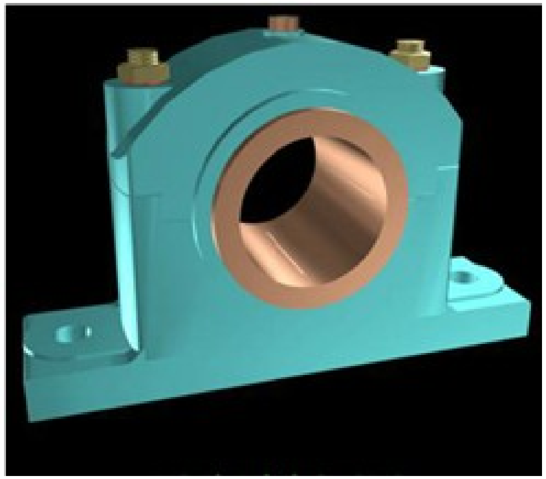
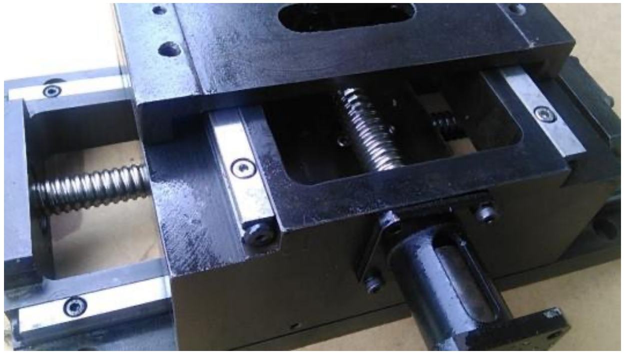
第七章 缝隙流动



滑动轴承



导轨工作台

可倾瓦轴承

第七章 缝隙流动

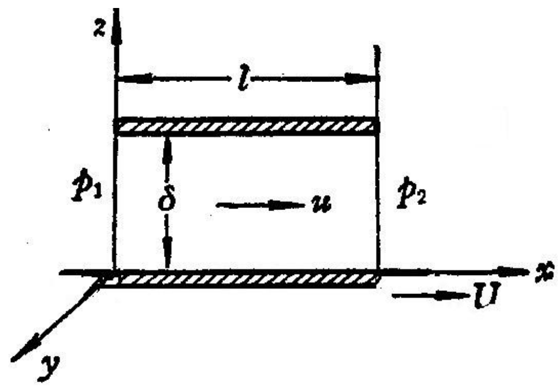
缝隙流动属于层流范畴。

缝隙中液体产生运动的原因有二 ：一种是由于存在压差而产生流动，这种流动称为压差流。另一种是由于组成缝隙的壁面具有相对运动而使缝隙中液体流动，称为剪切流，两者的叠加称为压差 - 剪切流。

§7-1 平行平板间缝隙流动

$$\left.\begin{aligned} f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

一、速度分布规律和流量



平板长为 *l*，宽为 *b*，缝隙高度δ

$$b >> \delta \qquad l >> \delta$$

$$u_x = u \qquad u_y = u_z = 0$$

由连续性方程，可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

组成缝隙的平板 *y* 向的尺寸较大，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 则是很小的，可以忽略不计。

对于不可压缩流体，忽略质量力时， N-S 方程可简化为

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases}$$

由后两式可看出压力 *p* 仅沿 *x* 方向变化，并且 *u* 仅是 *z* 的函数，由于平板缝隙大小沿 *x* 方向是不变的，因此 *p* 在 *x* 方向的变化率是均匀的，因此

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{dx}=-\frac{p_1-p_2}{l}=-\frac{\Delta p}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2 u}{dz^2}$$

于是方程第一式为

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=-\frac{\Delta p}{\mu l}$$

对 z 积分两次得

$$u=-\frac{\Delta p}{2\mu l}z^2+C_1z+C_2$$

由边界条件

$$\begin{cases} z=0, & u=U \\ z=\delta, & u=0 \end{cases}$$

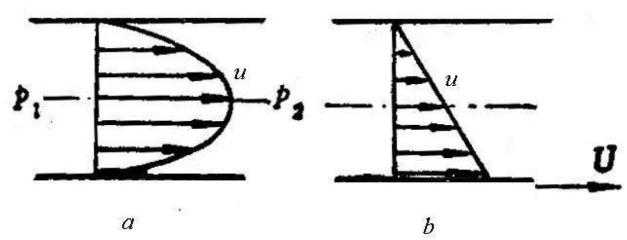
得

$$C_1=\frac{\Delta p}{2\mu l}\delta-\frac{U}{\delta},\quad C_2=U$$

于是

$$u=\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-z)z+U(1-\frac{z}{\delta})$$

