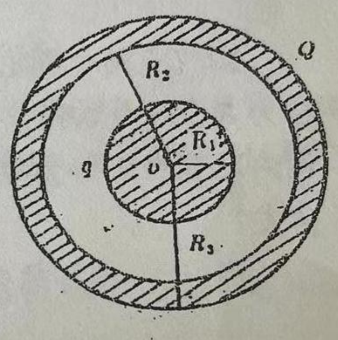
10.6 半径为 $R_1$ 的导体球带有电荷 $q$，球外有一个内、外半径为 $R_2$、$R_3$ 的同心导体球壳，壳上带有电荷 $Q$（见题图）。(1)求两球的电势 $U_1$ 和 $U_2$；(2)若用导线将导体球和球壳相连，则 $U_1$ 和 $U_2$ 是多少？(3)设外球离地面很远，在情形(1)中若内球接地，$U_1$ 和 $U_2$ 又是多少？




题 10.6 图

**解** (1)由于静电感应，外球壳内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势叠加原理

$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$=\frac{Q+R}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(2)导体球与球壳相连，因此

$$U_1=U_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(3)内球接地，$U_1=0$。设内球带电为 $q'$，则外球壳内表面为 $-q'$，外表面为 $Q+q'$，因此有

$$U_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

解得

$$q'=-\frac{R_1 R_2 Q}{R_1 R_2+R_3(R_2-R_1)}$$

故

$$U_2=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=-\frac{q'(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

$$=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0[R_1 R_2+R_3(R_2-R_1)]}$$

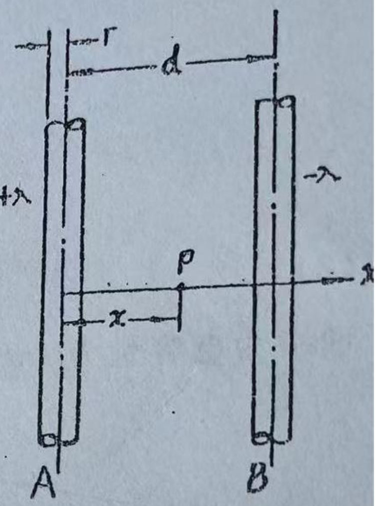
所以

$$C=\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{tg}\theta}\ln\left(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left(\frac{a\theta}{b}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{b^2}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}\left(1-\frac{a\theta}{2b}\right)$$

10.13 设有半径都是 $r$ 的两条平行"无限长"输电线 $A$ 和 $B$，两轴相距为 $d$，且满足 $d\gg r$，求两输电线单位长度的电容。




解 10.13 图

**解** 因是输电线，可设 $A$、$B$ 单位长度分别带电 $+\lambda$ 和 $-\lambda$。建立如图坐标系，则两导线间任一点 $P$ 的场强为

$$E_{A_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E_{B_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

$$E_P=E_{A_P}+E_{B_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$$

按定义

$$U_{AB}=\int_r^{d-r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r}$$

$$\approx\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r}$$

因此单位长度电容为

$$C=\frac{\lambda}{U_{AB}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}}$$

10.18 一圆柱形电容器，外导体的内直径为 4cm，内导体的直径为 2cm，中间充满电介质强度为 200kV/cm 的电介质。问该电容器能承受的最大电压是多少？

解 设内导体外半径为 $R_1$，外导体内半径为 $R_2$，并设两导体沿轴线单位长度上带电分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，电介质击穿场强为 $E_M$。由高斯定理，两导体之间有

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}, \qquad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

在 $r=R_1$ 处，$E$ 最大，所以 $\lambda_m=2\pi\varepsilon R_1 E_M$，得到



$$U_M=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi\varepsilon R_1 E_M}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r$$

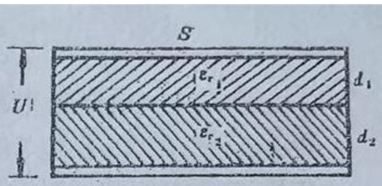
$$=R_1 E_M \ln\frac{R_2}{R_1}$$

代入已知数据

$$U_M=1.39\times10^5\mathrm{V}$$

$R_1 = 2R$

10.23 一平行板电容器极板面积 $S = 40\text{cm}^2$，中间有两层电介质（如图），介电常数各为 $\varepsilon_{r1} = 4$ 和 $\varepsilon_{r2} = 2$，它们厚度分别为 $d_1 = 2\text{mm}$，$d_2 = 3\text{mm}$。若两极板间的电压 $U = 200\text{V}$，试计算：(1)每层电介质中的能量密度；(2)每层电介质中的总能量。




题 10.23 图

解 (1)设平行板电容器两板电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$，则由高斯定理有，$D = \sigma$，因此

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} d_2$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r_1}} + \dfrac{d_2}{\varepsilon r_2}}$$

$$= 8.85 \times 10^{-7} \text{C/m}^2$$

能量密度为

$$w_1 = \frac{1}{2} D_1 E_1 = \frac{D_1^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} = 1.11 \times 10^{-2} \text{J/m}^3$$

$$w_2 = \frac{1}{2} D_2 E_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} = 2.22 \times 10^{-2} \text{J/m}^3$$

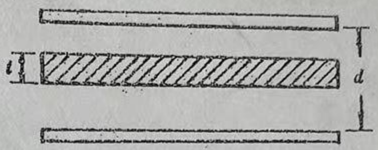
(2)
$$W_1 = w_1 S d_1$$
$$= 8.88 \times 10^{-8} \text{J}$$

$$W_2 = w_2 S d_2$$
$$= 2.66 \times 10^{-7} \text{J}$$

$\boxed{10.28}$ 空气电容器两极板的面积 $S=3\times10^{-2}\mathrm{m}^2$，极板间距 $d=3\times10^{-3}\mathrm{m}$。在两极板间平行放置一面积与极板相同的金属板（见图），其厚度 $t=1\times10^{-3}\mathrm{m}$。将电容器充电至电势差 $U_1=600\mathrm{V}$ 时与电



源断开。求：(1)抽出金属板需作之功；(2)抽出金属板后，两极板的相互作用。




题 10.28 图

**解** (1)抽出金属板前后极板电荷 $Q=C_1U_1$ 不变，电容由原来的 $C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-t}$ 变成 $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

外力作功

$$A=W_2-W_1=\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}$$
$$=\frac{\varepsilon_0 S t U_1^2}{2(d-t)^2}$$
$$=1.2\times10^{-5}\mathrm{J}$$

(2)电容器极板带电量为 $Q$，$\sigma=\dfrac{Q}{S}$，带电板之一在极板间产生的场强是均匀的

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

另一板所受作用力为

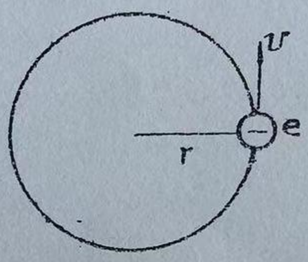
$$F=EQ=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2(d-t)^2}$$
$$=1.2\times10^{-2}\mathrm{N}$$

11.1 试求氢原子中电子绕核旋转所形成的电流。已知电子的轨道半径为 $5.3\times10^{-11}\text{m}$。

**解**
$$I=e\nu=e\frac{v}{2\pi r}$$

因为
$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{v^2}{r}$$
$$v=\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}$$

故
$$I=\frac{e^2}{2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r^3}}$$
$$=1.05\times10^{-3}\text{A}$$



解 11.1 图