第六章

控制系统的误差分析和计算

前五章课的简单回顾：

（3）研究系统的哪些东西？

快速性

- **瞬态响应**
  - 系统需要花多长时间才能达到稳定？
  - 系统重新达到稳定的过程中是否会振荡？
- **频率响应**
  - 系统的幅值比和相位差与输入频率的关系（幅频特性和相频特性）；
  - 幅频特性和相频特性的描述：乃氏图、伯德图；
  - 频率特性↔传递函数
  - 控制系统的开闭环关系

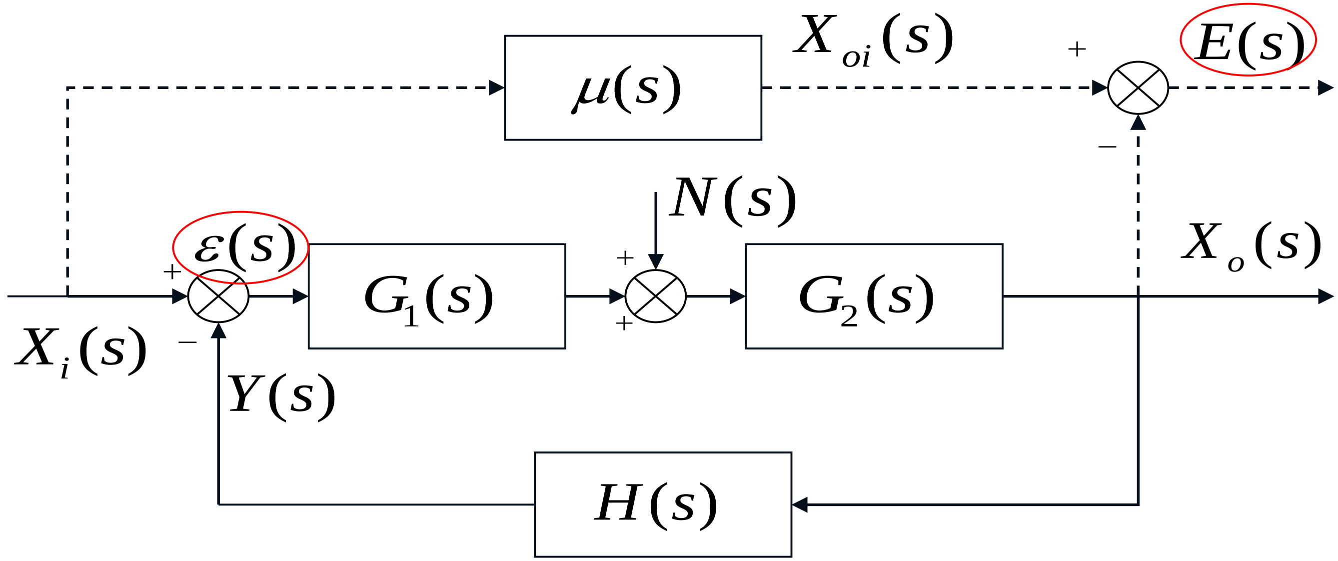
稳定性

- **负反馈闭环系统的稳定性**
  - 代数稳定性判据：劳斯判据；
  - 乃氏判据（基于开环系统的幅频和相频特性的稳定性判据）
  - 伯德判据（由乃氏判据延伸出的稳定性判据）

准确性

- **控制系统的准确性**
  - 输入信号和干扰信号引起的稳态误差；
  - 稳态误差的补偿

§6-1 稳态误差的基本概念



$$\varepsilon(t)=x_i(t)-y(t)$$

偏差信号　输入信号　反馈信号

$$e(t)=x_{oi}(t)-x_0(t)$$

误差信号　希望输出信号　实际输出信号

定义：误差信号的稳态分量即为稳态误差，计为 $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)$

$$\boxed{e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)}$$

误差信号与偏差信号之间的关系：

$$E(s)=\frac{1}{H(s)}\varepsilon(s) \qquad \varepsilon(s)=H(s)E(s)$$

对于实际控制系统来说，**H(s)**是一个常数，所以

$$E(s)=\frac{1}{H}X_i(s)-X_o(s)$$

$$E(s)=\frac{1}{H}\varepsilon(s)$$

对于单位反馈系统来说，**H(s)=1**，误差信号与偏差信号相同。这样，求得稳态偏差就求得了稳态误差。

输入信号$X_i(s)$与干扰信号$N(s)$的系统输出分别为

$$X_0(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)$$

$$X_{oN}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

因此，系统由输入信号和干扰信号引起的总偏差为

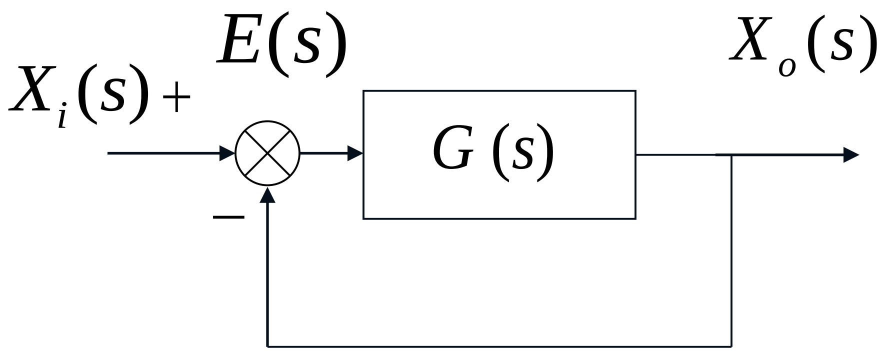
$$\begin{aligned}\varepsilon(s)&=X_i(s)-H(s)\left[X_o(s)+X_{oN}(s)\right]\\&=X_i(s)-H(s)\left[\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)\right]\\&=\underline{\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)}+\underline{\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)}\end{aligned}$$

