1.8

已知绕过半径为r_0的光滑圆的二维理想流体（不可压缩且不计粘性）稳态流场的速度分布为（其中U_∞代表无穷远处的流场速度，沿 x 方向）

$$\begin{cases} U(x,y) = U_\infty - U_\infty \dfrac{r_0^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ V(x,y) = -2U_\infty \dfrac{r_0^2 xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} x^2+y^2 \geq r_0^2$$

1)试验证此速度分布满足二维形式的连续性方程，即质量守恒方程。

2)假设流体的密度为ρ，无穷远处的压力为P_∞，不计体积力，试推导流场的压力分布$P(x,y)$。

3)试推导流场流线的微分方程，验证半径为r_0的两个半圆正是两条流线。

1)

对所给式子求偏导

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -U_\infty \dfrac{2r_0^2 x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} = -2U_\infty \dfrac{r_0^2 x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{cases}$$

则有

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = 0$$

满足连续性方程

2)

求二阶导有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = -6U_\infty r_0^2 \dfrac{(x^4+y^4-6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4} \\ \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 6U_\infty r_0^2 \dfrac{(x^4+y^4-6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4} \\ \dfrac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 24U_\infty r_0^2 xy \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^4} \\ \dfrac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = -24U_\infty r_0^2 xy \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^4} \end{cases}$$

体积力不计，流场稳定，则有

$$\begin{cases} \rho\left(U\dfrac{\partial U}{\partial x} + V\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) - \mu\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \rho\left(U\dfrac{\partial V}{\partial x} + V\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) - \mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

代入化简得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2\rho U_\infty^2 r_0^2 \dfrac{x(3y^2-x^2-r_0^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2\rho U_\infty^2 r_0^2 \dfrac{y(3x^2-y^2-r_0^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{cases}$$

积分得

$$P(x,y)=\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 r_0^2\frac{2x^2-2y^2-r_0^2}{(x^2+y^2)^2}+P_\infty$$

3)

根据流线定义有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{V(x,y)}{U(x,y)}=-\frac{2r_0^2xy}{x^4+2x^2y^2+y^4-r_0^2x^2+r_0^2y^2}$$

对于半圆有

$$x^2+y^2=r_0^2$$

两边微分，移项可得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

而将$x^2+y^2=r_0^2$代入流线定义有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{V(x,y)}{U(x,y)}=-\frac{2xy}{r_0^2-x^2+y^2}=-\frac{x}{y}$$

因此，半圆上的点满足流线定义，是流线

8.1

考虑习题 1.8 所列情形的二维流场，假设$r_0=50mm, U_\infty=500mm/s, \rho=1g/cm^3$，试完成（取对称模型进行分析）:

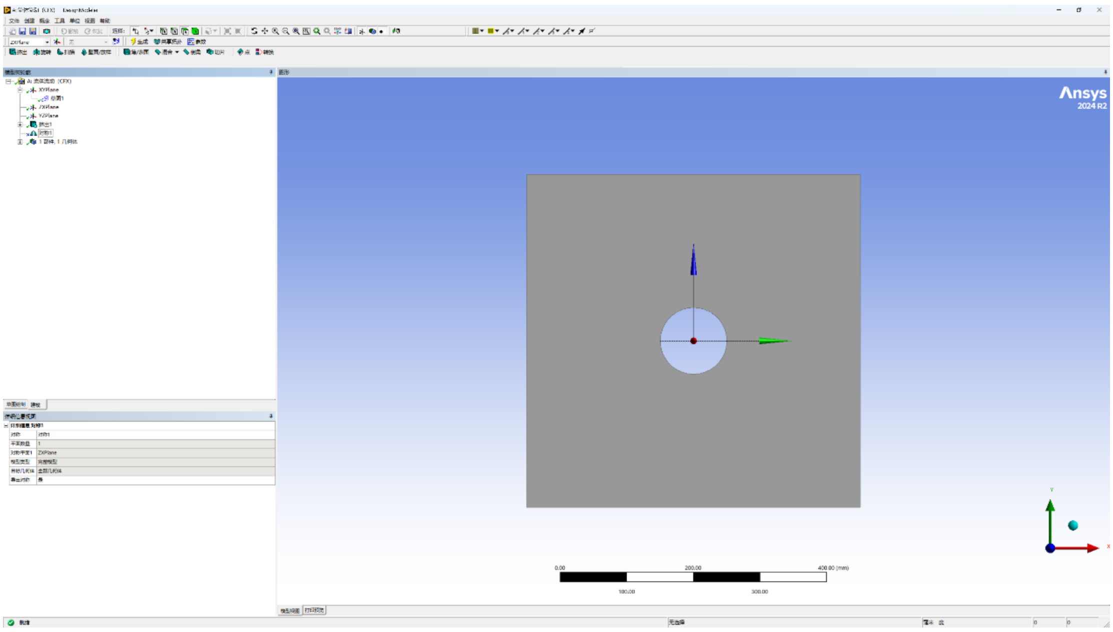
1）取边长为 500mm 的正方形代表“无穷远”边界，进行速度场与压力场的有限元分析，并画出流线图。

