材料力学（乙）

Mechanics of Materials

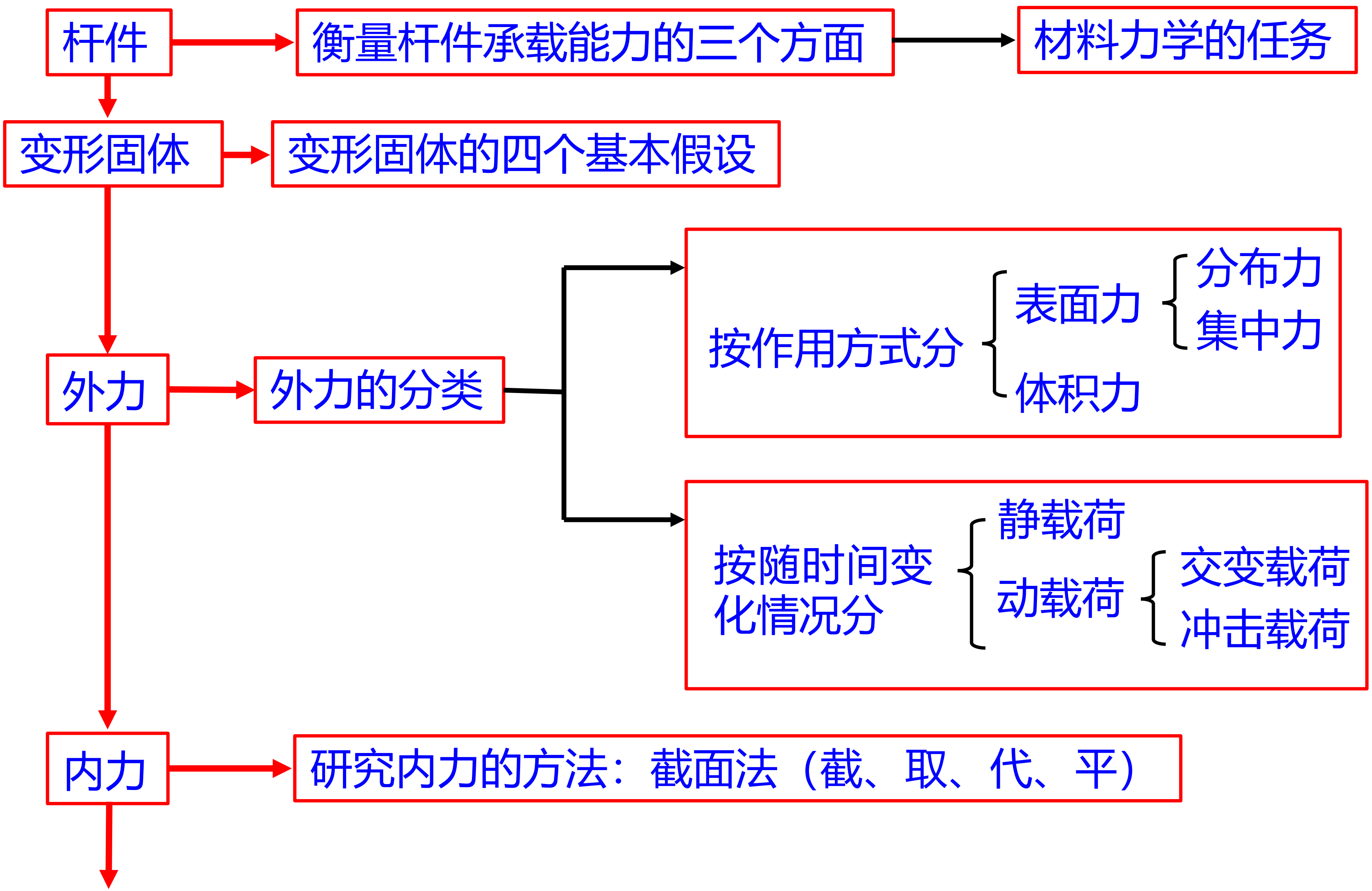
主讲教师：高扬/赵沛 (工程力学系)

手机：13588299682，Email: peizhao@zju.edu.cn

助教：郑浩然，Email: hrzheng_zju@zju.edu.cn

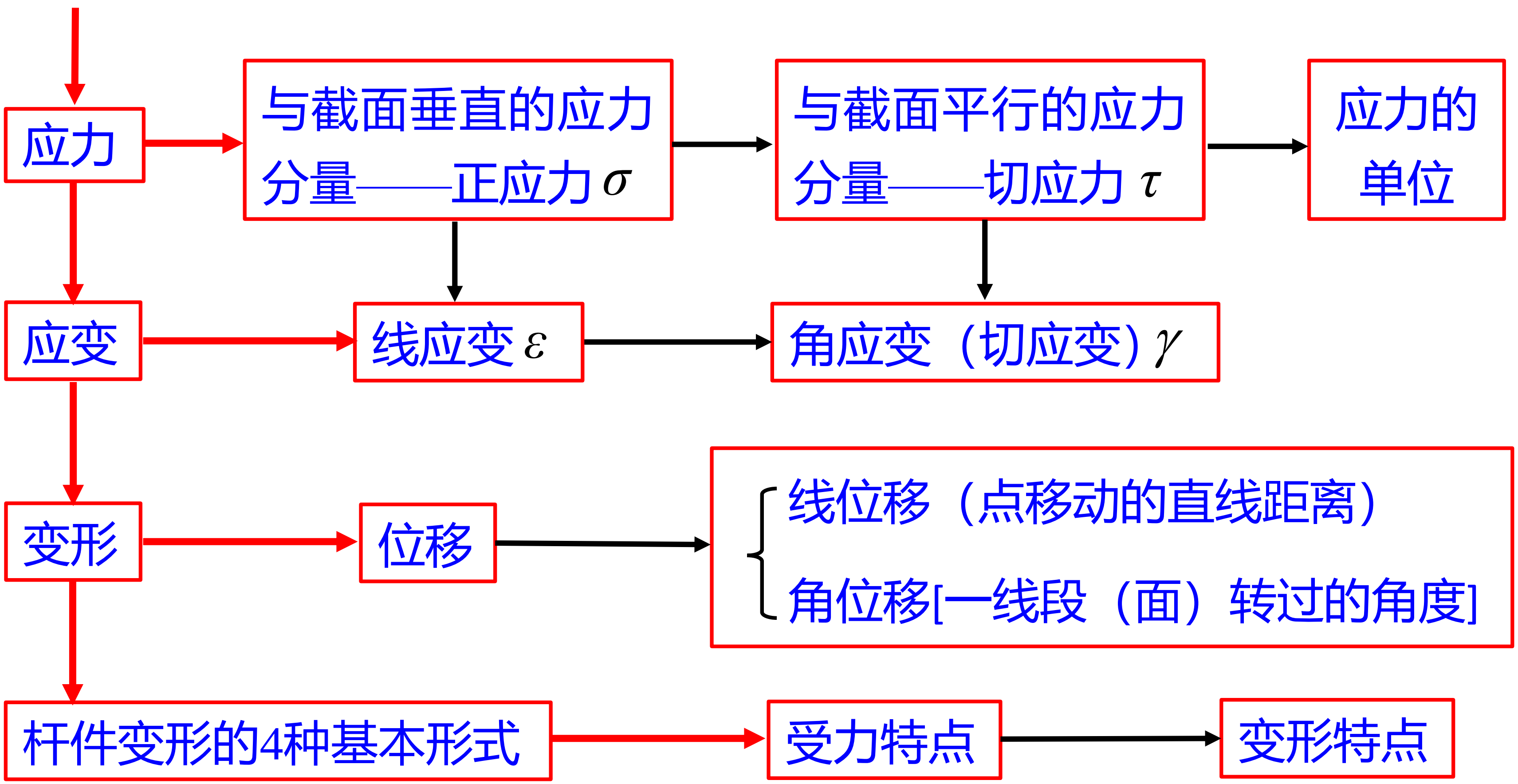
期末复习

一、绪论



杆件
衡量杆件承载能力的三个方面
材料力学的任务
变形固体
变形固体的四个基本假设
外力
外力的分类
按作用方式分
表面力
分布力
集中力
体积力
按随时间变化情况分
静载荷
动载荷
交变载荷
冲击载荷
内力
研究内力的方法：截面法（截、取、代、平）

一、绪论



应力
与截面垂直的应力分量——正应力 σ
与截面平行的应力分量——切应力 τ
应力的单位
应变
线应变 ε
角应变（切应变）γ
变形
位移
线位移（点移动的直线距离）
角位移[一线段（面）转过的角度]
杆件变形的4种基本形式
受力特点
变形特点

二、拉伸、压缩与剪切

轴向拉压的特点

- 受力特点：杆件两端作用力大小相等，方向相反，作用线与杆轴线重合。
- 变形特点：拉伸时杆件伸长，横向尺寸缩小；压缩时杆件缩短，横向尺寸增大。

轴力与轴力图

- 轴力：轴向拉压时，杆件横截面上内力的合力 F_N，称为轴力。符号：拉力为正，压力为负。
- 轴力图：表示轴力沿杆件轴线变化的图形，称为轴力图。同一杆件的轴力图采用同一比例，标明极值和正负号。

二、拉伸、压缩与剪切

截面上的应力

横截面上的应力

$\sigma = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$，只有正应力

斜截面上的应力

斜截面上的应力：

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{a} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

变形与应变

纵向变形

拉压杆纵向变形公式：

$$\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$$

轴线应变公式：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

横向应变

横向应变ε'与纵向应变ε之比的绝对值为一个常数，即

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|, \quad \varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

应力应变关系

$$\sigma = E\varepsilon$$

称为胡克定律，E为弹性模量，单位与应力相同。

二、拉伸、压缩与剪切

材料力学性质

失效应力

塑性指标

塑性材料的失效应力为屈服极限 σ_s，脆性材料的失效应力为强度极限 σ_b

伸缩率 δ 与截面收缩率 φ 。工程上一般认为 $\delta > 5\%$ 为塑性材料。

强度条件

许用应力

强度条件

强度条件应用

失效应力 σ_0 除以大于1的安全因数，即为许用应力，即

$$[\sigma]=\frac{\sigma_0}{n}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\max}}{A}\le[\sigma]$$