第一项是由压强差造成的流动，沿间隙高度速度呈抛物线分布，称为压差流；第二项是由下平板运动造成的流动，间隙中的流速呈线性分布，称为剪切流。



如果下平板运动方向向左，则前式第二项前符号取“－”。

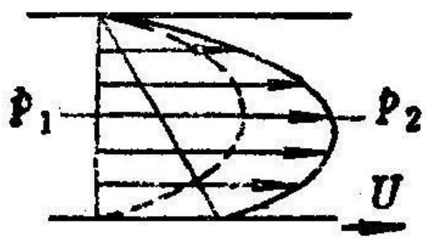
$$u = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta - z)z - U(1 - \frac{z}{\delta})$$

如果下平板固定不动，上平板以 ***U*** 速度运动，则流速公式为：

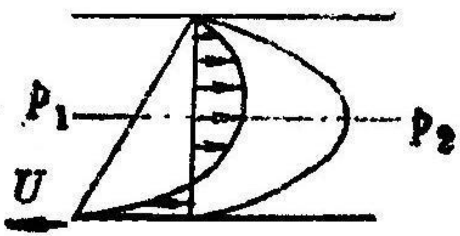
$$u = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta - z)z \pm U(\frac{z}{\delta})$$

上式中，如上平板向右运动取“＋”号，向左运动取“－”号。

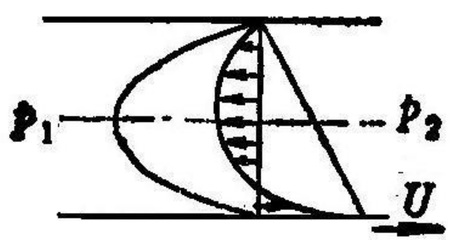
几种可能的速度分布图形



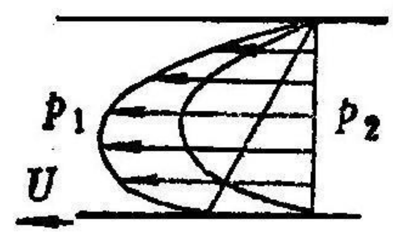
$\Delta p>0$. $U>0$



$\Delta p>0$, $U<0$



$\Delta p<0$. $U>0$



$\Delta p<0$. $U<0$

通过整个平板间隙的流量 q_V 为

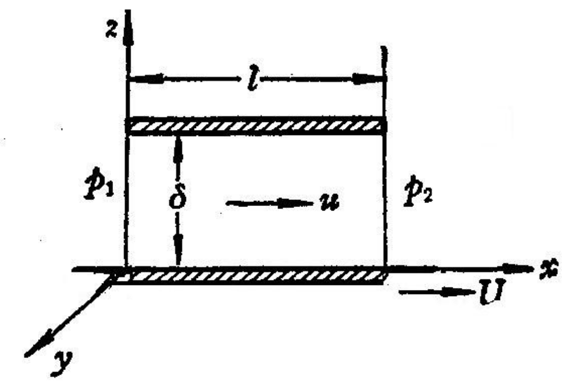
$$q_V = \int_0^{\delta} ubdz$$

得

$$q_V = \frac{b\delta^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l} \pm \frac{b\delta}{2}U$$

泄漏流量也是由两种运动造成的，当压差流动和平板运动的 U 方向一致时取“＋”号，相反时取“－”号。

二、功率损失与最佳缝隙



以左图所示的流动为例，压差流动的方向和下平板的运动方向一致。于是，由压差引起的泄漏功率损失 N_Q 为

$$N_Q = \Delta p q_V = \Delta p(\frac{b\delta^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l} + \frac{b\delta}{2}U) = \Delta p b(\frac{\delta^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l} + \frac{\delta}{2}U)$$

由于运动平板作用于边界流体上的剪切摩擦力 F 为

$$F = \tau bl = -\mu bl\frac{du}{dz}\bigg|_{z=0} \Longrightarrow F = b(\frac{\mu Ul}{\delta} - \frac{\Delta p\delta}{2})$$