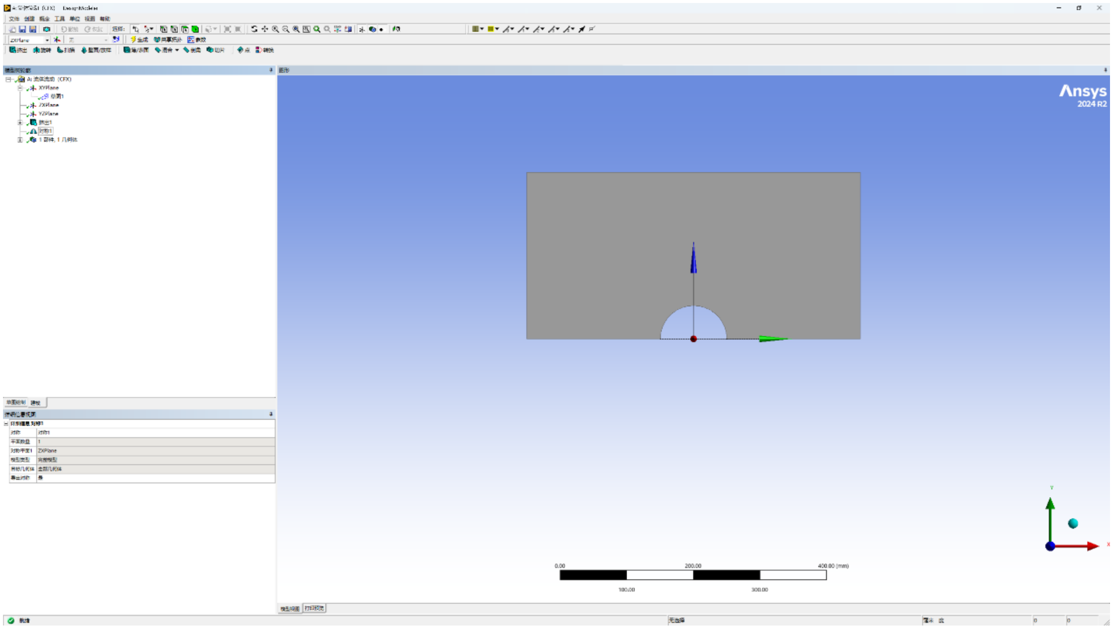
2）计算半径为 r_0 半圆形流线上最大的速度，并与理论解进行对照

3）计算半径为 r_0 半圆形流线上最大压力与最小压力的差，并与理论解进行对照。

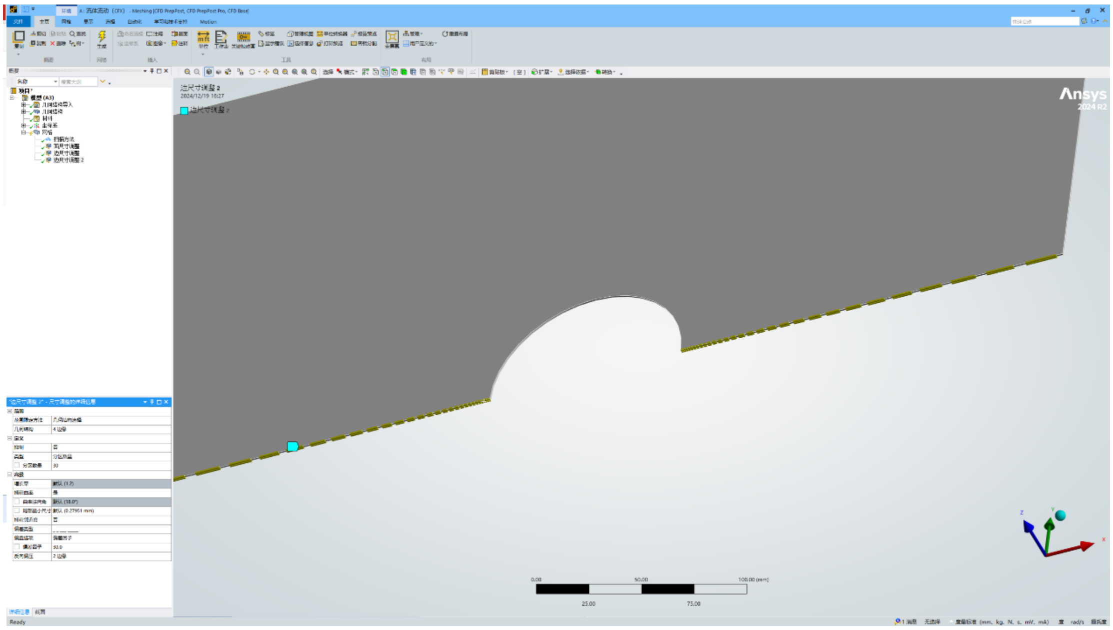
利用 ANSYS Workbench 进行分析

首先建立模型，按照要求取对称