强度校核；
截面设计；
求许用载荷。

二、拉伸、压缩与剪切

应力集中 → 杆件截面尺寸发生突变，引起局部应力急剧增加的现象

超静定问题 → 温度应力 → 温度应力

剪切

- 受力特点：一对大小相等、方向相反、作用线距离很近的外力
- 变形特点：作用力之间的截面发生相对错动
- 内力：沿截面作用的剪力 F_S
- 实用计算：切应力在剪切面上均匀分布，$\tau = \dfrac{F_S}{A}$
- 剪切强度条件：$\tau \leq [\tau]$

挤压

- 挤压实用计算：$\sigma_{bs} = \dfrac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$

本章复习

3、横截面上的正应力σ计算公式：

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{N}}}{\boldsymbol{A}}$$

正应力σ和轴力F_{N}同号，拉应力为正，压应力为负。

6、低碳钢的拉伸性能。拉伸分为弹性阶段（线弹性阶段、非线弹性阶段）、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段。各阶段对应极限：σ_P (比例极限)，σ_e (弹性极限)，σ_s（屈服极限），σ_b (强度极限)

11、强度条件。强度校核、设计界面、确定许可载荷。

杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力

$$\sigma_{max} = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$$

12、胡克定律

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

EA称为杆的抗拉（抗压）刚度。

比例常数E称为弹性模量，是描述固体材料抵抗变形能力的物理量，也称为杨氏模量。

本章复习

12、胡克定律

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

EA称为杆的抗拉（抗压）刚度。

比例常数E称为弹性模量，是描述固体材料抵抗变形能力的物理量，也称为杨氏模量。

单位(国际单位制)：N/m^2 (Pa);

常用单位：MPa或GPa

13、泊松比：横向应变与轴向应变之比的绝对值。

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

本章复习

13、泊松比：横向应变与轴向应变之比的绝对值。

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

17、温度应力：温度变化将引起物体的膨胀或收缩。静定结构可以自由变形，不会引起构件的内力，但在超静定结构中变形将受到部分或全部约束，温度变化时往往就要引起内力，与之相对应的应力称为热应力或温度应力。

$$\sigma_T = \frac{F_{RB}}{A} = \alpha_l E \Delta T$$

本章复习

21、切应力的计算

$$\tau = \frac{F_S}{A}$$

式中， F_S为剪力，A为剪切面的面积。

22、切应力强度条件：

$$\tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau] = \frac{\tau_u}{n}$$

23、实用挤压应力公式

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$$

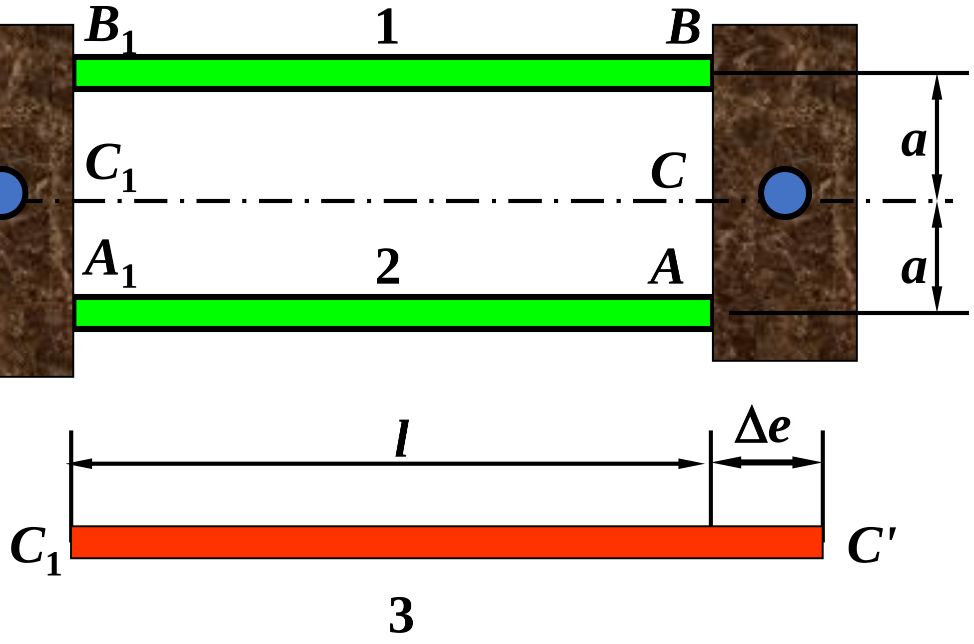
24、挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

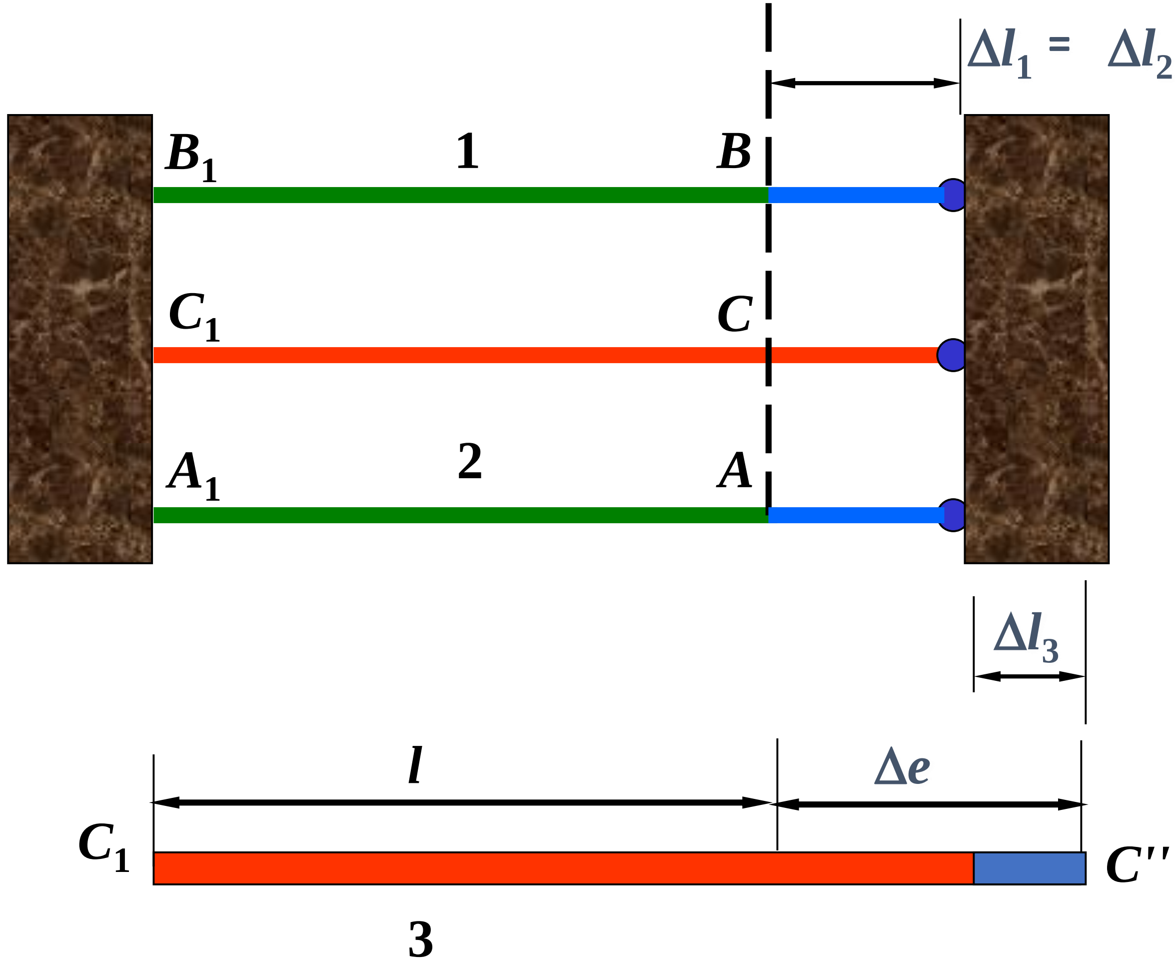
§2.11 温度应力和装配应力

例题2.19

两铸件用两根钢杆1,2连接，其间距为l=200 mm。现要将制造得过长了Δe=0.11 mm的铜杆3装入铸件之间，并保持三根杆的轴线平行且等间距a。试计算各杆内的装配应力。已知：钢杆直径d=10 mm，铜杆横截面积为20×30 mm的矩形，钢的弹性模量E=210 GPa，铜的弹性模量E_3=100 GPa。铸件很厚，其变形可略去不计，故可看作刚体。



例题2.19



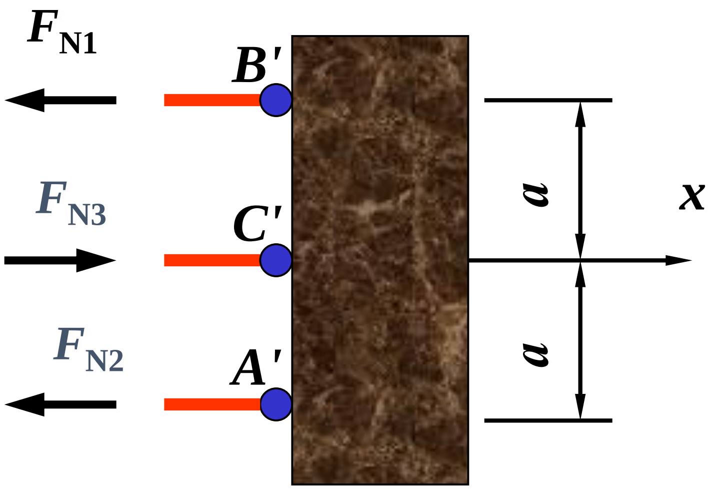
解：1、变形协调方程：

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = \Delta e$$

例题2.19

解：2、物理方程：

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} \qquad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l}{E_3 A_3}$$