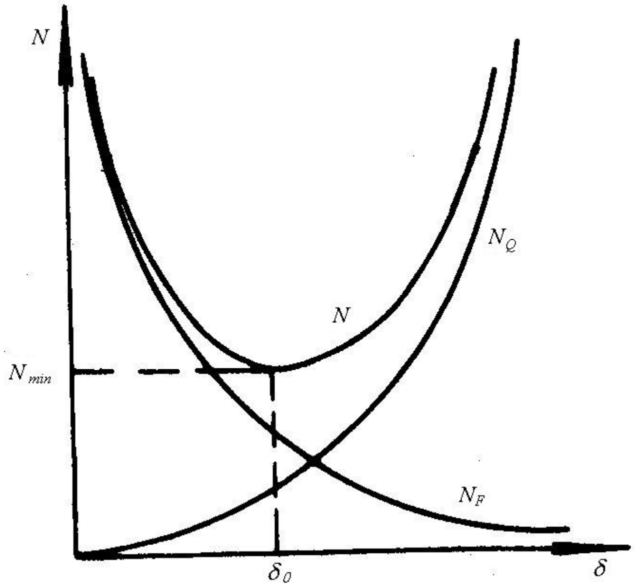
由剪切摩擦力 F 引起的功率损失 N_F 为

$$N_F = FU = bU(\frac{\mu Ul}{\delta} - \frac{\Delta p\delta}{2})$$

总功率损失 N 为

$$N = N_Q + N_F = b(\frac{\Delta p^2\delta^3}{12\mu l} + \frac{\mu lU^2}{\delta})$$

同样可证明，当压差流动和剪切流动方向相反时，总功率损失仍为此式 。



δ_0 即为所求的最佳间隙

$$\left.\frac{dN}{d\delta}\right|_{\delta=\delta_0} = 0$$

$$\frac{dN}{d\delta} = b\left(\frac{\Delta p^2 \delta^2}{4\mu l} - \frac{\mu l U^2}{\delta^2}\right) = 0$$

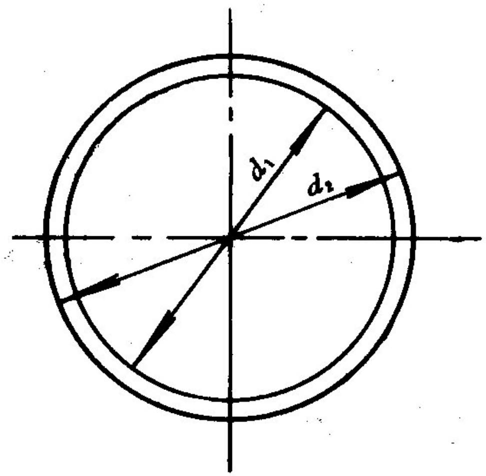
所以使功率损失最小的缝隙高度δ_0为

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2\mu U l}{\Delta p}}$$

上式即为平行平板间缝隙流动中最佳间隙的计算公式

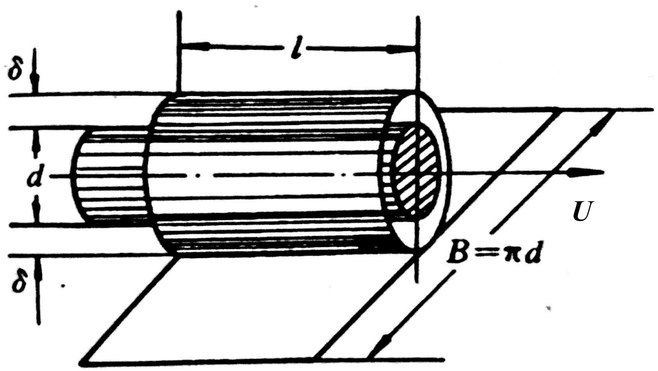
§7-2 圆柱环形缝隙流动

一、同心圆柱环形缝隙流动



两同心圆柱面形成的缝隙，内圆柱直径为 d_1，外圆柱直径为 d_2，间隙高度为$\delta=(d_2-d_1)/2$。

由于缝隙尺寸δ很小，我们可以把同心环形缝隙近似地看作宽度为πd_1的平行平板缝隙，因此缝隙中的流速分布可以按平行平板公式计算

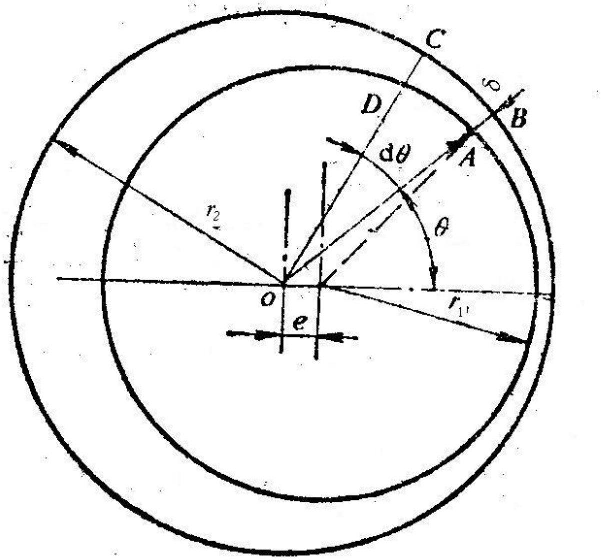


通过缝隙中的流量可以将 $b=\pi d_1$ 代入平行平板缝隙流量公式

$$q_V=\frac{\pi d_1\delta^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l}\pm\frac{\pi d_1\delta}{2}U$$

