自动控制原理

第七章

控制系统的综合与校正

前六章课的简单回顾：

（1）这门课是研究什么的？

重点研究机电工程的负反馈闭环控制系统。

（2）用什么工具来研究？

拉普拉斯变换和反变换，时间函数↔象函数。

（3）研究系统的哪些东西？

快速性、稳定性、准确性。

（4）如何设计与校正系统？

- 频率法
  - 串联校正（超前校正PD、滞后校正PI、滞后-超前校正PID）
  - 反馈校正
  - 最优模型（二阶模型和高阶模型）

引言

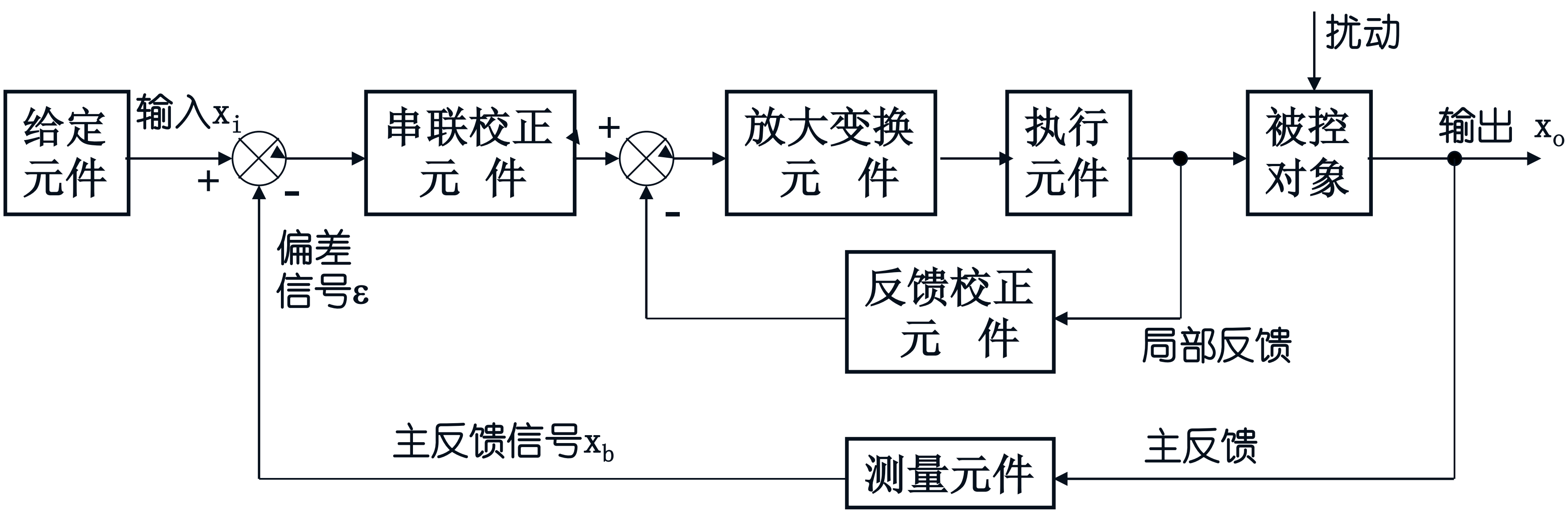
1、控制系统＝被控制对象＋控制器。控制系统初步设计：

1）先确定被控制对象，则控制系统需完成的任务便因之而其确定；

2）按照被控制对象的工作条件，即被控制信号的最大速度、最大加速度等参数，可初步确定执行元件的形式、特性和参数。

3）进一步按照测量精度、抗干扰能力、非线性度等要求，及被测信号的物理性质，合理选择测量（比较）元件。

4）再在测量元件与执行元件之间合理选择增益可调的放大器。



2、控制系统的性能分析（综合）与校正：

1）通过时域性能指标、频域性能指标或综合性能指标来评价；

2）测量、放大、执行元件是构成控制器的基本元件，为系统的不可变部分，由它们初步构成的控制器与被控制对象组合成控制系统。

3）若上述系统不能全面的满足设计要求的性能指标时，还需增加些必要的元件或环节，使重新组合的控制系统能全面满足设计要求的性能指标。这就是控制系统设计中的综合与校正。

3、系统的综合与校正，通常是合理设计串联或反馈校正元件的问题。主要取决于信号性质、系统中各点功率的大小，可供采用的元件、经济条件及设计者经验。

4、能够全面满足性能指标的控制系统并不是唯一的。

- **7-1** 系统的性能指标
- **7-2** 系统的校正概述
- **7-3** 串联校正
- **7-4** 反馈校正
- **7-5** 用频率法进行设计与校正
- 例题分析
- 课后习题

7.1 系统的性能指标

按其类型可分为：

（１）时域性能指标，它包括瞬态性能指标和稳态性能指标；

（２）频域性能指标

（３）综合性能指标（误差准则）

7.1.1　时域性能指标

常用的时域（阶跃响应、斜坡响应）指标：

最大超调量或最大百分比超调量

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

调整时间

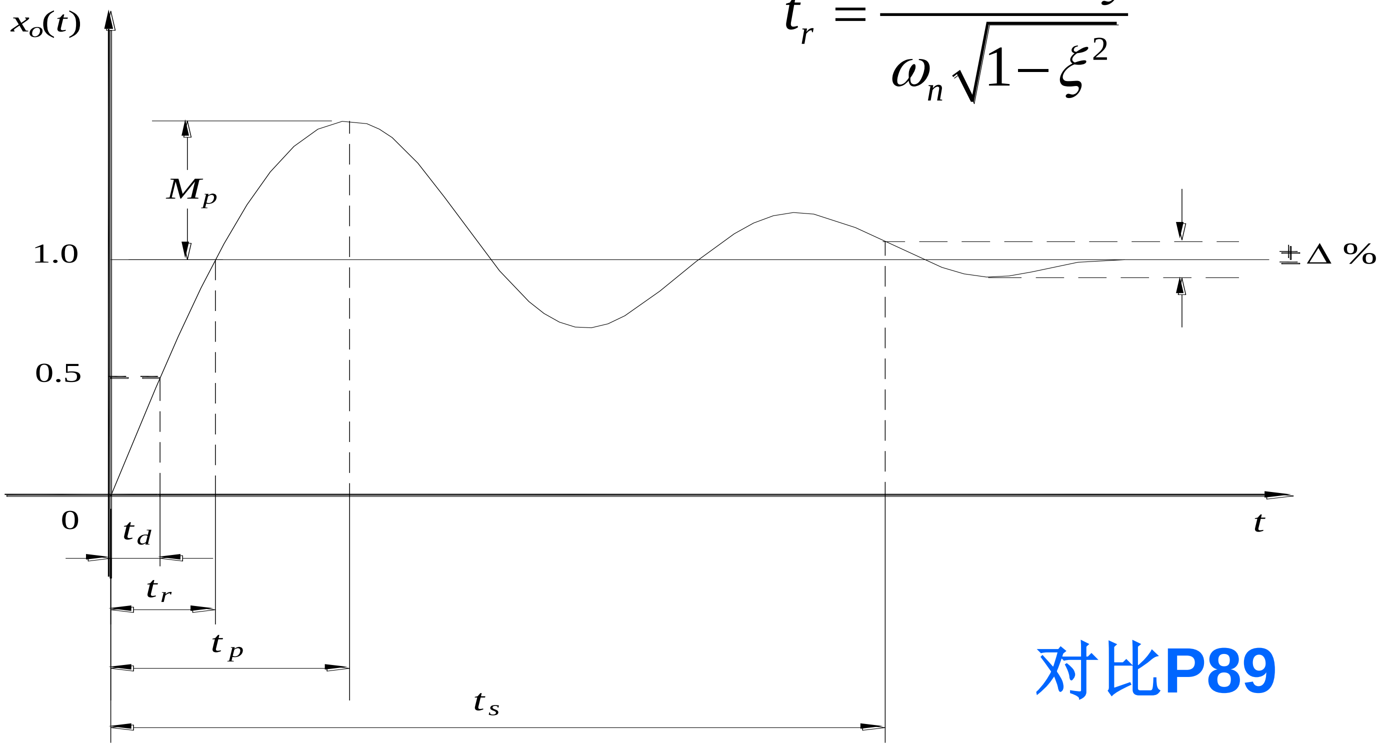
$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}(\pm 5\%), \frac{4}{\xi\omega_n}(\pm 2\%)$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

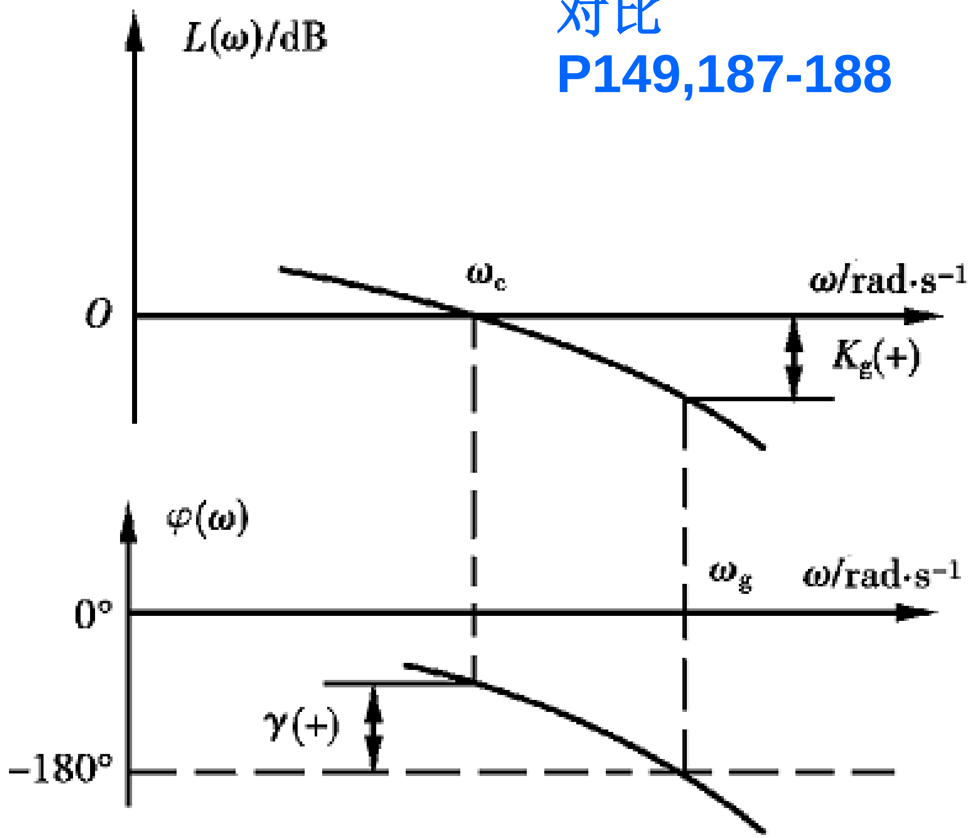


对比P89

7.1.2　开环频域指标

开环截止频率 ω_c
相位裕量 γ
幅值裕量 K_g
静态误差系数**K**

对比
P149,187-188



稳定系统的伯德图

对于单位反馈的的二阶控制系统，其开环传递函数如下：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

有：$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}};\zeta=\frac{1}{2\sqrt{KT}}$

$$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^2}-2\xi^2}$$

❖ 好的系统其开环伯德图特点：

1.低频段增益要高（精度好）

2.穿越频率 ω_c 要大（快速性好）

3.穿越剪切率**-20dB/dec**（稳定性）

4.高频段，幅频特性曲线下降要快（抗干扰）

❖ 在开环系统频率特性中：

1.低频段表征了闭环系统的稳态性能

2.中频段表征了闭环系统的动态性能

3.高频段表征了闭环系统的复杂性和噪声抑制性

故应使低频段增益足够大，以保证稳态误差要求；中频段对数频率特性在**-20dB/dec**并占据充分宽的频带，以保证系统具有适当的相角裕度；高频段增益尽快减小，以削弱噪声影响。

7.1.3、闭环频域指标

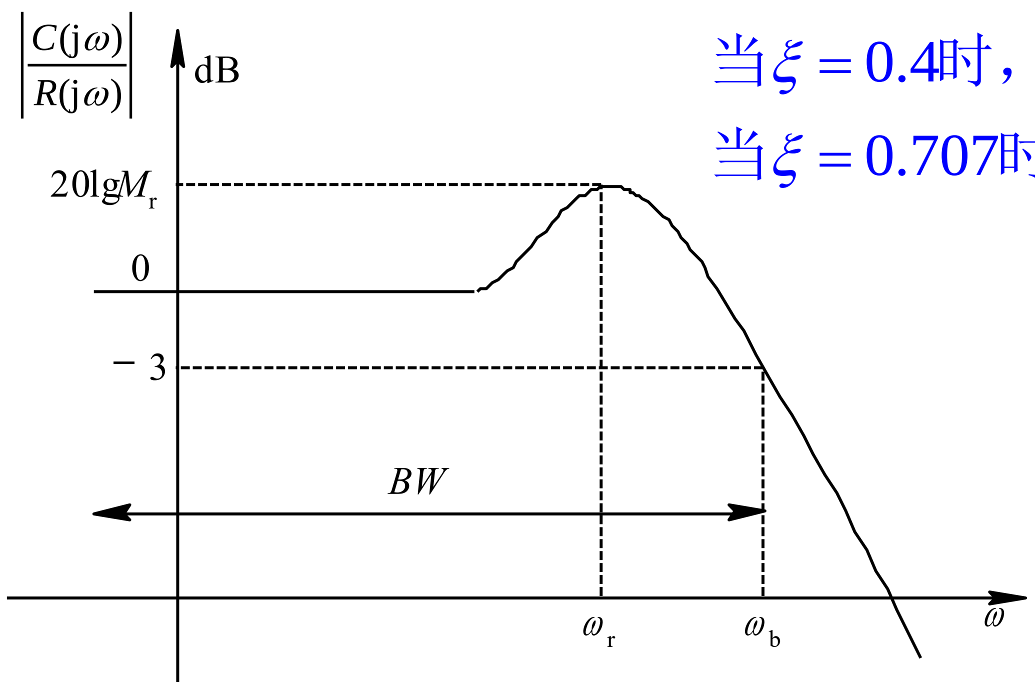
谐振角频率 $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

相对谐振峰值 $M_r = \dfrac{1/K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

复现频率 ω_M

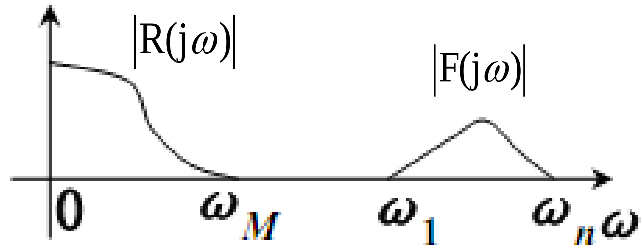
闭环截止频率与闭环带宽 ω_b

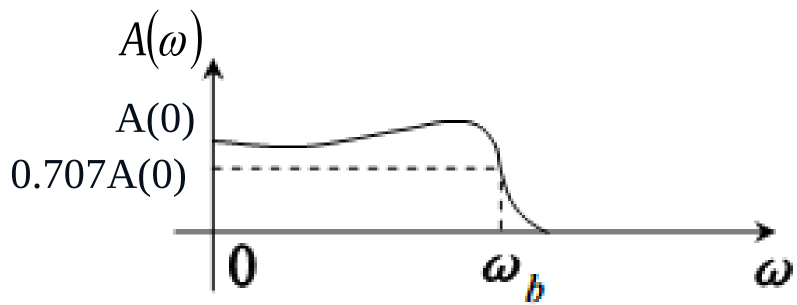
$$\omega_b = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}+1-2\xi^2},0\le\xi\le0.707$$



当$\xi=0.4$时， $\omega_b=1.6\omega_c$

当$\xi=0.707$时， $\omega_b=1.55\omega_c$





实际系统中：
- 输入信号一般为低频信号
- 扰动信号一般为高频信号

要求系统：
- 以一定精度跟踪输入信号
- 抑制干扰信号

显然 $\omega_M < \omega_b < \omega_1$　　通常 $\omega_b = (5 \sim 10)\omega_M$

7.1.4 综合性能指标（误差准则）

评价控制系统性能的误差准则所依据的是：控制系统的希望输出与实际输出之差的某个函数的积分。

❖ 说明：

1、可采用综合性能指标 $I=\int_0^\infty e^2(t)dt$ 来评估系统的优劣，可作为设计最优系统的目标函数。

2、积分上限 $t\to\infty$ 可在实际使用时用有限足够长的值。

3、该综合性能指标重视大误差（初始段）忽略小误差（稳定段），因误差很大时，平方后会更大。

4、尚有 $I=\int_0^\infty |e(t)|dt$ 等性能指标；其中 $I=\int_0^\infty te^2(t)dt$ 性能指标（称**ITSE**指标）是最好的性能指标，强调瞬态响应后期出现的误差加权**t**，**t**越大，权越大，相似的，有

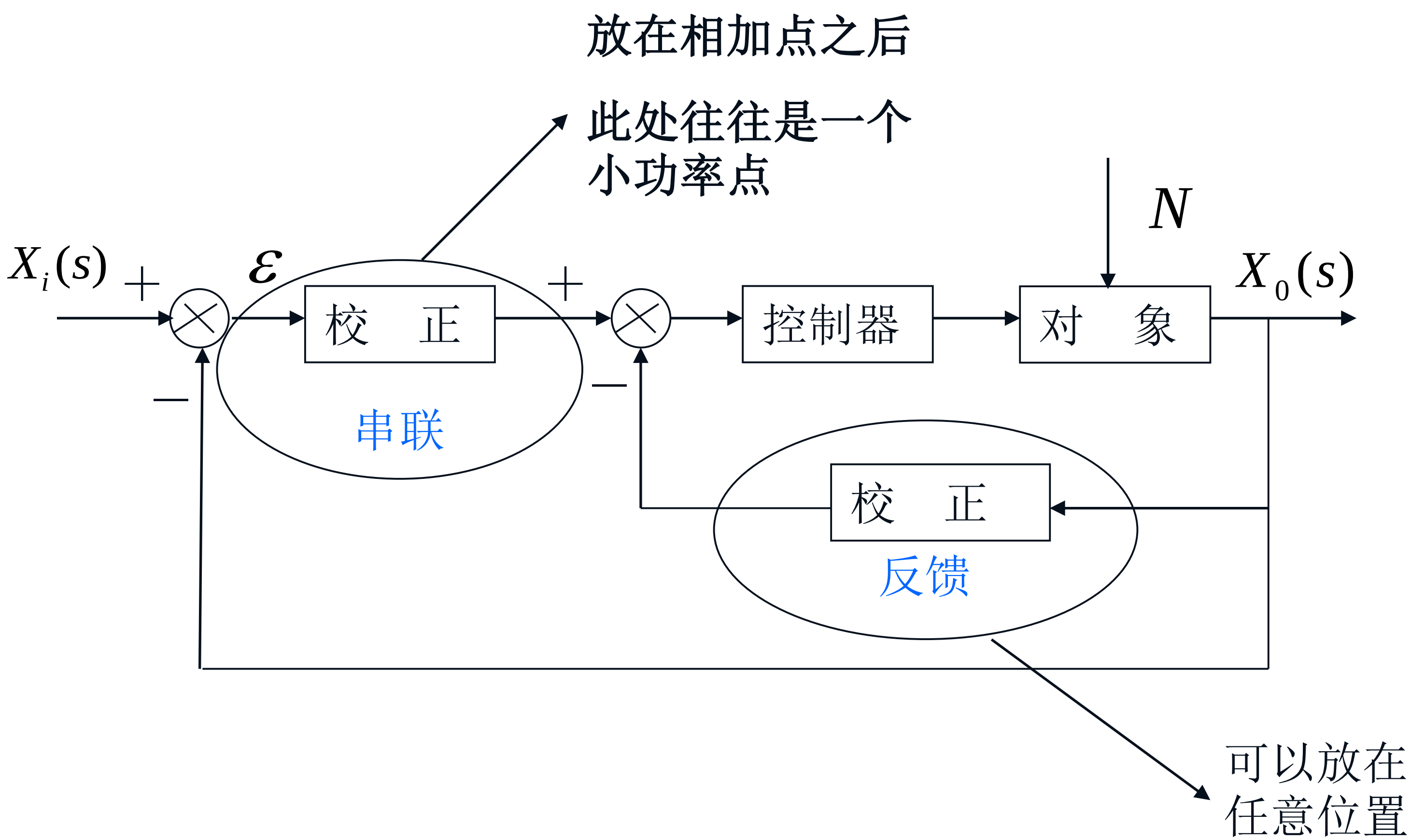
$$I=\int_0^\infty t|e(t)|dt$$

7.2 系统的校正概述

系统校正的矛盾：稳定性与快速性的矛盾、稳定性与控制精度的矛盾

校正装置按在系统中的联结方式可分为：

串联校正、反馈校正、顺馈校正和干扰补偿。



串联校正与反馈校正的选择：

主要取决于信号性质、系统中各点功率的大小，可供采用的元件、设计者的经验以及经济条件。

（1）串联校正元件比反馈校正元件简单，也比较易于实现对信号进行各种必要形式的变换。但是，如果应用无源串联校正，往往需要附加放大器用来提高放大系数，以补偿串联校正在信号变换过程中引起的幅值衰减。若使用有源串联校正，由于有源校正元件中含有放大器，因此，上述补偿的问题可在有源校正电路中自行解决。

