第七章
应力和应变分析 强度理论
(3)

1

主要公式：

斜面应力公式

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha$$

主方向公式

$$\tan 2\alpha_p=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

主应力公式

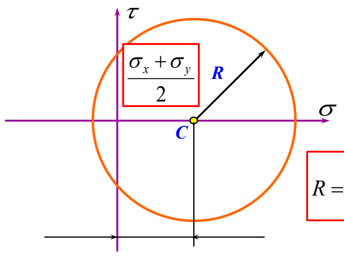
$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\ \sigma''\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

2

§7.4 二向应力状态分析——图解法

1、应力圆（莫尔圆）

$$(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2+\tau_\alpha^2=(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2$$



$$R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}$$

3

第七章 应力和应变分析 强度理论

4

§7.7 平面应变状态分析

1、概述

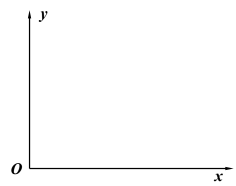
平面应力状态下，已知一点的应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}，欲求α方向上的线应变ε_α和切应变γ_α，可根据弹性范围内小变形的几何条件，分别找出微单元体（长方形）由于已知应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}在此方向上引起的线应变及切应变，再利用叠加原理。

5

§7.7 平面应变状态分析

2、任意方向的应变

在所研究的O点处，Oxy坐标系内的线应变ε_x、ε_y、γ_{xy}为已知，求该点沿任意方向的线应变ε_α。

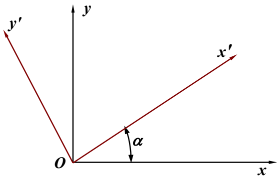


6

§7.7 平面应变状态分析

2、任意方向的应变

将Oxy坐标绕O点旋转一个α角，得到一个新$Ox'y'$坐标系，并规定α角以逆时针转动时为正值，反之为负值。



ε_α为 O 点沿 x 方向的线应变

γ_α为直角 $\angle x'Oy'$的改变量，即切应变。

7

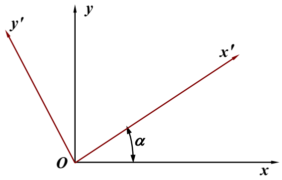
§7.7 平面应变状态分析

2、任意方向的应变

假设:

（1）O点处沿任意方向的微段内，应变是均匀的；

（2）变形在线弹性范围内都是微小的，叠加原理成立。



计算ε_x，ε_y，γ_{xy}单独存在时的线应变ε_α和切应变γ_α，然后叠加得这些应变分量同时存在时的ε_α和γ_α。

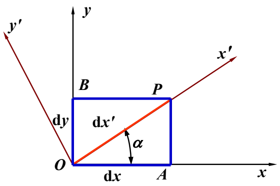
8

§7.7 平面应变状态分析

2、推导线应变ε_α

从O点沿x方向取出一微段$OP=dx'$，并以它作为矩形$OAPB$的对角线。

该矩形的两边长分别为dx和dy:



$$\overline{OP}=dx'=\frac{dx}{\cos\alpha}=\frac{dy}{\sin\alpha}$$

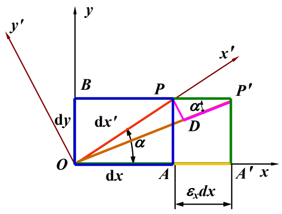
9

§7.7 平面应变状态分析

2、推导线应变ε_α

(1) 只有正值ε_x存在

假设OB边不动，矩形OAPB变形后成为$OA'P'B$



$$\overline{AA'}=\overline{PP'}=\varepsilon_x dx$$

OP的伸长量$P'D$为

$$\overline{P'D}\approx\overline{PP'}\cos\alpha=\varepsilon_x dx\cos\alpha$$

O点沿 x方向的线应变$\varepsilon_{\alpha1}$为

$$\varepsilon_{\alpha1}=\frac{\overline{P'D}}{\overline{OP}}=\frac{\varepsilon_x dx\cos\alpha}{dx/\cos\alpha}=\varepsilon_x\cos^2\alpha$$