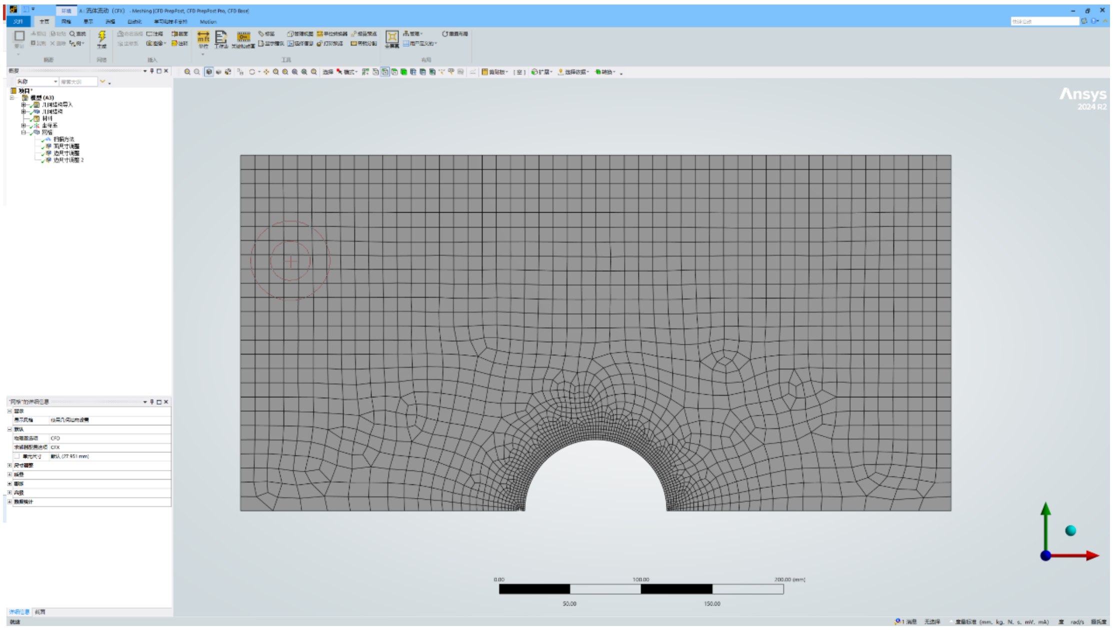




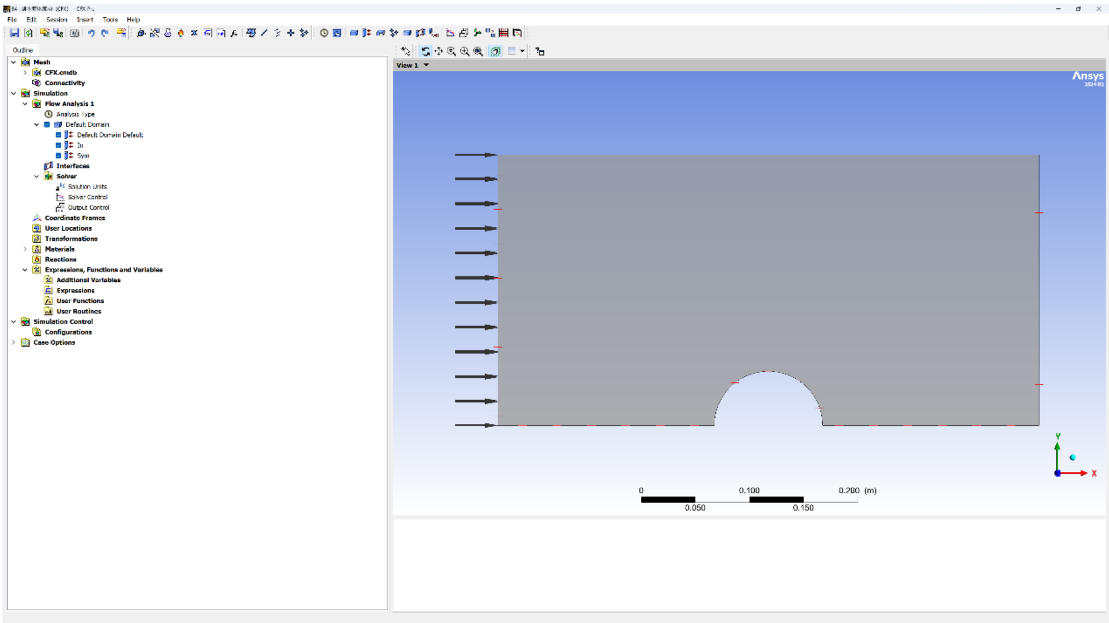
进行网格划分，参考之前的例 4.6，对于圆周边进行更细密的网格划分，但发现如果选择一个面无法将类型改为分区数量，必须选择两条边才行。对于圆的分区数量取 100，对于两条边则采用靠近圆的地方更密的方式，如下图