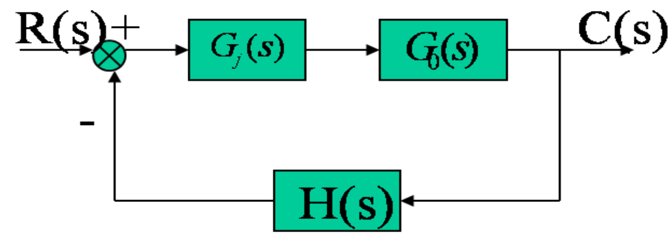
（2）为了避免功率损耗，串联校正元件通常安置在前向通道中能量较低的部位上。

（3）采用反馈校正时，需要的元件数比串联校正时少。因为，此时的信号是从高功率点传向低功率点，一般不必采用附加放大器。

（4）反馈校正还可以消除系统不可变部分的参数波动对系统性能的影响，甚至能有效改变或完全取代被包围环节。

7.3 串 联 校 正

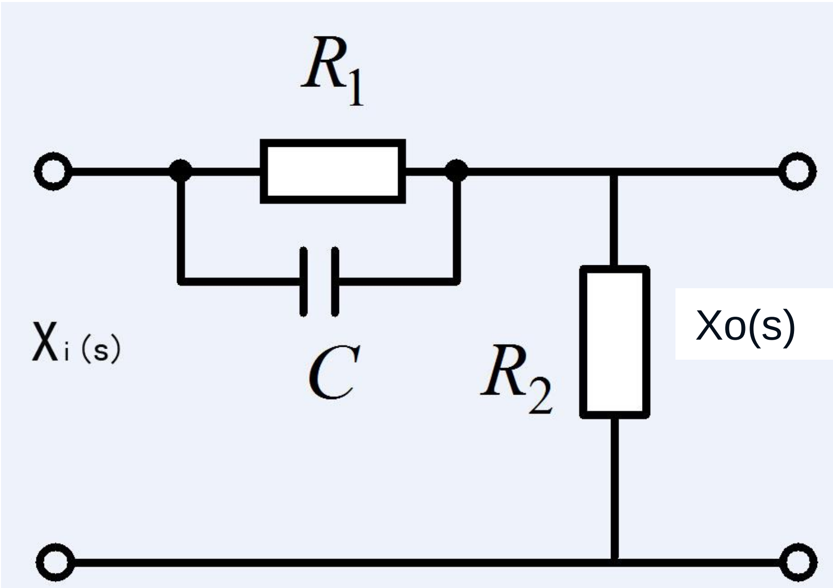
包括超前、滞后和滞后一超前三种校正方式。



7.3.1 超前校正（PD）

用来解决稳定性和快速性的矛盾，针对中频段。
可使系统响应加快，超调减小。

$$G_j(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_1CS+1}{\frac{R_2}{R_1+R_2}R_1CS+1}$$

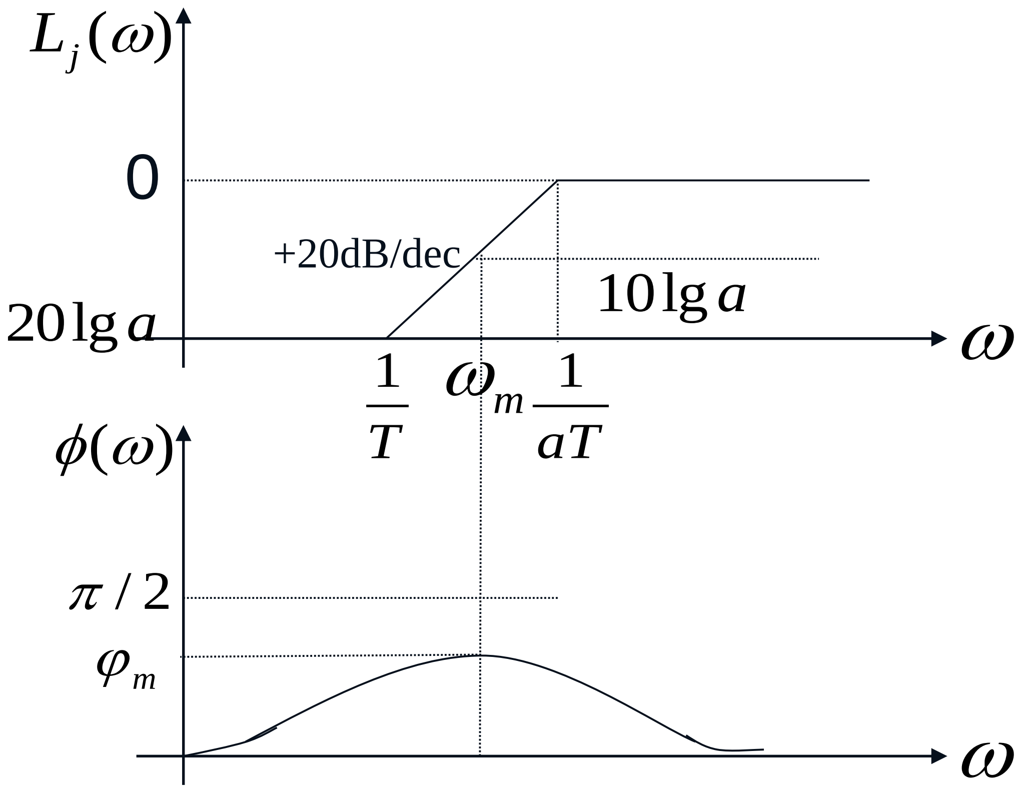


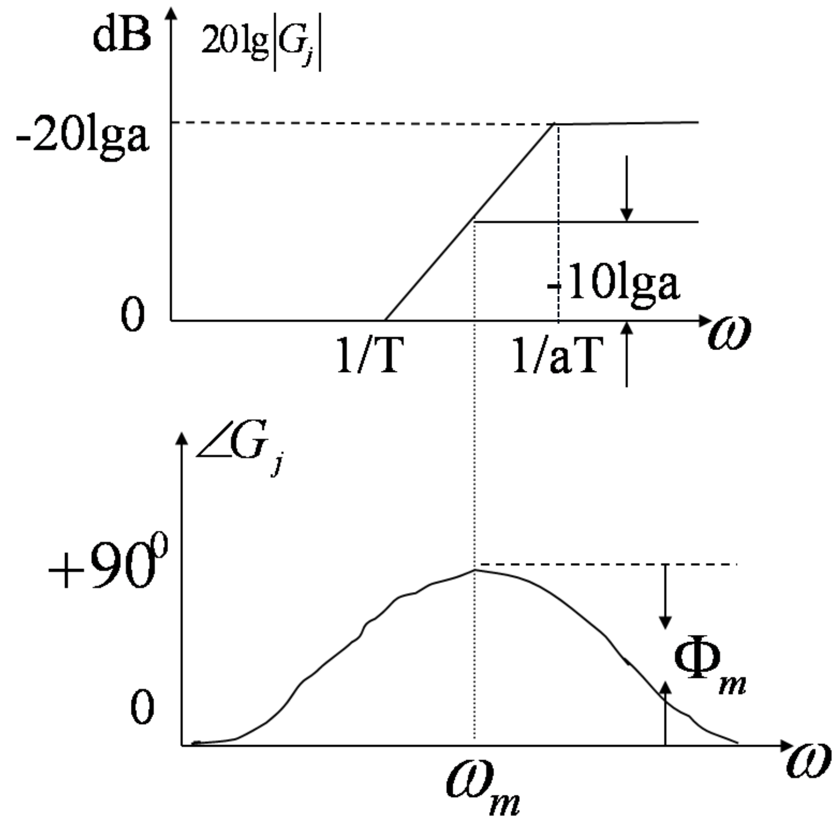
$$令R_1C=T;\frac{R_2}{R_1+R_2}=a(a<1)$$

$$则G_j(s)=a\frac{TS+1}{aTS+1}$$

实质：带惯性的比例加微分**(PD)**环节

注意：为保证系统的开环放大系数不变，必须使系统放大器的放大系数相应地提高**1/a**倍，以补偿超前校正环节所造成的衰减。且通常取**1/a=5~20**





$G_j(s) = a\dfrac{Ts+1}{aTs+1} \Rightarrow$ 超前角 $\theta = \tan^{-1}T\omega - \tan^{-1}aT\omega$

当 $\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{a}T}$ 时： $\theta_{\max} = \sin^{-1}\dfrac{1-a}{1+a}$， $20\lg\left|G_j(j\omega_m)\right| = 10\lg a$

❖ 超前网络的最大超前角 $\theta_m = \arcsin\frac{1-a}{1+a}$

❖ 此点位于几何中点上，对应的角频率为 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$

为使串联超前校正发挥最大的校正作用，希望与θ_m对应的频率ω_m与校正后系统的剪切频率ω'_c重合。

即：如果能使最大超前相位角θ_m发生在处ω'_c，便可得到最大的相位裕度。

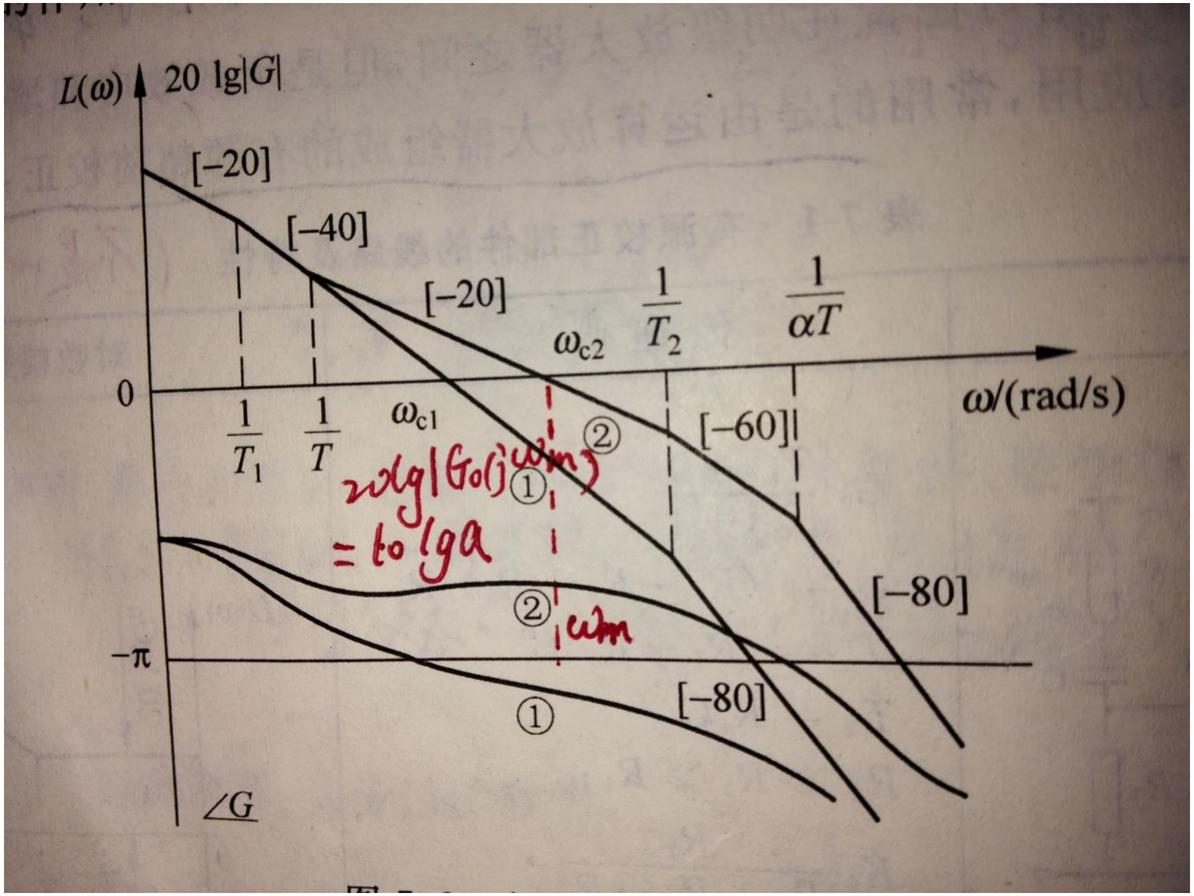
$$L_j(\omega_m) = 20\lg\left|\frac{1}{a}G_j(j\omega_m)\right| = 20\lg\left|\frac{Ts+1}{aTs+1}\right|_{s=j\omega_m} = -10\lg a$$

$$20\lg\left|\frac{1}{a}G_j(j\omega_m)\right| + 20\lg\left|G_0(j\omega_m)\right| = 0,$$

自习P226 图7-8

$\therefore 20\lg\left|G_0(j\omega_m)\right| = 10\lg a$, 可求得 $a = \left|G_0(j\omega_m)\right|^2$,

此时：$\omega_c' = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$，$\theta_m = \arcsin\frac{1-a}{1+a}$



L(ω)
20 lg|G|
[−20]
[−40]
[−20]
1/T₂
1/αT
ω_c2
0
ω/(rad/s)
1/T₁
1/T
ω_c1
②
[−60]
20lg|G₀(jωm)|
= 10lga
①
[−80]
②
ωm
−π
[−80]
①
∠G

图7-8 超前校正的作用

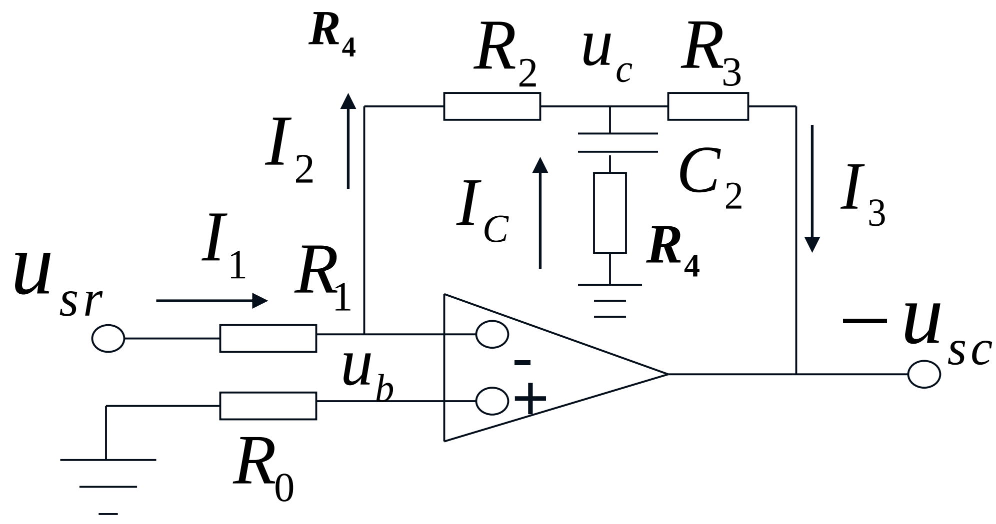
❖ 超前校正很难使原系统的低频特性得到改善。如进一步提高开环增益，使低频段上移，则系统的平稳性将有所下降。幅频特性过分上移，还会削弱系统抗高频干扰能力。所以超前校正对提高系统的稳态精度的作用是很小的。而为了使系统的响应快，超调小，可采用超前串联校正。

$$\frac{u_{sc}}{u_{sr}} = -K\frac{\tau s+1}{Ts+1}$$

$$K = \frac{R_2+R_3}{R_1}$$

$$\tau = \left[R_4 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\right]C_2$$

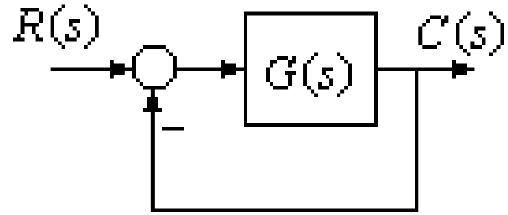
$$\mathrm{T} = \mathrm{R}_4\mathrm{C}_2,\quad R_0 = R_1$$



小结：

- 超前校正可以提高系统的相对稳定性。为保证系统具备+45°~+60°的相位裕度，要求剪切斜率等于-20dB/dec。系统应用串联超前校正时，在大多数情况下可以达到这个目的，从而可以增大相位裕度γ，以及降低系统的相对谐振峰值M_r。
- 超前校正可提高ω_c、ω_r、ω_b，扩展系统带宽，加快系统的反应速度。但同时它也减弱了控制系统的抗干扰能力。
- 应用串联超前校正的范围：从系统不可变部分的$G_0(j\omega)$来看，如果在剪切频率附近ω_c，相频特性$\angle G_0(j\omega)$的变化率很大，即相角减小得很快，则应用单一的串联超前校正将变得无效。