式中的正负号的选取方法与平行平板缝隙流动相同。

二、偏心圆柱环形缝隙流动



我们在任意角θ 处取一微小圆弧 CB，它对应的圆弧角为 $d\theta$，则 $CB = r_1\, d\theta$，由于 CB 为一个微小长度，因而这段缝隙中的流动可近似看作为平行平板间的缝隙流动，所以流过偏心圆柱环形缝隙的总流量为

$$q_V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l} \pm \frac{h}{2}U\right) r_1 d\theta$$

设柱塞的半径为 r_1，缸半径为 r_2，$\delta_0 = r_2 - r_1$ 为同心时的缝隙高度，e 为偏心距，$\varepsilon = e/\delta_0$ 为相对偏心距。缸与柱塞形成的缝隙高度 h 是个变量，它随θ角而变。由于 h 相对于 r_1 和 r_2 为小量，而且 e 与 r_1 和 r_2 相比更为小量，于是由图中的几何关系可得

$$\begin{aligned} AB = OB - OA &\approx r_2 - (r_1 + e\cos\theta) \\ &= \delta_0 - e\cos\theta \\ &= \delta_0 (1 - \varepsilon\cos\theta) \end{aligned}$$

将 h 与θ的函数关系代入，则

$$q_V = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\Delta p \delta_0^3}{12\mu l}(1-\varepsilon\cos\theta)^3 \pm \frac{\delta_0 U}{2}(1-\varepsilon\cos\theta)\right] r_1 d\theta$$

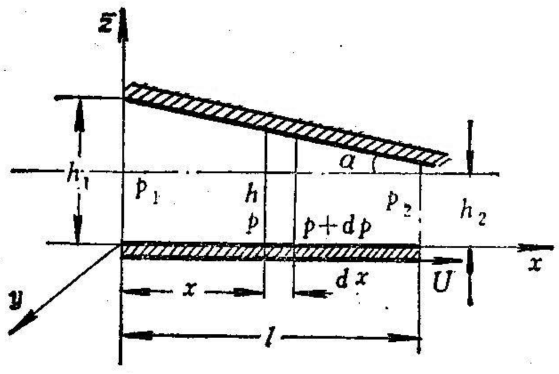
积分得

$$q_V = \frac{\pi d_1 \Delta p \delta_0^3}{12\mu l}(1+1.5\varepsilon^2) \pm \frac{\pi d_1 \delta_0 U}{2}$$

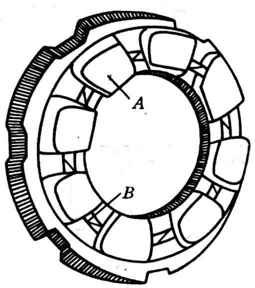
式中的正负号选取与前述相同。当 $U = 0$ 时可得纯压差流动的流量为

$$q_V = \frac{\pi d_1 \Delta p \delta_0^3}{12\mu l}(1+1.5\varepsilon^2)$$

§7-3 倾斜平板间缝隙流动



倾斜平面缝隙



端面止推轴承

某一平板相对于另一平板成一角度放置时，两板间的液体流动称为倾斜平板间缝隙流动。由于倾斜角α较小，在平板两端的压强差 $p_1 - p_2$，或一个平板以 U速度，都使缝隙中的液体近似平行的速度运动，于是有

$$\begin{cases} u_x = u = u(z), \quad u_y = u_z \approx 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial z} \approx 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{dp}{dx} \end{cases}$$

但是倾斜平板缝隙与平行平板缝隙不同之处在于沿流动方向的压强变化率 $\frac{dp}{dx}$ 不是常数，因此不能用$-\frac{\Delta p}{l}$代替 $\frac{dp}{dx}$ 。

由 N-S 方程

$$u = \frac{1}{2\mu}(z^2 - hz)\frac{dp}{dx} + U(1 - \frac{z}{h})$$

若间隙宽度为 b，则流过任一截面的流量 q_V 为

$$q_V = -\frac{bh^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{bhU}{2}$$

压力沿 x 轴向变化率为

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} - \frac{12\mu}{bh^3} q_V$$

倾斜缝隙任意点的压强为

$$p = p_1 + \frac{6\mu q_V}{btg\alpha}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h^2}\right) - \frac{6\mu U}{tg\alpha}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right)$$