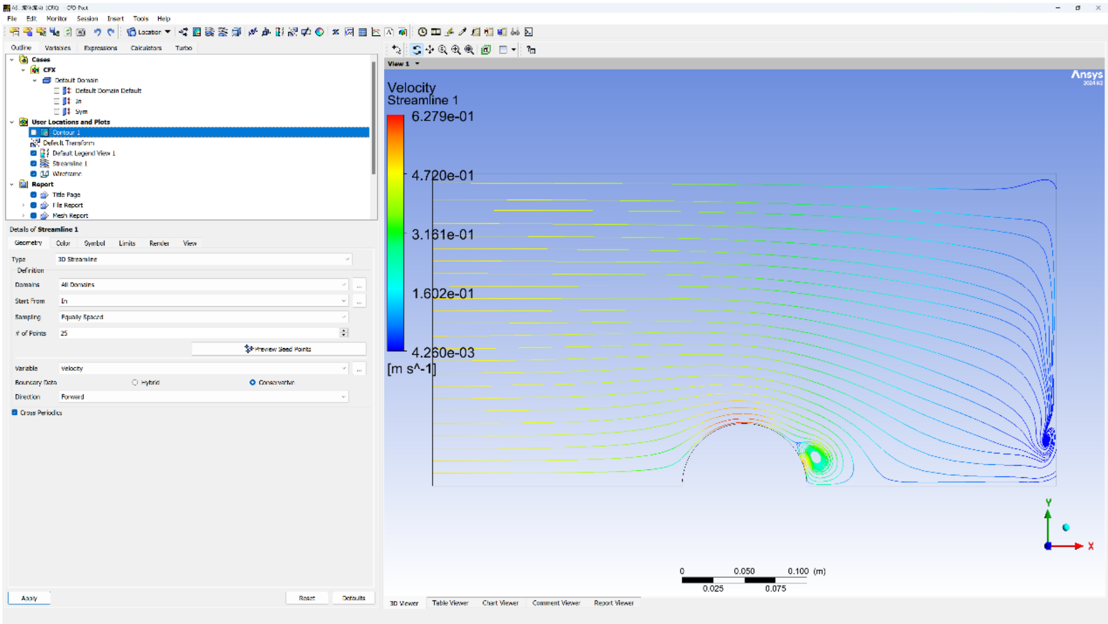
划分网格，得到较为合理的网格结构

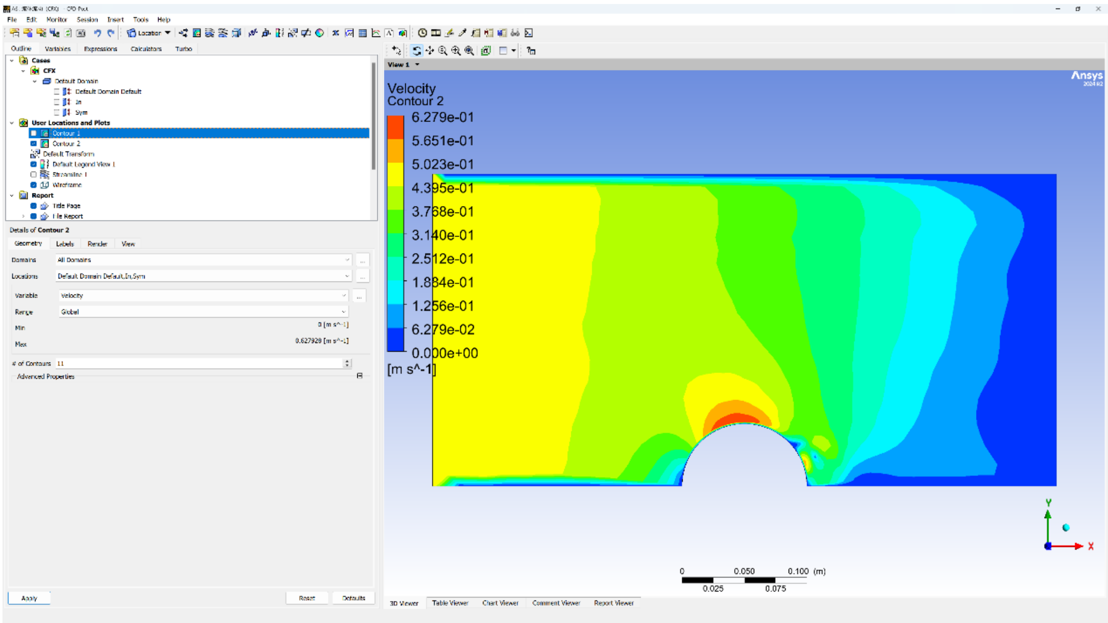


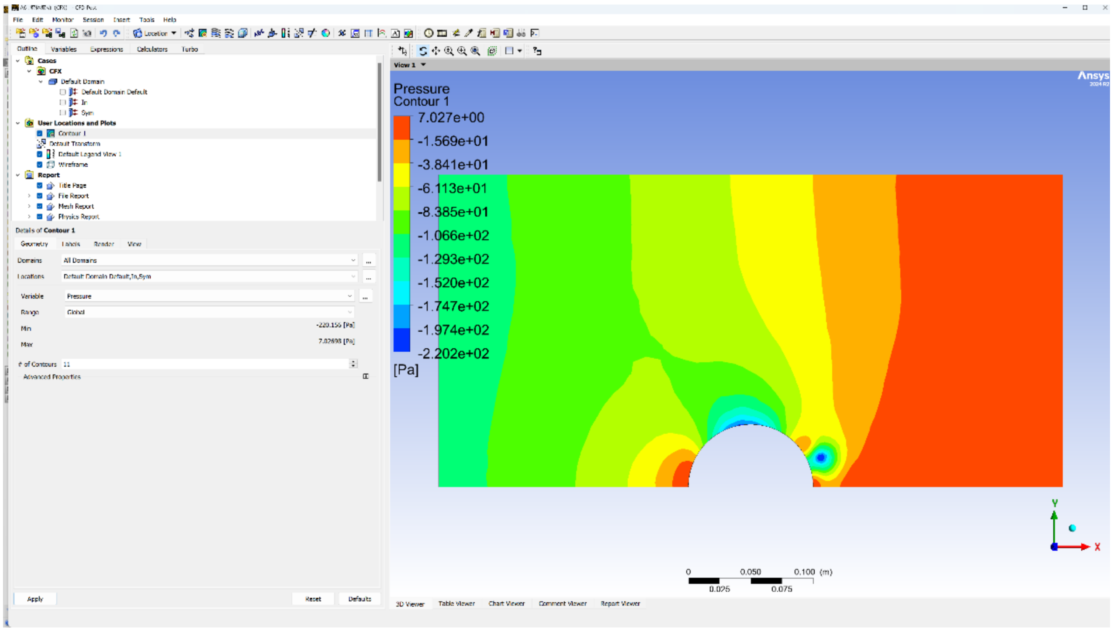