其中：　输入信号引起的偏差；　干扰信号引起的偏差。

§6-2 输入引起的稳态误差

一、误差传递函数与稳态误差

先看单位反馈的控制系统，如图



系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$$

或

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}X_i(s)$$

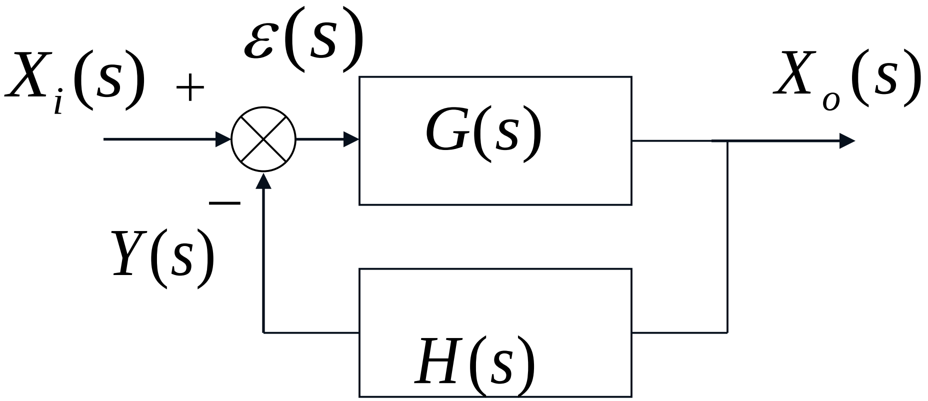
根据终值定理

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{1+G(s)}X_i(s)$$

这就是求取单位反馈闭环控制系统稳态误差的方法。前提是系统稳定！

对于非单位反馈控制系统，要注意

误差与偏差的区别



此时

$$\varepsilon(s) = X_i(s) - H(s)X_o(s) = X_i(s) - H(s)G(s)\varepsilon(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)$$

由终值定理得稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \varepsilon(s)$$

即

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} X_i(s)$$

而

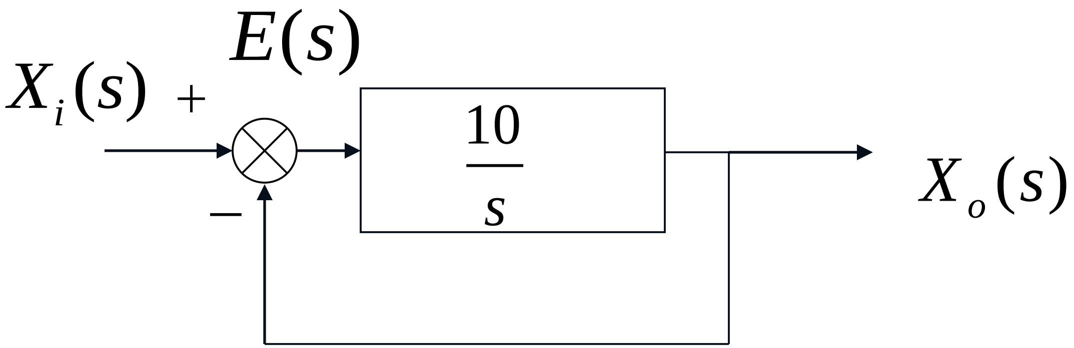
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot X_i(s)$$

一般情况下，**H**为常值故这时

$$e_{ss} = \frac{\varepsilon_{ss}}{H}$$

显然，稳态误差取决于系统结构参数和输入信号的 $X_i(s)$ 性质

例1 某反馈系统如下图，当 $x_i(t)=1(t)$ 时，求稳态误差。



解 ：该系统为一阶惯性系统，系统稳定。

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\frac{10}{s}}=\frac{s}{s+10}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s}{s+10}\cdot X_i(s)$$

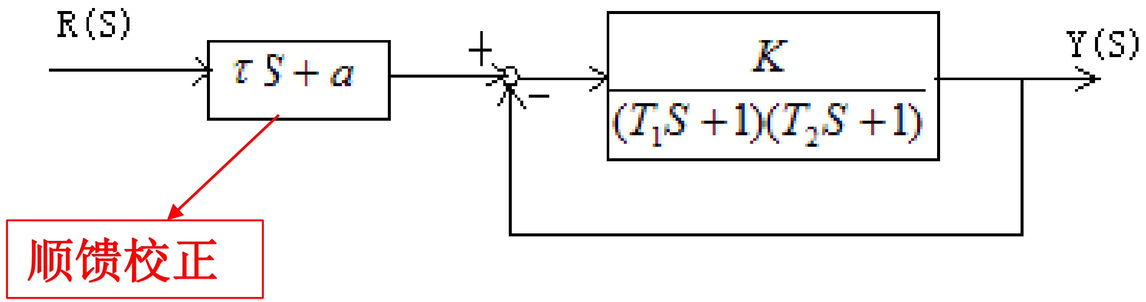
对比P79和P80

单位斜坡输入？

$$X_i(s)=\frac{1}{s}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s}{s+10}\cdot\frac{1}{s}=0$$

例2.系统下图所示，误差为e(t)=r(t)-y(t)，r(t)=t · 1(t)，试选择α和τ 的值，使稳态误差 $e_{ss} \to 0$



解：该系统为典型二阶振荡系统，系统稳定。

$$Y(S)=\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}\cdot R(S)$$

$$E(S)=R(S)-Y(S)=[1-\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}]R(S)$$

由终值定理：

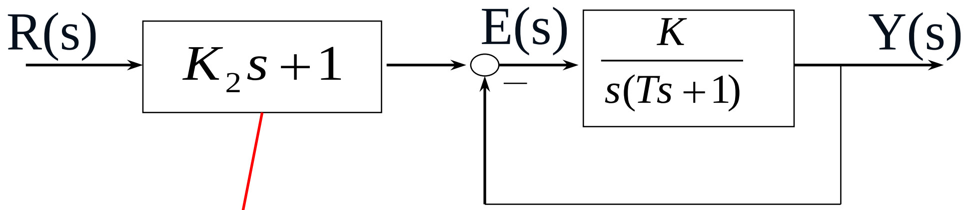
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}S\cdot[1-\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}]\cdot\frac{1}{S^2}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{T_1T_2S^2+(T_1+T_2-K\tau)S+(1+K-K\alpha)}{S\left[(T_1S+1)(T_2S+1)+K\right]}$$

$$\because e_{ss}\to 0$$

$$\therefore\begin{cases}1+K-K\alpha=0\\ T_1+T_2-K\tau=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1+K}{K}\\ \tau=\dfrac{T_1+T_2}{K}\end{cases}$$