3、补充方程

$$\frac{F_{N3} l}{E_3 A_3} = \Delta e - \frac{F_{N1} l}{EA}$$

4、平衡方程

$$F_{N1} = F_{N2}$$

$$F_{N3} - F_{N1} - F_{N2} = 0$$

联立平衡方程与补充方程求解，即可得装配内力，进而求出装配应力。

三、扭转

圆轴扭转

- 受力特点：一对大小相等、方向相反、垂直于轴线的力偶
- 变形特点：平行于作用力偶之间的截面发生相对转动
- 剪切胡克定律：$\tau = G\gamma$
- 切应力互等定理：$\tau = \tau'$
- 横截面上的应力：$\tau_{\rho} = \dfrac{T\rho}{I_p}$
- 横截面上的最大应力：$\tau_{\max} = \dfrac{TR}{I_p} = \dfrac{T}{W_t}$

三、扭转

圆轴扭转

- 圆截面对圆心的极惯性矩：$I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}$
- 实心圆截面的抗扭截面系数：$W_t = \dfrac{\pi D^3}{16}$
- $\dfrac{d}{D} = \alpha$ 的空心圆截面：$I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}(1\text{-}\alpha)^4$　　$W_t = \dfrac{\pi D^3}{16}(1\text{-}\alpha)^3$
- 强度条件：$\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_t} \le [\tau]$
- 强度计算
  - 强度校核
  - 截面设计
  - 确定许可载荷

本章复习

3、薄壁圆筒切应力计算公式

$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta} = \frac{M_e}{2\pi r_0^2 \delta}$$

4、切应力互等定理。

5、剪切胡克定律： $\boldsymbol{\tau = G\gamma}$

6、距圆心为ρ处的切应变： $\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$

7、横截面上同一圆周上任意点的切应力τ_ρ均相同，且与该点到圆心的距离ρ成正比。

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

本章复习

8、极惯性矩：$\int_A \rho^2 dA = I_p$

9、抗扭截面系数：$W_t = \dfrac{I_p}{\rho_{max}}$

10、$\tau_{max} = \dfrac{T\rho_{max}}{I_p} = \dfrac{T}{W_t}$

11、实心圆截面：$I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$ $W_t = \dfrac{\pi d^3}{16}$

空心圆截面：$I_p = \dfrac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32}$ $W_t = \dfrac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$

12、扭转强度条件：$\tau_{max} = \dfrac{T}{W_t} \leq [\tau]$

本章复习

13、 $$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$$

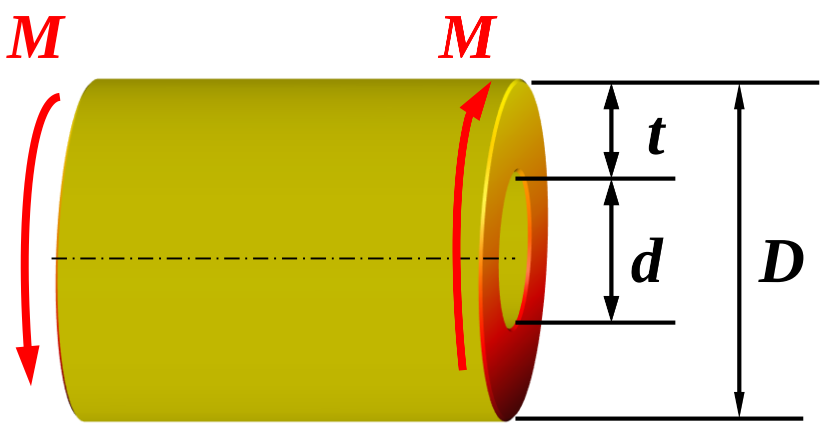
14、单位长度扭转角： $$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \quad (\mathrm{rad/m})$$

15、扭转刚度条件： $$\varphi'_{\max} = \frac{T}{GI_p} \le [\varphi']$$

§3.5 圆轴扭转时的变形

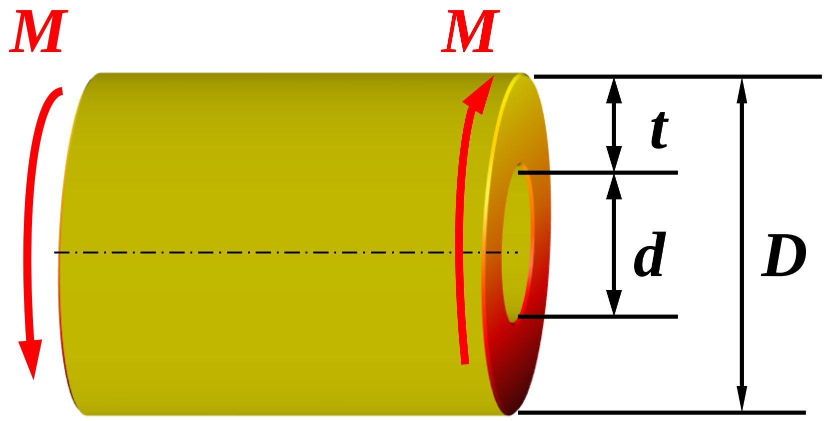
例题3.8

某汽车的主传动轴是用40号钢的电焊钢管制成，钢管外径D=76 mm，壁厚t=2.5 mm，轴传递的转矩M=1.98 kN·m，材料的许用剪应力[τ]=100 MPa，剪切弹性模量为G=80 GPa，轴的许用单位扭转角[φ']=2°/m。试校核轴的强度和刚度。



例题3.8

解：轴的扭矩等于轴传递的转矩



$$T = M = 1.98\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

轴的内、外径之比

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{D-2t}{D} = 0.934$$

$$I_{\text{p}} = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{32} = 7.83\times 10^5\ \ \text{mm}^4$$

$$W_{\text{t}} = \frac{I_{\text{p}}}{D/2} = 2.06\times 10^4\ \ \text{mm}$$

由强度条件 $\tau_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{W_{\text{t}}} = 96.1\ \text{MPa} < [\tau]$

由刚度条件 $\varphi_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{GI_{\text{p}}} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 1.81^\circ/\text{m} < [\varphi']$

§3.5 圆轴扭转时的变形

例题3.8

讨论：将空心轴改为同一材料的实心轴，仍使τ_{max}=96.1 MPa

$$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{\pi d^3/16}=96.1\ \text{MPa}$$

实心轴的直径为　$d = 47.2\ \text{mm}$

其截面面积为　$$A_{实}=\frac{\pi d^2}{4}=1749\ \text{mm}^2$$

空心轴的截面面积为　$$A_{空}=\frac{\pi(76^2-71^2)}{4}=577\,\text{mm}^2$$

长度材料相等时，两轴重量比等于两轴的横截面积比

$$\frac{A_{空}}{A_{实}}=\frac{577}{1749}=0.33$$

在最大切应力相等时空心圆轴比实心圆轴轻，即节省材料。

四、弯曲内力

梁 → 以弯曲变形为主的构件

平面弯曲 → 有纵向对称面 → 外力在此面内 → 变形后轴线在此面内

静定梁的基本形式 → 悬臂梁 → 简支梁 → 外伸梁

- 悬臂梁：一端固定，一端自由
- 简支梁：一端固定铰支，一端可动铰支
- 外伸梁：简支梁一端或两端伸出支座以外

梁的内力 → 剪力F_s与弯矩M的正负号 → 剪力方程与弯矩方程

- F_s：顺时针转动为正，逆时针转动为负；
  M：下凸为正，上凸为负
- 剪力方程是描述剪力与截面位置之间的函数关系；弯矩方程是描述弯矩和截面位置之间的函数关系。

四、弯曲内力

$q(x)$，$F_s(x)$，$M(x)$ 间 的微分关系

x向右y向上的右手坐标系中

$$\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$$

利用微分关系作内力图或检查内力图

梁的内力图

剪力图与弯矩图

表示剪力随截面位置坐标而变化的图形为剪力图；表示弯矩随截面位置坐标而变化的图形为弯矩图

内力图标注

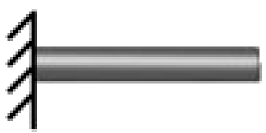
1、正值画在坐标轴上方，负值画在下方，标注正负号；
2、标出控制截面内力值与单位。