倾斜缝隙两端的压强差为

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{6\mu q_V}{btg\alpha}\left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 h_2^2}\right) - \frac{6\mu U}{tg\alpha}\left(\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}\right)$$

利用关系式 $tg\alpha = (h_1 - h_2)/l$ 可得流量为

$$q_V = \frac{bh_1h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{h_1h_2}{6\mu l}\Delta p + U\right)$$

倾斜平板缝隙内压强分布 p 为

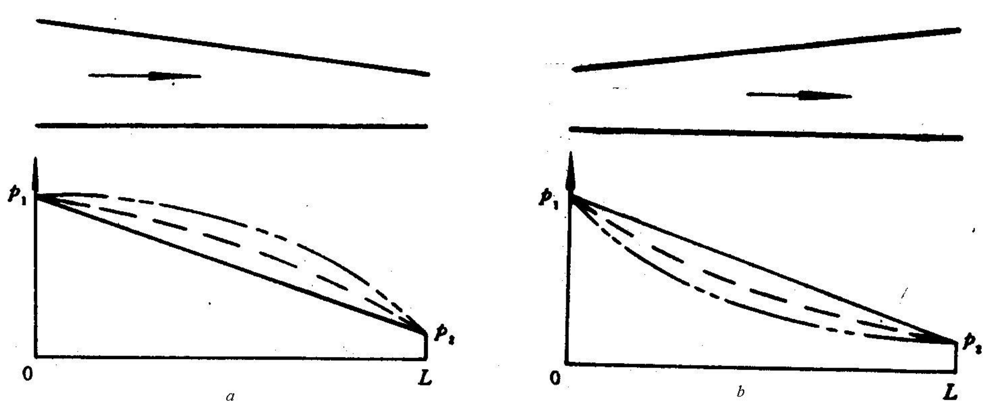
$$p = p_1 - \Delta p\frac{\left(\frac{h_1}{h}\right)^2 - 1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} + \frac{6\mu U(h - h_2)x}{h^2(h_1 + h_2)}$$

对于固定不动的倾斜平板，即 U=0 的纯压差，流量和压力分布规律分别为

$$q_V = \frac{b}{6\mu l}\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2}\Delta p$$

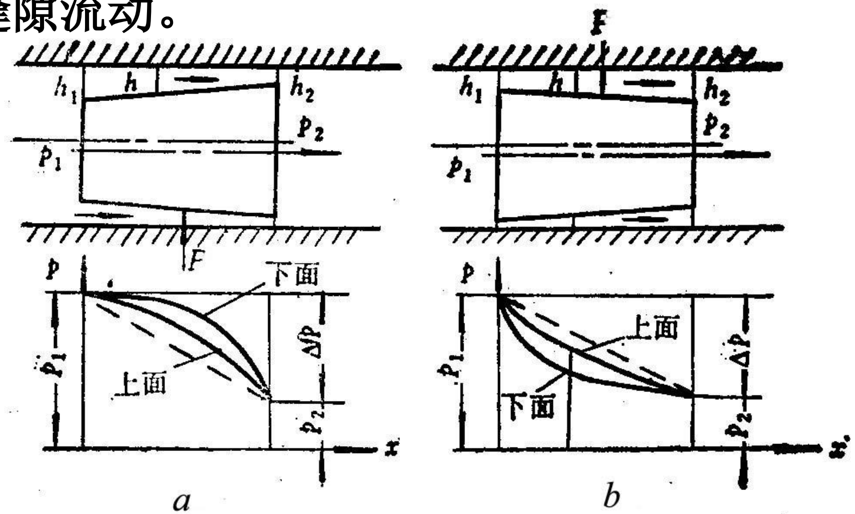
$$p = p_1 - \Delta p \frac{(\frac{h_1}{h})^2 - 1}{(\frac{h_1}{h_2})^2 - 1}$$

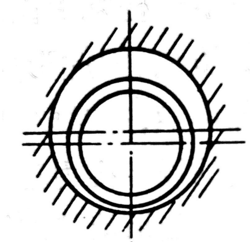
渐缩倾斜固定平板缝隙中的压力分布规律为上凸曲线，收缩程度越大，曲线上凸越大。
在渐扩倾斜固定平板缝隙中的压力分布规律为下凹曲线，扩大程度越大，曲线下凹越多



柱塞运动中的卡紧力

在液压技术中常常会由于加工误差或其它原因将柱塞、活塞等加工成一定锥度的圆锥体，装入阀体或缸体中就形成了由外圆柱面和内圆锥面构成的环形缝隙流动。由于缝隙的高度和柱塞半径相比为微小量，因而将其展开后可看成是倾斜平板缝隙流动。