例3. 控制系统见附图，试证：调节K2，系统对斜坡输入响应的稳态误差为零。（R(t)=*a*t, *a*为任意常数）；



顺馈校正：对输入信号进行整形或滤波，又称前置滤波器

解：因为系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$$Y(s)=\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot R(s)$$

显然，不论**K2**如何取值，闭环系统都是稳定的**.**根据已知条件

$$E(s)=R(s)-Y(s)=(1-\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K})\cdot R(s)=s\cdot(\frac{Ts+1-KK_2}{Ts^2+s+K})R(s)$$

代入***r(t)=at***，$R(s)=\frac{a}{s^2}$；由终值定理得稳态误差的表达式：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot s\cdot(\frac{Ts+1-KK_2}{Ts^2+s+K})\cdot\frac{a}{s^2}=\frac{a(1-KK_2)}{K}=0$$

即可求得,只要：$1-KK_2=0, K_2=\frac{1}{K}$ 时满足要求。

比例-微分（PD）控制器的作用

$$X_o(s) = X_i(s) \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

因式
分解

$$X_o(s) = X_i(s) \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^r (s^2 + q_1) \ldots (s + p_1)(s + p_2) \ldots (s^2 + c_1 s + d_1)(s^2 + c_2 s + d_2) \ldots}$$

分式
展开

一阶　一阶　二阶　二阶

$$\frac{\bigcirc}{\bigcirc} + \frac{a_{11}}{s + p_1} + \frac{a_{21} + \cdots}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_{k1} s + b_{k1}}{s^2 + 2\zeta_1\ \omega_1\ s + \omega_1^2} + \frac{a_{k2} + b_{k2}}{s^2 + 2\zeta_2\ \omega_2\ s + \omega_2^2} + \cdots$$

无衰减

$$e^{-p_1 t} \cdot \Delta\Delta$$

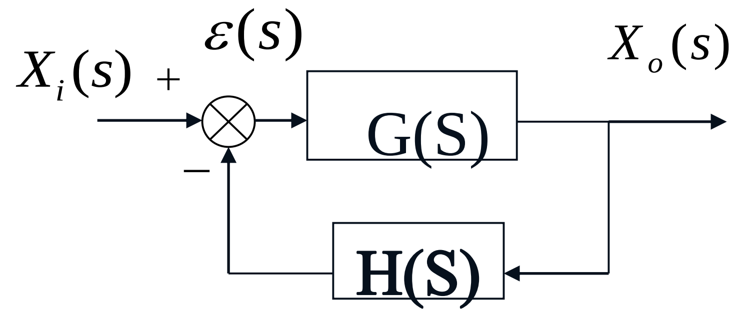
$$e^{-p_2 t} \cdot \Delta\Delta$$

$$\Delta\Delta \cdot e^{-\zeta_1\ \omega_1\ t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta_1^2 \omega_1\ t + \cdots})$$

$$\Delta\Delta \cdot e^{-\zeta_2\ \omega_2\ t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta_2^2 \omega_2\ t + \cdots})$$

开环传函 → 闭环误差

二、静态误差系数



负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\qquad(n\geq m)$$

因式分解

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^{\gamma}(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}$$

式中：K为系统的开环增益，γ为系统的开环型次。

1. 系统对单位阶跃输入的稳态偏差是

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

定义静态位置误差系数 K_p

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=G(0)H(0)$$

于是，如用 K_p 去表示单位阶跃输入时的稳态偏差，则

$$\varepsilon_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

a.对0型系统，设G(s)H(s)为

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^0(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

则

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=K$$

对于0型系统静态位置误差系数 K_p，就是系统的开环放大倍数 K

b.对于 I 型或高于 I 型的系统

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=\infty$$

所以，对于单位阶跃输入的稳态误差可以概括如下：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{1+K} & \text{（对0型系统）}\\ \varepsilon_{ss}=0 & \text{（对 I 型或高于 I 型的系统）}\end{cases}$$

2. 在单位斜坡输入时，系统稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$$

$$= \frac{1}{K_v}$$

定义静态速度误差系数 K_v

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

a.对0型系统

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{K\left(\tau_1 s+1\right)\left(\tau_2 s+1\right)\cdots\left(\tau_m s+1\right)}{\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_n s+1\right)}=0$$

b.对 I 型系统

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{K\left(\tau_1 s+1\right)\left(\tau_2 s+1\right)\cdots\left(\tau_m s+1\right)}{s\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_n s+1\right)}=K$$

c.II型或高于II型的系统

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{K\left(\tau_1 s+1\right)\left(\tau_2 s+1\right)\cdots\left(\tau_m s+1\right)}{s^2\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\cdots\left(T_n s+1\right)}=\infty$$

所以：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{0}=\infty & \text{（0型系统）}\\[2ex] \varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{K} & \text{（I 型系统）}\\[2ex] \varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{\infty}=0 & \text{（II型或更高的系统）}\end{cases}$$

3.在单位加速度输入时，系统的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}=\frac{1}{K_a}$$