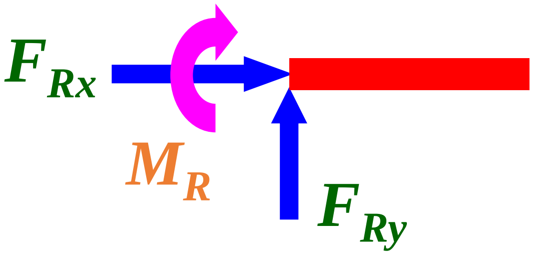
内力图画法

常见内力图画法：
1、内力方程法；
2、控制面法；
3、叠加法。

本章复习

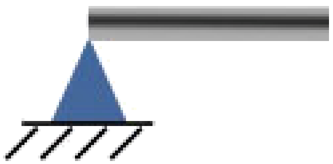
1、固定端支座

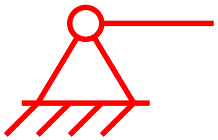


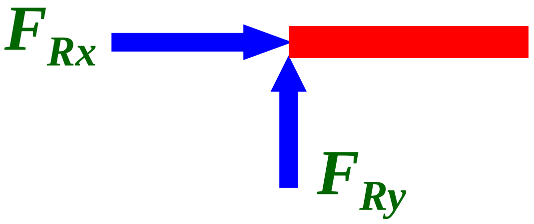


$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \theta = 0$$

2、固定铰支座

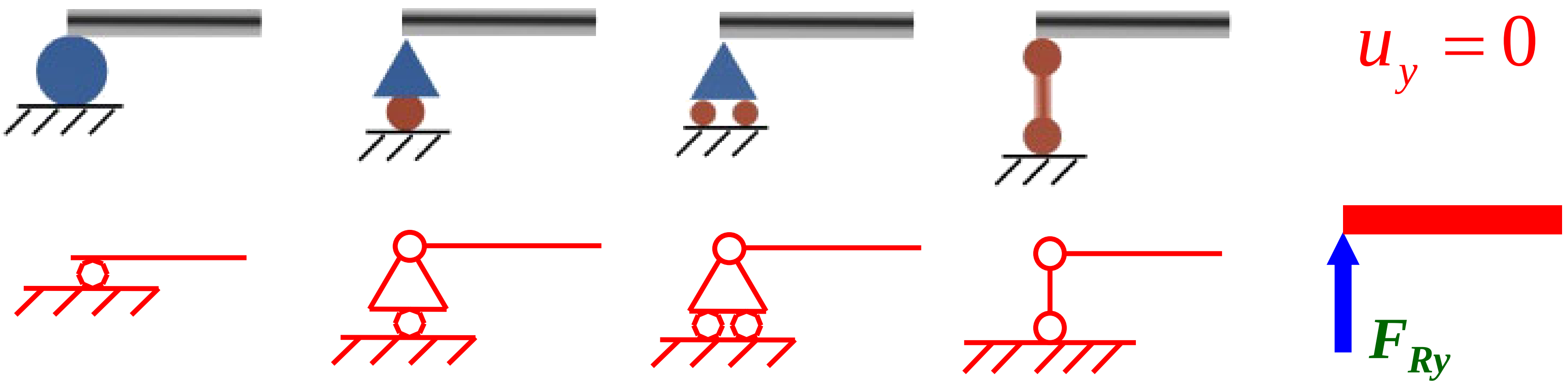






$$u_x = 0, \quad u_y = 0$$

3、可动铰支座。

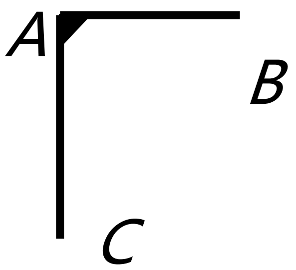


4、剪力F_S：构件受弯时，横截面上其作用线平行于横截面的内力合力。左上右下为正。

5、弯矩M：构件受弯时，横截面上其作用面垂直于横截面的内力系的合力偶矩。上压下拉为正。

本章复习

6、平面刚架的内力



平面刚架是由在同一平面内，不同取向的杆件，通过杆端相互刚性连结而组成的结构。

内力包括：剪力；弯矩；轴力。

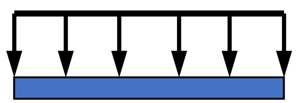
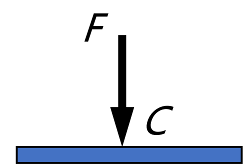
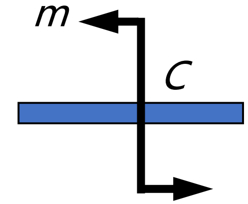
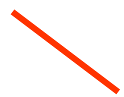
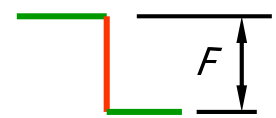
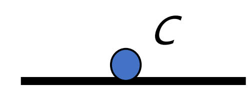
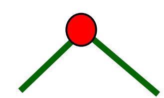
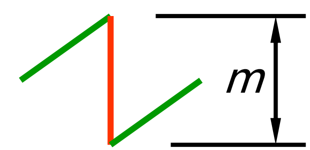
弯矩图：画在各杆的受压（凹入）侧，不注明正、负号。

剪力图及轴力图：可画在刚架轴线的任一侧（通常正值画在刚架的外侧），注明正、负号。

7、$q(x)$、$F_S(x)$图、$M(x)$图三者间的关系。

$$\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx}=F_S(x) \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$$

9、几种载荷下剪力图与弯矩图的特征

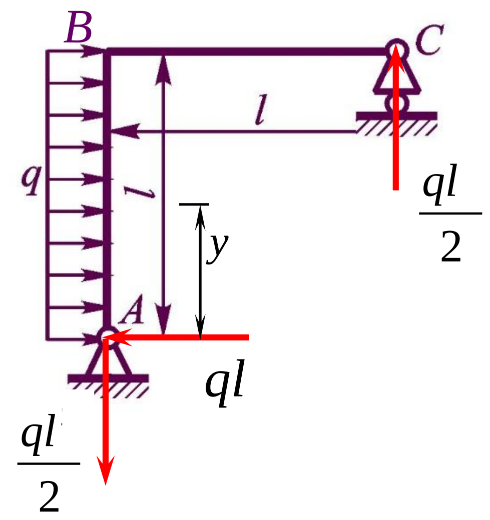
梁上外力情况	均布载荷	无载荷	集中力	集中力偶
	$q<0$ 			
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线 	一般直线 	在C处有转折 	在C处有突变 
M_{max}所在的可能面	在$F_S=0$的截面或起始点	全梁或梁的边界截面	在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.11

已知平面刚架上的均布载荷集度q，长度l。

试画出刚架的内力图。



解：（1）确定约束力，写出各段的内力方程

竖杆AB：A点向上为y

$$\sum F_x = 0 \qquad F_S(y) + qy - ql = 0$$

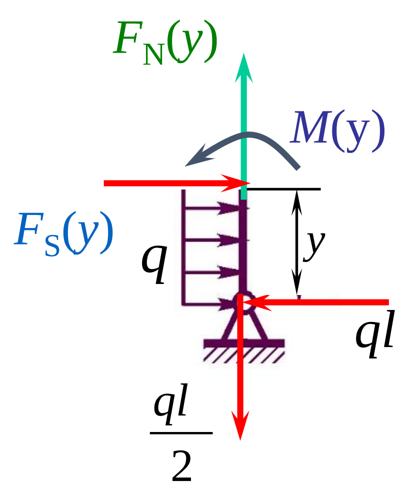
$$F_S(y) = ql - qy \quad (0 < y \le l)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N(y) - ql/2 = 0$$

$$F_N(y) = ql/2 \quad (0 < y < l)$$

$$\sum M(y) = 0 \quad M(y) + qy \cdot y/2 - qly = 0$$

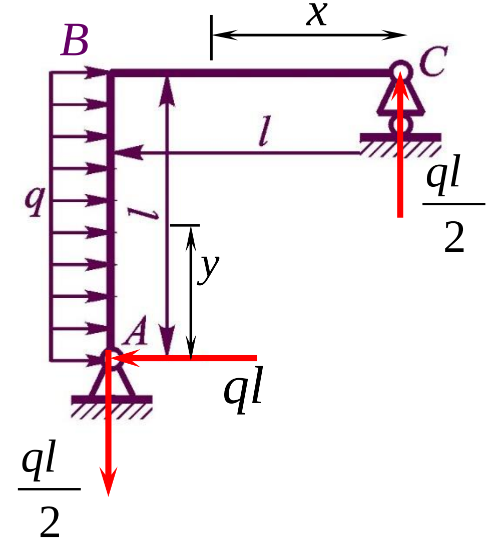
$$M(y) = qly - qy^2/2 \quad (0 \le y \le l)$$



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.11

已知平面刚架上的均布载荷集度q，长度l。试画出刚架的内力图。



解：（1）确定约束力，写出各段的内力方程

横杆CB：C点向左为x

$$\sum F_x = 0$$

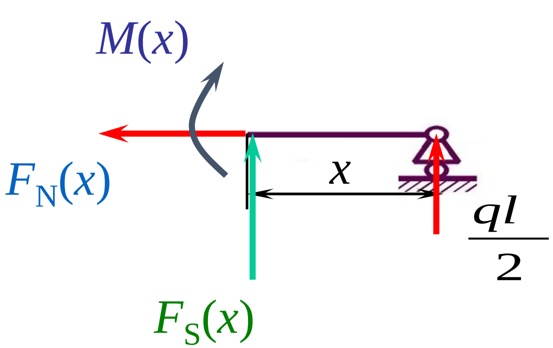
$$F_N(x) = 0 \quad (0 \le x \le l)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_S(x) + ql/2 = 0$$

$$F_S(x) = -ql/2 \quad (0 < x < l)$$

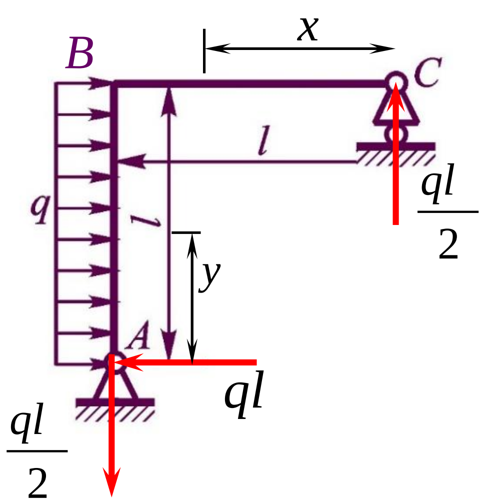
$$\sum M(x) = 0 \quad M(x) - qlx/2 = 0$$