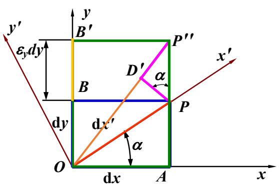
10

§7.7 平面应变状态分析

2、推导线应变ε_α

(2) 只有正值ε_y存在

假设OA边不动，矩形OAPB变形后成为$OAP''B'$



$$\overline{BB'}=\overline{PP''}=\varepsilon_y dy$$

OP的伸长量$P''D'$为

$$\overline{P''D'}\approx\overline{PP''}\sin\alpha=\varepsilon_y dy\sin\alpha$$

O点沿 x方向的线应变$\varepsilon_{\alpha2}$为

$$\varepsilon_{\alpha2}=\frac{\overline{P''D'}}{\overline{OP}}=\frac{\varepsilon_y dy\sin\alpha}{dy/\sin\alpha}=\varepsilon_y\sin^2\alpha$$

11

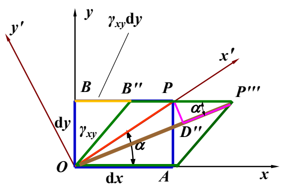
§7.7 平面应变状态分析

2、推导线应变ε_α

(3) 只有正值切应变γ_{xy}存在

使直角减小的γ为正

假设OA边不动，矩形OAPB变形后成为$OAP'''B''$



$$\overline{BB''}=\overline{PP'''}=\gamma_{xy}dy$$

OP的伸长量$P'''D''$为

$$\overline{P'''D''}\approx\overline{PP'''}\cos\alpha=\gamma_{xy}dy\cos\alpha$$

O点沿 x方向的线应变$\varepsilon_{\alpha3}$为

$$\varepsilon_{\alpha3}=\frac{\overline{P'''D''}}{\overline{OP}}=\frac{\gamma_{xy}dy\cos\alpha}{dy/\sin\alpha}=\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

12

§7.7 平面应变状态分析

2、推导线应变ε_α

根据叠加原理，ε_x，ε_y和γ_{xy}同时存在时，O点沿x'方向的线应变为

$$\varepsilon_\alpha=\varepsilon_{\alpha 1}+\varepsilon_{\alpha 2}+\varepsilon_{\alpha 3}$$

$$=\varepsilon_x cos^2\alpha+\varepsilon_y sin^2\alpha+\gamma_{xy} sin\alpha cos\alpha$$

13

§7.7 平面应变状态分析

3、推导切应变γ_α

同理，根据叠加原理，ε_x，ε_y和γ_{xy}同时存在时，O点沿x'方向的切应变为

$$\gamma_\alpha=-2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)sin\alpha cos\alpha+\gamma_{xy}(cos^2\alpha-sin^2\alpha)$$

以上两式利用三角函数化简得到

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}cos2\alpha-\frac{1}{2}\gamma_{xy}sin2\alpha$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2}=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}sin2\alpha+\frac{1}{2}\gamma_{xy}cos2\alpha$$

14

§7.7 平面应变状态分析

4、主应变及其方位

应变
$$\begin{cases}\varepsilon_\alpha=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}cos2\alpha-\dfrac{1}{2}\gamma_{xy}sin2\alpha\\ \dfrac{\gamma_\alpha}{2}=\dfrac{\gamma_x-\gamma_y}{2}sin2\alpha+\dfrac{1}{2}\gamma_{xy}cos2\alpha\end{cases}$$

应力
$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}cos2\alpha-\tau_{xy}sin2\alpha\\ \tau_\alpha=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}sin2\alpha+\tau_{xy}cos2\alpha\end{cases}$$

$$\varepsilon_\alpha\Leftrightarrow\sigma_\alpha$$
$$\frac{\gamma_\alpha}{2}\Leftrightarrow\tau_\alpha$$
$$2\alpha\Leftrightarrow 2\alpha$$

15

§7.7 平面应变状态分析

4、主应变及其方位

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{Bmatrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\Rightarrow tan2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{max}\\ \varepsilon_{min}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\right]\Rightarrow tan2\alpha_0=\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