定义静态加速度误差系数 K_a：

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s)H(s)$$

对**0**型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=0$$

对 **I** 型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=0$$

对**II**型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=K$$

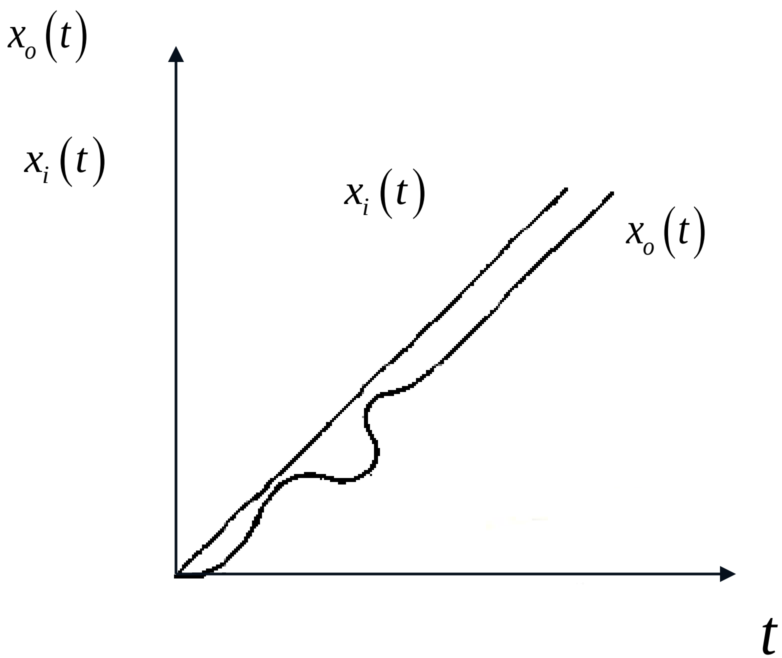
所以，在单位加速度输入下

对**0**型系统， $$e_{ss}=\infty$$

对 **I** 型系统， $$e_{ss}=\infty$$

对**II**型系统， $$e_{ss}=\frac{1}{K}$$

所以，**0**型和**Ⅰ**型系统在稳定状态下都不能跟踪加速度输入信号。具有单位反馈的**Ⅱ**型系统在稳定状态下是能够跟踪加速度输入信号的。但带有一定的位置误差，见图。高于**Ⅱ**型以上的系统，稳定性差，故不实用。



小结：

1.工程中所指的位置误差，速度误差，加速度误差分别指输入是阶跃、斜坡、匀加速度输入时所引起的输出位置上的误差。

2.在单位输入信号时，稳态误差的结果有三种：下表概括了**0**型、**Ⅰ**型和**Ⅱ**型系统在各种输入量作用下的稳态误差。

输入信号 / 系统类型	单位阶跃	等速输入	等加速度输入
0 型	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
Ⅰ型	0	$\frac{1}{K_1}$	∞
Ⅱ型	0	0	$\frac{1}{K_2}$

零（无差）表示系统能准确地跟踪

$\frac{1}{1+K_p}$，$\frac{1}{K_v}$，$\frac{1}{K_a}$表示系统能有差的跟踪

∞ 表示不能跟踪

3. 静态误差系数 K_p、K_v、 K_a 分别是**0**型、 **Ⅰ**型、 **Ⅱ**型系统的开环静态放大倍数。有差跟踪时，其稳态偏差与系统开环增益成反比。

4.对于单位反馈系统，稳态误差等于稳态偏差。对于非单位反馈系统，先计算出稳态偏差后，用 $e_{ss}=\frac{\varepsilon_{ss}}{H(s\to 0)}$ 计算稳态误差。

5.上述结论是以阶跃、斜坡等典型输入信号作用下得到的，但它具有普遍的意义。这是因为控制系统输入信号的变化往往是比较缓慢，可把输入信号 $x_i(t)$ 在**t=0**点附近展开成泰勒级数

$$x_i(t) = x_i(0) + x_i^{(1)}(0)t + \frac{1}{2!}x_i^{(2)}(0)t^2 + \cdots\cdots$$

$$= x_i(0) + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\cdots$$

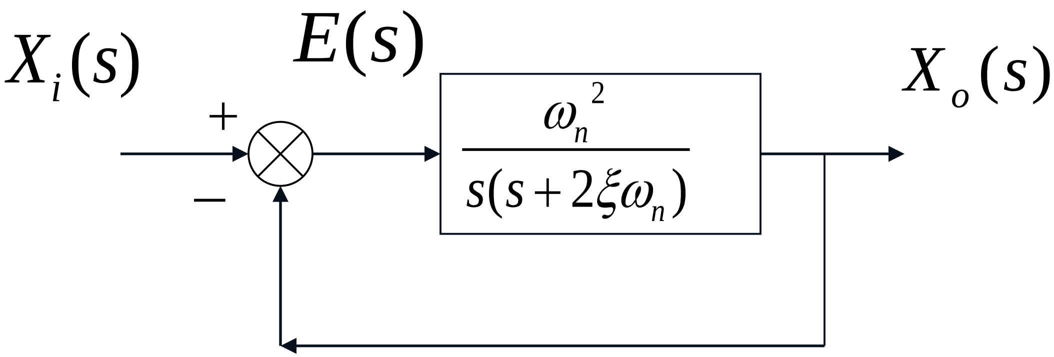
其中 $$a_1 = x_i^{(1)}(0) = \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$a_2 = x_i^{(2)}(0) = \left.\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

这样，可把控制信号看成几个典型信号之和，系统的稳态误差可看成是上述典型信号分别作用下的误差总和。

讲解习题**6-1, 6-2, 6-3,**

例4：设有二阶振荡系统，其方块图如下



试求系统在单位阶跃、单位恒速、单位恒加速输入时的静态误差

解 由于是单位反馈系统

$$\varepsilon_{ss} = e_{ss}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{\frac{\omega_n}{2\xi}}{s(\frac{s}{2\xi\omega_n}+1)}$$

可见，这个系统是 I 型系统，其增益 $K = \frac{\omega_n}{2\xi}$,故

输入 x_i 为单位阶跃时，$\varepsilon_{ss} = e_{ss} = 0$

为单位恒速时， $\varepsilon_{ss} = e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} = \frac{2\xi}{\omega_n}$， 为常量