例：设单位负反馈控制系统的开环传递函数



$$G_0(s)=\frac{k}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

系统最大输出速度为**2*r/min***，容许的最大稳态误差小于**2°/**秒。

(1) 确定满足上述指标的最小***k***值，计算该***k***值下的相位裕度。

(2) 前向通路中串联超前校正网络$G_j(s)=(0.4s+1)/(0.08s+1)$，试计算相位裕度。

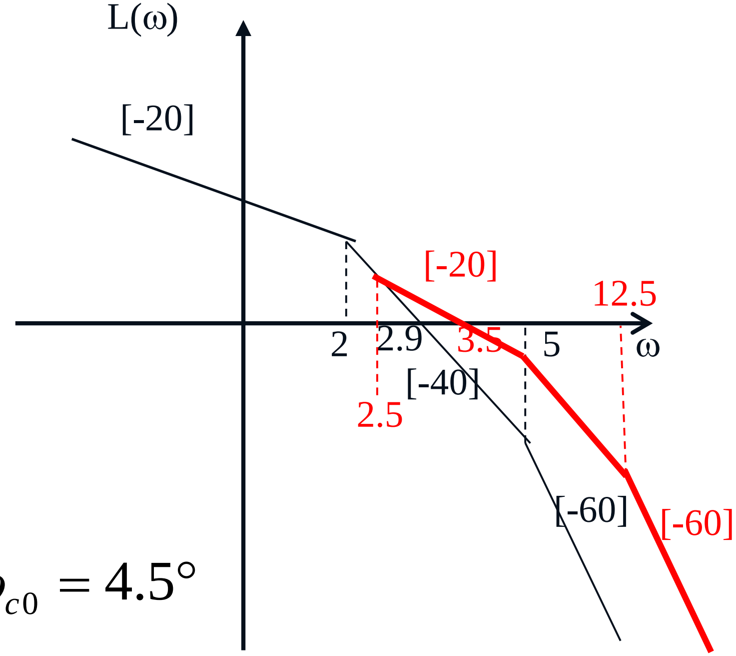
解 (1)

$$k=\frac{R}{e_{ss}}=\frac{\text{希望的输出速度}}{\text{容许的位置误差}}=\frac{2\times 360^\circ/60}{2^\circ}=6$$

故

$$G_0(s)=\frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

$$G_0(s)=\frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$



$$L_0(\omega)=\begin{cases}14.4, & \omega=1\\ 5.9, & \omega=2\\ -10, & \omega=5\end{cases}$$

令$L_0(\omega)=0$，可得$\omega_{c0}=2.9rad/s$

$$\gamma_0=180°-90°-\tan^{-1}0.2\omega_{c0}-\tan^{-1}0.5\omega_{c0}=4.5°$$

(2) 串联超前校正网络$G_j(s)=(0.4s+1)/(0.08s+1)$

$$G(s)=\frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}\cdot\frac{0.4s+1}{0.08s+1}$$

$$\boxed{G_j(s)=\frac{0.5s+1}{Ts+1},\quad T<0.5}$$

同理可得$\omega_c=3.5rad/s$

$$\gamma=180°-90°-\left(\tan^{-1}0.2\omega_c+\tan^{-1}0.5\omega_c\right)+\left(\tan^{-1}0.4\omega_c-\tan^{-1}0.08\omega_c\right)$$

$$=90^0-95.3^0+40^0\approx35^0$$

可见串入超前校正网络后，γ 增大，系统变得更稳定。

$G_0(s)=\dfrac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$，试设计一个串联超前校正环节，

使校正后系统的相位裕量$\gamma \ge 30^0$，剪切频率$\omega_c \ge 3rad/s$

解：由题意得 $\omega_{c0}=2.9rad/s$，$\gamma_0=4.5^0$

设超前校正环节为 $G_j(s)=\dfrac{Ts+1}{aTs+1}, 0<a<1$

其相角应为 $\theta_m \ge \gamma-\gamma_0=25.5^0$，取$\theta_m=25.5^0+(5^0 \sim 12^0)=35^0$

所以 $a=\dfrac{1-\sin\theta_m}{1+\sin\theta_m}\approx 0.2$

(5～12°）是追加超前相角Δθ

$\because$ 校正后 $\omega_m=\omega_c$，即$L(\omega_m)=\left|G_j(j\omega_m)G_0(j\omega_m)\right|=1$

$\therefore L_j(\omega_m)=20\lg\left|\dfrac{1}{a}G_j(j\omega_m)\right|=-20\lg\left|G_0(j\omega_m)\right|=-10\lg a$

求得 $\omega_m=\omega_c\approx 4rad/s$,所以 $T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{a}}=0.56(s)$，$G_j(s)=\dfrac{0.56s+1}{0.09s+1}$

验算：$\gamma=180^0-90^0-\left(\tan^{-1}0.2\omega_c+\tan^{-1}0.5\omega_c\right)+\left(\tan^{-1}0.56\omega_c-\tan^{-1}0.11\omega_c\right)$

$=90^0-101.1^0+42.2^0=31^0\ge 30^0$

γ和ω_c均满足要求

$\therefore G(s)=\dfrac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}\bullet\dfrac{0.56s+1}{0.11s+1}$

相消法：

$G_0(s)=\dfrac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$，试设计一个串联超前校正环节，

使校正后系统的相位裕量$\gamma \ge 40^0$，剪切频率$\omega_c \ge 4rad/s$

解：设$G_j(s)=\dfrac{0.5s+1}{Ts+1}$，$T<0.5$

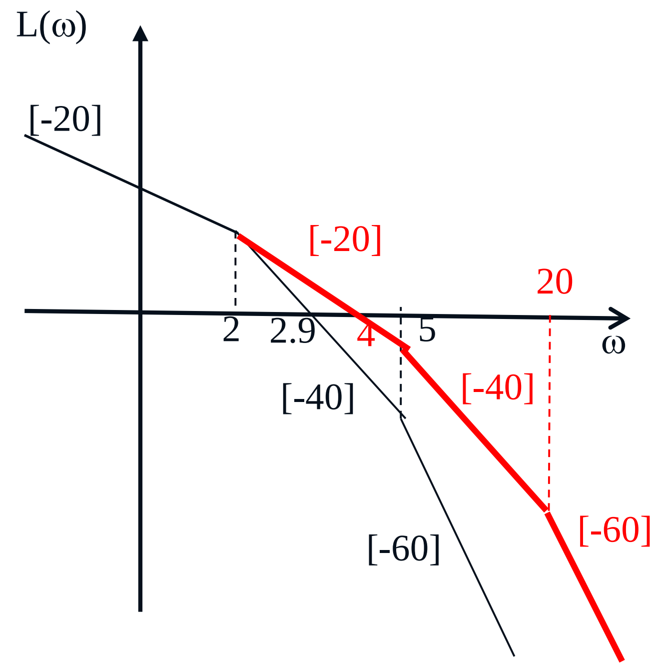
校正后：$G_j(s)G_0(s)=\dfrac{6}{s(0.2s+1)(Ts+1)}$

$$\gamma=180^0-90^0-\tan^{-1}0.2\omega_c-\tan^{-1}T\omega_c \ge 40^0$$

即要求 $\tan^{-1}0.2\omega_c+\tan^{-1}T\omega_c \le 50^0$

取 $\omega_c=4rad/s$， 求得 $T\approx 0.05(\mathrm{s})$

$$\therefore \quad G_j(s)=\frac{0.5s+1}{0.05s+1}$$



习题7-7、7-15、7-16

2. 设开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{k}{s(s+1)(0.01s+1)}$

单位斜坡输入*R(t)= t*，输入产生稳态误差$e\le 0.0625$。若使校正后相位裕度γ^*不低于45°，截止频率$\omega_c^* > 2(rad/s)$，试设计校正系统。

解： $e=\dfrac{1}{k}\le 0.0625$ $k\ge 16$，取$k=20$

$$L_0(\omega)=\begin{cases}23, & \omega=1\\ -57, & \omega=100\\ 0, & \omega=4.4\end{cases}$$

当$\omega_{c0}=4.4rad/s$时

$$\gamma_0=180°-90°-\arctan\omega_{c0}-\arctan(0.01\omega_{c0})=10.3°<45°$$

不满足性能要求，需加以校正。

系统中频段以斜率−40dB/dec穿越0dB线，试选用超前网络校正。

设超前网络相角为θ_m，则

$$\theta_m\ge\gamma^*-\gamma_0+(5\sim 12°)\ge 45°-10.3°+10.3°=45°$$

(5～12º）是追加超前相角Δθ

故 $$\alpha=\frac{1-\sin\theta_m}{1+\sin\theta_m}\approx 0.17$$

中频段 $$L_j(\omega_m)=20\lg\left|\frac{1}{\alpha}G_j(j\omega_m)\right|=-20\lg\left|G_0(j\omega_m)\right|=-10\lg\alpha$$

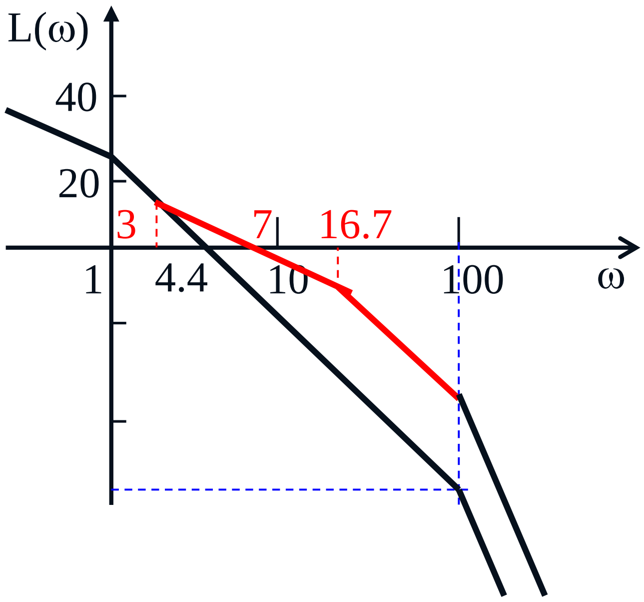
求得 $\omega_m=\omega_c\approx 7,\quad T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{a}}=0.35$ $$\boxed{\therefore\quad G_j(s)=\frac{0.35s+1}{0.06s+1}}$$

验算 $$\gamma^*=180°-90°+\underline{\left(\tan^{-1}T\omega_m-\tan^{-1}aT\omega_m\right)}-\underline{\left(\tan^{-1}\omega_m+\tan^{-1}0.01\omega_m\right)}$$

$$=90^0+\underline{45^0}-\underline{86^0}=49^0>45^0$$

所以超前校正后

$$G(s)=\frac{20}{s(s+1)(0.01s+1)}\cdot\frac{0.35s+1}{0.06s+1}$$



例: 设某控制系统的不可变部分的传递函数为:

$$G_0(s)=\frac{k}{s(0.001s+1)(0.1s+1)}$$

要求该系统具有如下性能指标:

(1) 响应匀速信号 $r(t)=R_1 t$ 的稳态误差不大于 $0.001R_1$，其中 R_1 为常量

(2) 剪切频率 $\omega_c=165\text{rad/s}$

(3) 相角裕度 $\gamma\geq+45^0$

(4) 幅值裕度 $20\lg K_g\geq 15\text{dB}$

试应用频率响应法确定串联超前校正参数。

解：设串联超前校正环节的传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\qquad(\alpha>1)$$

根据给定的各项性能指标确定串联超前校正参数α及T。

(1) 由于响应匀速信号的稳态误差为常量的系统应为I型，故校正系统应具有$v=1$。

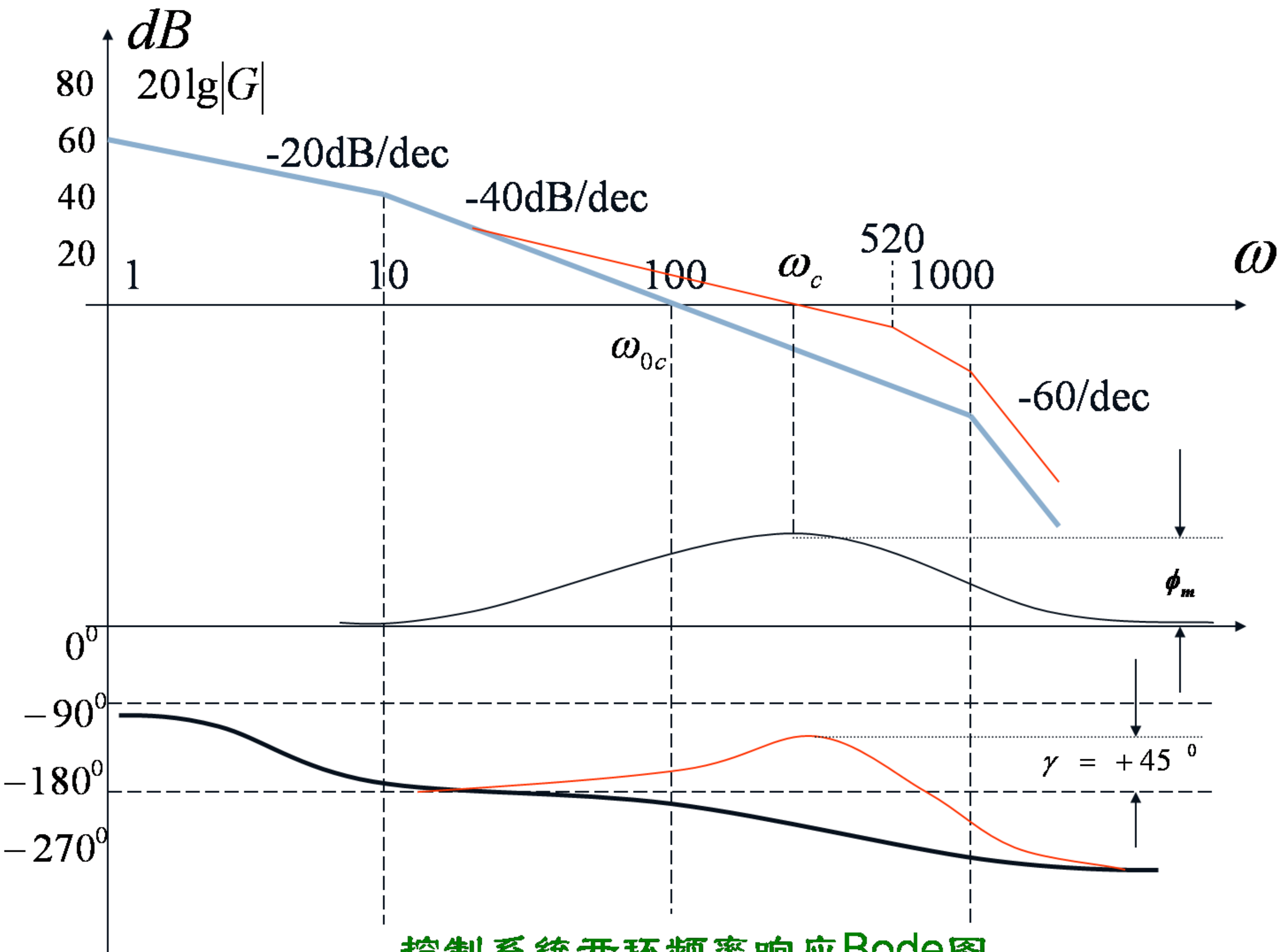
又由于响应$r(t)=R_1t$时，$e_{ss}(\infty)=0.001R_1$

根据 $$e_{ss}(\infty)=\frac{R_1}{K_v}$$

得： $$K_v=\frac{R_1}{e_{ss}(\infty)}=1000\quad(s^{-1})$$

因此未校正系统开环频率响应的*Bode*图如图所示，由图或通过计算求得未校正系统的剪切频率

$$\omega_{0c}=100rad/s,\qquad \gamma_0=0^0$$



控制系统开环频率响应Bode图

(2)由未校正系统的开环频率响应Bode图查出，或根据

$$\angle G_0(j\omega_c) = -90^0 - \mathrm{arctg}(0.001\omega_c) - \mathrm{arctg}(0.1\omega_c)$$

计算出: $\angle G_0(j\omega_c) = \angle G_0(j165) = -186^0$

将 $\angle G_0(j\omega_c) = -186^0$ 及要求的$\gamma = 45^0$带入公式

$$\varphi_m = \gamma - (180^0 + \angle G_0(j\omega_c)) = 45^\circ - (180^\circ - 186^\circ) = 51^\circ$$

考虑留有5^0的裕量，取最大超前相角 $\varphi_m = 51 + 5 = +56^0$

(3) 根据$\varphi_m = +56^0$，计算串联超前参数α:

$$\alpha = \frac{1+\mathrm{Sin}\varphi_m}{1-\mathrm{Sin}\varphi_m} = 10.7\text{，这里取}\alpha = 10$$

(4)根据未校正系统的开环幅频特性

$$\boxed{20\lg\left|G_0(j\omega_m)\right| = -10\lg a} = -10(dB)$$

对应的角频率$\omega_m = 170 rad/s.$

由于$\omega_m \approx \omega_c = 165 rad/\sec$，故可暂取$\omega_m = 165 rad/s$

(5)计算T值：应用公式$T=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_m}=0.00192(s)$

求得串联超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+0.0192s}{1+0.00192s}$$

其转折频率分别为 $1/\alpha T=52\text{rad/s}$, $1/T=520\text{rad/s}$.

(6)验算性能指标

求得串联超前校正系统的开环传递函数为：

$$G(s)=G_c(s)\,G_o(s)=\frac{1000}{s(0.001s+1)(0.1s+1)}\times\frac{0.0192s+1}{0.00192s+1}$$

从$20\lg|G(j\omega)|$的中频区特性看到，校正后系统的剪切频率ω_c已经按性能指标要求选定为165rad/s。

根据 $\angle G(j\omega_c)=\angle G(j165)$

$$=-90^0-\arctan 0.001\times165-\arctan 0.1\times165$$

$$+\arctan 0.0192\times165-\arctan 0.00192\times165=-131^\circ$$

$\gamma=180^0+\angle G(j\omega_c)=+49^0\geq+45^0$

由校正后系统的相频特性$\angle G(j\omega)$得到：

$$\angle G(j\omega_g) = -90^0 - \arctan 0.001\omega_g - \arctan 0.1\omega_g + \arctan 0.0192\omega_g - \arctan 0.00192\omega_g = -180^0$$

解出角频率$\omega_g = 689\text{rad/s}$,并由此求得校正系统的幅值裕度

$$\mathrm{K_g} = \frac{1}{\left|\mathrm{G}(\mathrm{j}\omega_\mathrm{g})\right|} = 7.03$$

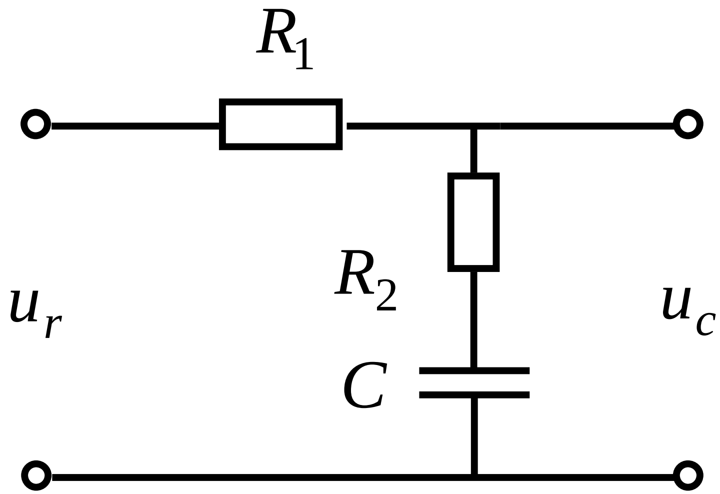
或$20\lg \mathrm{K_g} = 17(\mathrm{dB})$

满足性能指标的要求。

7.3.2、滞后校正

用来提高精度，解决低频段问题.

$$G_j(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{R_2Cs+1}{\frac{R_1+R_2}{R_2}R_2Cs+1}$$