主应变 ε_1，ε_2，ε_3

16

第七章 应力和应变分析 强度理论

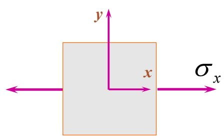
17

§7.8 广义胡克定律

1、基本变形时的胡克定律

（1）轴向拉压胡克定律

$$\sigma_x=E\varepsilon_x$$

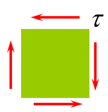


横向变形

$$\varepsilon_y=-\mu\varepsilon_x=-\mu\frac{\sigma_x}{E}$$

（2）纯剪切胡克定律

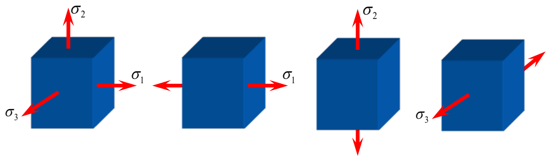
$$\tau=G\gamma$$



18

§7.8 广义胡克定律

2、三向变形时的胡克定律：叠加法

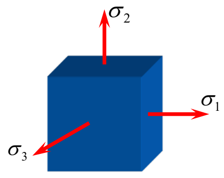


$$\varepsilon_1 \quad = \quad (\frac{\sigma_1}{E}) \;+\; (-\mu\frac{\sigma_2}{E}) \;+\; (-\mu\frac{\sigma_3}{E})$$

19

§7.8 广义胡克定律

2、三向变形时的胡克定律：叠加法



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

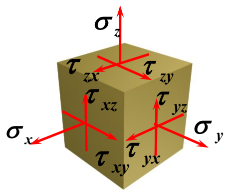
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

20

§7.8 广义胡克定律

3、广义胡克定律的一般形式



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

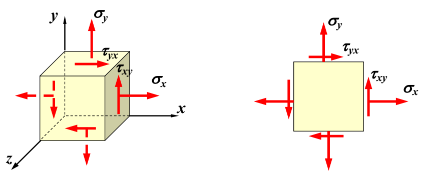
材料为各向同性，且变形处于线弹性范围。

21

§7.8 广义胡克定律

3、广义胡克定律的一般形式

对于平面应力状态（假设$\sigma_z = 0$， $\tau_{xz}= 0$， $\tau_{yz}= 0$ ）



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad \varepsilon_z = \frac{-\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$

22

§7.8 广义胡克定律

4、主应力与主应变的关系

已知 σ_1、 σ_2、 σ_3为主应力；ε_1、ε_2、ε_3为主应变

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

23

§7.8 广义胡克定律

4、主应力与主应变的关系

二向应力状态下

设 $\sigma_3 = 0$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_1)$$

24

§7.8 广义胡克定律

5、各向同性材料在三向应力状态下的体积应变

构件每单位体积的体积变化，称为体积应变，用θ表示。

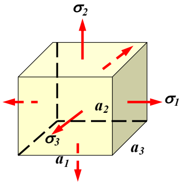
如图所示的单元体，三个边长为 a_1, a_2, a_3

变形后的边长分别为

$a_1(1+\varepsilon_1)$，$a_2(1+\varepsilon_2)$，$a_3(1+\varepsilon_3)$

变形后单元体的体积为

$V_1=a_1(1+\varepsilon_1)\cdot a_2(1+\varepsilon_2)\cdot a_3(1+\varepsilon_3)$



25

§7.8 广义胡克定律

5、各向同性材料在三向应力状态下的体积应变

体积应变为

$$\theta=\frac{V_1-V}{V}$$
$$=\frac{a_1(1+\varepsilon_1)\cdot a_2(1+\varepsilon_2)\cdot a_3(1+\varepsilon_3)-a_1\cdot a_2\cdot a_3}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}$$
$$\approx\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-a_1\cdot a_2\cdot a_3}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}$$
$$=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$ $\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]$ $\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]$

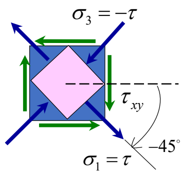
26

§7.8 广义胡克定律

6、纯剪切应力状态下的体积应变

纯剪切应力状态

$$\sigma_1=-\sigma_3=\tau_{xy}$$
$$\sigma_2=0$$
$$\theta=\frac{V_1-V}{V}$$
$$=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$
$$\theta=0$$