$$M(x) = qlx/2 \quad (0 \le x \le l)$$



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.11



已知平面刚架上的均布载荷集度q，长度l。

试画出刚架的内力图。

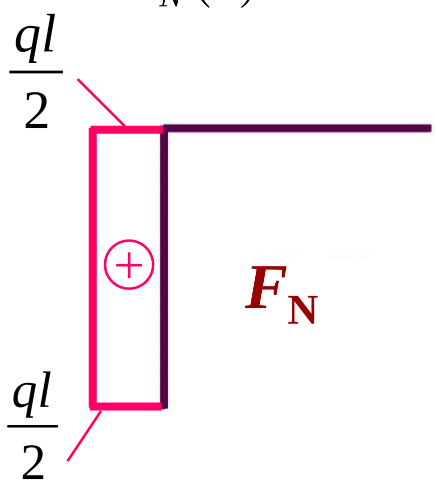
解：（2）根据各段内力方程画内力图

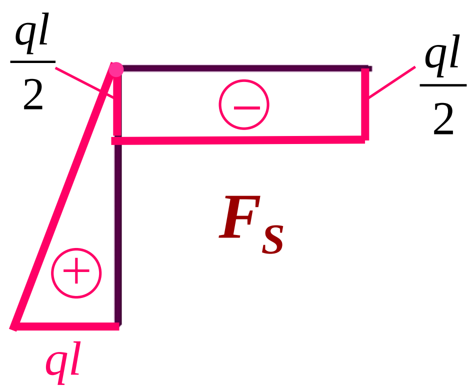
竖杆AB：

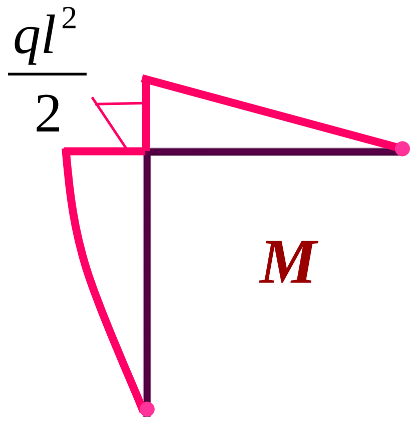
$$F_N(y)=ql/2 \qquad F_S(y)=ql-qy \qquad M(y)=qly-qy^2/2$$

横杆CB：

$$F_N(x)=0 \qquad F_S(x)=-ql/2 \qquad M(x)=qlx/2$$







五、弯曲应力

弯曲的分类 → 纯弯曲 → 横力弯曲

纯弯曲：横截面上仅有M没有F_s

横力弯曲：横截面上既有M又有F_s

几何性质 → 中性层与中性轴 → 静矩S_z → 惯性矩I_z → 抗弯截面系数W_z

中性层与中性轴：弯曲时既不伸长也不缩短的层面为中性层；中性层与横截面的交线为中性轴。

静矩S_z：积分 $S_z = \int_A y dA$ 叫做面积A对z轴的静矩。简单图形的静矩S_z=面积A×形心距z轴距离y_c

惯性矩I_z：积分 $I_z = \int_A y^2 dA$ 即截面A对z轴的惯性矩。它是杆件截面抗弯能力的一个几何量。

→ 平行移轴定理 → 转轴定理

抗弯截面系数W_z：$W_z = \dfrac{I_z}{y_{max}}$ 叫做抗弯截面系数，它是一个与截面形状和尺寸有关的几何量。

五、弯曲应力

弯曲应力

弯曲正应力

梁任一截面任一点正应力公式 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

应用条件：纯弯曲；线弹性；等直杆

弯曲切应力

梁任一截面任一点切应力公式 $\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{bI_z}$

最大切应力：

矩形截面 $\tau_{\max} = \dfrac{3F_s}{2A}$

圆形截面 $\tau_{\max} = \dfrac{4F_s}{3A}$

强度条件

正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

塑性材料：一个危险截面，一个危险点

脆性材料：两个危险截面，两个危险点

切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{F_{s\max} S_{z\max}^*}{bI_z} \le [\tau]$$

本章复习

1、纯弯曲与横力弯曲。

2、中性层和中性轴。中性轴过截面的形心。

3、纯弯曲的应变与应力 $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

4、 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ $\sigma = \frac{My}{I_z}$

5、纯弯曲最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_Z} = \frac{M}{W_Z}$$

6、横力弯曲最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}y_{\max}}{I_Z} = \frac{M_{\max}}{W_Z}$$

7、弯曲正应力强度条件：梁内的最大工作正应力不超过材料的许用正应力。

$$\boldsymbol{\sigma}_{\max} = \frac{\boldsymbol{M}_{\max}\boldsymbol{y}_{\max}}{\boldsymbol{I}_z} = \frac{\boldsymbol{M}_{\max}}{\boldsymbol{W}_z} \leq [\boldsymbol{\sigma}]$$

强度校核、设计截面、确定许可载荷

8、矩形截面梁的切应力

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} \qquad \tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times bh^3/12} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh} = \frac{3F_S}{2A}$$

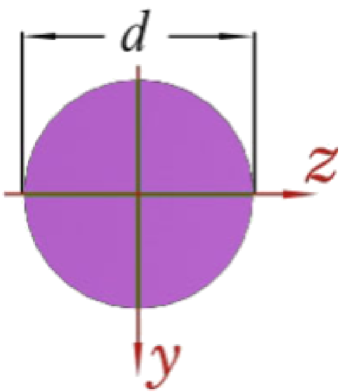
9、圆截面梁的切应力

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{Z.\max}^*}{I_Z d} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{A}$$

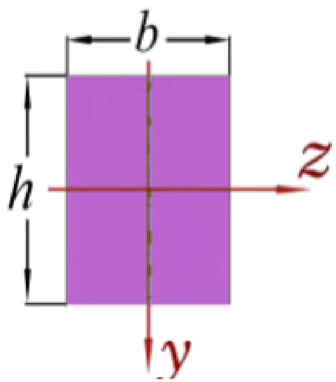
§5.2 纯弯曲时的正应力

5、常见截面的I_Z和W_Z

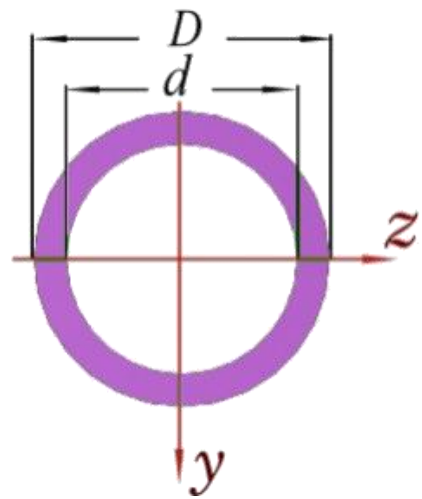
$$I_Z = \int_A y^2 dA \qquad W_z = \frac{I_Z}{y_{max}}$$



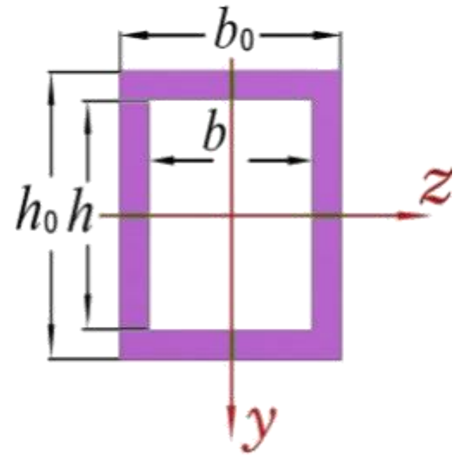
圆截面



矩形截面



空心圆截面



空心矩形截面

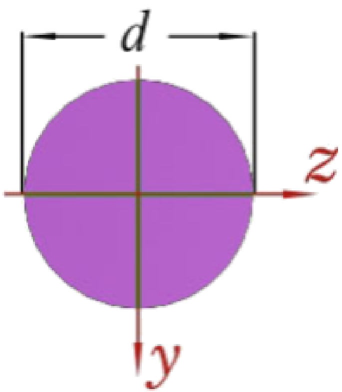
$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64} \qquad I_Z = \frac{bh^3}{12} \qquad I_Z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) \qquad I_Z = \frac{b_0 h_0^{\ 3}}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad W_z = \frac{bh^2}{6} \qquad W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \qquad W_z = \left(\frac{b_0 h_0^{\ 3}}{12} - \frac{bh^3}{12}\right)/(h_0/2)$$

§5.2 纯弯曲时的正应力

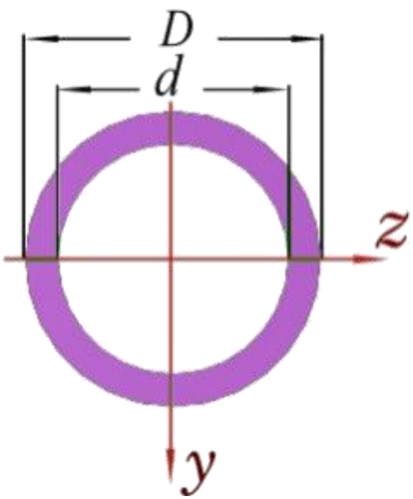
5、常见截面的I_Z和W_Z

$$I_Z = \int_A y^2 dA \qquad W_z = \frac{I_Z}{y_{max}}$$



圆截面

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$



空心圆截面

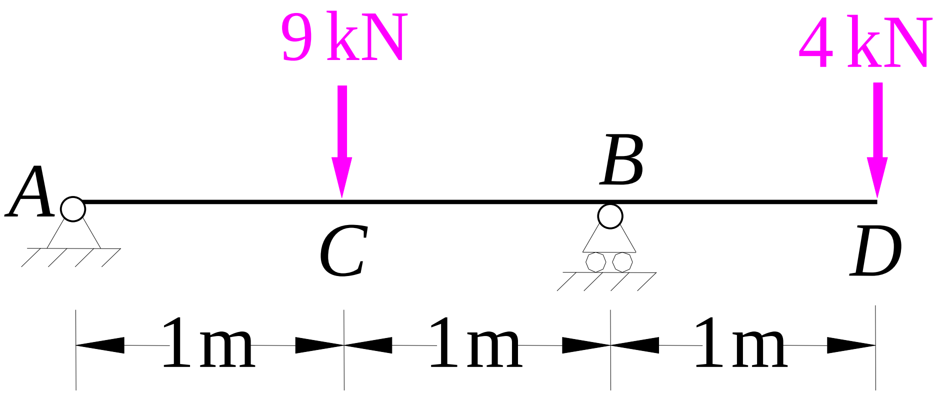
$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{max}}$$