设$R_2C=T,\frac{R_1+R_2}{R_2}=\beta(\beta>1)$

则$G_j(s)=\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$

近似比例加积分控制器PI

由于传递函数的分母的时间常数大于分子的时间常数，所以对数渐近幅频曲线具有负斜率段，相频曲线出现负相移。在相位上滞后于输入，故称滞后网络。

- 滞后补偿网络相当于一低通滤波器：对低频信号不产生衰减，而对高频信号有衰减作用。

用作串联校正时，

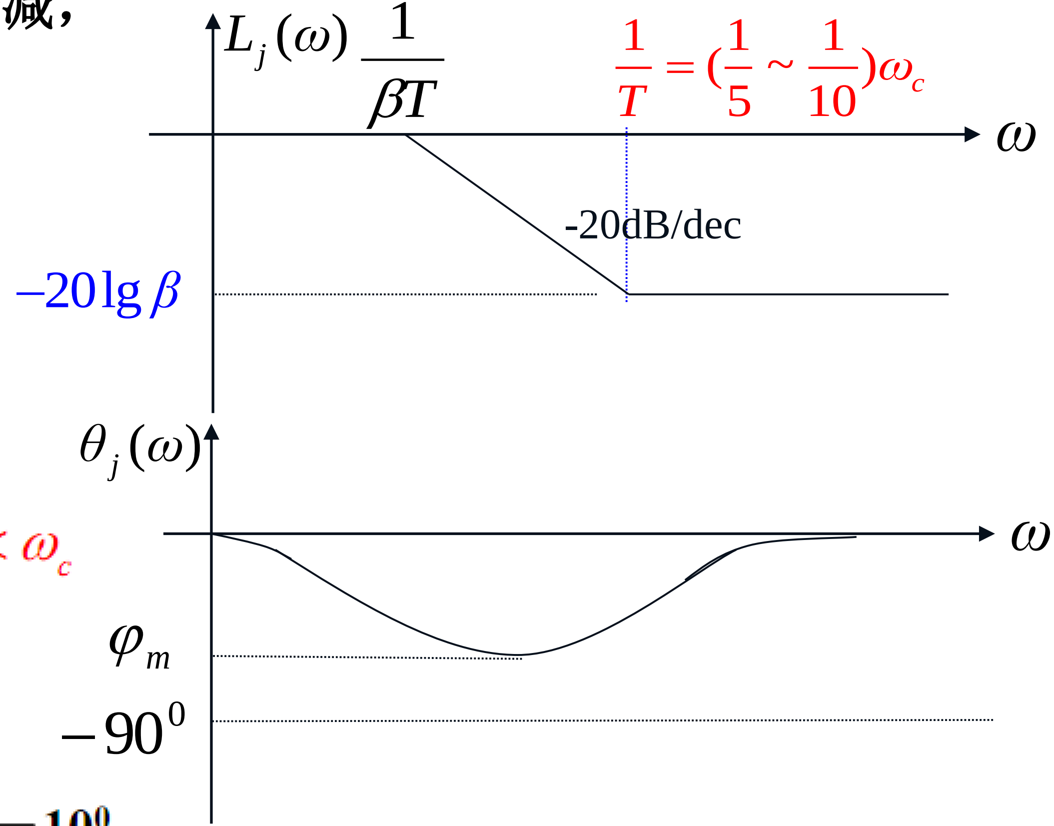
$$\begin{cases} L_c(\omega)<0 \Rightarrow \omega_c \downarrow \\ \varphi_c(\omega)<0 \Rightarrow \text{对提高}\gamma\text{不利} \end{cases}$$

为减小其对 γ 的不利影响，

在选取参数时，应使：$\omega_m << \omega_c$

通常取 $\dfrac{1}{T}=\left(\dfrac{1}{5}\sim\dfrac{1}{10}\right)\omega_c$，

此时 $\varphi_c(\omega_c)$ 大约在 -5^0 至 -10^0



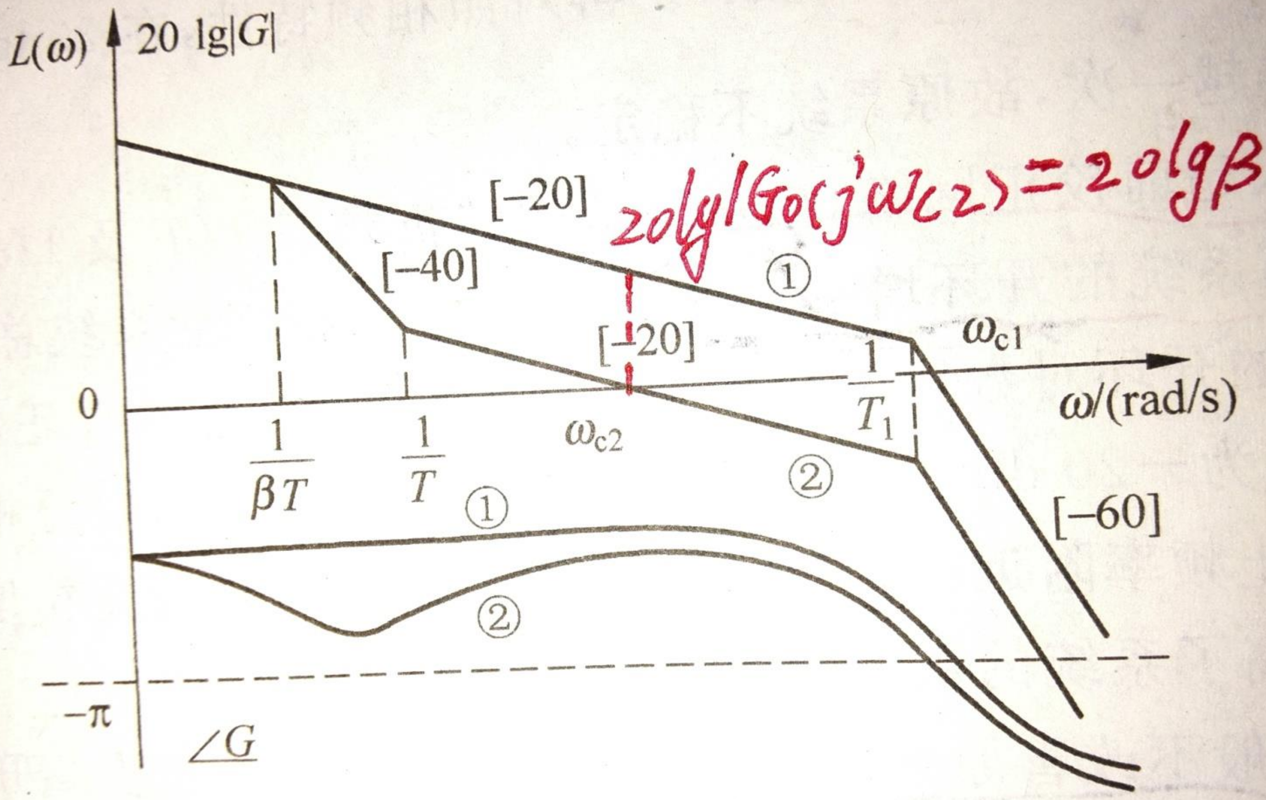


图 7-11 系统的滞后串联校正

- 串联滞后校正并没有改变原系统最低频段的特性，故对系统的稳态精度不起破坏作用。相反，往往还允许适当提高开环增益，进一步改善系统的稳态精度。
- 对于高精度，而快速性要求不高的系统常采用滞后校正，如恒温控制等。
- 滞后校正并不是利用相角滞后作用来使原系统稳定的，而是利用滞后校正的幅值衰减作用使系统稳定的。

P224 图7－11　　习题7－2，3

适用范围：

如果未校正系统的相角很负，且在剪切频率附近相角变化明显，采用串联滞后校正。反之，变化不明显时，采用串联超前校正合适。

3. 设单位反馈系统的开环传递函数， $G(s)=\dfrac{k}{s(s+1)(0.2s+1)}$

试设计串联滞后校正装置，满足k_v = 8(*rad/s*)，相位裕度γ^* = 40°。

解： $k_v = 8$， v=1， $k = 8$

令$L_0(\omega)$=0， 可解得 ω_{0c} = 2.6rad/s

γ_0= 180° – 90° – arctanω_{0c} – arctan(0.2ω_{0c}) = –6.5°< 40°

不满足性能要求，需加以校正，选用滞后网络校正。

令 $$\theta(\omega_c) = \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$$

得 $$180^0 - 90^\circ - \arctan\omega_c - \arctan(0.2\omega_c) = 46^\circ$$

所以 ω_c= 0.7

（5～10°）是追加滞后相角Δϕ

根据 $$L_0(\omega_c) - 20\lg\beta = 0$$

为了补偿串联滞后校正网络将在校正后系统的剪切频率上可能产生的相角滞后

得 β = 1/0.09

再由 $$\frac{1}{T} = (\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10})\omega_c = 0.1\omega_c$$

得 T = 13.9

故选用的串联迟后校正网络为

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} = \frac{1+13.9s}{1+154.3s}$$

验算

$$\gamma = 180^\circ + \arctan(13.9\omega_c) - \arctan(154.3\omega_c) - 90^\circ - \arctan\omega_c - \arctan(0.2\omega_c)$$
$$= 41.7^\circ$$

要解决：（1）什么情况下适宜采用它？（2）参数 β和T如何选取？

例（李P249例6）：$G_0(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$ 要求，$\begin{cases} K_v = 25 \\ \omega_c = 2.5 \\ \gamma \ge 40^0 \end{cases}$

解：1）诊断

按K=25绘出校正前的Bode图

可求出：$\omega_{c0} \approx 11, \gamma_0 \approx -22^0$

（可从图中读取，不要求精确）

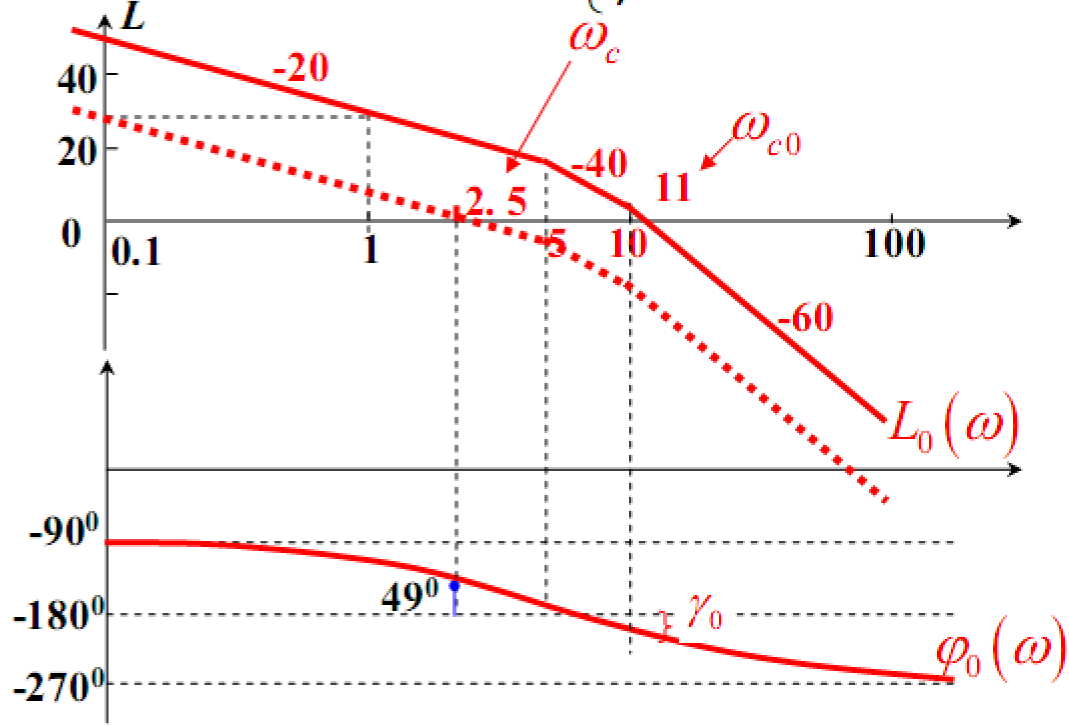
可见，$\omega_c < \omega_{co}$

设想把$L_0(\omega)$向下平移，

使其截止频率为2.5

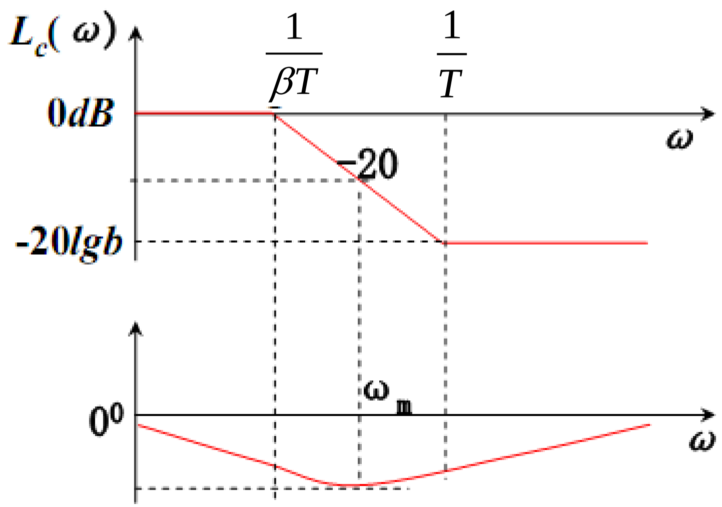
可求出：

$180^0 + \varphi_0(\omega_c)$

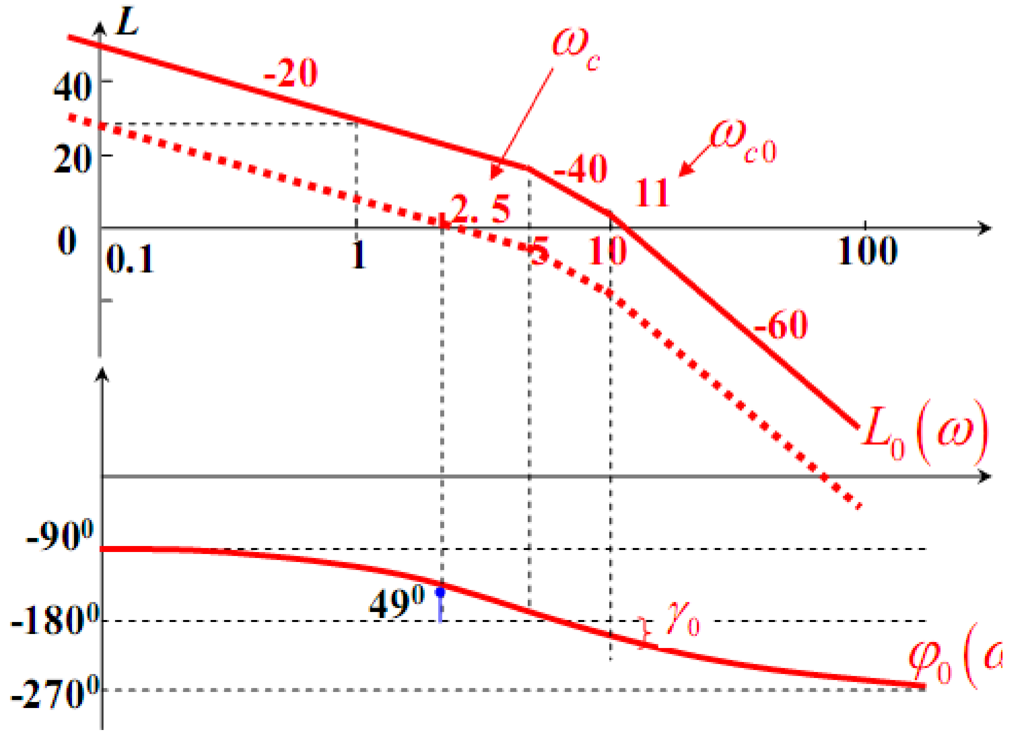


$=180^0 - 90^0 - arctg0.1\omega_c - arctg0.2\omega_c \approx 49^0$——比希望值多出$9^0$

回忆滞后网络特性



用$G_c(s)$恰好可以很好的解决这对矛盾．



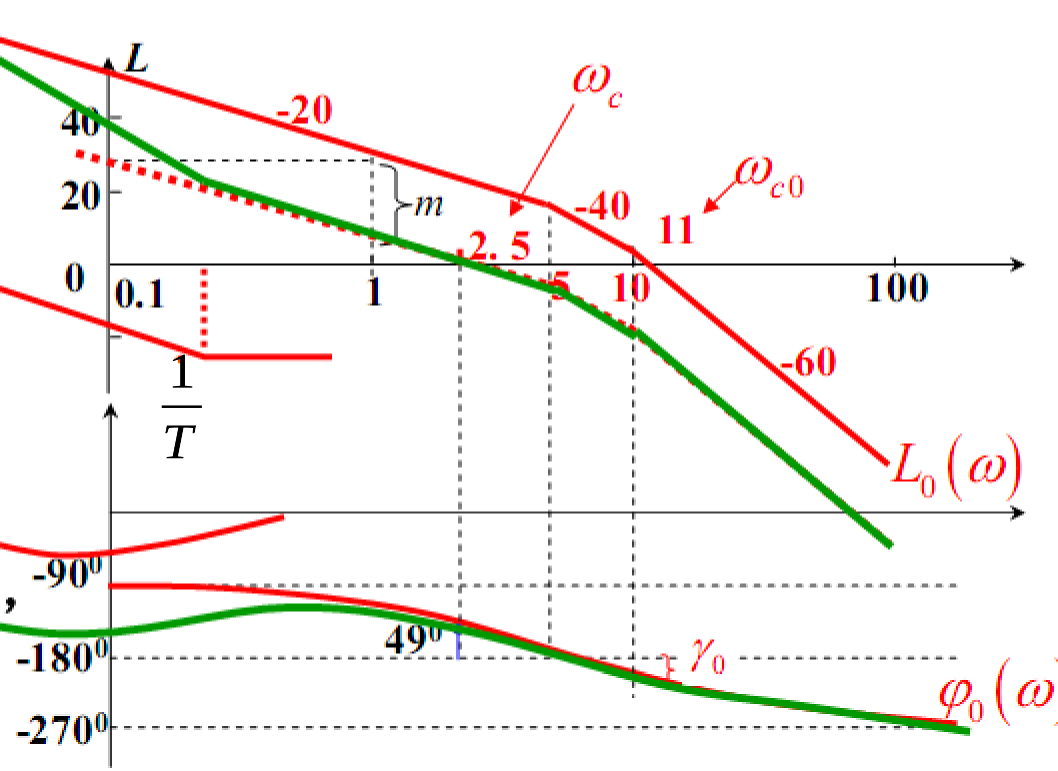
一般当 $\begin{cases} 1）固有特性通过调整增益可满足稳态要求 \\ 2）\omega_c < \omega_{c0} \\ 3）\gamma > \gamma_0 且 180^0 + \varphi_0(\omega_c) 比 \gamma 大 5^0 以上 \end{cases}$ 满足时，

可采用该种滞后校正，即取 $G_c(s) = \dfrac{Ts+1}{\beta Ts+1}(\beta > 1)$

2） 计算参数 β, T，初选$G_c(s)$

参数 β: $20\lg\beta = m$（下移量）

这里m $\begin{cases}\text{可由图读取}\\ \text{也可由图计算}\end{cases}$



参数T： 取 $\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10}\right)\omega_c$

视 $180^0 + \varphi_0(\omega_c)$ 比γ 大的多少而定，

大的多时 $\frac{1}{T}$ 可离 ω_c 近些。

本例中，$\omega_c = 2.5$

由 $m = 20\lg\beta \ = 20\lg\frac{K_v}{\omega_c}$ 得 $\beta = \frac{K_v}{\omega_c} = \frac{25}{2.5} = 10$

