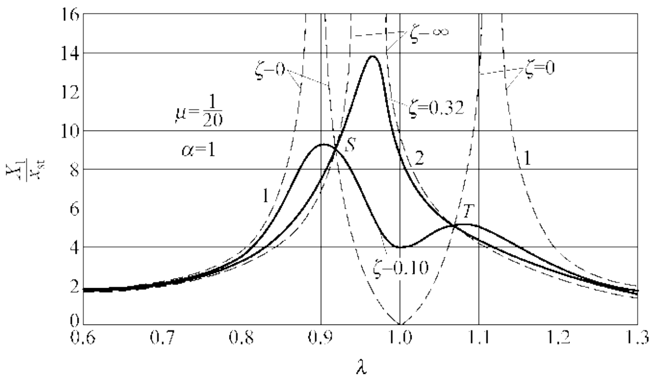


# 6.3.3 方程的解及其分析

- 当$\zeta=\infty$时，即相当于$m_1$和$m_2$刚性连接，系统成为以质量$m_1+m_2$和刚度$k_1$构成的单自由度系统。当

$$\lambda = 1/\sqrt{1+\mu} = 0.976$$

时为共振频率。



# 6.3.3 方程的解及其分析

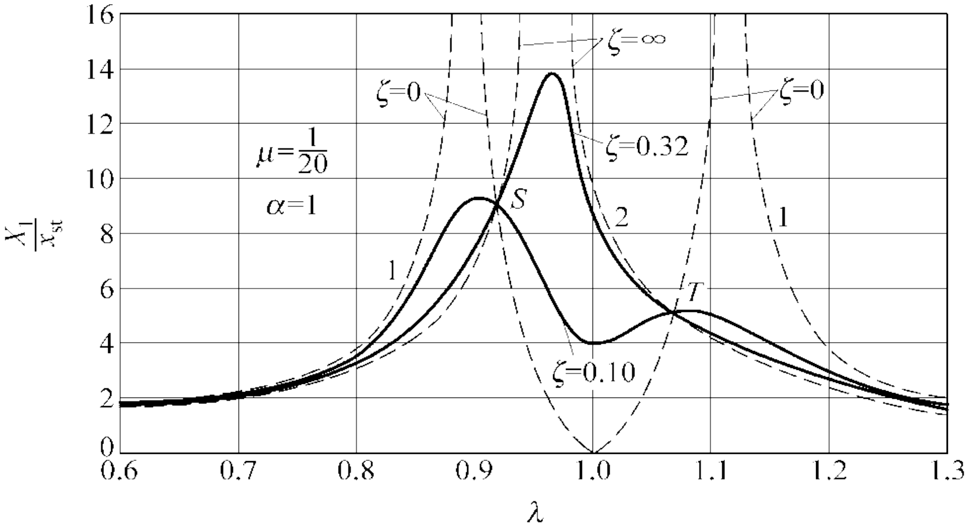
- 当$\zeta=\infty$时，即相当于$m_1$和$m_2$刚性连接，系统成为以质量$m_1+m_2$和刚度$k_1$构成的单自由度系统。

$$\frac{X_1}{x_{st}}=\left(\frac{X_1}{x_{st}}\right)_{\varsigma=\infty}=\left|\frac{1}{1-\lambda^2-\mu\lambda^2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{1-(\omega/\omega_1)^2-(m_2/m_1)(\omega/\omega_1)^2}\right|=\left|\frac{1}{1-[\omega^2(m_1+m_2)/k_1]}\right|$$