即在小变形下，切应力不引起各向同性材料的体积改变。

27

§7.8 广义胡克定律

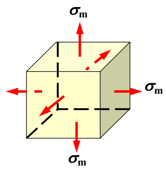
7、三向等值应力单元体的体积应变

设等值应力为三个主应力的平均值

$$\sigma_m=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

单元体的体积应变

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_m+\sigma_m+\sigma_m)$$
$$=\frac{1-2\mu}{E}\cdot 3\sigma_m$$



28

§7.8 广义胡克定律

7、三向等值应力单元体的体积应变

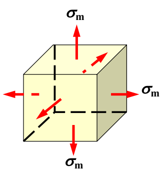
设等值应力为三个主应力的平均值

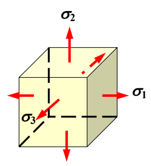
$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}\cdot 3\sigma_m$$

主应力单元体

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

这两个单元体的体积应变相同





29

§7.8 广义胡克定律

7、三向等值应力单元体的体积应变

设等值应力为三个主应力的平均值

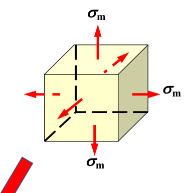
$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}\cdot 3\sigma_m$$

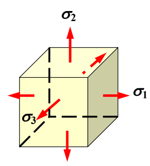
主应力单元体

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

三向等值应力单元体的主应变为

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_m-\mu(\sigma_m+\sigma_m)]$$
$$=\frac{(1-2\mu)}{E}\cdot\sigma_m$$





30

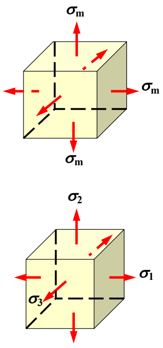
§7.8 广义胡克定律

7、三向等值应力单元体的体积应变

三向等值应力单元体的主应变为

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_m-\mu(\sigma_m+\sigma_m)]$$
$$=\frac{(1-2\mu)}{E}\cdot\sigma_m$$

如果变形前单元体的三个棱边成某种比例，由于三个棱边应变相同，则变形后的三个棱边的长度仍保持这种比例。所以在三向等值应力σ_m的作用下，单元体变形后的形状和变形前的相似，称这样的单元体是形状不变的。



31

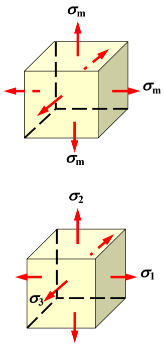
§7.8 广义胡克定律

7、三向等值应力单元体的体积应变

在最一般的空间应力状态下，材料的体积应变只与三个线应变ε_x，ε_y，ε_z有关，仿照上述推导有

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

在任意形式的应力状态下，各向同性材料内一点处的体积应变与通过该点的任意三个相互垂直的平面上的正应力之和成正比，而与切应力无关。

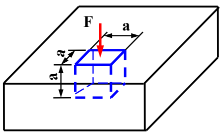


32

§7.8 广义胡克定律

例题7.9

边长a=0.1 m的铜立方块，无间隙地放入体积较大，变形可略去不计的钢凹槽中。已知铜的弹性模量E=100 GPa，泊松比μ=0.34，当受到F=300 kN的均布压力作用时，求该铜块的主应力、以及最大切应力。



33

§7.8 广义胡克定律

例题7.9

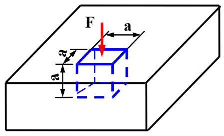
解：(1) 铜块横截面上的压应力

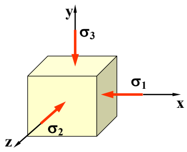
$$\sigma_3=-\frac{F}{A}=-\frac{300\times10^3}{0.1^2}=-30\ \text{MPa}$$

铜块受力如图所示，变形条件为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]=0$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_1+\sigma_3)]=0$$





34

§7.8 广义胡克定律

例题7.9

解：(2) 得

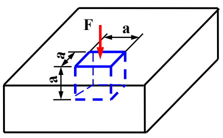
$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu^2}\sigma_3$$
$$=\frac{0.34\times(1+0.34)}{1-0.34^2}\times(-30)$$
$$=-15.5\ \text{MPa}$$