考虑到$180^0 + \varphi_0(2.5) = 49^0$， 比希望值多出$9^0$

可选 $\frac{1}{T} = \frac{1}{10}\omega_c \Rightarrow T = \frac{10}{2.5} = 4, \ \beta T = 40$ $\Rightarrow G_c(s) = \frac{4s+1}{40s+1}$

3） 检验： 根据校正后的Bode图，计算各项指标（大家自行校验）

从上面二例看，它们都可以达到使 $\gamma\uparrow$的目的。

但是它们有如下不同之处:

1. 超前校正利用的是超前网络的相角超前特性，所以在设计时取 $\omega_m = \omega_c$

滞后校正则是利用滞后网络的高频衰减特性，使得$L_0(\omega)$ 下移。

而滞后网络本身的相角滞后特性则是不利的。所以，在设计时取 $\omega_m << \omega_c$

通常取：$\dfrac{1}{T} = \left(\dfrac{1}{5} \sim \dfrac{1}{10}\right)\omega_c$

2. 当用无源网络实现时，为满足稳态要求，超前校正往往要求一定的附加增益，而滞后校正则不需要。

3. 对于同一系统，采用超前校正的带宽比采用滞后校正的带宽要大，因此，快速性好，但易受高频干扰的影响。

小结：

- 串联滞后校正的作用主要在于提高系统的开环放大系数，从而改善控制系统的稳态性能，而对系统原有的动态性能应尽可能不显著的影响。
- 串联滞后校正，本质上是一种低通滤波器。其对低频信号具有较高的放大能力，对较高频信号具有显著的衰减特性。相位滞后特性并不能用来提高系统的相位裕度，以改善系统的稳定性。
- 串联滞后校正在低频范围内近似比例加积分控制规律，即对输入信号有积分效应，会存在稳定性降低的趋向。为防止产生这种不利影响，串联滞后校正参数T应取得足够大（应大于原系统的全部时间常数中最大者），将滞后校正在剪切频率处造成的相角滞后控制在几度内（-5°~-10°）。
- 串联滞后校正将使系统的带宽变窄，从而降低系统的快速性。兼顾。

	超前校正(近似PD)	滞后校正(近似PI)
表达式	$G_j(s)=\dfrac{Ts+1}{aTs+1},\quad 0<a<1$	$G_j(s)=\dfrac{Ts+1}{\beta Ts+1},\quad \beta>1$
作用频段	中频段	低频段
校正原理	控制器的相角超前作用	控制器的幅值衰减作用
校正效果	加快响应，减小超调，增大频宽，提高相对稳定性；抗干扰能力减弱	低通滤波，提高稳态精度；快速性降低，频带变窄
开环增益的作用	提高**K**会降低稳定性，不能提高稳态精度	允许适当提高**K**，以改善稳态精度
追加相角的作用	补偿原系统因为ω_c增大引起的相角减小。当此相角减小得很多时，常采用相消法	补偿滞后环节带来的相角减小，常取$1/T=(0.1\sim0.2)\ \omega_c$,以控制相角减小值在$(5^0\sim10^0)$
应用范围	快速系统；系统相角在 ω_c附近下降平缓时	高精度系统；系统相角在 ω_c附近下降很快时

7.3.3 滞后—超前校正

超前网络串入系统，可增加频宽提高快速性，但损失增益，不能提高稳态精度；滞后校正则可提高平稳性及稳态精度，而降低了快速性。若同时采用滞后和超前校正，将可全面提高系统的控制性能。

$$G_j(s)=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

超前网络

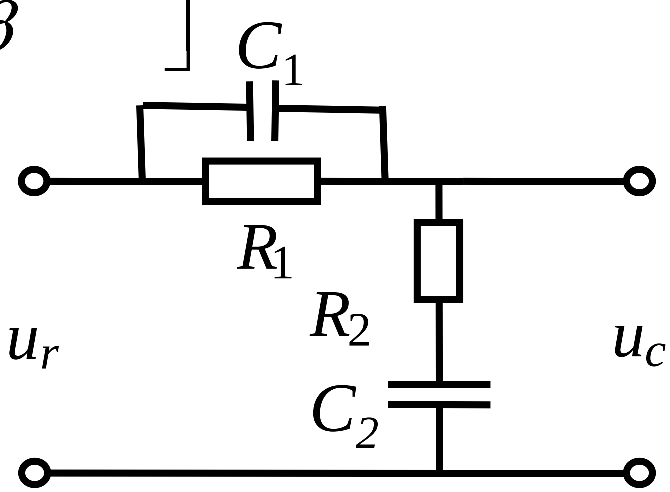
滞后网络

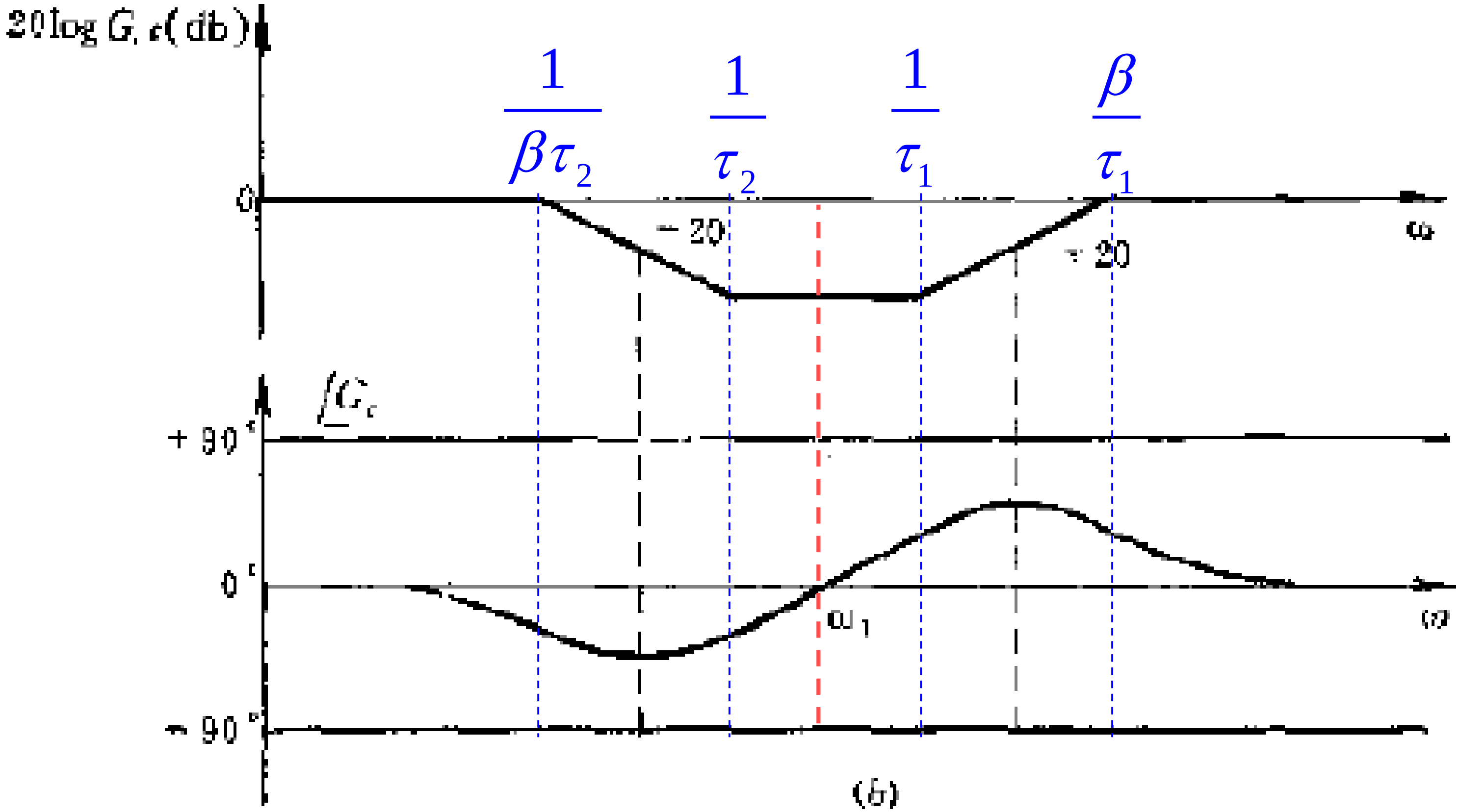
$$G_j(s)=\frac{\tau_1 s+1}{T_1 s+1}\cdot\frac{\tau_2 s+1}{T_2 s+1}=\left[\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\tau_1 s+1}{\frac{\tau_1}{\beta}s+1}\right]\left[\beta\cdot\frac{\tau_2 s+1}{\beta\tau_2 s+1}\right]$$

其中：

$$R_1C_1=\tau_1,R_2C_2=\tau_2,$$

$$T_1=\frac{\tau_1}{\beta},T_2=\beta\tau_2,\beta>1$$





$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

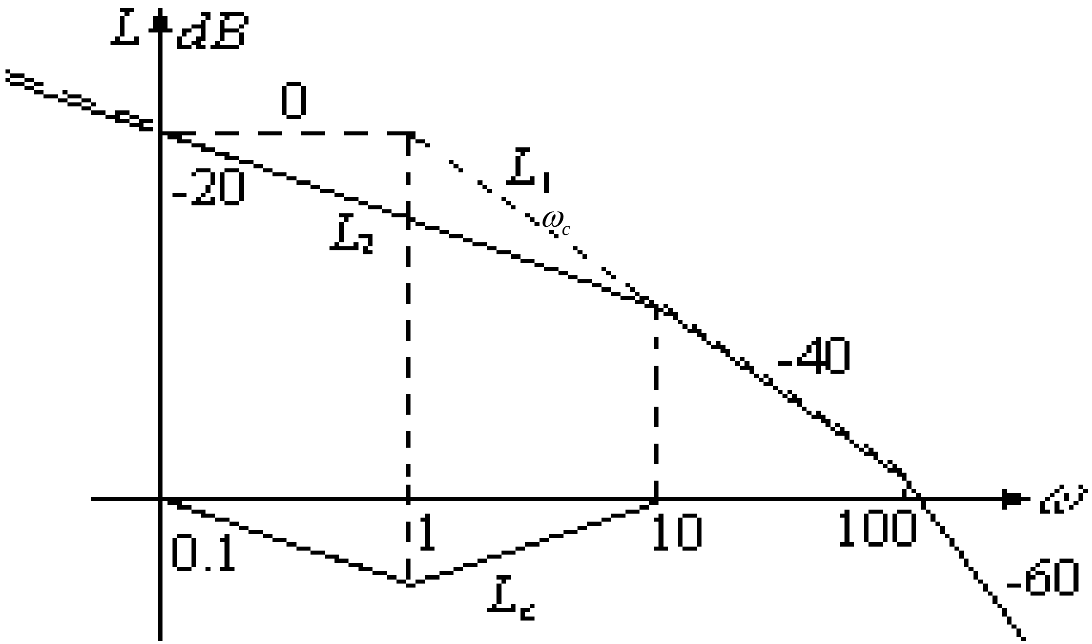
自习

4. 某系统的开环对数幅频特性曲线如图所示，其中虚线表示校正前的，实线表示校正后的，求解：

1) 确定所用的是何种串联校正，并写出校正装置的传递函数$G_c(s)$；

2) 确定校正后系统稳定时的开环增益；

3) 当开环增益$k=1$时，求校正后系统的相位裕度γ，幅值裕度K_g。



解： **(1)** 由系统校正前、后对数幅频特性曲线可得校正装置的对数幅频特性曲线，如图所示。从图中可看出所用的是串联滞后—超前校正。从而可得

$$G_c(s)=\frac{(s+1)^2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

或者，由系统对数幅频特性曲线可知，校正前系统开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{k(10s+1)}{s(s+1)^2(0.01s+1)}$$

校正后，系统开环传递函数为

$$G\ (s)=\frac{k}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

由$\boldsymbol{G\,(s)=G_c\,(s)G_0(s)}$，可得

$$G_c(s)=\frac{(s+1)^2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

为一个滞后—超前校正网络。

(2) 由校正后系统开环传递函数

$$G\ (s)=\frac{k}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

可得其闭环特征方程

列出劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1000 \\
s^2 & 110 & 1000k \\
s^1 & \dfrac{10000-1000k}{110} & \\
s^0 & 1000k &
\end{array}$$

系统要稳定，劳斯表第一列全为正，因而

$$\mathbf{110000-1000}\boldsymbol{k}\mathbf{>0}$$

$$\mathbf{1000}\boldsymbol{k}\mathbf{>0}$$

可得　**0 < *k* < 110**

(3) 当k =1时，

$$G(s)=\frac{1}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

其对数幅频特性

$$L(\omega)=\begin{cases}20\lg\dfrac{1}{\omega} & \omega<10\\ 20\lg\dfrac{10}{\omega^2} & 10\le\omega<100\\ 20\lg\dfrac{1000}{\omega^3} & \omega\ge100\end{cases}$$

从中解得 $\omega_c = 1$

由 $\varphi(\omega) = -90° - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan(0.01\omega_c)$

可得 $\varphi(\omega_c) = -96.28°$ $\gamma=180°+\varphi(\omega_c) = 83.72°$

又因为 要使 $\varphi(\omega_{-\pi}) = -180°$

可得 $\omega_{-\pi}=31.6$

故 $$K_g=\frac{1}{|G_2(j\omega_{-\pi})|}=109.8$$

习题7—10

7.3.4 PID调节器

在机电控制系统中，为了改进反馈控制系统的性能，最简单最通用的校正装置是比例一积分一微分校正装置，简称为PID控制器。P代表比例，I代表积分，D代表微分。

1. 比例控制器（P调节）

控制器的输出信号u与偏差ε成比例。其方程如下：

$$u = K_P \varepsilon$$

式中，K_P称为比例增益。

其传递函数表示为

$$G_j(s) = K_p$$

通常通过增加K_P，以减小偏差。但过大的K_P会影响系统的稳定性，使系统产生激烈的震荡和不稳定。所以，设计时必须合理优化K_P，在满足精度的要求下选择适当的K_P值。

同时，P调节还可以降低一阶系统的惯性。

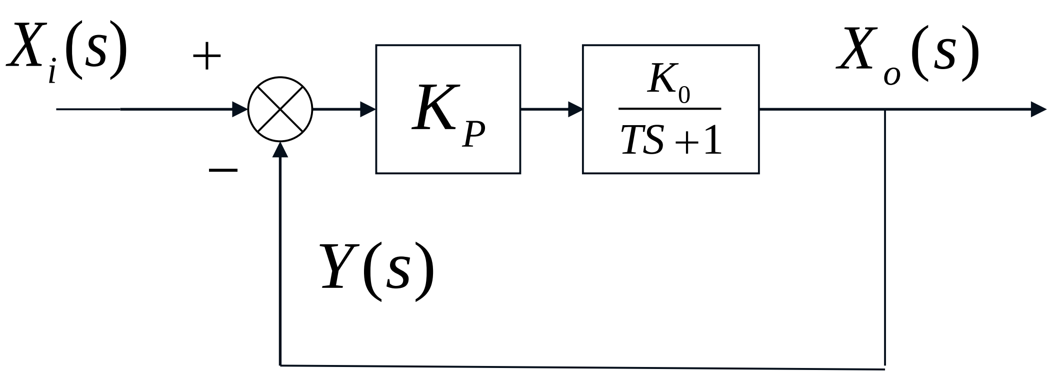
如下图所示的一阶系统，增加P调节后，其稳态误差变为：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\frac{1}{1+K_PK_0}$$

其闭环传递函数为：

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{K_PK_0\big/(1+K_PK_0)}{\dfrac{T}{1+K_PK_0}s+1}$$

表征系统惯性大小的时间常数减小了，与K_P近似成反比。



2. 积分控制器（I调节）

偏差ε经过积分控制器的积分作用得到控制器的输出信号u。其方程如下：

$$u = K_I \int_0^t \varepsilon dt$$

式中，K_I称为比例增益。

其传递函数表示为 $$G_j(s) = \frac{K_I}{s}$$

积分控制器的显著特点是无差调节，即系统平衡后，阶跃信号稳态设定值和被调量无差，偏差ε =0。

3. 微分控制器（D调节）

微分控制器的输出信号u与偏差ε的变化速率$\frac{d\varepsilon}{dt}$成正比。其方程如下：

$$u = K_D \frac{d\varepsilon}{dt}$$

式中，K_D称为比例增益。

其传递函数表示为

$$G_j(s) = K_D s$$

微分控制器的特点是对被调量的变化趋势进行调节，及时避免出现大的偏差。

4. 比例—积分—微分控制器（PID调节）

（1）比例积分微分控制器（PID调节）

其作用相当于滞后—超前校正。

PID调节器的方程为

$$u = K_P \varepsilon + K_I \int_0^t \varepsilon dt + K_D \frac{d\varepsilon}{dt}$$

其传递函数表示为

$$G_j = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K\left(\tau_1 s + 1\right)\left(\tau_2 s + 1\right)}{s}$$

PID调节的组合作用：

PID调节器的控制品质对环境变化和被控对象参数的变化不太敏感，其鲁棒性最强。

（2）比例积分控制器（PI调节）

其作用相当于滞后校正。

其传递函数表示为

$$G_j(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

PI控制器综合了P,I两种控制器的优点：

利用P调节使系统稳定，利用I调节消除残差。

（**3**）比例微分控制器（**PD**调节）

其作用相当于超前校正。

其传递函数表示为 $$G_j(s) = K_D s + K_P$$

又可改写为 $$G_j(s) = K_P\left(\frac{K_D}{K_P}s + 1\right) = K_P(Ts + 1)$$

利用**P**调节使系统稳定性，利用**D**调节提高响应快速性。

7.7　确定PID参数的其他方法

PID校正传递函数中有K_P、K_I、K_D三个系数待定

$$G_j(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s=\frac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}$$

7.7.1 任意极点配置法（适用一阶、二阶原系统）

设系统固有开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{n_0(s)}{d_0(s)}$

系统的特征方程为 $1+G_j(s)G_0(s)=0$

或 $$sd_0(s)+\left(K_D s^2+K_P s+K_I\right)n_0(s)=0$$

通过对三个系数的不同赋值，可改变闭环系统的全部或部分极点的位置，从而改变系统的动态性能。

(1) 设原系统为一阶系统，其开环固有传递函数和**PI**校正环节传递函数分别为

$$G_0(s)=\frac{1}{s+a} \quad \text{和} \quad G_j(s)=\frac{K_P s+K_I}{s}$$

那么系统闭环传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{K_P s+K_I}{s^2+(K_P+a)s+K_I}$$

为了使该系统校正后的阻尼比为ζ，无阻尼自振角频率为ω_n，

选择 $K_I=\omega_n^2$，$K_P=(2\zeta\omega_n-a)$

(2) 设原系统为二阶系统，必须采用完整的PID校正才能实现任意极点配置。设二阶系统开环固有传递函数和校正环节传递函数分别为

$$G_0(s)=\frac{1}{s^2+a_1s+a_0} \quad 和 \quad G_j(s)=\frac{K_Ds^2+K_Ps+K_I}{s}$$

那么系统闭环传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{K_Ds^2+K_Ps+K_I}{s^3+(K_D+a_1)s^2+(K_P+a_0)s+K_I}$$

若要求校正后的闭环为极点$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$，$s_3=-\beta$

$$(s+\beta)(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)=s^3+(2\xi\omega_n+\beta)s^2+(2\xi\omega_n\beta+\omega_n^2)s+\beta\omega_n^2$$