接下来进行分析设置



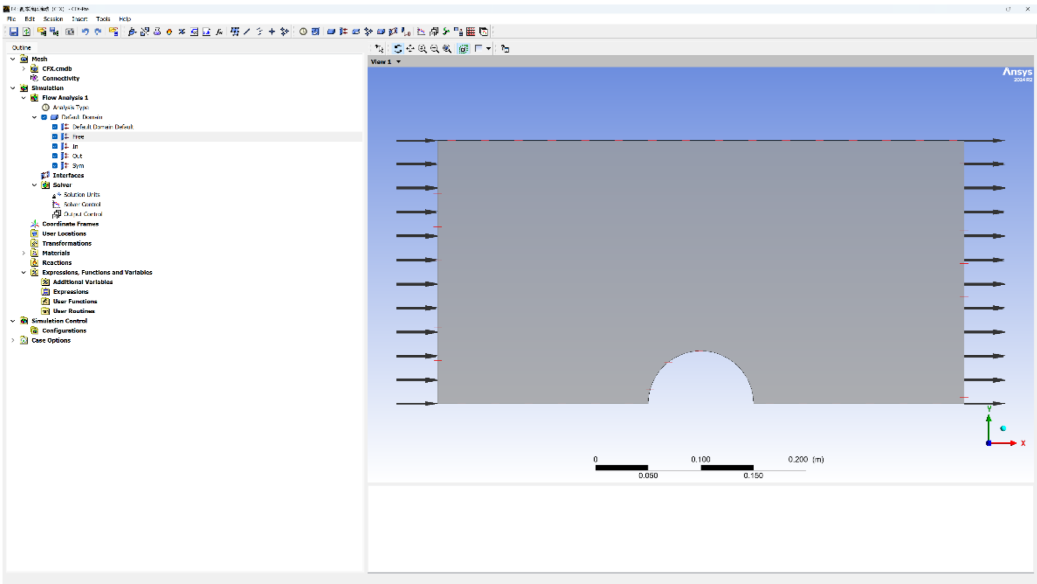
第一次分析设置时，只加了进口条件和对称条件，并且湍流选项设置为 Shear Stress Transport，分析时间一小时，在分析结束后才意识到未设置的边都默认为 Wall，得到以下结果。