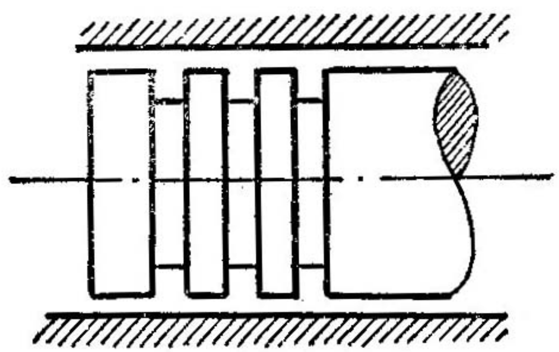




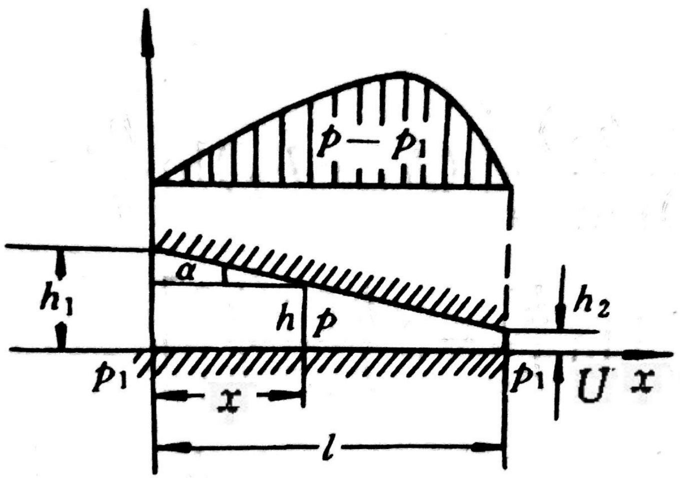
渐缩环形缝隙，如果内圆锥体偏向下方，按公式分别绘出圆锥体上方和下方的压力分布曲线。圆锥体下方缝隙较小一侧的压力大于圆锥体上方缝隙较大一侧的压力，因此形成向上的合力 F 将内圆锥压向同心位置。这个合力称为“恢复力”，它能使内圆锥与外圆柱自动保持同心。

渐扩环形缝隙，如果内圆锥体偏向下方，按公式分别绘出圆锥体上方和下方的压力分布曲线。圆锥体下方缝隙较小一侧的压力小于圆锥体上方缝隙较大一侧的压力。因此形成的合力 F 将内圆锥推向下方，直到接触外圆锥面为止。这个合力称为“卡紧力”，它能使内圆锥与外圆柱出现“卡死”现象。