为单位恒加速输入时， $\varepsilon_{ss} = e_{ss} = \infty$ ，所以系统不能承受恒加速输入。图

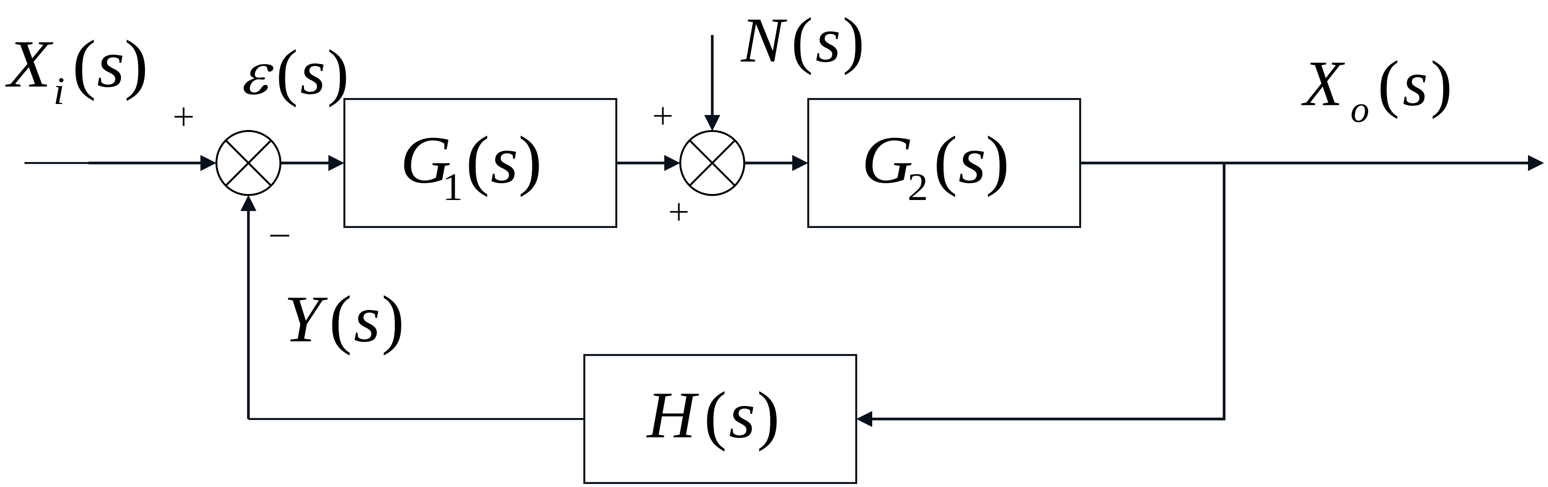
对比P83图3-12和P87图3-20

§ 6-3　扰动引起的稳态误差

实际控制系统中，不但存在给定的输入信号 $x_i(t)$ ，还存在干扰作用**N(t)**，如图所示。要求出稳态偏差，可以利用迭加原理，分别求出 $x_i(t)$及**N(t)**单独作用时的偏差，然后求其代数和，就是总偏差。

显然由 $x_i(t)$ 作用得到的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss1}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot X_i(s)$$



由于扰动作用**N(t)**引起的稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \right) \cdot N(s)$$

$$E_{ss2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(-\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \right) \cdot N(s)$$

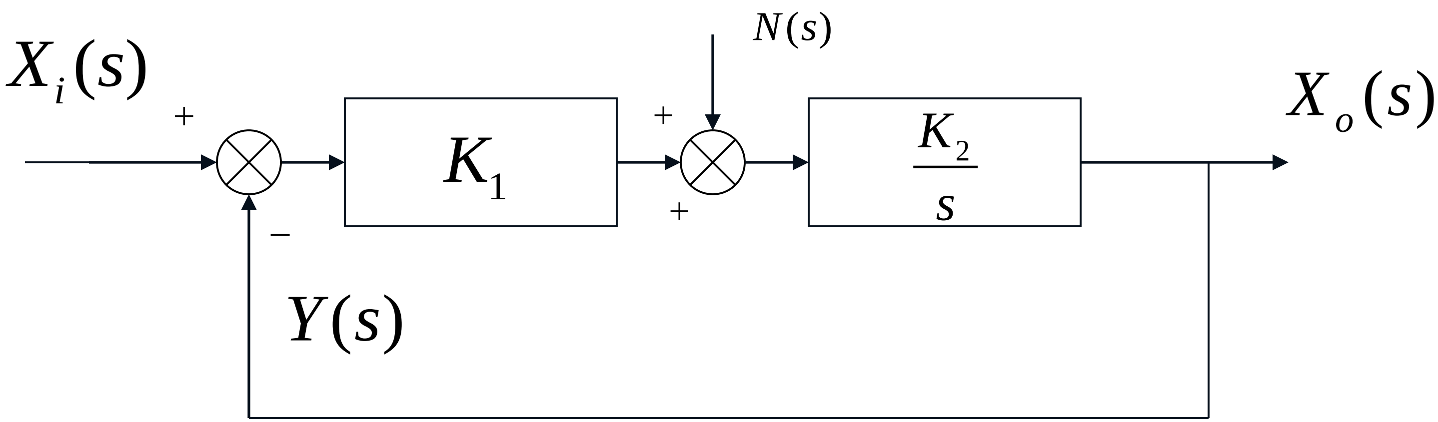
因此，总的稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss1} + \varepsilon_{ss2}$$

总的稳态误差为

$$e_{ss} = \varepsilon_{ss} / H(0)$$

例5 系统结构图如图，当输入信号 $x_i(t)=1(t)$ ，干扰**N(t)=1(t)**时，求系统总的稳态误差 ε_{ss}



第一步要判别稳定性，由于是一阶系统，所以只要参数K_1 ，K_2 大于零，系统就稳定

第二步，求**E(s)**。因为是单位反馈 $\varepsilon(s)=E(s)$， $\varepsilon_{ss}=e_{ss}$ 。先求输入引起稳态误差 e_{ss1}

$$e_{ss1}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+\frac{K_1K_2}{s}}\cdot\frac{1}{s}=0$$