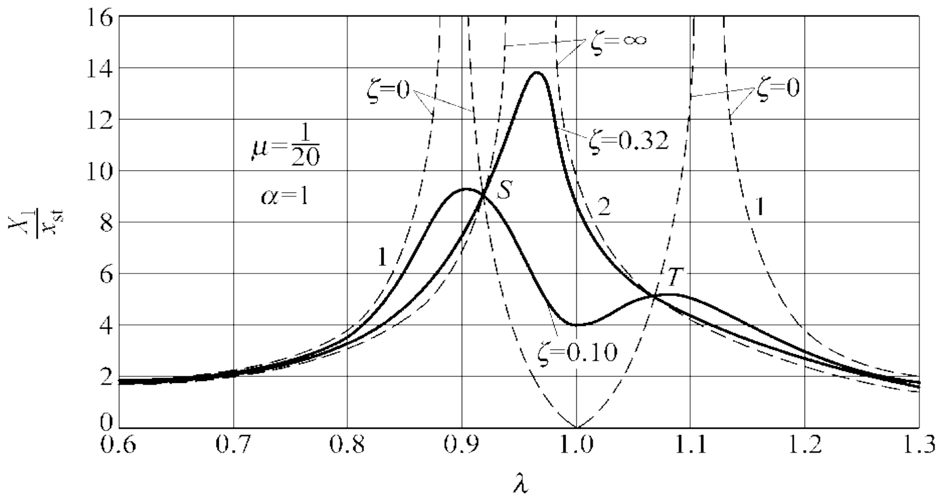
# 6.3.3 方程的解及其分析

- 对于其它阻尼值，响应曲线将介于$\zeta$=0和$\zeta=\infty$曲线之间，图中画出了$\zeta$=0.10和$\zeta$=0.32两条曲线。**表明阻尼使共振附近的振幅有显著的减小**，而在**激振频率$\omega \ll \omega_1$或$\omega \gg \omega_2$的范围内，阻尼的影响是很小的**。



# 6.3.3 方程的解及其分析

- 有趣的是无论$\zeta$值如何，所有响应曲线都交于$S$点和$T$点。这表明对于这两点的频率，质量$m_1$稳态响应的振幅$X_1$与减振器的阻尼$c$无关。

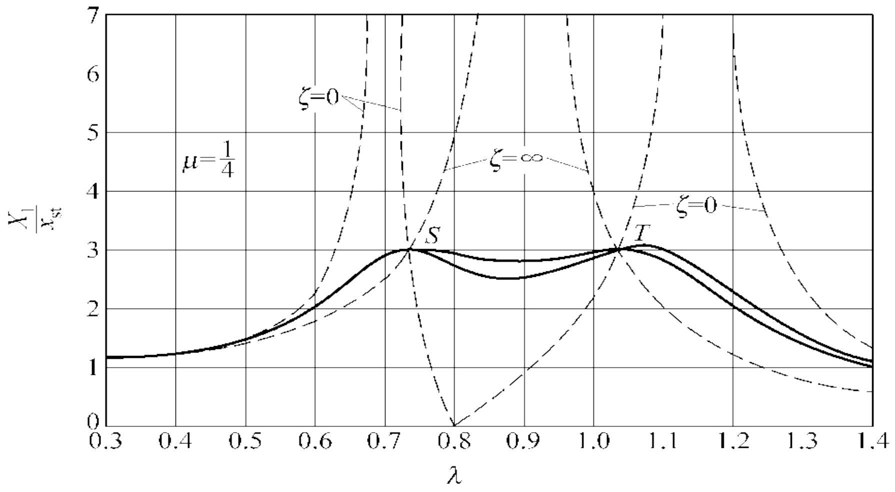


# 6.3.3 方程的解及其分析

- 在设计有阻尼的动力减振器时，可以使$X_1/x_{st}$在$S$点和$T$点所对应的振幅以下。据此可以合理地选择最佳阻尼比$\zeta$和最佳频率比$\alpha$，以达到（在相当宽的频率范围内）减小主系统振动的目的。

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}},\quad x_{st}=\frac{F_1}{k_1},\quad \mu=\frac{m_2}{m_1}$$

$$\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \lambda=\frac{\omega}{\omega_1},\quad \zeta=\frac{c}{2m_2\omega_1}$$



