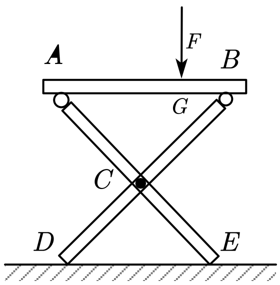
2014-2015 学年第一学期期末考试 B 卷

计算题（共 5 题）

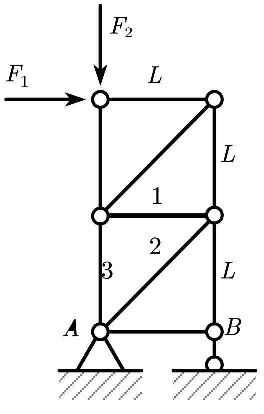
一、**(20 分)**图示光滑水平地面上结构，直杆AB水平，A、B、C处由光滑铰连接，C为直杆AE与BD的中点，长度$AG=2BG=2a$，$AD=BE=DE=3a$。杆AB于G处受垂直力F作用，结构平衡，各杆重不计。

求：（1）铰A的约束力；（2）铰C的约束力。



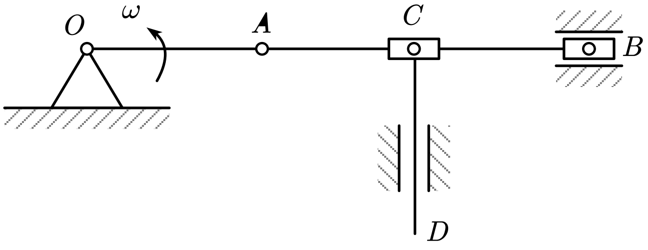
二、**(20 分)**图示长方形平面桁架，A 处为固定铰支座，B 处为滑动铰支座。长度 $L=2m$，水平与垂直作用力 $F_1=F_2=5kN$，各杆重不计。

求：杆 1、2 和 3 的内力。



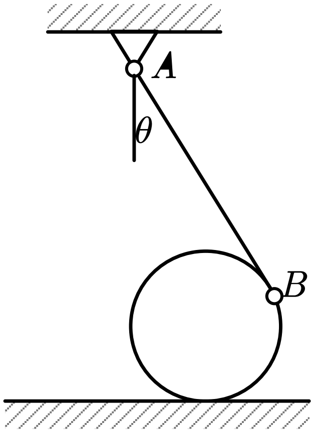
三、**(20 分)**图示平面机构，杆OA绕O轴转动，杆OA与AB于A处由光滑铰连接，滑块B在水平槽滑动，C处为套筒联接，杆CD在垂直槽滑动，杆长$OA=r$，$AB=2r$。图示瞬时，杆OA与AB水平，$AC=BC$，OA杆的角速度为ω，角加速度$\alpha=0$。

求：此时，（1）杆AB的角速度，杆CD的速度；（2））杆AB的角加速度。



四、**(25 分)**图示均质杆AB，长度为L，质量为$3m$，A端受固定铰支座约束，B端由光滑铰联接圆轮，均质轮O的半径为R，质量为m。铰A离水平地面的高度为$L+R$，地面光滑，杆初始角度$\theta=\arccos(4/5)$，无初速运动到$\theta=0$位置时。

求：此时，（1）杆AB的角速度；（2）轮的角加速度，地面的约束力；（3）杆与轮的惯性力系简化结果。



五、**(15 分)**设某两自由度保守系统的广义坐标为q_1、q_2，动能T与势能V分别为$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)$，

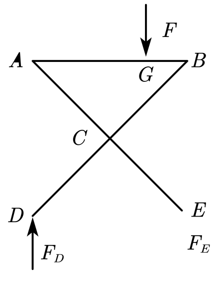
$V=\frac{1}{2}k[q_1^2+(q_1-q_2)^2+q_2^2]$，（$m$，$k$为常数）

求：（1）该系统的拉格朗日方程；（2）系统的哈密顿方程。

2014-2015 学年第一学期期末考试 B 卷参考答案

计算题(共 5 题)