再求干扰引起的稳态误差

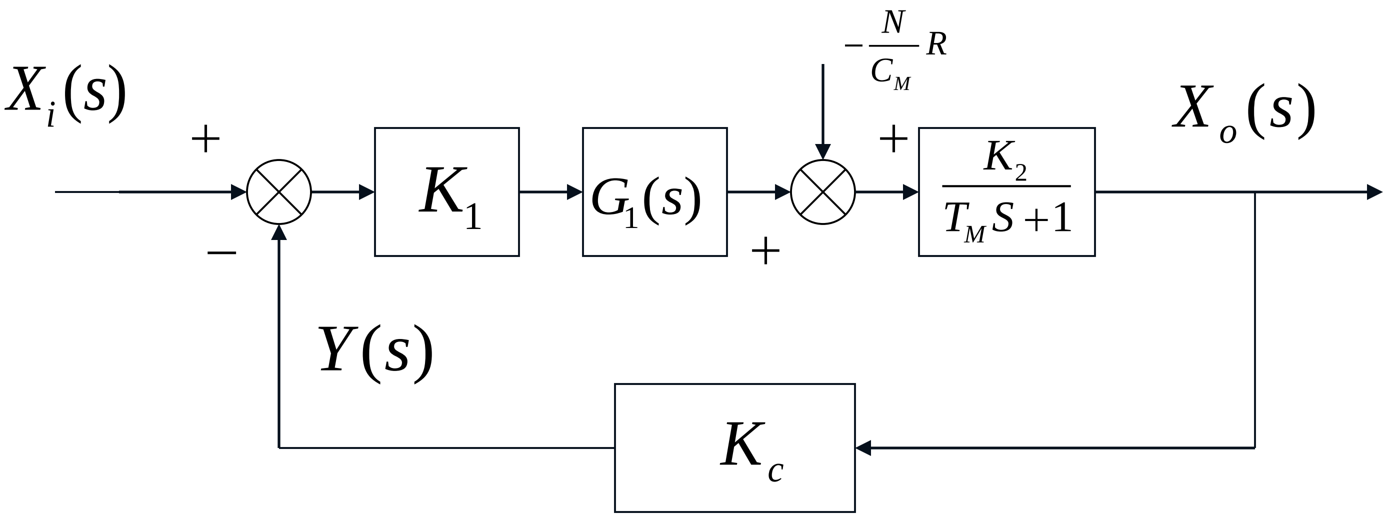
$$e_{ss2}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\frac{K_2}{s}}{1+\frac{K_1K_2}{s}}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{-K_2}{s+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}$$

总的误差为：

$$e_{SS}=e_{ss1}+e_{ss2}=-\frac{1}{K_1}$$

自习P214的例题1

例**6** 某直流伺服电动机调速系统如图所示，试求扰动力矩**N(s)**引起的稳态误差。



解 此为一非单位反馈控制系统，先求扰动作用下的稳态偏差 ，再求 e_{ss}

设 $G_1(s)=1$ ：系统是一阶的，因此稳定。图中**R**是电机电枢电阻，C_M 是力矩系数， **N**是扰动力矩，因此干扰作用为一个常值阶跃干扰，故稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{-\dfrac{K_2 K_c}{T_M s + 1}}{1 + \dfrac{K_1 K_2 K_c}{T_M S + 1}} \cdot \left(\frac{-NR}{C_M s} \right)$$

$$= \frac{K_2 K_c}{1 + K_1 K_2 K_c} \cdot \frac{R}{C_M} \cdot N$$

而稳态误差为

$$E_{ss} = \varepsilon_{ss} / K_c = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2 K_c} \cdot \frac{R}{C_M} \cdot N$$

当 $K_1 K_2 K_c \geq\geq 1$（称环路增益）时

$$E_{ss} \approx \frac{1}{K_1 K_c} \cdot \frac{R}{C_M} \cdot N$$

这就是说，扰动作用点与偏差信号间的放大倍数 K_1 越大，则误差越小 。

为进一步减小误差，可让 $G_1(s)=1+\dfrac{K_3}{s}$ ，称为比例加积分控制。选择 K_3 使系统具有一定的稳定裕量，同时其稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\dfrac{K_2K_c}{T_Ms+1}}{1+\dfrac{K_1K_2K_c}{T_MS+1}\left(1+\dfrac{K_3}{s}\right)}\cdot\left(\frac{-NR}{C_Ms}\right)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{-K_2K_c}{1+K_1K_2K_c(1+\infty)}\cdot\left(\frac{-NR}{C_Ms}\right)$$

$$=0$$

因而

$$e_{ss}=0$$

从物理意义上看，在扰动点与偏差信号之间加上积分环节就等于加入静态放大倍数为 ∞ 的环节，因此静误差为零。

思考：积分环节放在扰动点之后呢？

自习P215的例题2，并讲解习题6-4,6-6,6-7

§ 6-4 误差补偿

减小系统误差的途径：

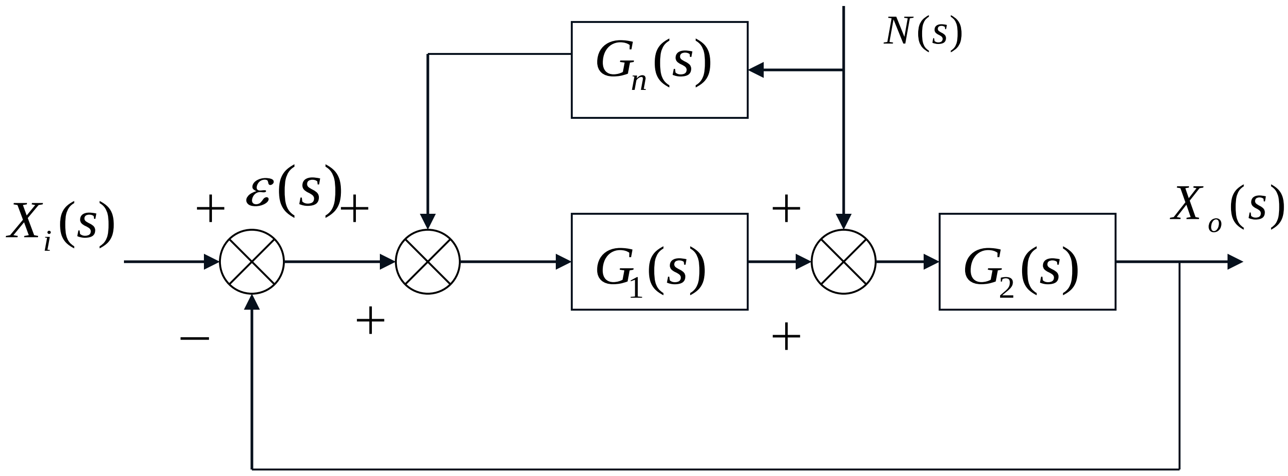
（1）反馈元件的精度要高，尽量避免在反馈通道引入干扰。

（2）在保证系统稳定的前提下，对于输入引起的误差，可通过增大系统开环放大倍数和提高系统型次将其减小；对于干扰引起的误差，可通过在系统前向通道干扰点前加积分器和增大放大倍数（包括反馈系数）将其减小。

（3）有的系统要求的性能很高，既要求稳态误差小，又要求良好的动态性能。这时，单靠加大开环放大倍数或串入积分环节往往不能同时满足上述要求，这时可采用复合控制的方法，或称顺馈的办法来对误差进行补偿。补偿的方式分两种。