令对应项系数相等，有 $K_D+a_1=2\xi\omega_n+\beta$

$$K_P+a_0=2\xi\omega_n\beta+\omega_n^2$$

$$K_I=\beta\omega_n^2$$

习题7-20 单位负反馈系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{100}{s(10s+1)}$ ，试设计PID控制器，使系统的闭环极点为$s_{1,2}$=-2±j1和s_3=-10。

解：设*PID*控制器的传递函数为 $G_j(s)=\dfrac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}$

则校正后系统的闭环传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{\dfrac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}\dfrac{100}{s(10s+1)}}{1+\dfrac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}\dfrac{100}{s(10s+1)}}=\frac{10(K_D s^2+K_P s+K_I)}{s^3+\dfrac{(1+100K_D)}{10}s^2+10K_P s+10K_I}$$

由下式对应系数相等

$$(s+10)(s+2-j)(s+2+j)=s^3+14s^2+45s+50$$

$$=s^3+\frac{(1+100K_D)}{10}s^2+10K_P s+10K_I$$

得 K_D=1.39，K_P=4.5，K_I=5

所以 $G_j(s)=\dfrac{1.39s^2+4.5s+5}{s}$

7.7.2 高阶系统累试法

对于固有开环传递函数是高于二阶的高阶系统，**PID**校正不可能做到全部闭环极点的任意配置。但可以控制部分极点，以达到系统预期的性能指标。

要求校正后开环系统的剪切频率为ω_c，相位欲量为γ，则

$$G_j(j\omega_c)G_0(j\omega_c)=1\angle(-180^\circ+\gamma)$$

所以

$$|G_j(j\omega_c)|=\frac{1}{|G_0(j\omega_c)|}$$

$$\theta=\angle G_j(j\omega_c)=-180^\circ+\gamma-\angle G_0(j\omega_c)$$

则**PID**控制器在剪切频率处的频率特性可表示为

$$K_P+j\left(K_D\omega_c-\frac{K_I}{\omega_c}\right)=|G_j(j\omega_c)|(\cos\theta+j\sin\theta)$$

对应上式的虚实部，有 $K_P=\dfrac{\cos\theta}{|G_0(j\omega_c)|}$， $K_D\omega_c-\dfrac{K_I}{\omega_c}=\dfrac{\sin\theta}{|G_0(j\omega_c)|}$

例7-7 设单位负反馈系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}$ ，试设计PID控制器，实现剪切频率ω_c=1.7rad/s, 相角欲量$\gamma=50^0$，单位加速度输入信号的稳态误差e_{ss}=2.5。

解：由题意得 $G_0(j\omega_c)=0.454\angle-190^0,\gamma_0=-10^0$，所以$PID$的补偿相角为 $\theta=\gamma-\gamma_0=60^0$

设PID控制器为 $G_j(s)=K_P+\dfrac{K_I}{s}+K_Ds$, 则有$K_P+j\left(K_D\omega_c-\dfrac{K_I}{\omega_c}\right)=\left|G_j(j\omega_c)\right|(\cos\theta+j\sin\theta)$

$\because\ G_j(j\omega_c)G_0(j\omega_c)=1\angle(-180^\circ+\gamma)$， $\therefore\ K_P=\left|G_j(j\omega_c)\right|\cos\theta=\dfrac{\cos\theta}{\left|G_0(j\omega_c)\right|}=\dfrac{\cos 60^0}{0.454}=1.1$

$$\because e_{ss}=\lim_{s\to0}s\frac{1}{1+\left(K_P+\dfrac{K_I}{s}+K_Ds\right)\dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}}X_i(s)$$

$$=\lim_{s\to0}s\frac{s^2(s+1)(s+2)}{s^4+3s^3+(4K_D+2)s^2+4K_Ps+4K_I}\frac{1}{s^3}=2.5$$

求得$K_I=0.2$，$K_D=\dfrac{1}{\omega_c}\left(\sin\theta+\dfrac{K_I}{\omega_c}\right)=\dfrac{1}{1.7}\left(\sin 60^0+\dfrac{0.2}{1.7}\right)=1.2$

$$\therefore\ G_j(s)=1.1+\frac{0.2}{s}+1.2s$$

7.4 反 馈 校 正

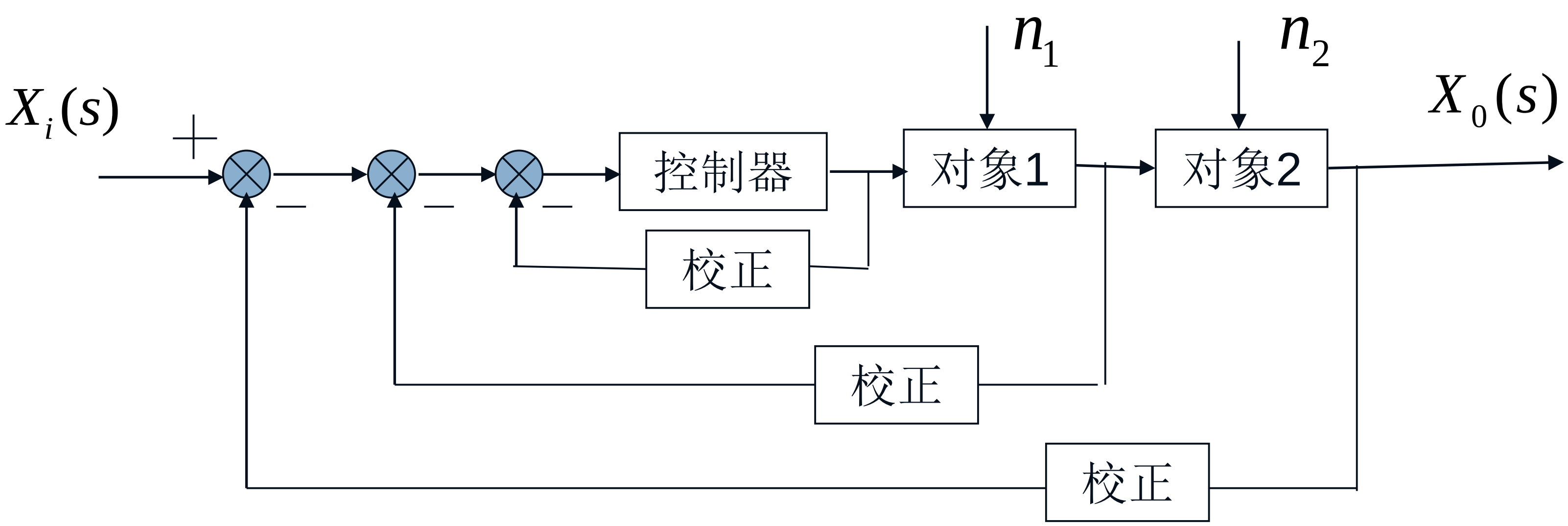


图7-20　反馈校正的联结形式

常见的应用反馈校正的被控量有：速度、加速度及复杂系统的中间变量。

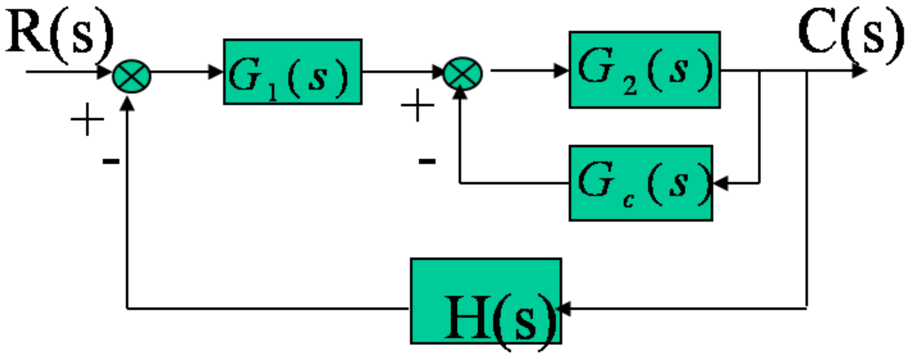
反馈的功能：

■比例负反馈可以减弱为其包围环节的惯性，从而将扩展该环节的带宽。

■负反馈可以减弱参数变化对控制性能的影响。

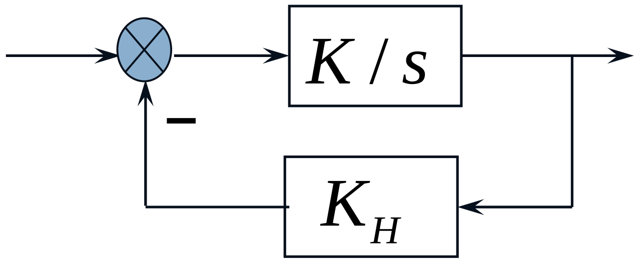
■负反馈可以消除系统不可变部分中不希望有的特性。

从控制的观点来看，反馈校正比串联校正有其突出的特点，它能有效地改变被包围环节的动态结构和参数；另外，在一定的条件下，反馈校正甚至能完全取代被包围环节，从而可以大大减弱这部分环节由于特性参数变化及各种干扰，给系统带来的不利影响。



7.4.1 利用反馈校正改变局部结构和参数

1、比例反馈包围积分环节



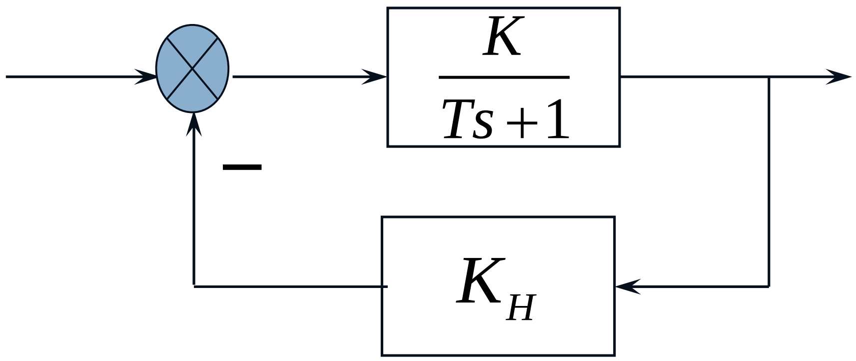
$$G_1(s)=\frac{K}{s},H_c(s)=K_H,$$

$$G(s)=\frac{\frac{1}{K_H}}{1+\frac{s}{KK_H}}$$

由积分环节变为了惯性环节

时间常数 $\rightarrow \dfrac{1}{K\cdot K_H}$

2、比例反馈包围惯性环节



$$G_1(s)=\frac{K}{1+Ts},H_c(s)=K_H,$$

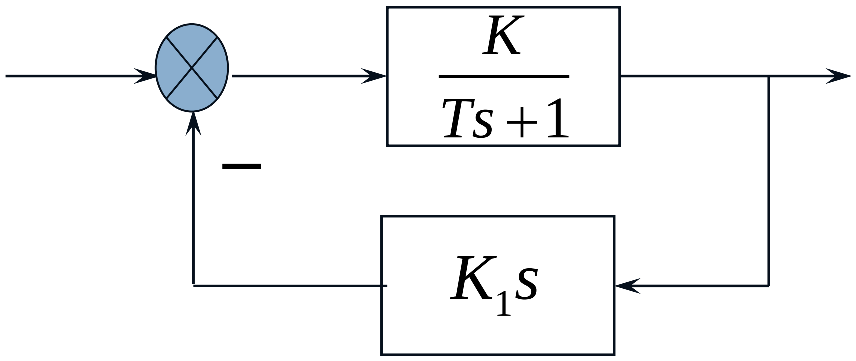
$$G(s)=\frac{\dfrac{K}{1+KK_H}}{1+\dfrac{T}{1+KK_H}s}$$

时间常数变小，惯性减小，响应变快

反馈系数K_H越大，时间常数越小

静态放大倍数减小了同样的倍数

3、微分反馈包围惯性环节



$$G_1(s)=\frac{K}{1+Ts},H_c(s)=K_1 s,$$

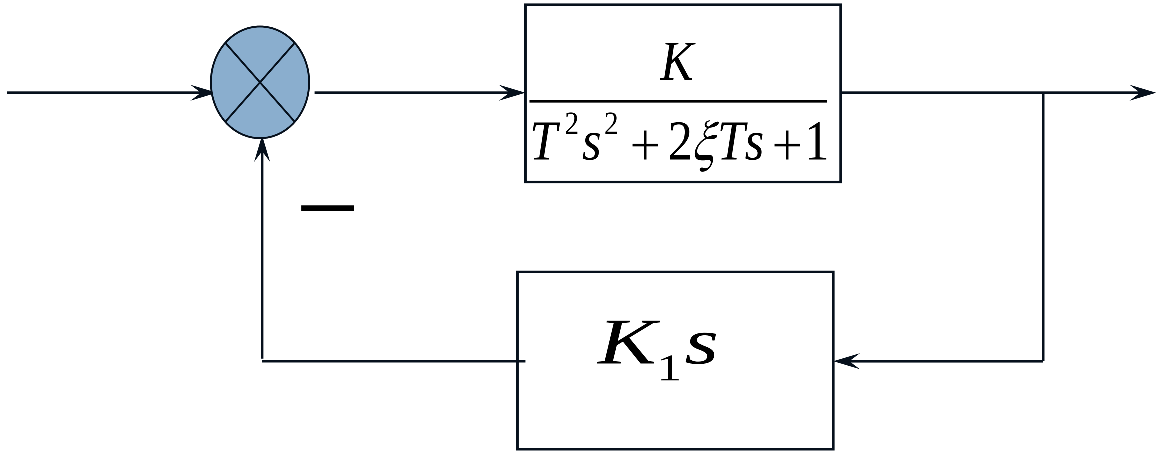
$$G(s)=\frac{K}{1+(T+KK_1)s}$$

时间常数变大，即响应变慢

反馈系数K_1越大，时间常数越大

主要用于拉开各环节的时间常数，改善系统的动态平稳性

4、微分反馈包围振荡环节



$$G_1(s)=\frac{K}{1+2\xi Ts+T^2s^2},H_c(s)=K_1 s,$$

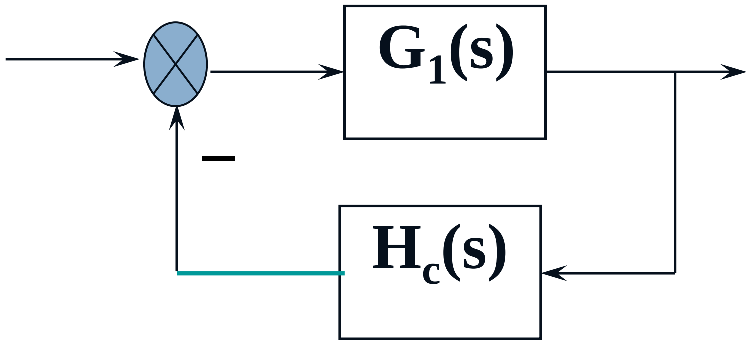
$$G(s)=\frac{K}{1+(2\xi T+KK_1)s+T^2s^2}$$

结果仍为振荡环节

但阻尼比却显著加大

提高系统相对稳定性

改善阻尼过小的影响



$$\boldsymbol{G(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)H_c(s)}}$$

若$\left|G_1(j\omega)H_c(j\omega)\right|\geq\geq 1$

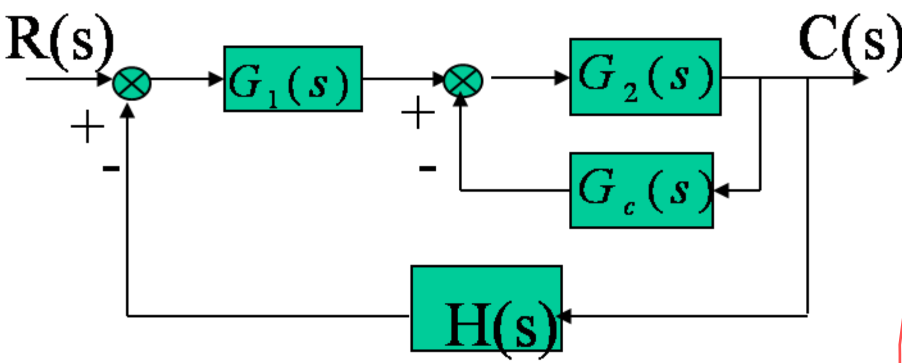
则表明整个反馈回路的传递函数为

$$G(j\omega)\approx\frac{1}{H_c(j\omega)}$$

和被包围环节G1(s)全然无关，达到了以1/ H_c(s)取代G1(s)的效果

反馈校正的这种作用，在系统设计和优化中，常被用来改造不希望有的某些环节，以及消除非线性、变参量的影响和抑止干扰。

反馈校正的一般方法：



对应串联校正，则有

$$G_j(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_c(s)G_2(s)}$$

对照7.4.2 速度反馈和加速度反馈

其闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_c(s)G_2(s)+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

特征方程为： $1+G_1(s)G_2(s)H(s)+G_c(s)G_2(s)=0$

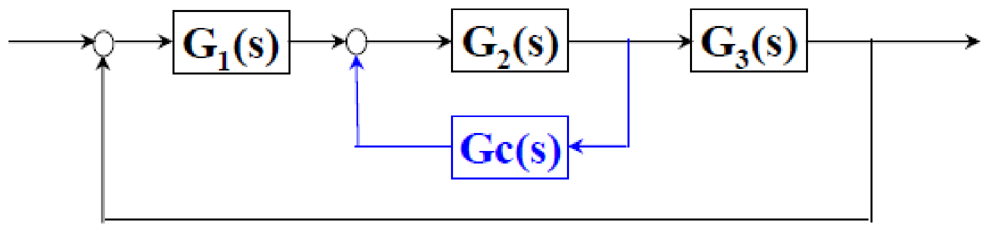
将上式变形为： $1+\dfrac{G_c(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=0$

令 $$G_0(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

则有 $$1+G_c(s)G_0(s)=0$$

因为$G_0(s)$是一个固定的传递函数，为不变部分，所以$G_c(s)$的设计就变成了与串联校正时相同的情况。

例（补充）



$$G_1=\frac{K}{0.014s+1},\quad G_2=\frac{0.0025}{s},\quad G_3=\frac{12}{(0.1s+1)(0.02s+1)}$$

设计反馈校正，使：**1**）静态速度误差系数 $K_v\geq 150$

2）单位阶跃输入下的超调量 $\sigma\%\leq 40\%$

3）单位阶跃输入下的调节时间 $t_s\leq 1s$

解： 由图可知，$G_0(s)=G_1G_2G_3=\dfrac{0.03K}{s(0.014s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$

欲使 $K_v\geq 150$, 应有 $K\geq 5000$

取 $K=5000$ ⟹ $G_0(s)=\dfrac{150}{s(0.014s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$ 满足稳态要求

$$G_0(s)=\frac{150}{s(0.014s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$$