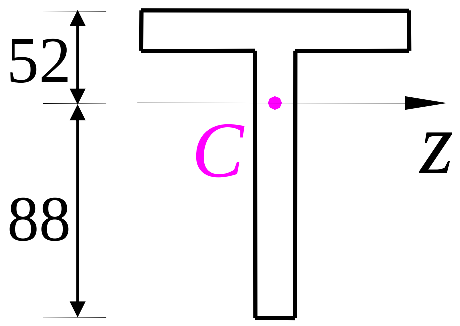
$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64} \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \qquad I_Z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) \qquad I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad W_t = \frac{\pi d^3}{16} \qquad W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \qquad W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

例题5.3

图示铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]=30\ \mathrm{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=60\ \mathrm{MPa}$，$I_z=7.63\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$，试校核此梁的强度。





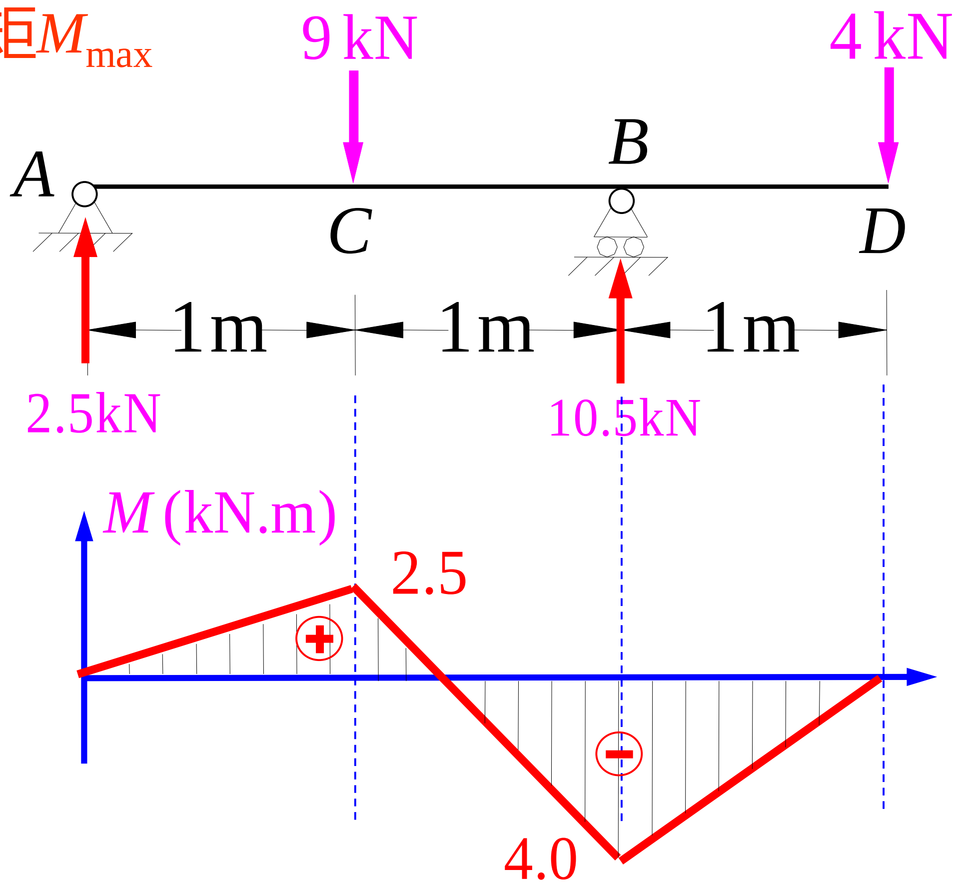
分析：对于铸铁梁，拉伸和压缩力学性能不同，在危险截面处，拉伸强度和压缩强度都应校核。

§5.3 横力弯曲时的正应力

例题5.3

图示铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]=30\ \text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=60\ \text{MPa}$，$I_z=7.63\times10^{-6}\ \text{m}^4$，试校核此梁的强度。

解：先确定危险截面及最大弯矩M_{max}



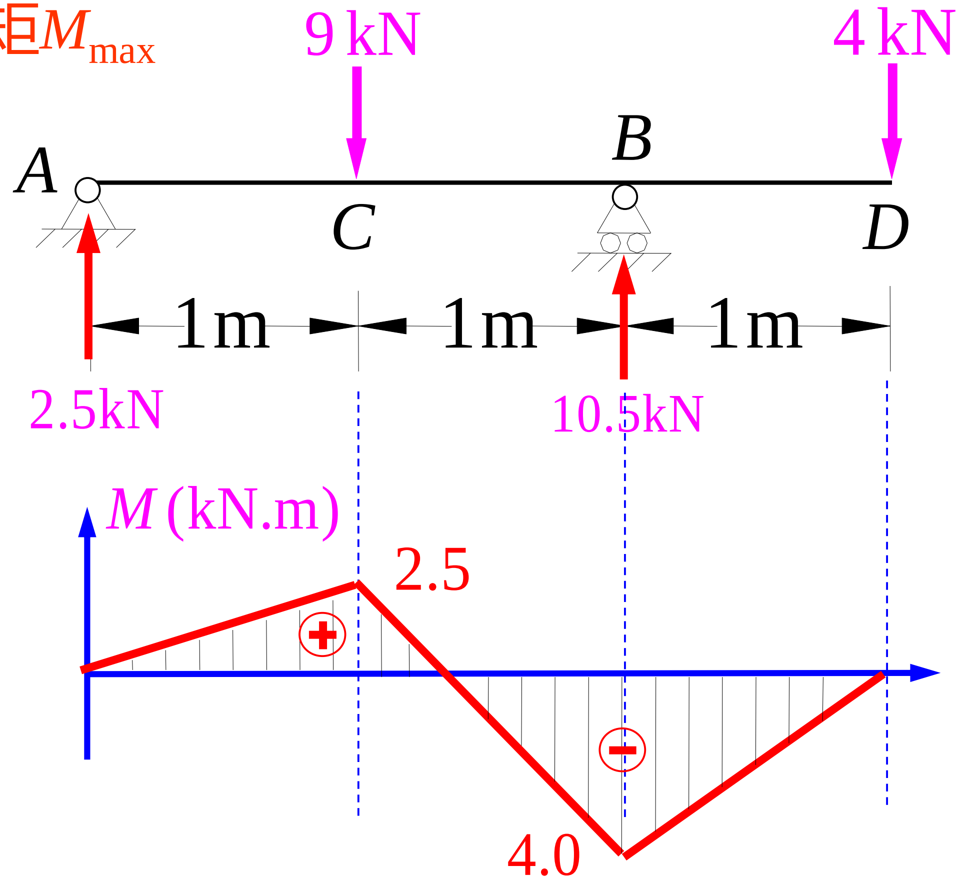
对于只有集中力作用情形，弯矩图各段均为直线，且在各集中力作用处，弯矩图有尖角 。

因此，对于只有集中力作用情形，危险截面（弯矩最大的截面）肯定出现在集中力作用处或支座处。

例题5.3

图示铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]$=30 MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=60 MPa，$I_z=7.63\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$，试校核此梁的强度。

解：先确定危险截面及最大弯矩M_{max}



（1）截面B （上部受拉）

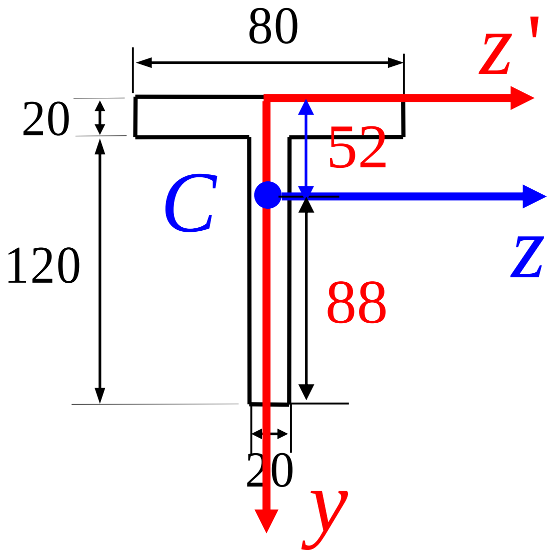
$$M_B = 4.0\ \mathrm{kN.m}$$

（2）截面C （下部受拉）

$$M_C = 2.5\ \mathrm{kN.m}$$

例题5.3

图示铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]=30\ \mathrm{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=60\ \mathrm{MPa}$，$I_z=7.63\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$，试校核此梁的强度。



解：求截面形心

$$y_c=\frac{80\times20\times10+120\times20\times(20+60)}{80\times20+120\times20}$$

$$y_c=52\mathrm{mm}$$

求截面对中性轴z的惯性矩

$$I_z=\frac{80\times20^3}{12}+80\times20\times42^2+\frac{20\times120^3}{12}+20\times120\times28^2$$

$$=7.63\times10^{-6}\mathrm{m}^4$$

例题5.3

图示铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]$=30 MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=60 MPa，I_z=7.63×10^{-6} m^4，试校核此梁的强度。

解：强度校核 $I_z=7.63\times10^{-6}$ m^4

$\boxed{\text{此梁安全}}$

B截面(上拉下压): $M_B = 4.0$ kN.m

$$\sigma_{tB} = \frac{M_B \cdot y_{t\max}}{I_z} = \frac{4.0\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 27.3\,\mathrm{MP_a} < [\sigma_t] = 30\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{cB} = \frac{M_B \cdot y_{c\max}}{I_z} = \frac{4.0\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 46.1\,\mathrm{MP_a} < [\sigma_c] = 60\mathrm{MPa}$$

C截面(上压下拉): $M_C = 2.5$ kN.m

$$\sigma_{tC} = \frac{M_C \cdot y_{t\max}}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 28.8\,\mathrm{MP_a} < [\sigma_t] = 30\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{cC} = \frac{M_C \cdot y_{c\max}}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 17.0\,\mathrm{MP_a} < [\sigma_c] = 60\mathrm{MPa}$$