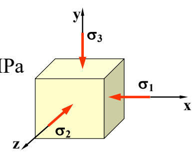
铜块的主应力为

$$\sigma_1=\sigma_2=-15.5\ \text{MPa}\qquad\sigma_3=-30\ \text{MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=7.25\ \text{MPa}$$



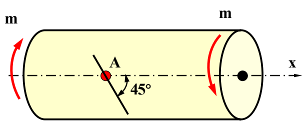


35

§7.8 广义胡克定律

例题7.10

一直径d=20 mm的实心圆轴，在轴的两端加扭矩m=126 N·m。在轴的表面上某一点A处用变形仪测出与轴线成−45°方向的应变ε=5.0×10⁻⁴，试求此圆轴材料的剪切弹性模量G。

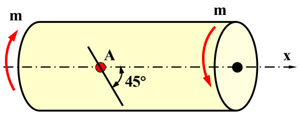


36

§7.8 广义胡克定律

例题7.10

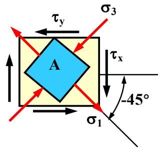
解：围绕A点取一个单元体



$$\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} = \pm\tau_x$$

$\Rightarrow$ $\sigma_1=\tau_x \quad \sigma_2=0 \quad \sigma_3=-\tau_x$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} = -\infty \Rightarrow \alpha_0=-45^\circ \quad \alpha_1=45^\circ$$



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_3) = \frac{1+\mu}{E}\cdot\tau_x \Rightarrow \frac{E}{1+\mu} = \frac{\tau_x}{\varepsilon_1}$$

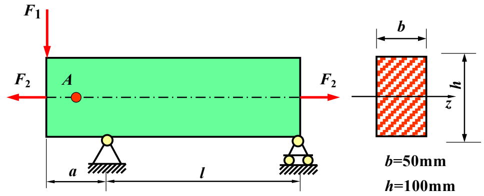
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_x}{\varepsilon_1} = \frac{1}{2\varepsilon_1}\cdot\frac{m}{W_t} = 80.2\ \text{MPa}$$

37

§7.8 广义胡克定律

例题7.11

已知矩形外伸梁受力F_1，F_2作用，弹性模量E=200 GPa，泊松比μ=0.3， F_1=100 kN ， F_2=100 kN。求： (1) A点处的主应变ε_1，ε_2，ε_3； (2) A点处的线应变ε_x，ε_y，ε_z



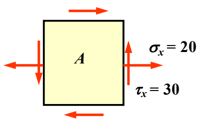
38

§7.8 广义胡克定律

例题7.11

解：梁为拉伸与弯曲的组合变形。

A点有拉伸正应力和弯曲切应力。



$$\sigma_A = \frac{F_2}{A} = 20\ \text{MPa}\ （拉伸）$$

$$\tau_A = \frac{3F_s}{2A} = 30\ \text{MPa}\ （负）$$

(1) A点处的主应变ε_1，ε_2，ε_3

$$\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} = \begin{matrix}41.4\ \text{MPa} \\ -21.4\ \text{MPa}\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_1 = 41.4 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -21.4$

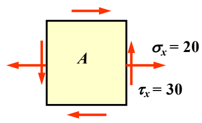
39

§7.8 广义胡克定律

例题7.11

解：梁为拉伸与弯曲的组合变形。

A点有拉伸正应力和弯曲切应力。



$$\sigma_A = \frac{F_2}{A} = 20\ \text{MPa}\ （拉伸）$$

$$\tau_A = \frac{3F_s}{2A} = 30\ \text{MPa}\ （负）$$

(1) A点处的主应变ε_1，ε_2，ε_3

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_3) = 2.4\times10^{-4} \qquad \varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_3) = -3\times10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3-\mu\sigma_1) = -1.7\times10^{-4}$$

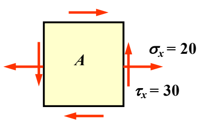
40

§7.8 广义胡克定律

例题7.11

解：(2) A点处的线应变ε_x，ε_y，ε_z

$\sigma_x = 20 \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$



$\Downarrow$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_x = -3\times10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\sigma_x = -3\times10^{-5}$$

41