# 6.3.3 方程的解及其分析

- 寻求与$S$点和$T$点相对应的$\lambda_S=(\omega/\omega_1)_S$和$\lambda_T=(\omega/\omega_1)_T$表达式。令$\zeta=0$和$\zeta=\infty$情况的主系统振幅的无量纲式相等。

$$\frac{X_1}{x_{st}}=\sqrt{\frac{(\alpha^2-\lambda^2)^2+(2\zeta\lambda)^2}{[(1-\lambda^2)(\alpha^2-\lambda^2)-\mu\alpha^2\lambda^2]^2+(2\zeta\lambda)^2(1-\lambda^2-\mu\lambda^2)^2}}$$

$$\frac{\alpha^2-\lambda^2}{(1-\lambda^2)(\alpha^2-\lambda^2)-\mu\alpha^2\lambda^2}=\pm\frac{1}{1-\lambda^2-\mu\lambda^2}$$

取正号 ➡ $\mu\lambda^4=0$，即$\lambda=0$，不合理，解舍去。

取负号 ➡ $\lambda^4-\frac{2(1+\alpha^2+\mu\alpha^2)}{2+\mu}\lambda^2+\frac{2\alpha^2}{2+\mu}=0$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 寻求$\lambda_S$和$\lambda_T$对应的幅值表达式。

  令$\zeta=\infty$情况的主系统振幅的无量纲式，

$$\frac{X_{1s}}{x_{st}}=\left|\frac{1}{1-\lambda_S^2-\mu\lambda_S^2}\right|$$

$$\frac{X_{1T}}{x_{st}}=\left|\frac{1}{1-\lambda_T^2-\mu\lambda_T^2}\right|$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 对于工程问题，并不要求使主系统的振幅$X_1$一定为零，只要小于允许的数值就可以了。
- 为了使主系统在相当宽的频率范围内工作，通常是这样来设计减振器。
  - 令：$X_{1S}=X_{1T}$；
  - 使$X_{1S}$和$X_{1T}$为某个响应曲线的最大值；
  - 合理选择和确定减振器参数，把$X_{1S}$和$X_{1T}$控制在要求的数值以内。

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 由$X_{1S}$=$X_{1T}$，得

$$\frac{1}{1-\lambda_S^2-\mu\lambda_S^2}=-\frac{1}{1-\lambda_T^2-\mu\lambda_T^2} \Rightarrow \lambda_T^2+\lambda_S^2=\frac{2}{1+\mu}$$

$\lambda_S^2$ 和 $\lambda_T^2$ 为方程 $\lambda^4-\dfrac{2\left(1+\alpha^2+\mu\alpha^2\right)}{2+\mu}\lambda^2+\dfrac{2\alpha^2}{2+\mu}=0$

的两个根，所以有： $\lambda_T^2+\lambda_S^2=\dfrac{2\left(1+\alpha^2+\mu\alpha^2\right)}{2+\mu}$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+\mu}=\frac{2\left(1+\alpha^2+\mu\alpha^2\right)}{2+\mu} \Rightarrow \alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{1+\mu}=\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 如果减振器的质量$m_2$已选定，那么$\mu$值为已知，从式

$$\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{1+\mu}=\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}$$

可确定$\alpha$的适当值，由该值可确定出减振器的频率和弹簧常数。

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 确定相应于$S$点和$T$点的强迫振动的振幅

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^4-\frac{2\left(1+\alpha^2+\mu\alpha^2\right)}{2+\mu}\lambda^2+\frac{2\alpha^2}{2+\mu}=0 \\ &\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{1+\mu}=\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda^4-\frac{2}{2+\mu}\lambda^2+\frac{2}{(2+\mu)(1+\mu)^2}=0 \quad \Rightarrow \lambda_{S,T}^2=\frac{1}{1+\mu}\left(1\mp\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right)$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 确定相应于$S$点和$T$点的强迫振动的振幅

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_{S,T}^2=\frac{1}{1+\mu}\left(1\mp\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right)\\
&\frac{X_{1s}}{x_{st}}=\frac{1}{1-\lambda_S^2-\mu\lambda_S^2}\\
&\frac{X_{1T}}{x_{st}}=-\frac{1}{1-\lambda_T^2-\mu\lambda_T^2}
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow
\frac{X_{1s}}{x_{st}}=\frac{X_{1T}}{x_{st}}=\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}
$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