　　减小卡紧力的有效方法就是如图所示的开平衡槽。平衡槽均衡柱塞周围的压强，不容易出现偏心，自然也就不会出现卡紧力。



动压支承的支承力



$$p = p_1 + \frac{6\mu U(h-h_2)x}{h^2(h_1+h_2)}$$

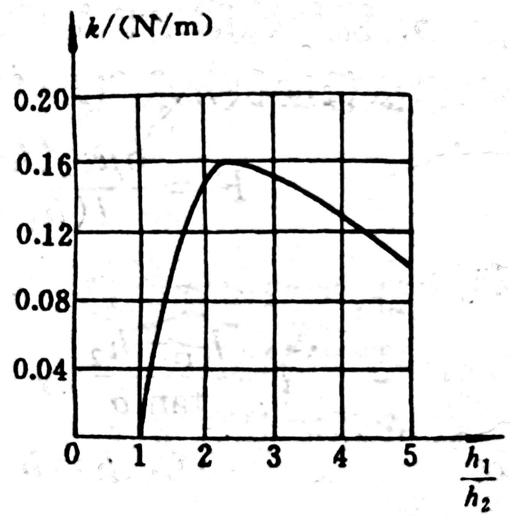
倾斜平板单位宽度上的承载力：

$$F = k\frac{\mu U l^2}{h_2^2}$$

k 是一个完全由 h_1/h_2 决定的无量纲数：

$\Delta p=0$　　动压支承

当上平板向左或下平板向右运动时，带动液流向小缝隙一端流动，缝隙中产生很大的支承力，这种由机件运动造成的支承方式称为动压支承。



承载系数曲线

h_1/h_2=1， k=0，平行平板，无承载力；

h_1/h_2=2.2， k=0.16，承载能力最大

动压支承的支承力

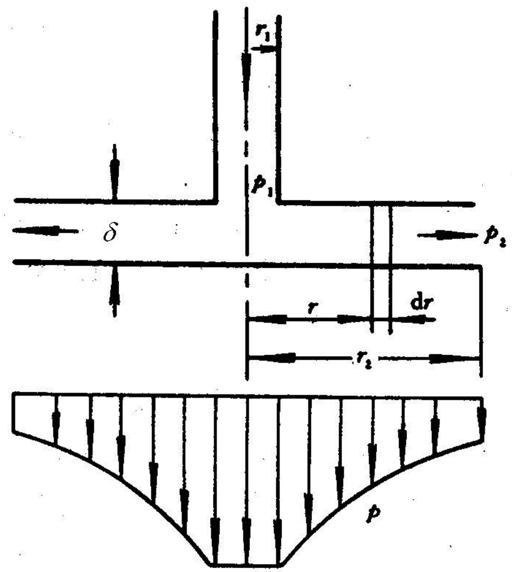
考虑到平板宽度，则最大承载力：

$$F_{max} = 0.16\frac{\mu U l^2 b}{h_2^2}$$

——F 与 U 成正比，与 l^2 成正比，而与 h_2^2 成反比

，油膜越薄，承载力越大。

§7-4 平行圆盘缝隙流动



由圆柱坐标系 N － S 方程式可得

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dr}(\delta-z)z$$

圆盘缝隙中沿径向的压强分布为

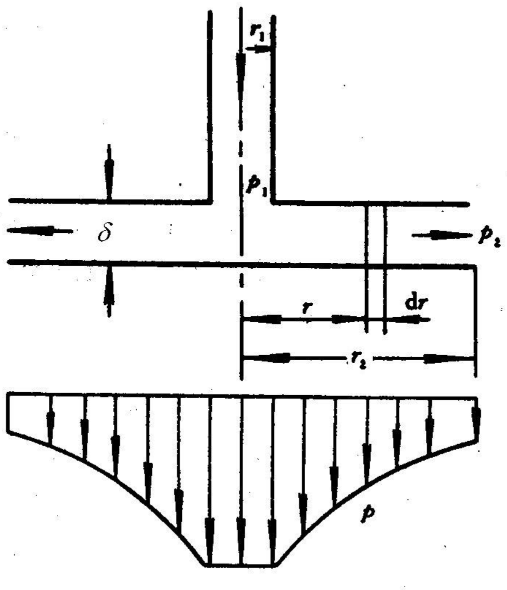
$$p=\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\frac{r_2}{r}+p_2$$ 呈对数分布规律

压力差为 $$\Delta p=p_1-p_2=\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

两圆盘 A 和 B 平行地相距δ，如图所示，液流从中心向四周径向流出。由于缝隙高度δ很小，流动呈层流。

流量为 $$q_V=\frac{\pi\delta^3\Delta p}{6\mu\ln(r_2/r_1)}$$

探讨这种流动，采用柱坐标系是比较方便的。因为平行圆盘间的流动是径向的，所以对称于中心轴线 z，这样运动参数就与θ无关。又因为缝隙高度δ很小，所以 $u_z=0$ $u_\theta=0$ $u_r=u$ 。



下圆盘（无油管）所受的总作用力为：

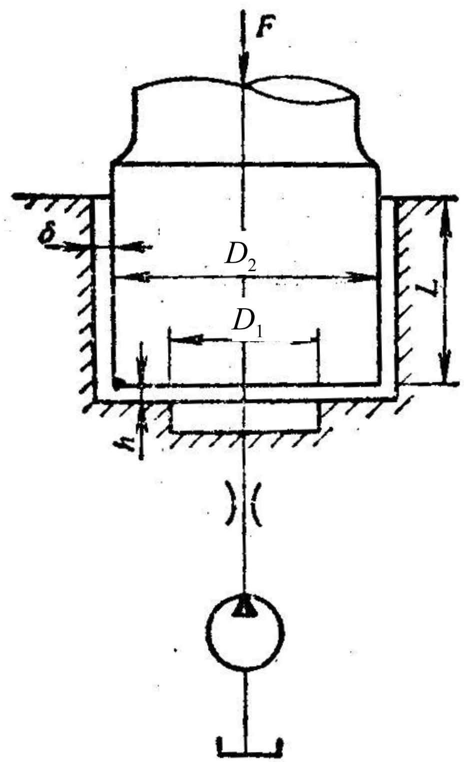
$$F' = \pi r_2^2 p_2 + \frac{3\mu q_v}{\delta^3}(r_2^2 - r_1^2)$$