1.按干扰补偿：

当干扰直接可测量时，那么就可利用这个信息进行补偿。



由图可求出输出$x_o(t)$ 对于干扰*n(t)*的闭环传递函数

$$\frac{X_o}{N(s)}=\frac{G_2(s)+G_n(s)G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$=\frac{G_2(s)\left[1+G_n(s)G_1(s)\right]}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

若能使这个传递函数为零，则干扰对输出的影响就可消除，令

$$G_2(s)\left[1+G_n(s)G_1(s)\right]=0$$

得出对干扰全补偿条件为

$$G_n(s)=-\frac{1}{G_1(s)}$$

从结构上看，就是利用双通道原理：

一条是由干扰信号经过 $G_n(s)$、$G_1(s)$ 到达结构图上第二个相加点；另一条是由于干扰信号，直接到达此相加点。满足上式后，两条通道的信号，在此点相加，正好大小相等，方向相反。从而实现了干扰的全补偿。

注意使用条件：

1）要求扰动是可测量的；

2）补偿装置在物理上是可实现的。

假设$G_1(s)=\dfrac{1}{T_1 s+1}$，那么$G_n(s)=-(T_1 s+1)$。

要求实现$G_n(s)$是有困难的，因为其分子多项式的阶数高于其分母多项式的阶数。

假若通过$G_n(s)=-\dfrac{T_1 s+1}{T_2 s+1}$(注:$T_1 \gg T_2$，超前校正环节)的形式做到近似补偿，则这样的传递函数在物理上将易于实现。

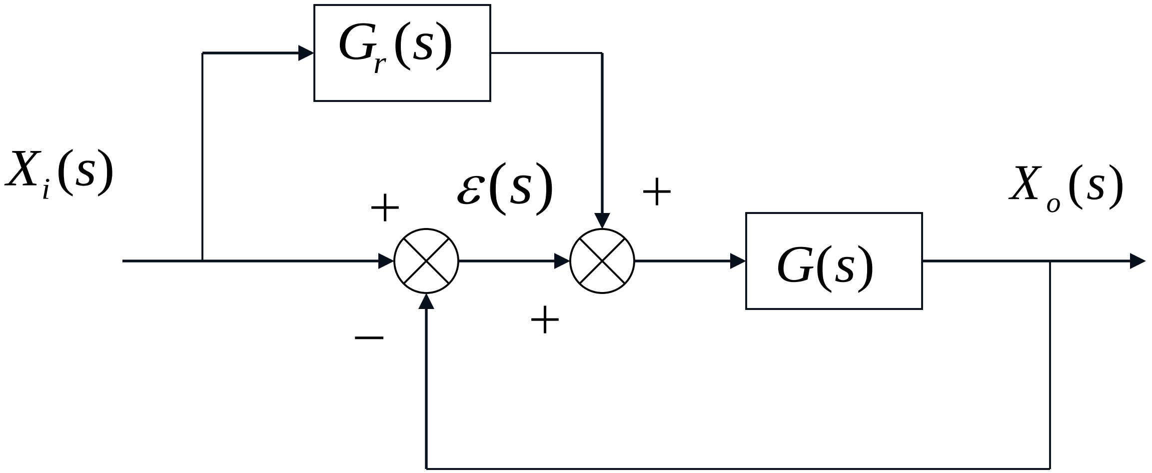
一般来说，为使顺馈补偿易于实现，多采用近似补偿方案。

因为一般顺馈补偿系统都是顺馈通道与反馈通道同时工作。在这种类型的控制系统中，由主要干扰引起的系统误差，将根据顺馈补偿原则，通过顺馈通道全部或部分补偿。至于由次要干扰引起的系统误差，则通过反馈控制予以消除。因此，由各种干扰引起的系统误差，都可以做到在不提高开环放大系数的前提下得到全部或部分补偿，这对提高控制系统的稳定性是极为有利的。

另外，由于顺馈补偿的顺馈通道属于开环控制，因此要求构成补偿装置的原件自身的参数具有较高的稳定性，否则由于补偿装置自身参数的飘逸，将减弱顺馈补偿的效果，同时还将给系统输出造成新的误差。

2.按输入补偿：

系统结构如图



由图可知，补偿器放在系统回路之外。因此设计系统回路时，可先保证其有良好的动态性能，然后再设置补偿器 $G_r(s)$ ，以便提高系统的稳态精度。补偿器设置如下：

误差定义为

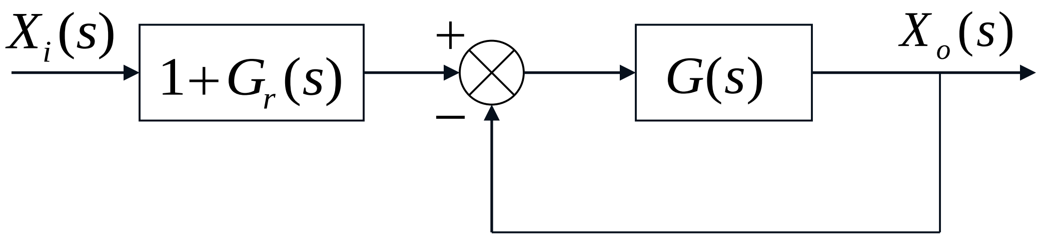
$$E(s)=X_i(s)-X_o(s)$$

$$X_o(s)=\left[1+G_r(s)\right]\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$