- 已知主系统允许的最大振动量，可通过下式得到其余各参数。

$$\left.\begin{array}{l}(\frac{X_{1s}}{x_{st}})_{\max}=(\frac{X_{1T}}{x_{st}})_{\max}=\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}} \Rightarrow \mu_m \\ \mu=\frac{m_2}{m_1}\end{array}\right\} \Rightarrow m_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu_m \\ \alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{1+\mu}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_m \Rightarrow \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \Rightarrow k_2$$

# 6.3.3 方程的解及其分析

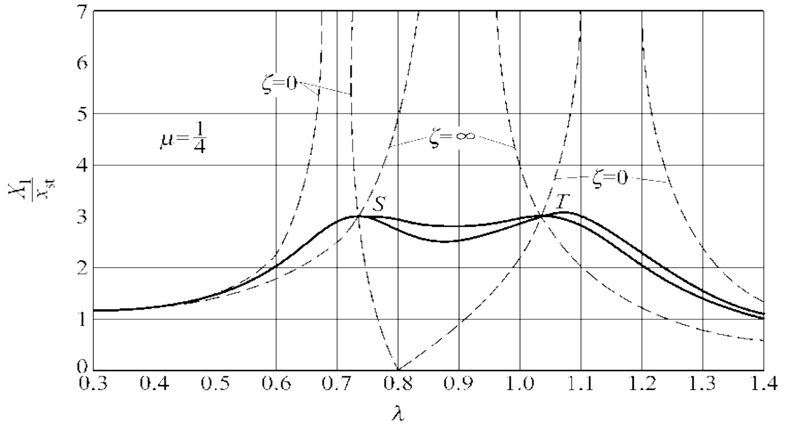
- 确定减振器阻尼器的阻尼系数$c$。

  为使$X_{1S}$和$X_{1T}$为响应曲线的最大值，则应在响应曲线的$S$点和$T$点有水平切线，从而可得相应的$\zeta$值。由于使$X_{1S}$和$X_{1T}$为最大值的$\zeta$值并不相等，故取平均值得

$$\left.\begin{aligned}\zeta_S^2 &= \frac{\mu\left(3-\sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3} \\ \zeta_T^2 &= \frac{\mu\left(3+\sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}\right)}{8(1+\mu)^3}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{取}\zeta^2\text{平均}} \zeta = \frac{c}{2m_2\omega_1} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}}$$

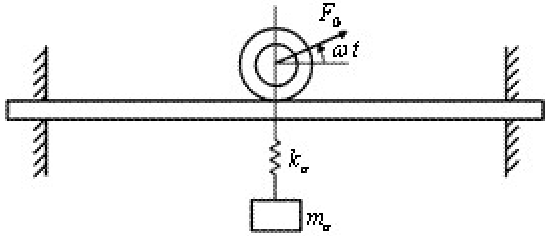
# 6.3.3 方程的解及其分析

- 下图表示出在$S$点和$T$点分别具有水平切线的两条响应曲线($\mu$=1/4)。可见，对于这两条切线，在$S$点和$T$点以外的响应值相差很小。显然，在相当宽的频率范围内，主系统有着小于允许振幅的振动，这就达到了减小主系统振动的目的。