1）绘制满足稳态要求的$L_0(\omega)$

2）绘制期望特性

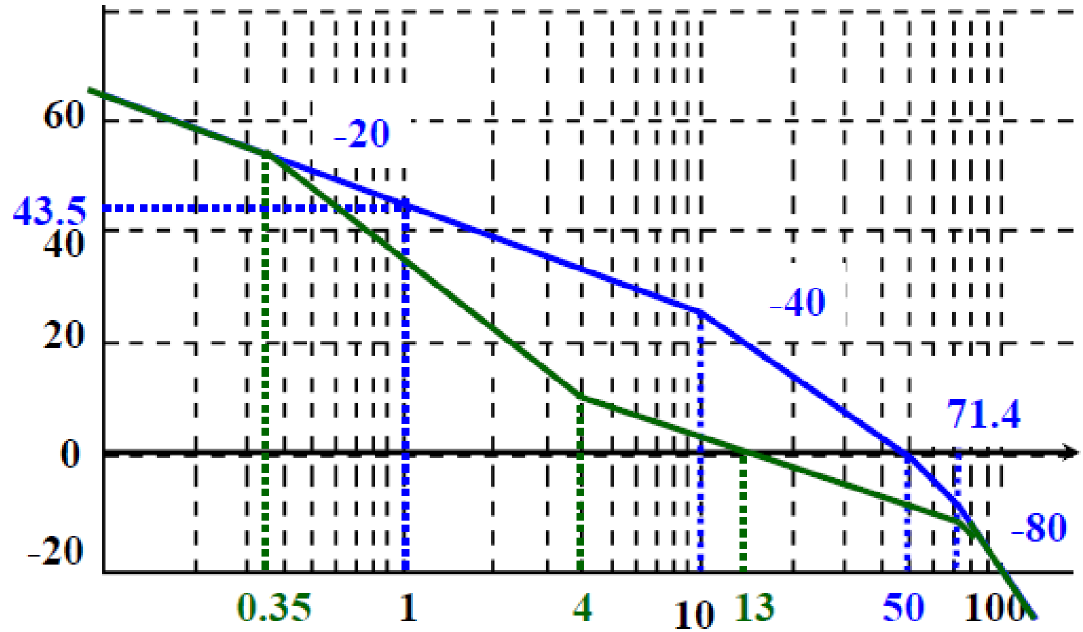
由 $\sigma\%\le 40\%$ $t_s\le 1s$

$\Rightarrow M_r=1.6$ $\omega_c=13$

$$H=\frac{M_r+1}{M_r-1}=\frac{2.6}{0.6}=4.33$$

$\omega_2\le 4.88$ $\omega_3\ge 21.13$

取 $\omega_2=4$ $\omega_3=71.4$



过 $\omega_c=13$ 作-20dB/dec直线，

然后两边分别作-40的连接段，

往前交于$\omega_1\approx 0.35$ 往后交于$\omega_4\approx 75$

希望特性的高频段和低频段与固有特性重合。

希望特性对应的传递函数为：$G(s)=\dfrac{150(0.25s+1)}{s(2.86s+1)(0.013s+1)^2(0.014s+1)}$

3）求出 $G_2(s)G_c(s)$所对应的特性

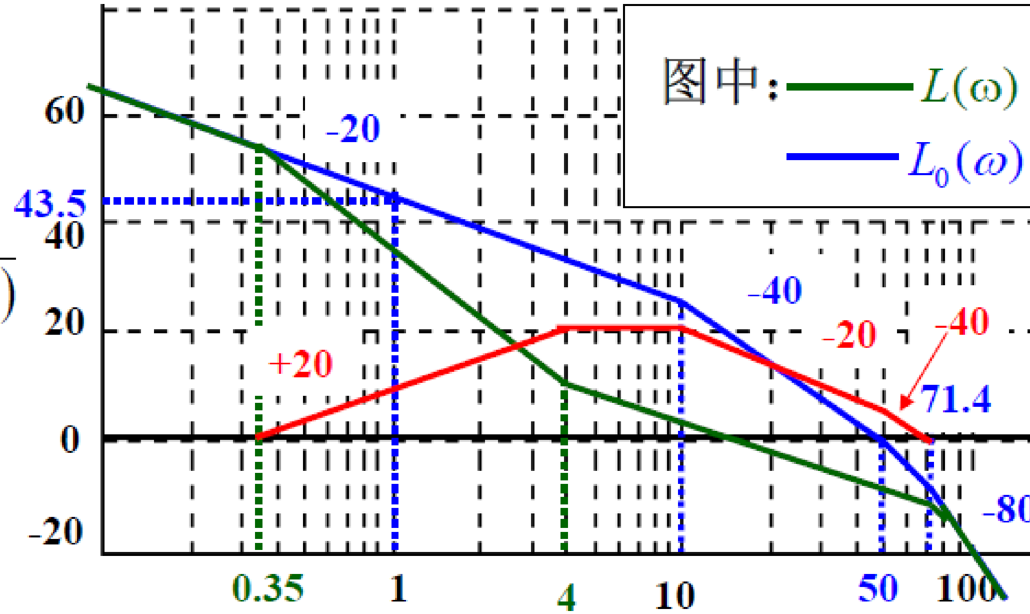
在 $L_0(\omega) > L(\omega)$的区域内，

$$G(j\omega)=\frac{G_1(j\omega)G_3(j\omega)}{G_c(j\omega)}=\frac{G_0(j\omega)}{G_2(j\omega)G_c(j\omega)}$$

$$\Rightarrow 20\lg|G_2G_c| = 20\lg|G_0| - 20\lg|G|$$

绘制$20\lg|G_2G_c|$

为使G_2G_c简单，



$$取\ G_2(s)G_c(s)=\frac{2.86s}{(0.25s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$$

选取原则：（1）要使近似条件满足；（2）要使$G_c(s)$尽可能简单。

4）检验小闭环的稳定性。

$$\because \quad \gamma(\omega_4)=180^0+90^0-arctg0.25\omega_4-arctg0.1\omega_4--arctg0.02\omega_4 \approx 44^0$$

故小闭环的稳定。

5）求$G_c(s)$ $\quad G_c(s)=\frac{G_2G_c}{G_2}=\frac{0.238s}{(0.25s+1)}$

6）校验：由于近似条件可以很好的满足，故可直接按希望特性来验算。

7-5 用频率法对控制系统进行设计与校正

7.5.1 典型系统的希望对数频率特性

频率法的根本点是根据对系统提出的性能指标要求,来确定系统开环频率特性，即绘制伯德图。前面介绍的串联校正实际上就是改变伯德图的形状，使之达到足够的稳定储备和快速性。

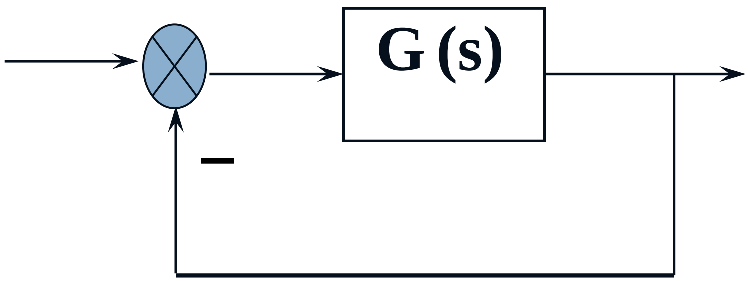
稳定性要求：开环对数幅频特性的中频段应是－20dB/dec的斜率；

准确性要求：开环对数幅频特性的低频段应尽量高；

抗干扰要求：开环对数幅频特性的高频段应尽量锐截止。

工程上常采用的典型伯德图有两种：二阶最优模型和高阶最优模型。

1、二阶最优模型



开环传递函数

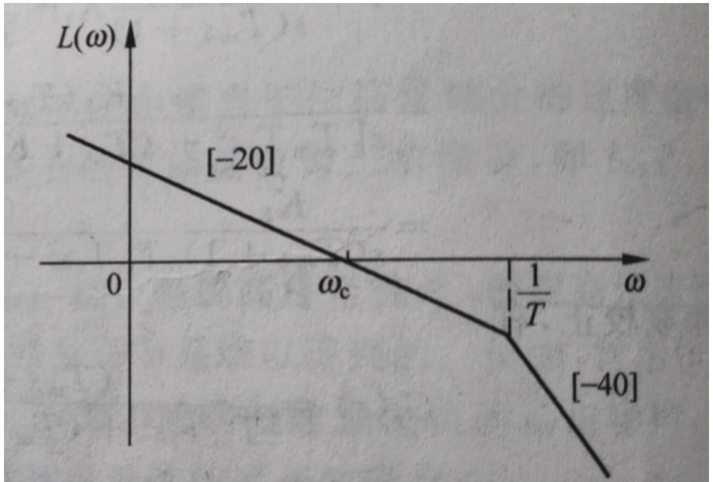
$$G(s)=\frac{K_v}{s(Ts+1)}$$

其闭环传递函数

$$\varphi(s)=\frac{K_v/T}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K_v}{T}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

其中 $\omega_n=\sqrt{\frac{K_v}{T}}\rightarrow$ 无阻尼自振角频率

$$\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{K_vT}}\rightarrow \text{阻尼比}$$



(b)

最佳阻尼比是0.707，此时1/T=2ω_c，称之为二阶开环最佳模型。

工程应用时推荐选取ζ=0.5~1，对应的相位裕度γ=50^0~76^0。
二阶系统的幅值裕度Kg→∞

习题7-17： 单位负反馈系统的开环传函$G_0(s)=\dfrac{K}{s(0.5s+1)}$,欲使开环增益$K$=20s^{-},相位裕量γ≥50^0，幅值裕度20lgK_g≥10dB, 试求系统的校正装置。

解：根据二阶最优模型，设校正后的开环传函为

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}=\frac{20}{s(Ts+1)}$$

由$\gamma=180^0-90^0-arc\tan T\omega_c\geq 50^0$

其中，$\omega_c\approx K_v=K=20$

求得$T\leq 0.044$, 取$T=0.04$

$$\therefore G_j(s)=\frac{G(s)}{G_0(s)}=\frac{0.5s+1}{0.04s+1}$$ → 超前校正

已知二阶系统$K_g=\infty>10dB$

2、高阶最优模型

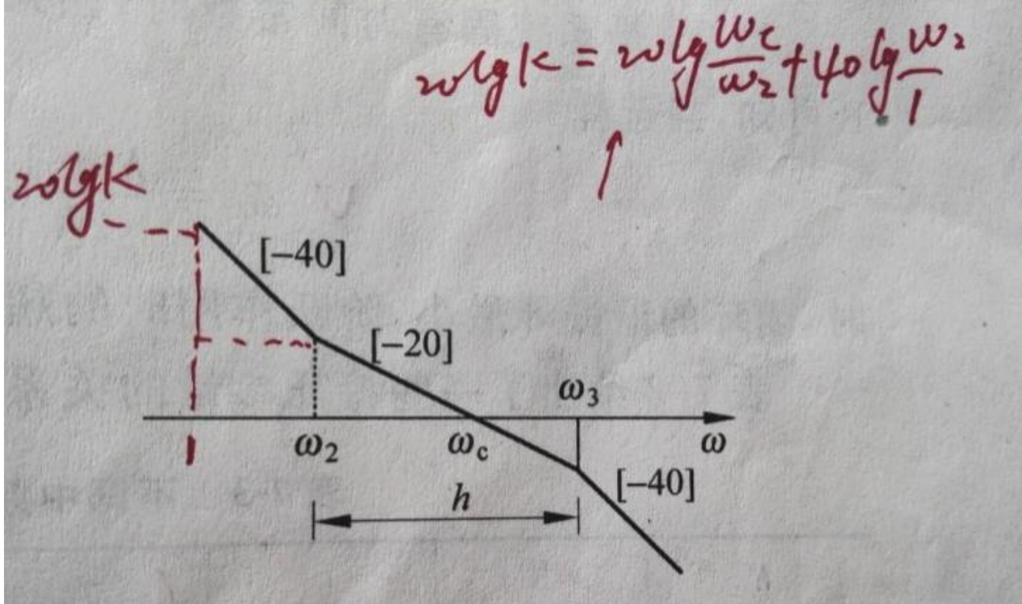


图 7-26 高阶最优模型中频段

三阶系统也叫 II 型系统:

$$G(s)=\frac{K(T_2 s+1)}{s^2(T_3 s+1)}(T_2>T_3)$$

其开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega T_2+1)}{(j\omega)^2(j\omega T_3+1)}$$

其相位裕度为

$$\gamma=\arctan(T_2\omega_c)-\arctan(T_3\omega_c)$$

这个模型既**保证了ω_c附近的斜率为－20dB/dec，又保证了低频段有高增益，即保证了稳、准。**

中频宽： $h=\dfrac{\omega_3}{\omega_2}=\dfrac{T_2}{T_3}$

一般情况下，T_3是调节对象的固有参数，通过改变T_2和K来设计h和ω_c

$$20\lg K = 20\lg \omega_2\omega_c, \qquad 得\ K=\omega_2\omega_c,\quad \omega_c=\frac{K}{\omega_2}$$

如果已知系统固有时间常数T_3，给定中频宽h，ω_c随K的增大而增大。

表**7-3**：中频宽h=5~18，一般选7~12

所以

$$\omega_c=\frac{h+1}{2h}\omega_3 \qquad 或 \qquad \omega_c=\frac{h+1}{2}\omega_2$$

闭环系统的谐振峰最小，阶跃作用时的超调最小，相对稳定性最好。

初步设计时： $M_r \approx \dfrac{1}{\sin\gamma}$

并近似二阶最优模型，取 $\omega_c=\dfrac{1}{2}\omega_3$

7.5.2 希望对数频率特性与系统性能指标的关系

系统综合时，常需要时域、频域性能指标互相转换。

中频段为高阶最优模型时，转换经验公式（**P239**）如下

1、相对稳定性经验公式

$$M_r=\frac{1}{\sin\gamma},\qquad M_r=\frac{h+1}{h-1}\text{或}h=\frac{M_r+1}{M_r-1}$$

$$M_r=0.6+2.5M_p\quad\text{或}\quad M_p=0.16+0.4\left(M_r-1\right)\qquad\left(\text{当}1.1\le M_r\le 1.8\right)$$

2、快速性经验公式

$$t_s=\frac{\pi\left[2+1.5\left(M_r-1\right)+2.5\left(M_r-1\right)^2\right]}{\omega_c}\qquad\left(\text{当}1.1\le M_r\le 1.8\right)$$

3、其他经验公式

$$\frac{\omega_3}{\omega_c}=\frac{M_r+1}{M_r}=\frac{2h}{h+1},\qquad \frac{\omega_c}{\omega_2}=\frac{M_r}{M_r\text{-}1}=\frac{h+1}{2}$$

$$\omega_r=\sqrt{\omega_2\omega_3},\qquad \omega_b=\omega_3$$

习题7-4 某单位负反馈系统的开环传递函数$G(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$，欲使闭环$M_r \le 1.5$, K应为多少？此时剪切频率和相位裕度各为多少？$M_p$和$t_s$各为多少？

解：由$M_r \approx \dfrac{1}{\sin\gamma} \le 1.5$，得$\gamma \ge 42^0$

由$\gamma = 180 - 90 - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan(0.01\omega_c)$，得$\omega_c \le 9.2 rad/s$

在低频时$K_v \approx \omega_c$，取$K = K_v = \omega_c = 9 rad/s$

$$\therefore \quad M_p = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \le 36\%$$

$$t_s = \frac{\pi[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]}{\omega_c} \ge 1.2(s)$$

习题7-8(2): 要点：先求解$\omega_{-\pi}$，要想使$20\lg K_g = 0dB$

则$K_g = \dfrac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|} = 1$，据此进一步求得$K$和$M_r$

典型变型系统1.

将Π型系统改为I型系统:

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega T_2+1)}{(j\omega)(j\omega T_1+1)(j\omega T_3+1)}$$

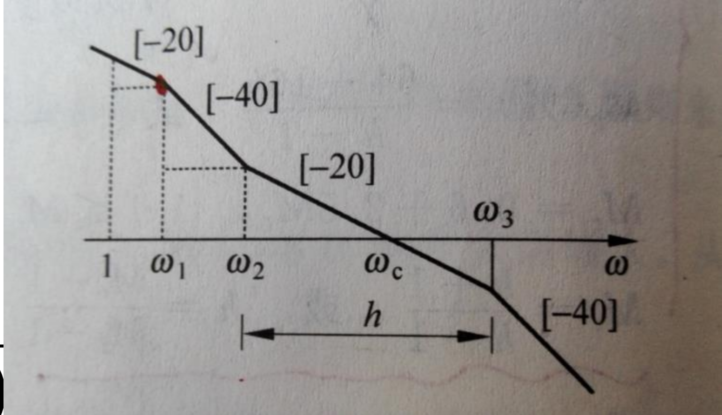


图 7-28 I 型系统对系统动态特性的影响

这里, $T_1>T_2>T_3$(即ω_1在低频段)

其幅频由2−1−2型对数幅频特性, 变化为1−2−1−2型(如图7-28)

其相位裕度为

$$\gamma=180°+\left[-90°-\arctan(\omega_c T_1)+\arctan(\omega_c T_2)-\arctan(\omega_c T_3)\right]$$

$$=\arctan\frac{1}{\omega_c T_1}+\arctan(\omega_c T_2)-\arctan(\omega_c T_3)$$

该I型系统的相位裕度比Π型的增加了,闭环系统相对稳定性更好了.

当$\omega_c\gg\omega_1$时, $\Delta\gamma=\arctan\frac{1}{\omega_c T_1}\approx\frac{1}{\omega_c T_1}=\frac{\omega_1}{\omega_c}$很小可忽略

此时$\omega_1=\omega_2\omega_c/K$ **ω_1可保证所要求的开环增益，进而保证稳态精度。**

在中频段的基础上改变低频段特性，保证稳态精度

习题7-7 某单位负反馈系统的开环传递函数$G_0(s)=\dfrac{1}{s(2.5s+1)(0.5s+1)}$，欲使速度误差系数$K_v \geq 10s^{-1}$，剪切频率$\omega_c>1rad/s$，相位裕度$\gamma>35^0$，试应用频率法确定系统校正网络的传递函数。

解：由$M_r \approx \dfrac{1}{\sin\gamma} \leq \dfrac{1}{\sin 35^0}$=1.743，得$h \approx \dfrac{M_r+1}{M_r-1} \geq 3.7$

取$h=5,\ \omega_3=\dfrac{1}{0.5}=2rad/s$，则

$$\omega_c=\frac{h+1}{2h}\omega_3=1.2rad/s,\qquad \omega_2=\frac{\omega_3}{h}=0.4rad/s$$

为了保证稳态精度，需使$\omega_1=\dfrac{\omega_c\omega_2}{K_v}<\dfrac{1.2\times 0.4}{10}=0.048rad/s$

取ω_1=0.04rad/s，则$K_v=\dfrac{\omega_c\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{1.2\times 0.4}{0.04}=12$ **$\omega_c=30\omega_1$，显然$\omega_c \gg \omega_1$**

$\therefore G(s)=\dfrac{12(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}=\dfrac{12(2.5s+1)}{s(25s+1)(0.5s+1)}$，得$G_j(s)=\dfrac{12(2.5s+1)^2}{25s+1}$

验算：$\gamma=180^0-90^0-\arctan(25\omega_c)+\arctan(2.5\omega_c)-\arctan(0.5\omega_c)=42.5^0$

习题7-6 某系统的开环传递函数 $G_0(s)=\dfrac{360(0.1s+1)}{s(0.9s+1)(0.007s+1)(0.005s+1)}$，要求近似保持上述系统的过渡过程时间和稳定裕度不变，使它的速度误差=1/1000。试设计校正环节的传递函数。

解：原有的$\omega_1=\dfrac{1}{0.9}=1.1$，$\omega_2=\dfrac{1}{0.1}=10$，$\omega_3=\dfrac{1}{0.007}=143$，$\omega_4=\dfrac{1}{0.005}=200$

求得$\omega_c=40$

为了保持过渡过程时间和稳定裕度不变，使速度误差=1/1000，

则只需改变低频段高度：这时K_v=1000，且

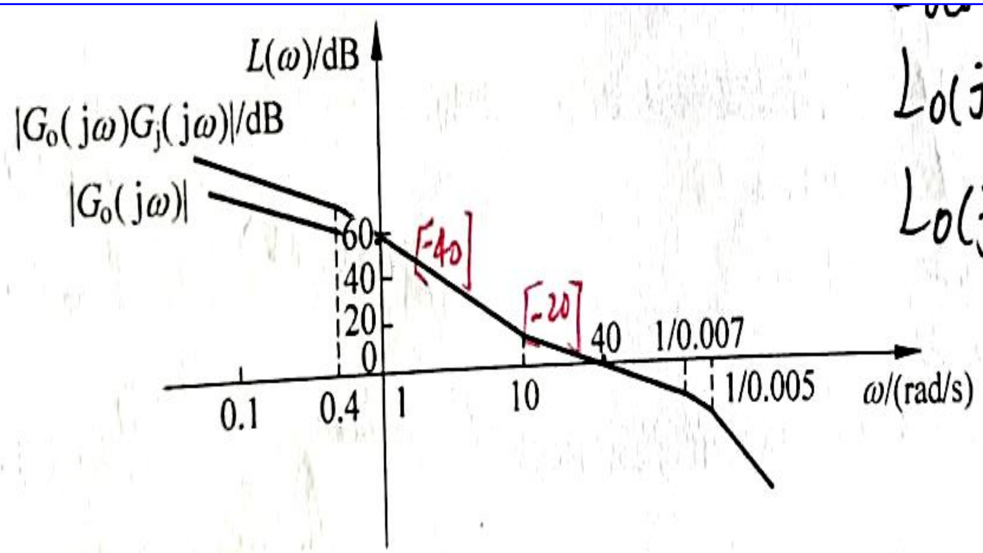
$$\omega_1^{'}=\frac{\omega_c\omega_2}{K_v}=\frac{40\times 10}{1000}=0.4$$

习题7-12：与此类似

由此引起的相位裕度变化量为

$$\Delta\gamma=-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_1^{'}}-\left(-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)\approx 0.7^0\text{可以忽略不计。}$$

所以校正网络的传递函数为 $G_j(s)=\dfrac{\frac{1000}{360}(0.9s+1)}{2.5s+1}$ → 滞后校正



$L_0(j1.1)=47.3\,dB.$

$L_0(j10)=15dB;\ L_0(j143)=-16dB$

$\omega_{c0}=40rad/s$

典型变型系统2.