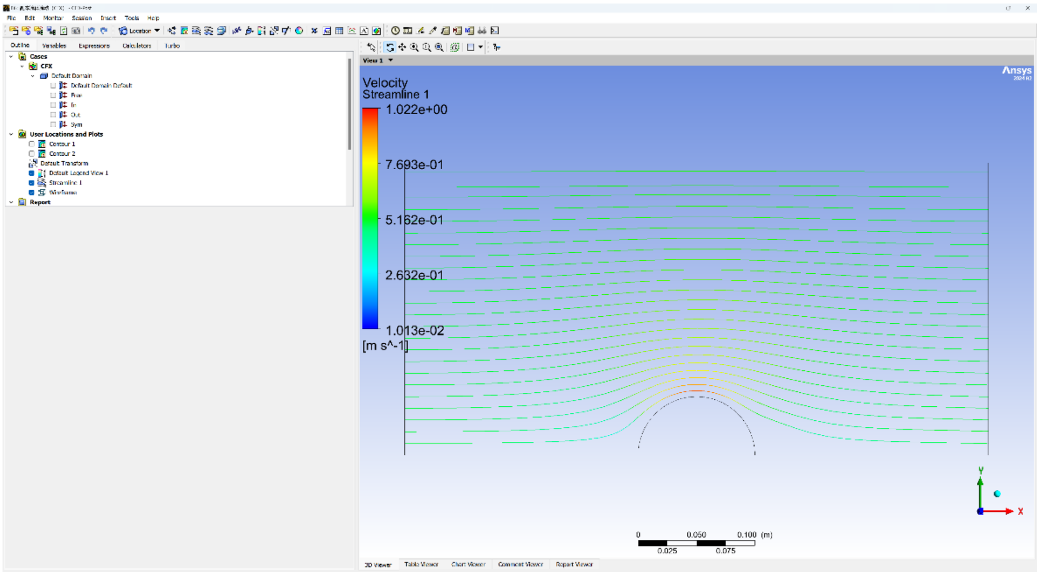

Velocity
Streamline 1
6.279e-01
4.720e-01
3.161e-01
1.602e-01
4.260e-03
[m s^-1]
Ansys
0
0.050
0.100 (m)
0.025
0.075

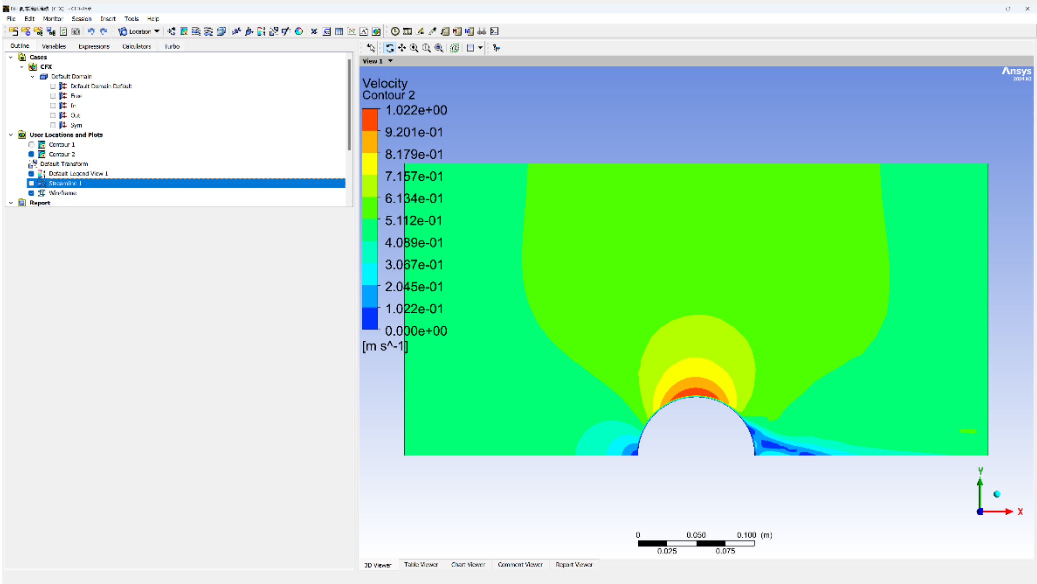

Velocity
Contour 2
6.279e-01
5.651e-01
5.023e-01
4.395e-01
3.768e-01
3.140e-01
2.512e-01
1.884e-01
1.256e-01
6.279e-02
0.000e+00
[m s^-1]
Ansys
0
0.050
0.100 (m)
0.025
0.075