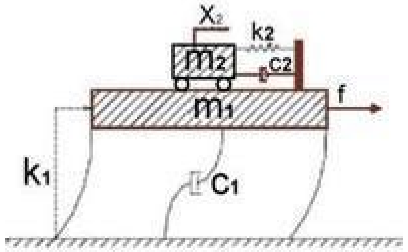
# 6.4 吸振器的应用

- 旋转机械的减振问题

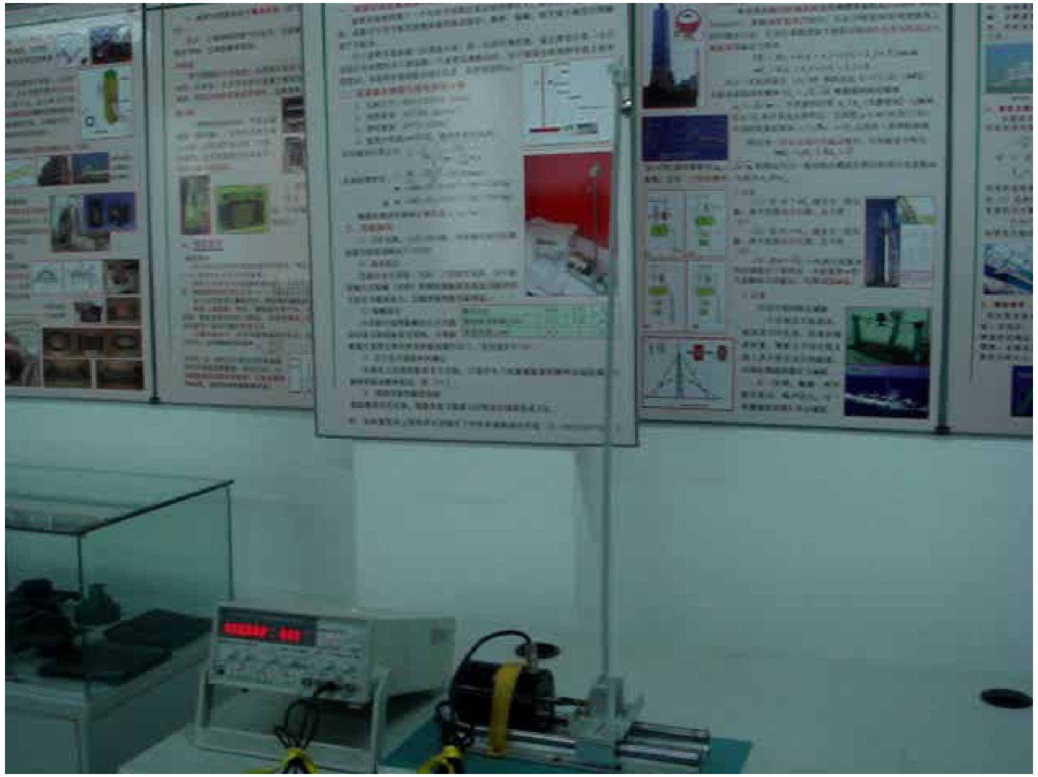


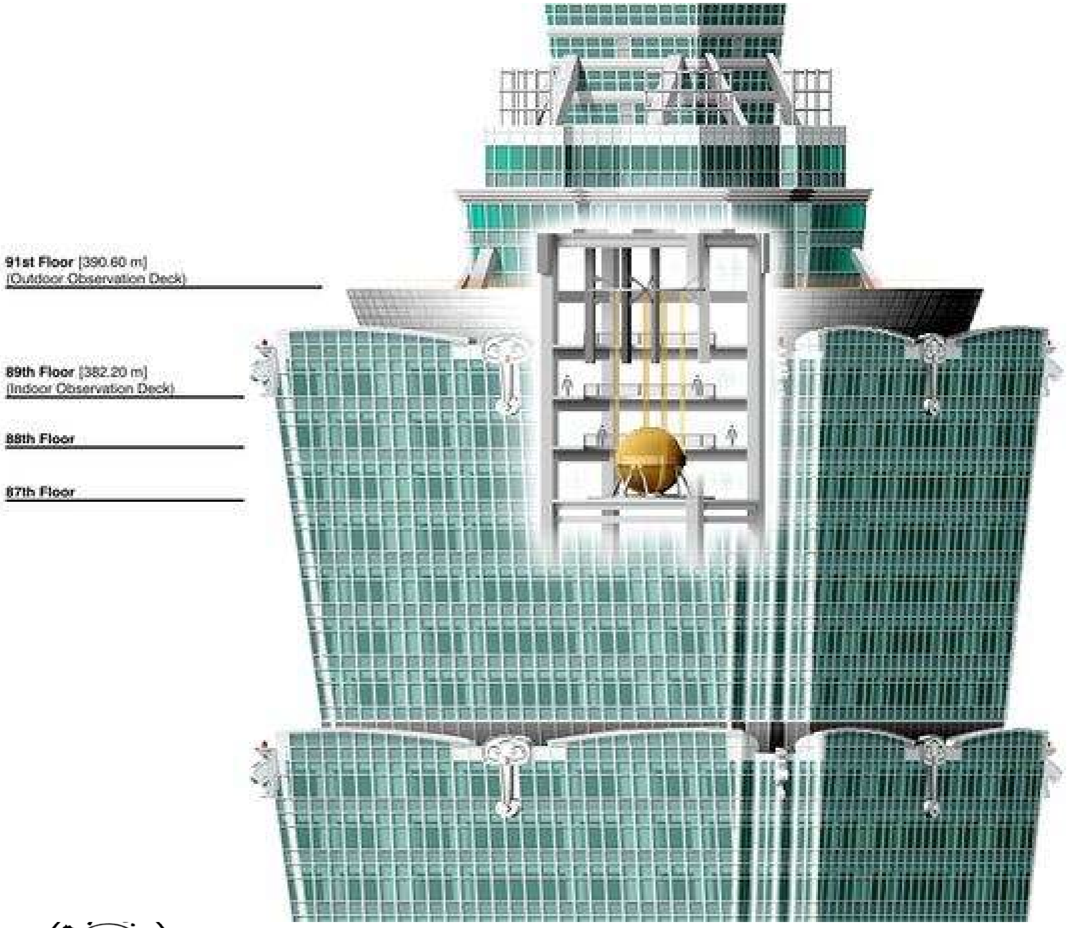

激励是正弦激励，完全吸振。
无阻尼动力吸振器