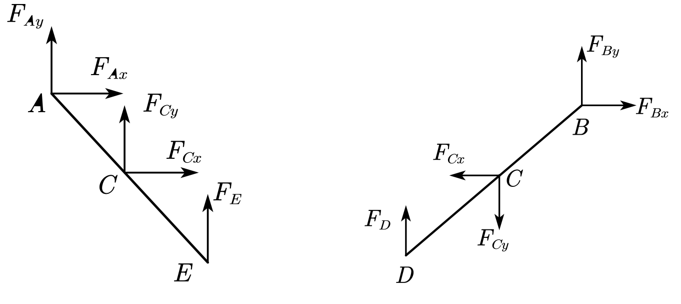
一、【解析】（1）取整体分析：



$$\sum M_D=0:\quad -F\times 2a+F_E\times 3a=0\Rightarrow F_E=\frac{2}{3}F$$

$$\sum F_y=0:\quad -F+F_D+F_E=0\Rightarrow F_D=\frac{1}{3}F$$

取 AE、BD 分析



$$AE:\ \sum M_A=0:\ (F_{Cy}+F_{Cx})\frac{3}{2}a+\frac{2}{3}F\times 3a=0$$

$$BD:\ \sum M_B=0:\quad F_{Cy}\cdot\frac{3}{2}a-F_{Cx}\cdot\frac{3}{2}a-\frac{1}{3}F\times 3a=0$$

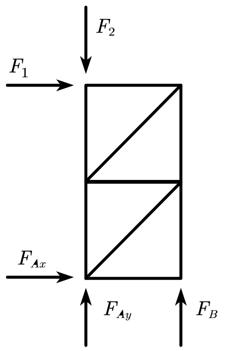
$$\Rightarrow F_{Cy}=-\frac{1}{3}F \qquad F_{Cx}=-F$$

$$AE:\ \sum F_x=0:\quad F_{Ax}+F_{Cx}=0\Rightarrow F_{Ax}=F$$

$$\sum F_y=0:\quad F_{Ay}+F_{Cy}+F_E=0\Rightarrow F_{Ay}=-\frac{1}{3}F$$

【考点延伸】平面力系平衡方程

二、【解析】取整体分析



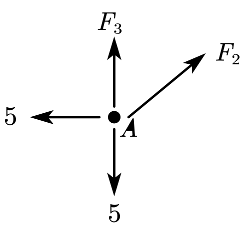
$$\sum M_A=0:\quad -F_1\times 4+F_B\times 2=0\Rightarrow F_B=10kN(\uparrow)$$

$$\sum F_y=0:\quad -F_2+F_{Ay}+F_B=0\Rightarrow F_{Ay}=-5kN(\downarrow)$$

$$\sum F_x=0:\quad F_1+F_{Ax}=0\Rightarrow F_{Ax}=-5kN(\leftarrow)$$

易得AB杆为零杆

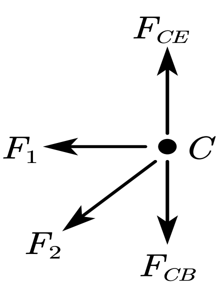
取A结点分析



$$\sum F_x=0:\quad F_2\cos 45°-5=0\Rightarrow F_2=5\sqrt{2}\,kN$$

$$\sum F_y=0:\quad F_3+F_2\cos 45°-5=0\Rightarrow F_3=0$$

取C结点分析

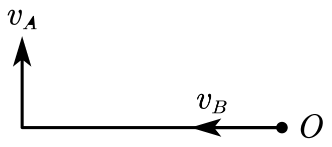


$$\sum F_x=0:\quad -F_1-F_2\cos 45°=0\Rightarrow F_1=-5kN$$

综上，$F_1 = -5kN \quad F_2 = 5\sqrt{2}\,kN \quad F_3 = 0kN$

【考点延伸】平面桁架受力分析

3、【解析】（1）取AB杆速度分析：



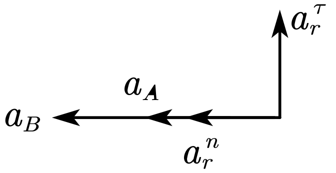
易得O为瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{\omega r}{2r} = \frac{\omega}{2}(\text{顺})$$

$$V_{CD} = V_C = \omega_{AB} \cdot r = \frac{\omega r}{2}(\uparrow)$$

（2）以A为基点分析B

由$\vec{a_a} = \vec{a_e} + \vec{a_r}$得



$$\Rightarrow a_r^\tau = 0 = \alpha 2r \Rightarrow \alpha = 0\ rad/s$$

【考点延伸】点的速度与加速度合成

四、【解析】

（1）当θ为任意角度时，$\omega L = \omega_o R \cot\theta \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{\omega L \tan\theta}{R}$

$$v_o = \omega_o \times R\csc\theta = \frac{\omega L \sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\omega L}{\cos\theta}$$