这样

$$E(s)=X_i(s)-\left[1+G_r(s)\right]\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$

$$=\frac{1-G_r(s)G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$



为使**E(s)=0,**应保证

$$1-G_r(s)G(s)=0$$

即

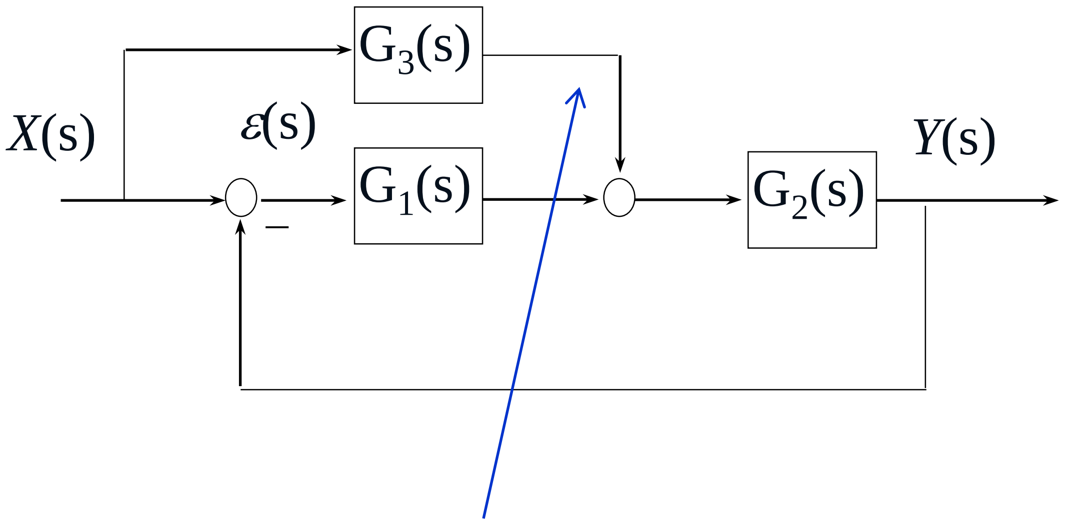
$$G_r(s)=\frac{1}{G(s)}$$

从上述分析可以看到，补偿通道并不影响特征方程，即不影响系统的稳定性，因此可以在不加补偿通道前，调好系统的动态性能，以保证足够的稳定裕量，再加入补偿通道，主要补偿掉稳态误差，减小动态误差。

实质：在反馈控制的基础上，引进控制信号的微分作为系统输入信号之一来减小误差。引进控制信号的微分（一般为一阶、二阶微分）和偏差信号一起控制被控对象，可大大提高随动系统的跟踪精度（具体表现为速度误差和加速度误差的减小）。将引进的控制信号微分称为顺馈控制信号，而将引进顺馈控制信号的控制通道称为顺馈控制通道。在反馈控制系统中，这种既通过偏差信号，又通过顺馈控制信号对被控制信号所进行的控制，称为复合控制。

例**7.**系统方框图如附图所示，当输入为单位加速度时，试确定**G3(s)**环节中的参数，使系统的静态误差为零。其中：

$$G_1(s) = K_1 \qquad G_2(s) = \frac{K_2}{s(T_1 s + 1)} \qquad G_3(s) = \frac{as^2 + bs}{T_2 s + 1}$$



复合控制系统的一般形式

解：系统闭环传递函数为：

$$Y(s)=\frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_1G_2}X(s)$$

$$E(s)=\varepsilon(s)=X(s)-Y(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot X(s)$$

将已知条件：$X(s)=\frac{1}{s^3}$ $G_1(s)=K_1$ $G_2(s)=\frac{K_2}{s(T_1s+1)}$

$G_3(s)=\frac{as^2+bs}{T_2s+1}$ 代入上式。得

$$\frac{Y(s)}{X(S)}==\frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_1G_2}=\frac{K_2(as^2+(b+K_1T_2)s+K_1)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2}$$

闭环特征方程：

$$T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2=0$$

由赫尔维茨判据判定闭环系统是否稳定。因为**n=3,** 故可用简单形式，即：当特征方程的各项系数为正时，只需要检验 $D_2=a_1a_2-a_0a_3$ 是否＞**0**。因

$$D_2=a_1a_2-a_0a_3=(T_1+T_2)(1+K_1K_2T_2)-K_1K_2T_1T_2=T_1+T_2+K_1K_2T_2^2>0$$

故可知闭环系统稳定，且与待求的**G3(s)**环节中的参数无关，讨论稳态误差是有意义的。而

$$E(s)==\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot X(s)=\frac{T_1T_2s^3+(T_1+T_2-K_2a)s^2+(1-K_2b)s}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s^3}$$

欲使系统的静态误差为零，根据终值定理 $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}sE(s)=0$

因此须使 $T_1+T_2-K_2a=0$ 以及 $1-K_2b=0$

即 $a=\dfrac{T_1+T_2}{K_2}$ $\quad b=\dfrac{1}{K_2}$

§ 6-5 动态误差（自习）

系统在过渡过程中，误差随时间的变化。

1. 单位反馈系统中，输入引起的误差传递函数在**S＝0**的邻域展开成泰勒级数，并近似取前**n**阶导数项：

$$\Phi_e=\frac{E(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$$

$$=\Phi_e(0)+\Phi_e^{'}(0)s+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)s^2+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^n$$

得到系统的误差函数：

$$E(s)=\Phi_e(s)X_i(s)$$

$$=\Phi_e(0)X_i(s)+\Phi_e^{'}(0)sX_i(s)+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)s^2X_i(s)+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^nX_i(s)$$

若系统还有扰动：

$$E(s)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^nX_i(s)+\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m!}\Phi_{eN}^{(m)}(0)s^mN(s)$$

拉氏反变换，得到系统的时域误差函数：

$$e(t)=\Phi_e(0)x_i(t)+\Phi_e^{'}(0)x_i^{'}(t)+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)x_i^{''}(t)+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)x_i^{(n)}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(i)}(0)x_i^{(i)}(t)$$

$$e(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(i)}(0)x_i^{(i)}(t)+\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m!}\Phi_{eN}^{(i)}(0)N^{(i)}(t)$$

例**8.** 设有一单位反馈控制系统，其开环传递函数**G(s)=5/s(s+1)**

其输入信号**$r(t)=r_0+r_1t+0.5r_2t^2$.**求系统误差及稳态误差。

解：

$$\Phi_e=\frac{E(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s^2+s}{s^2+s+5}$$

$$e_{ss}=0+\frac{1}{5}s+\frac{4}{25}s^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{5}r'(t)+\frac{4}{25}r''(t)$$

$$=\frac{1}{5}(r_1+r_2t)+\frac{4}{25}r_2$$

$$=(0.2r_1+0.16r_2)+0.2r_2t$$

课后习题：

11（MatLab）必做

2，8，9，10，13，14，16（任选4题）