六、弯曲变形

- 弯曲变形
  - 变形的衡量
    - 挠度 → $w=\iint\left(\frac{M}{EI}dx\right)dx+Cx+D$
    - 转角 → $\theta=\int\frac{M}{EI}dx+C$
    - → $\theta\approx\frac{dw}{dx}$
  - 挠曲线微分方程 → $\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M}{EI}$
  - 刚度条件 → $|w|_{\max}\le[w]$ → $|w/l|_{\max}\le[w/l]$ → $|\theta|_{\max}\le[\theta]$
  - 叠加法计算弯曲变形
    - 梁在载荷作用下产生的变形是微小的
    - 材料在线弹性范围内工作，梁的位移与载荷呈线性关系
    - 梁上每个载荷引起的位移不受其他载荷的影响
  - 超静定梁
    - 多余约束 → 超静定次数 → 变形协调条件
    - 查表后叠加
  - 提高梁刚度的措施 → 降低弯矩 → 提高抗弯刚度

本章复习

1、挠度与转角的关系

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dw}{dx} = w'$$

2、积分法

$$\theta = w' = \frac{1}{EI_z}\int M(x)dx + C$$

（1）位移边界条件

$$w = \frac{1}{EI_z}\int\int M(x)dxdx + Cx + D$$

（2）光滑连续条件

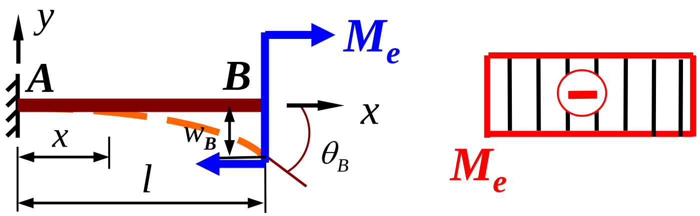
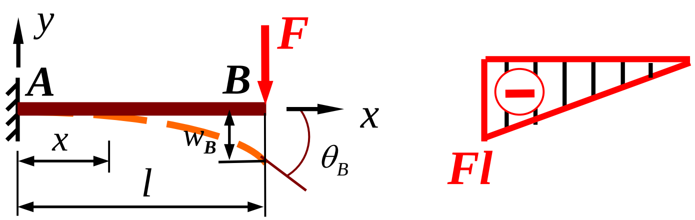
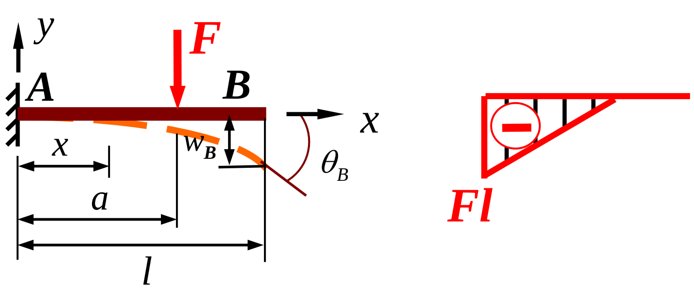
3、叠加原理与叠加法

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

当梁上同时作用几个载荷时，各个载荷所引起的变形是各自独立的，互不影响。

§6.3 用积分法求弯曲变形

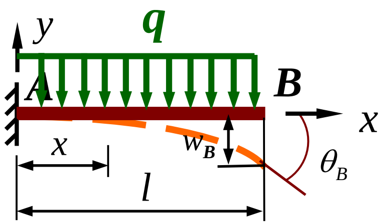
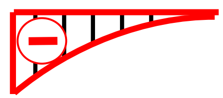
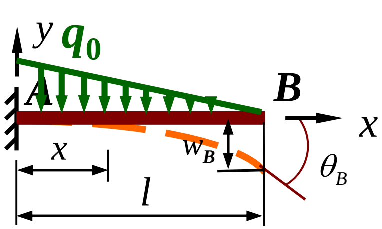
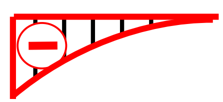
5、简单载荷下梁的挠度与转角（P195表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	最大转角与挠度
1		$w=\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B=\frac{M_e l}{EI}$ $w_B=\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=\frac{Fl^2}{2EI}$ $w_B=\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w=\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)$ $(0\le x\le a)$ $w=\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)$ $(a\le x\le l)$	$\theta_B=\frac{Fa^2}{2EI}$ $w_B=\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

悬臂梁

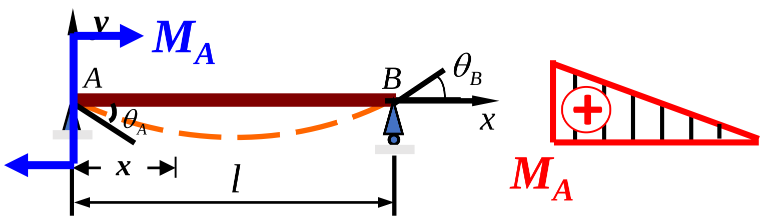
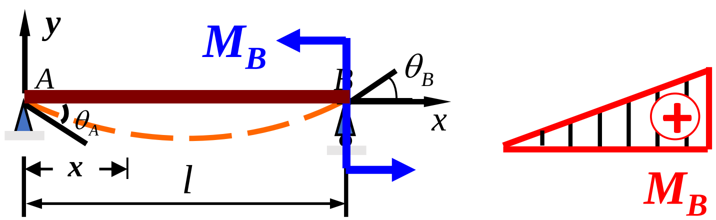
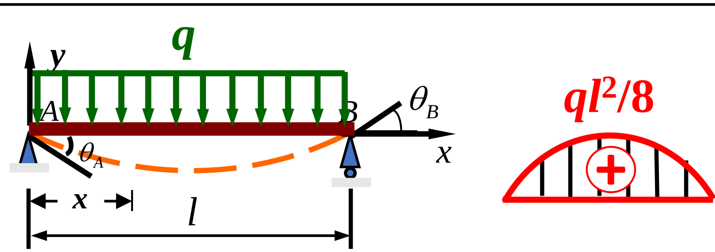
§6.3 用积分法求弯曲变形

5、简单载荷下梁的挠度与转角（P195表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	最大转角与挠度
4	  $ql^2/2$	$w=\dfrac{qx^2}{24EI}\left(x^2+6l^2-4lx\right)$	$\theta_B=\dfrac{ql^3}{6EI}$ $w_B=\dfrac{ql^4}{8EI}$
5	  $q_0l^2/6$	$w=\dfrac{q_0x^2}{120EIl}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$	$\theta_B=\dfrac{q_0l^3}{24EI}$ $w_B=\dfrac{ql^4}{30EI}$

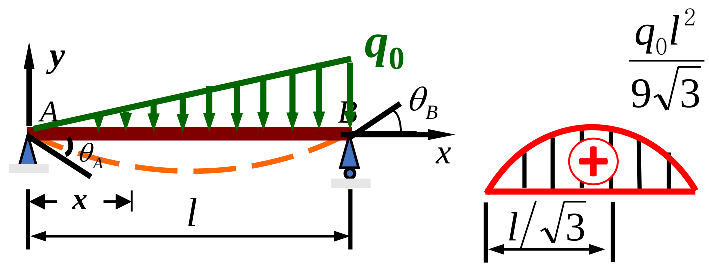
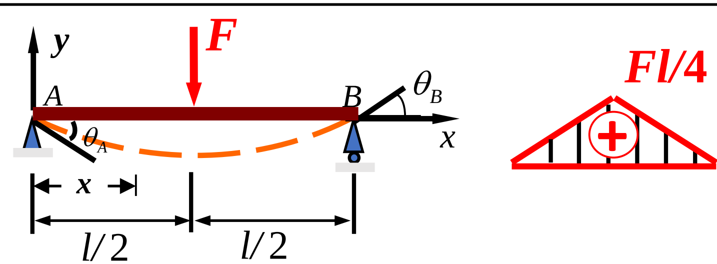
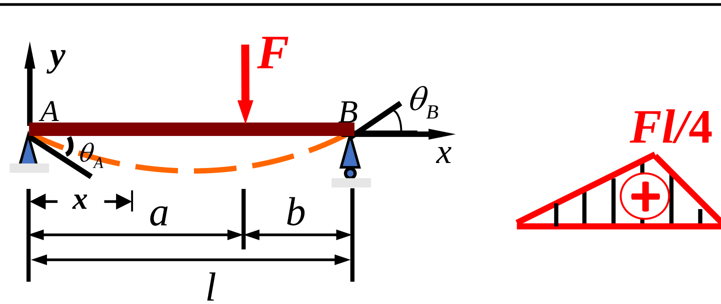
悬臂梁

5、简单载荷下梁的挠度与转角（P195表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	最大转角与挠度
1		$w=\dfrac{M_A x}{2EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=\dfrac{M_A l}{3EI}$ $\theta_B=-\dfrac{M_A l}{6EI}$ $w_C=\dfrac{M_A l^2}{16EI}$
2		$w=\dfrac{M_B x}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=\dfrac{M_B l}{6EI}$ $\theta_B=-\dfrac{M_B l}{3EI}$ $w_C=\dfrac{M_B l^2}{16EI}$
3		$w=\dfrac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=\dfrac{ql^3}{24EI}$ $\theta_B=-\dfrac{ql^3}{24EI}$ $w_C=\dfrac{5ql^4}{384EI}$