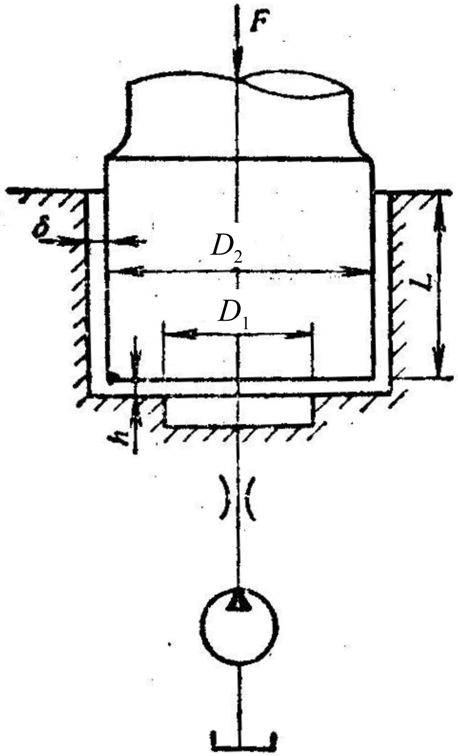
$$F' = \pi r_2^2 p_2 + \frac{\pi}{2}\frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}\Delta p$$

上圆盘（有油管）所受的总作用力为：

$$F = F' - p_1 \pi r_1{}^2$$

一静压轴承，如图所示，D_1=40mm，$L=100$mm，D_2=80mm，径向间隙$\delta=0.25$mm，轴向负载$F=6500$N，泵将相对密度为0.88粘度为5°E的油液，通过直径$d=10$ mm，长$l=3$m的管道及$d_0=3.5$mm的小孔节流阻尼器送入轴承，阻尼器流量系数可取0.65，如果要求$h=0.2$mm，求泵的流量和压强。





五、解：通过轴承底部流量

$$Q_1=\frac{\pi h^3}{6\mu}\frac{p_1-p_2}{\ln(\frac{D_2}{D_1})}$$ （1分）

通过轴颈流量

$$Q_2=\frac{\pi D_2\delta^3}{12\mu L}p_2$$ （1分）

$Q_1=Q_2$ $$\frac{(p_1-p_2)h^3}{\ln(\frac{D_2}{D_1})}=\frac{D_2\delta^3}{2L}p_2$$ （1分）

$$p_1=\left[1+\frac{D_2\delta^3\ln(\frac{D_2}{D_1})}{2Lh^3}\right]p_2=\left[1+\frac{80\times0.25^3}{2\times100\times0.2^3}\ln(\frac{80}{40})\right]p_2$$ （2分）

$$=1.54\,p_2$$

推力轴承部分承载能力

$$F_s=\frac{\pi(p_1-p_2)}{2\ln(\frac{D_2}{D_1})}\left(\frac{D_2^2}{4}-\frac{D_1^2}{4}\right)+\frac{\pi}{4}D_2^2p_2$$ （2分）

油流经轴颈处的摩擦力

$$F_f=\frac{\pi D_2\delta p_2}{2}$$ （2分）

$$F=F_s+F_f=\frac{\pi\times(0.54p_2)}{2\ln(\frac{80}{40})}\cdot(16-4)\times10^{-4}+\frac{\pi p_2}{4}\times64\times10^{-4}+\frac{\pi\times0.08\times0.25\times10^{-3}}{2}p_2$$

$$=6.526\times10^{-3}p_2$$ （1分）

$$\therefore p_2=\frac{F}{6.526\times10^{-3}}=\frac{6500}{6.526\times10^{-3}}=9.96\times10^5\,Pa=9.96\,bar$$ （1分）

$$\mu=\rho\nu=880\times35\times10^{-6}=0.031\,Pa\cdot s$$ （1分）

泄漏量 $$Q=\frac{\pi D_2\delta^3}{12\mu l}p_2=\frac{\pi(0.08)(0.25\times10^{-3})^3}{12\times0.031\times0.1}\times9.96\times10^5$$

$$=1.05\times10^{-4}\,m^3/s=6.3\,l/min$$ （2分）

管路压降

$$\Delta p_l=\frac{128\mu lQ}{\pi d^4}=\frac{128\times0.031\times3\times1.05\times10^{-4}}{\pi(0.01)^4}=39.8\times10^3\,Pa=0.398\,bar$$ （2分）

节流阻尼孔压降 $$Q=C_q\frac{\pi}{4}d_0^2\sqrt{\frac{2\Delta p_t}{\rho}}$$

$$\Delta p_t=\frac{\rho}{2}\left(\frac{4Q}{C_q\pi d_0^2}\right)^2=\frac{880}{2}\left[\frac{4\times1.05\times10^{-4}}{0.65\pi(3.5\times10^{-3})^2}\right]^2$$

$$=0.124\times10^6\,Pa=1.24\,bar$$ （2分）

油泵压强

$$p=p_1+\Delta p_l+\Delta p_t=1.54\times9.96+0.398+1.24$$

$$=16.98\,bar$$ （2分）