含多个小时间常数环节的I型,∏型系统:

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega T_2+1)}{(j\omega)(j\omega T_1+1)(j\omega T_3+1)(j\omega T_4+1)\cdots}$$

或者

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega T_2+1)}{(j\omega)^2(j\omega T_3+1)(j\omega T_4+1)\cdots}$$

这里,$T_1>T_2>T_3>T_4>T_5>\cdots$(即$\omega_5>\omega_4>\omega_3>\omega_2>\omega_1$)

在大于ω_3的高频区,伯德图呈现$-40,-60,-80\cdots/dec$的斜率,低通滤波器

其幅频特性分别呈1-2-1-2-3-4…型，2-1-2-3-4 …型。

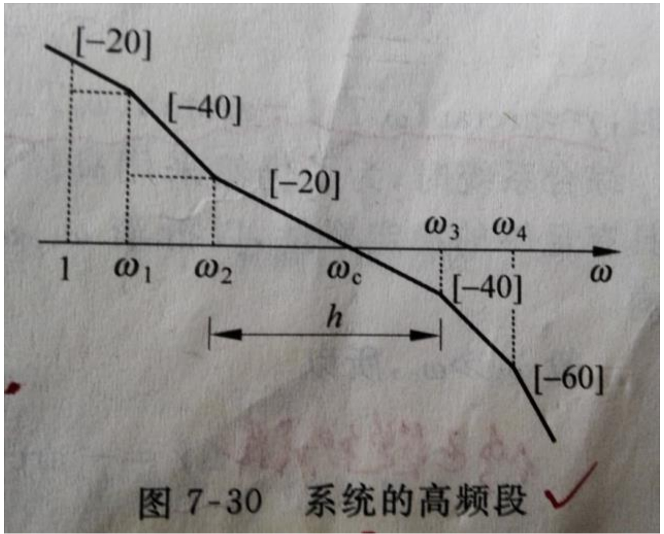
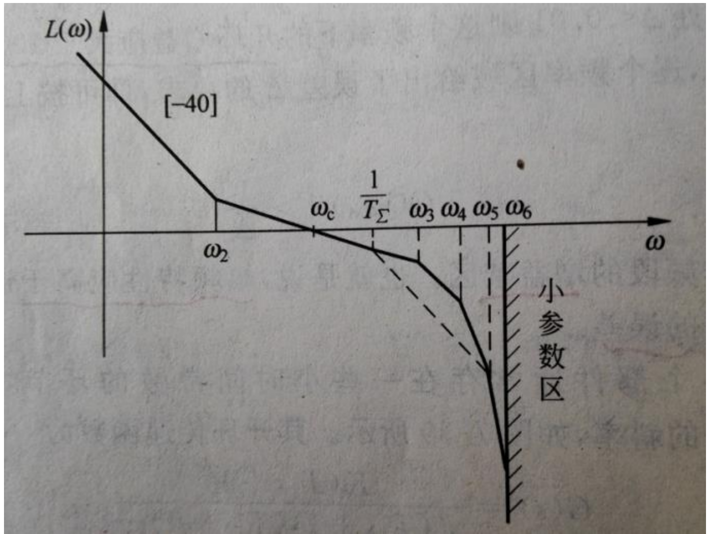


图 7-30 系统的高频段



$$\gamma = \arctan\frac{\omega_1}{\omega_c} + \left[\arctan(\omega_c T_2) - \arctan(\omega_c T_3)\right] - \arctan(\omega_c T_4) - \cdots$$

$$\approx \left[\arctan(\omega_c T_2) - \arctan(\omega_c T_3)\right] - \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_4}\right) - \cdots \quad (须满足\omega_c \gg \omega_1)$$

（1）当满足$\omega_c < \omega_3$，$\omega_c \ll \omega_4$时，记$T_\Sigma = T_3 + T_4 + T_5 + \cdots$

这时 $\arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_4}\right) \approx 0^0$，$\Rightarrow \gamma \approx \arctan(\omega_c T_2) - \arctan(\omega_c T_\Sigma)$

例如ω_4=10ω_c时，$\Delta\gamma=\tan^{-1}0.1=5.7^0$

ω_4=20ω_c时，$\Delta\gamma=\tan^{-1}0.05=2.86^0$

（2）当不满足$\omega_c \ll \omega_4$时，则$\Delta\gamma = \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_4}\right) + \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_5}\right) + \cdots$不能忽略

因此为了还使用高阶最优模型的各项公式，需修正设计，

这时加长ω_3到ω_3'，以保证系统具有足够的稳定裕度。

补偿高频段对中频段的影响

$$T_3' = T_3 - (T_4 + T_5 + T_6 + \cdots + T_n) = T_3 - \sum_{i=4}^{n} T_i \quad , \qquad \omega_3' = \frac{1}{T_3'}$$

例7-5 **某角度随动系统性能指标要求为：在输入信号为60°/s时速度误差小于7.2’，超调量小于25%，过渡过程时间小于0.2s。已知该系统在高频处有一个小时间常数0.005s，试设计满足上述性能指标的系统开环对数幅频特性。**

解：采用I型系统跟踪速度信号： $K_v > \dfrac{60\times 60}{7.2} = 500$，取$K_v$=550， $20\lg K_v \approx 55dB$

已知 $M_p < 25\%, \therefore M_r = 0.6 + 2.5M_p < 1.225$，取$M_r = 1.2$

由于 $t_s < 0.2s$,即$t_s = \dfrac{\pi\left[2+1.5\left(M_r-1\right)+2.5\left(M_r-1\right)^2\right]}{\omega_c} < 0.2$

可求得$\omega_c > 37.7rad/s$，取ω_c=$40rad/s$

此时 $h = \dfrac{M_r+1}{M_r-1} = 11$， $\omega_3 = \omega_c \dfrac{M_r+1}{M_r} = 73.3rad/s$

$\omega_2 = \omega_3 / h = 6.67rad/s$， $\omega_1 = \dfrac{\omega_2\omega_c}{K_v} = 0.45rad/s$

要求相位裕度 $\gamma = \arctan\dfrac{\omega_c}{\omega_2} - \arctan\dfrac{\omega_c}{\omega_3} \approx 52^0$

ω_1带来的相位变化：$\Delta\gamma_1 = \arctan\dfrac{\omega_1}{\omega_c} = 0.7^0$ 可忽略

小时间常数0. 005s带来的相位变化：$\Delta\gamma_4 = -\arctan\dfrac{\omega_c}{\omega_4} = -11.3^0$

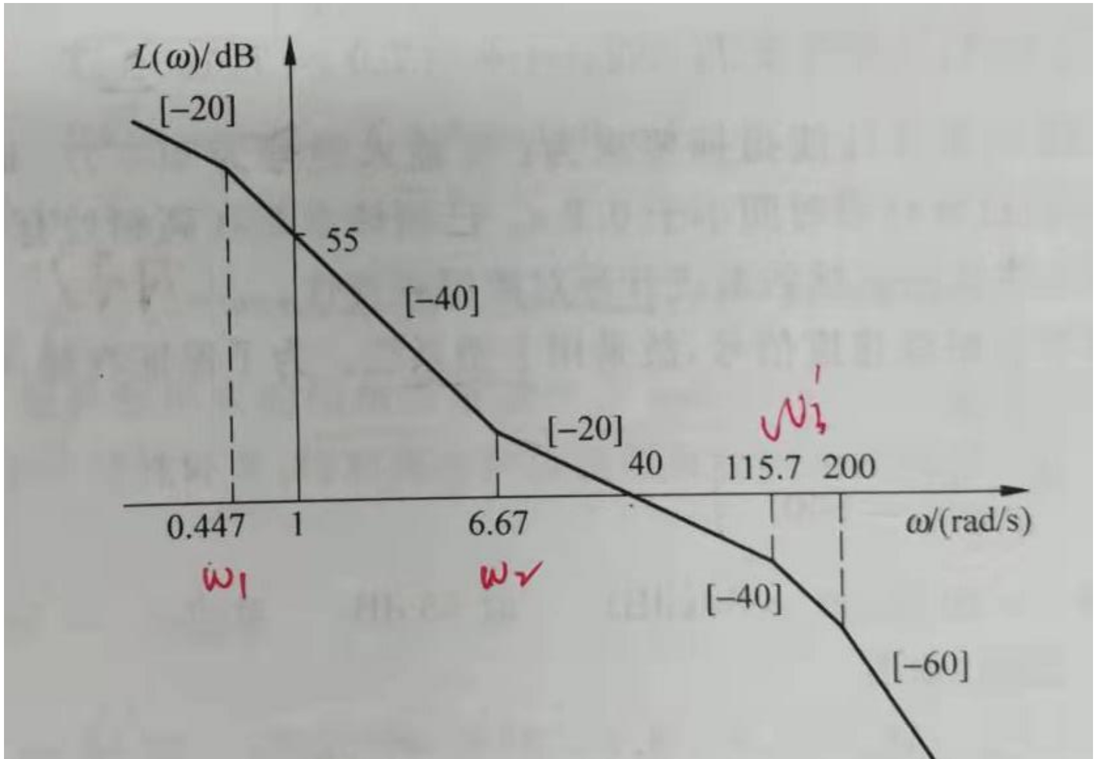
$$修正：T_3^{'}=T_3-T_4=\frac{1}{73.3}-0.005=0.0086s$$

$$\omega_3^{'}=\frac{1}{T_3^{'}}=\frac{1}{0.0086}=115.7\text{rad/s}$$

$$修正带来的\Delta\gamma=\arctan\frac{\omega_c}{\omega_3}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_3^{'}}=9.6^0$$

$$\gamma=\arctan\frac{\omega_c}{\omega_2}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_3^{'}}-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_4}=50.3^0$$

$$G(s)=\frac{550\left(\frac{1}{6.67}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{0.45}s+1\right)\left(\frac{1}{115.7}s+1\right)\left(\frac{1}{200}s+1\right)}$$



7.5.3　用希望对数频率特性进行校正装置的设计

固有频率特性是尚未加校正时系统的开环频率特性G_0（s）。

希望对数频率特性G*（s）是根据指标要求，加上校正装置后的希望对数频率特性（中频段为2-1-2型）

$$G^*(s)=G_0(s)G_j(s)$$

则

$$20\lg\left|G_j(j\omega)\right|=20\lg\left|G^*(j\omega)\right|-20\lg\left|G_0(j\omega)\right|$$

因此，只要先确定好希望对数幅频特性，那么，其与原系统固有频率特性之差，就是校正装置的对数幅频特性曲线，从而得到G_j（s）。

如图7－35

例7-6: $$G_0(s)=\frac{500}{s(0.008s+1)(0.002s+1)(0.001s+1)}$$

要求校正后 $K_v \geq 500$, $M_p < 30\%$, $t_s < 0.2s$

解：已知 $M_p < 30\%$, $\therefore M_r = 0.6 + 2.5M_p < 1.35$

由于 $t_s < 0.2s$，得 $\omega_c = \dfrac{\pi\left[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2\right]}{t_s} > 44.5$, 取$\omega_c = 45rad/s$

原系统转折频率分别为$125 = 2.5\omega_c$， $500 = 11.1\omega_c \gg \omega_c$， $1000 = 22.2\omega_c \gg \omega_c$

所以 选择$\omega_3 = 125$，$\omega_4 = 500$，$\omega_5 = 1000$

此时取 $T_\Sigma = T_3 + T_4 + T_5 = 0.008 + 0.002 + 0.001 = 0.011$, 则$\omega_3^{'} = \omega_\Sigma = 91rad/s$

$$h = \frac{M_r+1}{M_r-1} > \frac{1.35+1}{1.35-1} = 6.7, \quad 取h = 10，则\omega_2 = \frac{\omega_3^{'}}{h} \approx 9rad/s$$

$\omega_3 \approx 2\omega_c$

类似二阶最优

为保证$K_v \geq 500$，须使$\omega_1 = \dfrac{\omega_c\omega_2}{K_v} \leq \dfrac{45\times9}{500} \approx 0.8rad/s$

所以校正环节为 $$G_j(s) = \frac{\frac{1}{9}s+1}{\frac{1}{0.8}s+1} = \frac{0.11s+1}{1.25s+1},$$ ⇨ 滞后校正

校正后 $$G(s) = \frac{500(0.11s+1)}{s(1.25s+1)(0.008s+1)(0.002s+1)(0.001s+1)}$$

$$\Delta\gamma_1 = -\arctan\frac{\omega_c}{\omega_1} = -\arctan\frac{45}{0.8} = -89^0$$

本例中可近似将 $\frac{1}{1.25s+1} \Rightarrow \frac{1}{s}$

$$-\arctan\frac{45}{125} - \arctan\frac{45}{500} - \arctan\frac{45}{1000} = -27.5^0$$

$$-\arctan\frac{\omega_c}{\omega_\Sigma} = -\arctan\frac{45}{91} = -26.3^0$$

近似表达式 $G(s) = \frac{500(0.11s+1)}{s^2(0.011s+1)}$ ➡ **高阶最优模型** $G(s) = \frac{K_v(T_2s+1)}{s^2(T_3s+1)}$

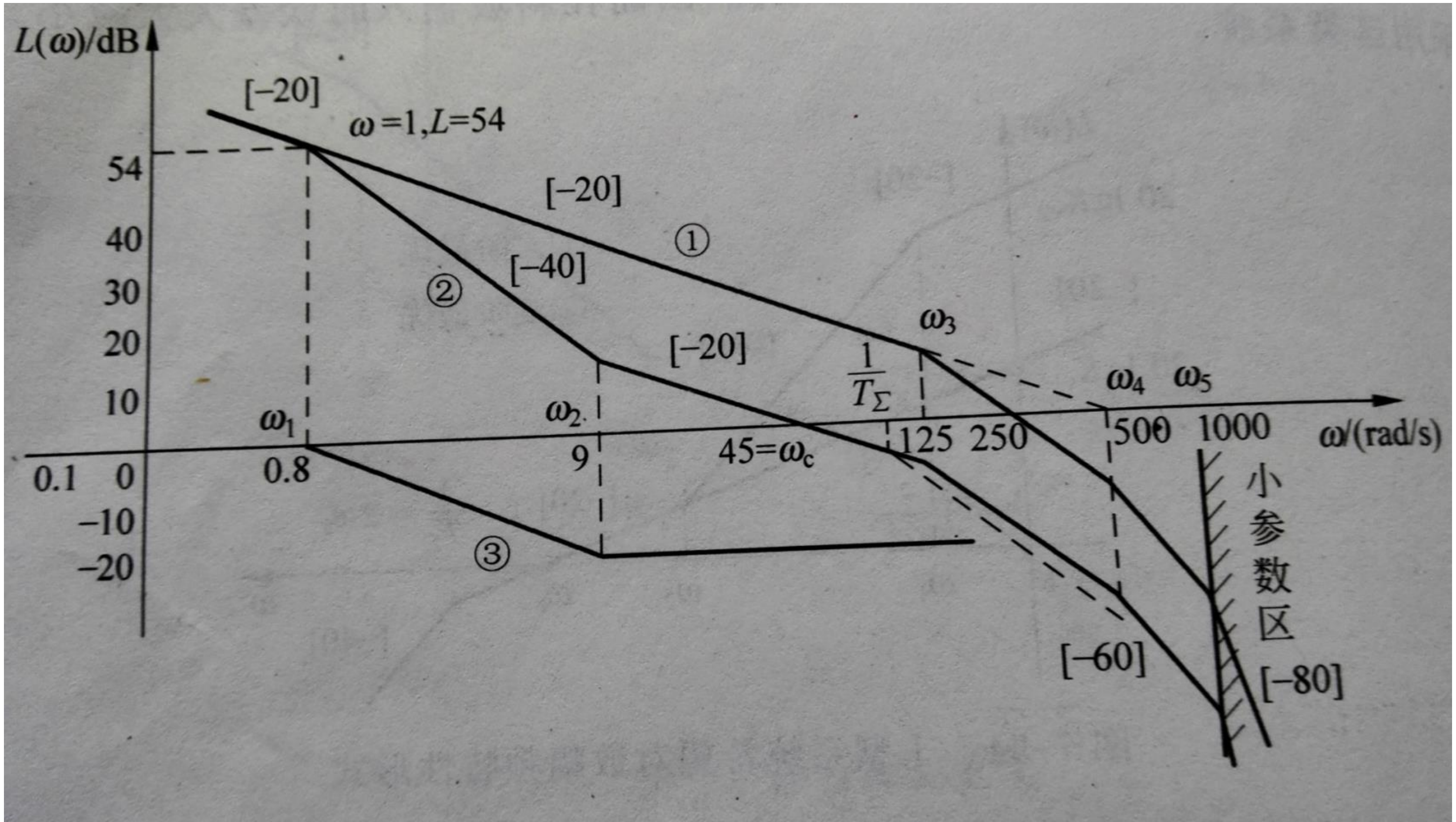


图 7-35　幅频特性图

❖课后习题：以下红色字体黄色背景的习题。

①MatLab: 1 (PD), 2 (PI)

②PD: 15,16； PI: 15,18； PI-PD: 7,13

③PID: 20

④二阶最优：17(二阶)

⑤高阶最优：7(低中)9,11(低中高),6,12(低频)

⑥反馈校正：19

⑦时域频域指标：4,8