由动能定理得$T_2 - T_1 = \omega \quad T_1 = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} J_{o'} \omega_o^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2L^2\sec^2\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\csc^2\theta\right)\frac{\omega^2L^2}{R^2}\tan^2\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3mL^2\cdot\omega^2$$

$$=m\omega^2L^2\sec^2\theta+\frac{1}{4}m\omega^2L^2\tan^2\theta+\frac{1}{2}mL^2\omega^2$$

$$\omega=3mg\left[\left(L+R-\frac{L}{2}\frac{4}{5}\right)-\left(L+R-\frac{L}{2}\cos\theta\right)\right]=\frac{3}{2}mgL\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)$$

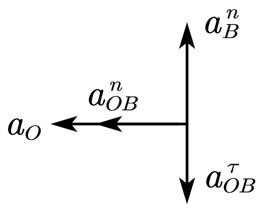
$$\Rightarrow m\omega^2L^2\sec^2\theta+\frac{1}{4}m\omega^2L^2\tan^2\theta+\frac{1}{2}mL^2\omega^2=\frac{3}{2}mgL\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)\quad（1）$$

令$\theta=0$时，$m\omega^2L^2+\frac{1}{2}m\omega^2L^2=\frac{3}{10}mgL\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{5L}}$(顺)

（2）对（1）式两边对t求导（令$\theta=0$简化）

$$\frac{1}{2}mL^2 2\omega\cdot\alpha=\frac{3}{2}mgL\sin\theta\omega=0\Rightarrow\alpha=0\ rad/s^2$$

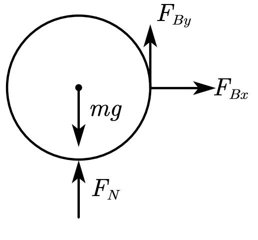
以B为基点分析O（$\theta=0$）



$$a_O=a_{OB}^n=\omega_O^2R=0\ rad/s^2$$

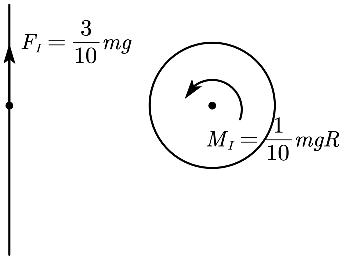
$$a_{OB}^\tau=\alpha_O R=a_B^n=a_B^n=\omega^2L=\frac{g}{5}\Rightarrow\alpha_O=\frac{g}{5R}\text{(顺)}$$

取轮分析



$$mg-F_N=0\Rightarrow F_N=mg(\uparrow)$$

（3）简化结果如下



【考点延伸】动能定理，刚体平面运动微分方程，惯性力系简化

五、【解析】

（1）$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)-k\left(q_1^2+q_2^2-q_1q_2\right)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=m\dot{q}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=m\dot{q}_2$

拉氏方程 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0(k=1,2)$

即 $m\ddot{q}_1+2kq_1-kq_2=0 \qquad m\ddot{q}_2+2kq_2-kq_1=0$

（2）广义动量 $p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=m\dot{q}_1 \Rightarrow \dot{q}_1=\frac{p_1}{m}$

$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=m\dot{q}_2 \Rightarrow \dot{q}_2=\frac{p_2}{m}$

哈氏函数 $H=\sum_{k=1}^{2}p_k\dot{q}_k-L=\frac{p_1^2}{m}+\frac{p_2^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)-k\left(q_1^2+q_2^2-q_1q_2\right)$

$=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}-k\left(q_1^2+q_2^2-q_1q_2\right)$

哈氏方程 $\begin{cases}\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m}\text{、}\dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{m}\\ \dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=2kq_1-kq_2\text{、}\dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=2kq_2-kq_1\end{cases}$

【考点延伸】拉格朗日方程、哈密尔顿正则方程