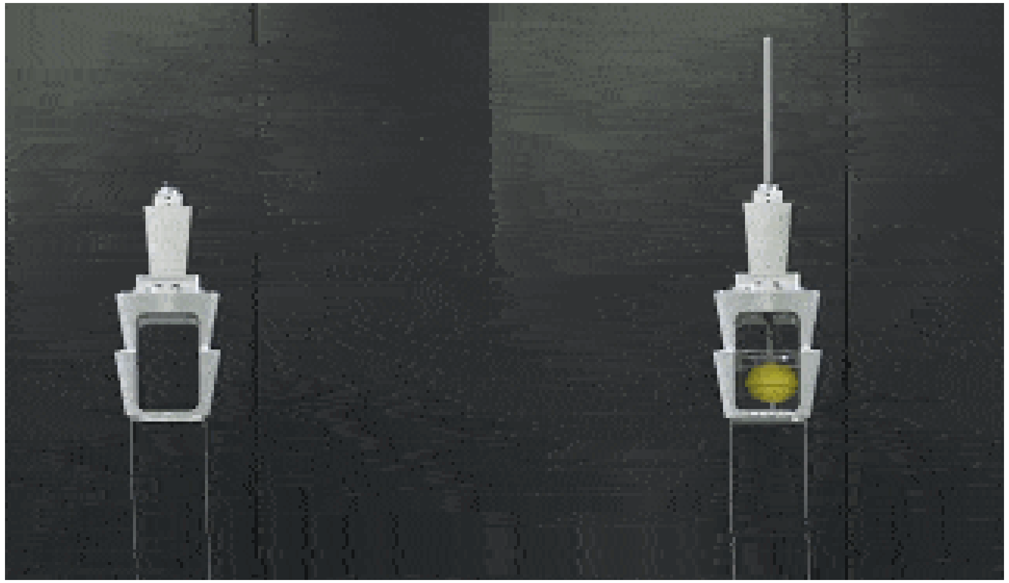
- 高层建筑的减振问题



# 6.4 吸振器的应用




91st Floor [390.60 m]
(Outdoor Observation Deck)
89th Floor [382.20 m]
(Indoor Observation Deck)
88th Floor
87th Floor



# 完