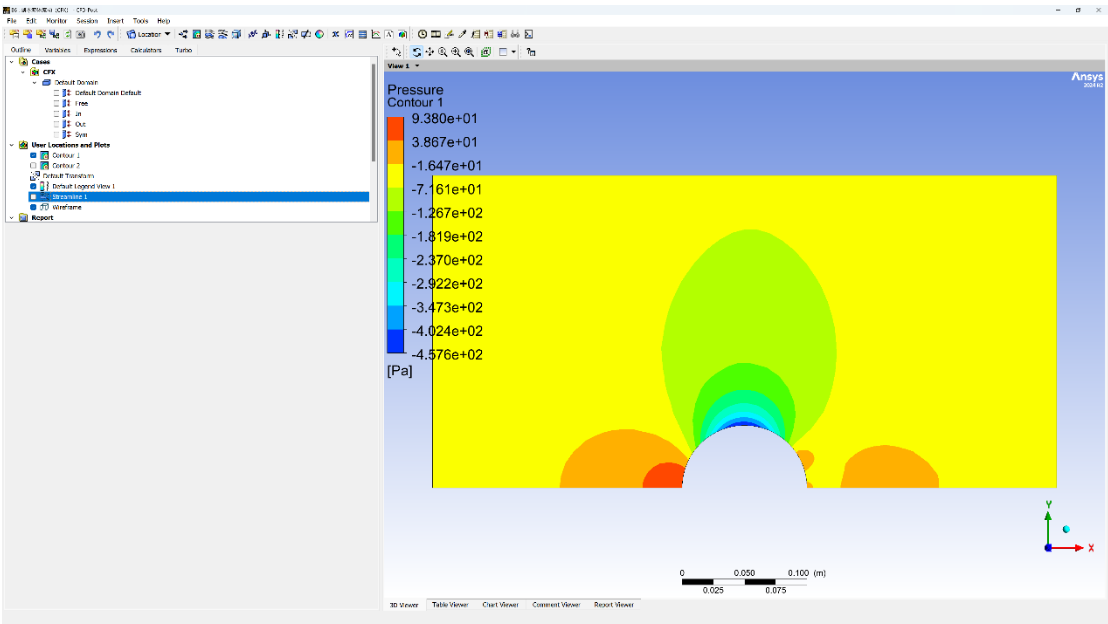


结果很有趣，但不是我们想要的，于是修改分析设置，加入 Out，把水流改为层流，在上下两条边上加上 Free Slip Wall 代表它们都是没有摩擦力的 Wall，进行分析，分析时间十分钟，结果如下。



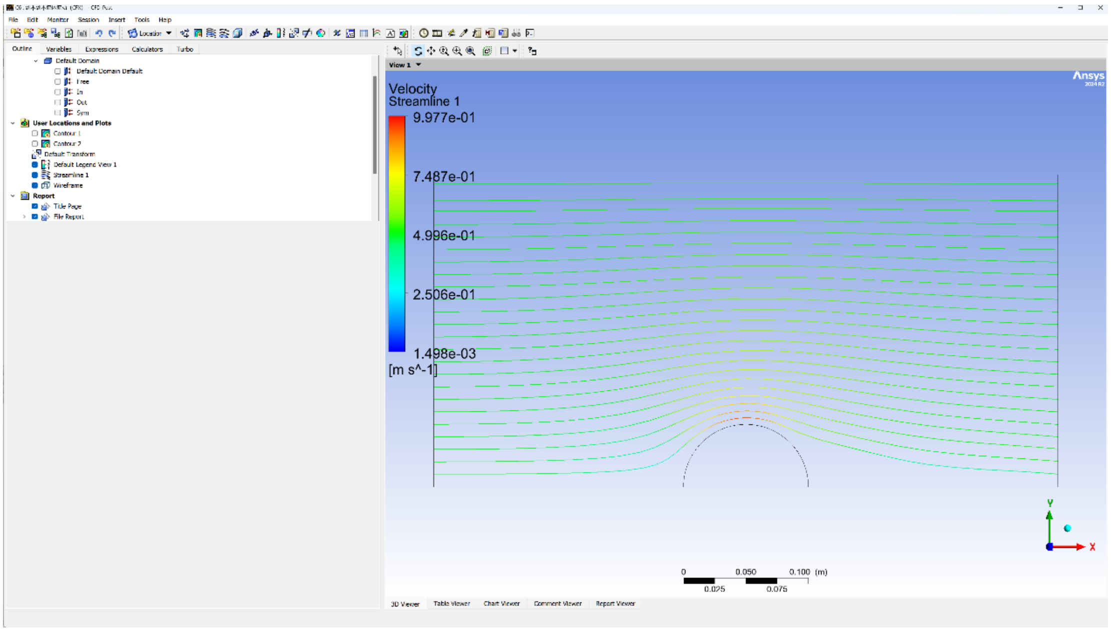

Velocity
Streamline 1
1.022e+00
7.693e-01
5.162e-01
2.632e-01
1.013e-02
[m s^-1]
0
0.050
0.100
(m)
0.025
0.075

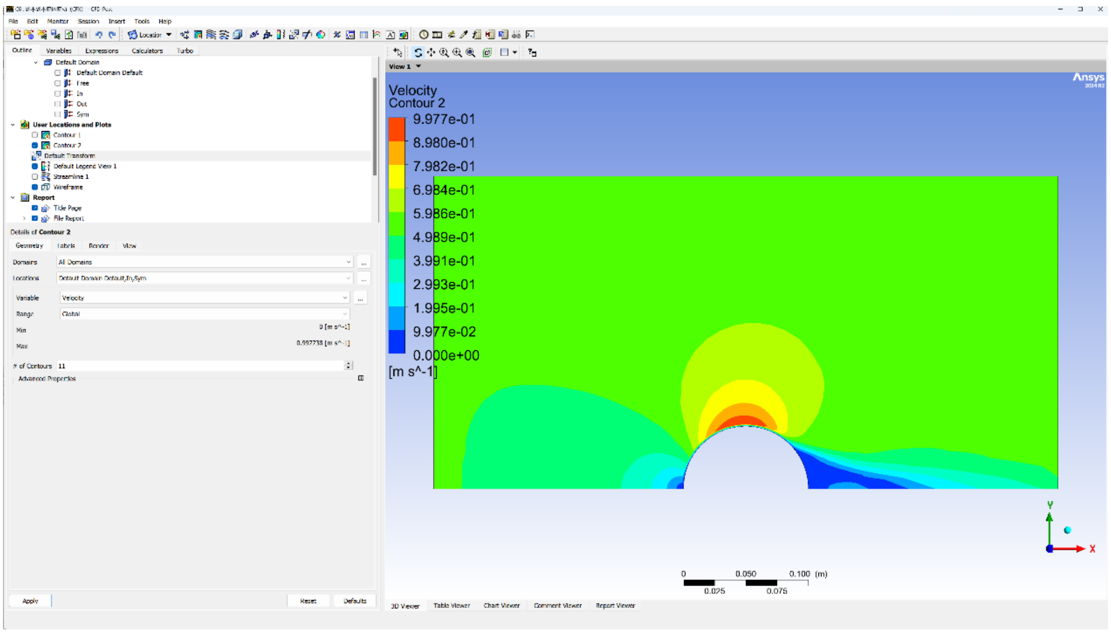

Velocity
Contour 2
1.022e+00
9.201e-01
8.179e-01
7.157e-01
6.134e-01
5.112e-01
4.089e-01
3.067e-01
2.045e-01
1.022e-01
0.000e+00
[m s^-1]
0
0.050
0.100
(m)
0.025
0.075

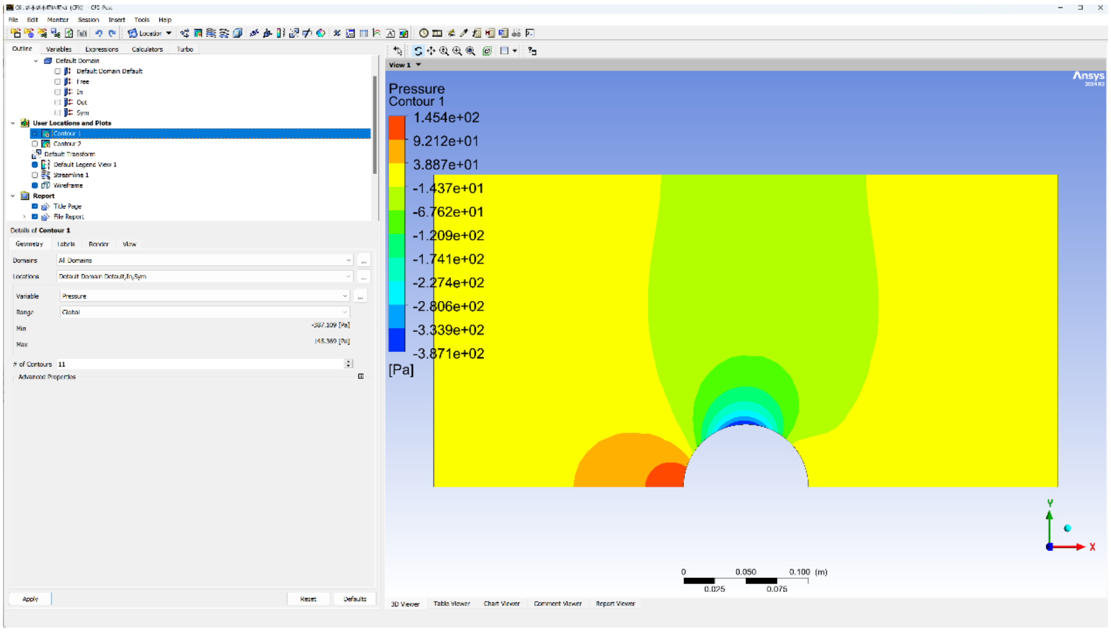

Pressure
Contour 1
9.380e+01
3.867e+01
-1.647e+01
-7.161e+01
-1.267e+02
-1.819e+02
-2.370e+02
-2.922e+02
-3.473e+02
-4.024e+02
-4.576e+02
[Pa]
0
0.050
0.100
(m)
0.025
0.075

由此可得，最大速度为 1.022m/s，压力差为 551.4Pa

调整湍流选项为 Shear Stress Transport，再次分析，分析时间二十分钟，结果如下







得到最大速度为 0.9977m/s，压力差为 532.5Pa

观察可知最大速度位置在（0，50）附近，则有

$$U(0,50) = U_\infty - U_\infty \frac{r_0^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 1m/s$$

最大压力位置在（-50，0）附近，最小压力位置在（0，50）附近，则有

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 r_0^2 \frac{2x^2 - 2y^2 - r_0^2}{(x^2 + y^2)^2} + P_\infty$$

$$\Delta P = P(-50,0) - P(0,50) = 2\rho U_\infty^2 = 500Pa$$

可以发现理论值与仿真较为接近，其中湍流选项为 Shear Stress Transport 时的仿真结果更加接近理论值。