简支梁

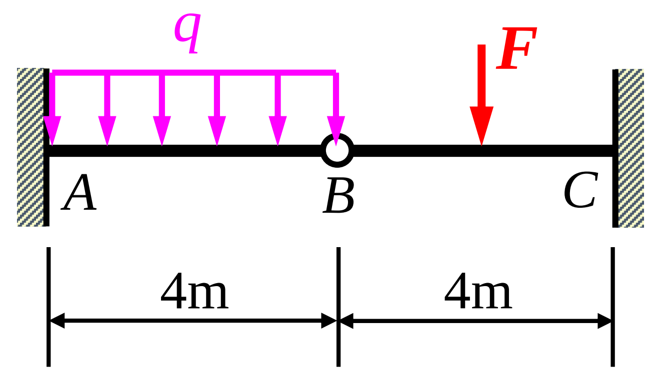
5、简单载荷下梁的挠度与转角（P195表6.1）

序号	梁上载荷及弯矩图	挠曲线方程	最大转角与挠度
4		$w=\frac{q_0 x}{360EIl}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$	$\theta_A=\frac{7q_0l^3}{360EI}$ $\theta_B=-\frac{q_0l^3}{45EI}$ $w_C=\frac{5q_0l^4}{768EI}$
5		$w=\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=\frac{Fl^2}{16EI}$ $\theta_B=-\frac{Fl^2}{16EI}$ $w_C=\frac{Fl^3}{48EI}$
6		$w=\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$ $(0\le x\le a)$ $w=\frac{Fbx}{6EIl}[\frac{l}{b}(x-a)^2+(l^2-b^2)x-x^3]$ $(a\le x\le l)$	$\theta_A=\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$ $\theta_B=-\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$ $w_C=\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$ (当$a\ge b$时)

简支梁

例题7

梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。

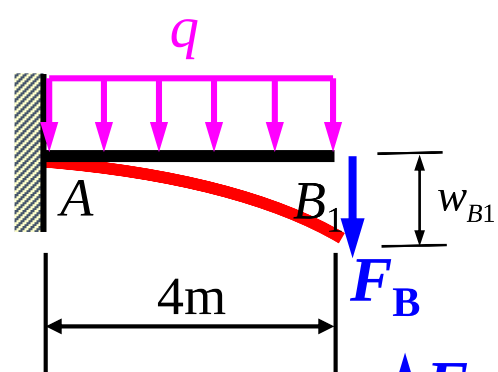


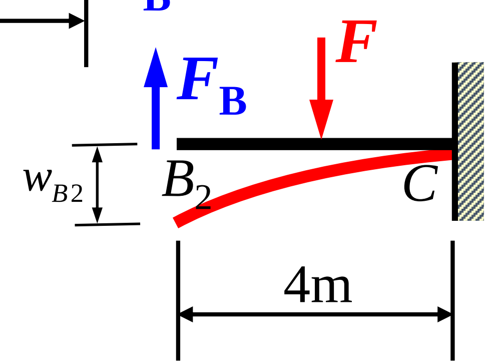
解：（1）从B处拆开，使超静定结构变成两个悬臂梁

变形协调方程为：

$$w_{B1} = w_{B2}$$

$$F_B = F_B'$$





（2）物理关系为：

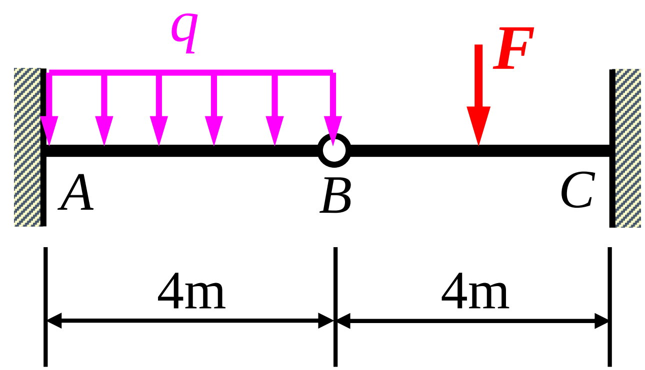
$$w_{B1} = \frac{q \times 4^4}{8EI} + \frac{F_B \times 4^3}{3EI}$$

$$w_{B2} = \frac{F \times 2^2}{6EI}(3 \times 4 - 2) - \frac{F_B \times 4^3}{3EI}$$

§6.5 简单超静定梁

例题7

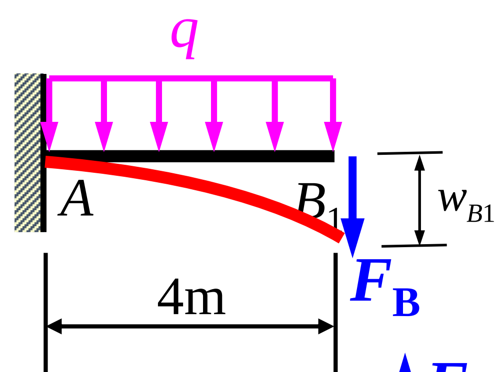
梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



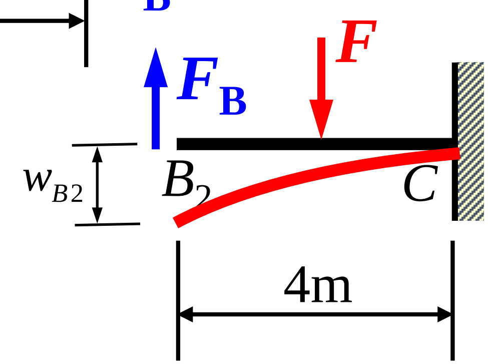
解：（3）得补充方程

$$\frac{q\times 4^4}{8EI}+\frac{F_B\times 4^3}{3EI}=\frac{F\times 2^2}{6EI}(3\times 4-2)-\frac{F_B\times 4^3}{3EI}$$

$$F_B=\frac{3}{2}\left(\frac{40\times 10}{6\times 4^2}-\frac{20\times 4^4}{8\times 4^3}\right)=-8.75\ \text{kN}$$

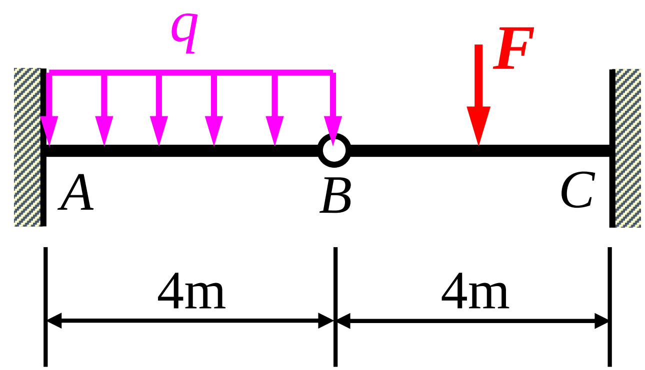


$$F_B=F_B'$$



例题7

梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



解：（4）确定A端约束力

$$\sum F_y = 0, \quad R_A - F_B - 4q = 0$$

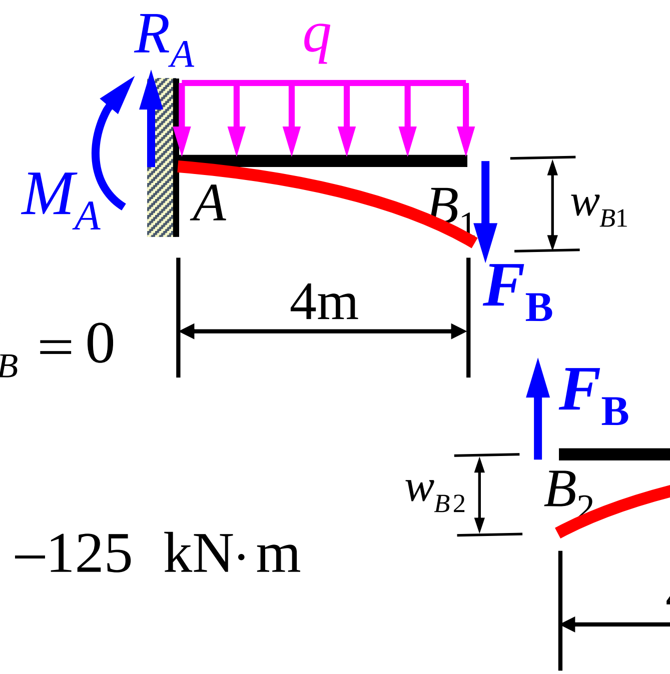
$$R_A = 4q + F_B = 4 \times 20 - 8.75$$

$$= 71.25 \ \text{kN}$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A + 4q \times 2 + 4F_B = 0$$

$$M_A = -4q \times 2 - 4F_B$$

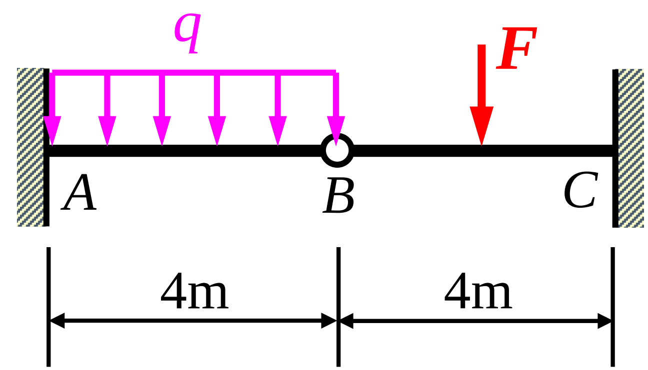
$$= -4 \times 20 \times 2 - 4 \times (-8.75) = -125 \ \text{kN·m}$$



$$F_B = F_B'$$

例题7

梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



解：（5）确定C端约束力

$$\sum F_y = 0,\quad F_B + R_C - F = 0$$

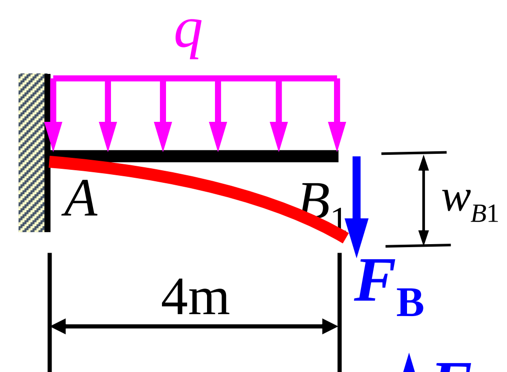
$$R_C = F - F_B = 40 - (-8.75)$$

$$= 48.75\ \text{kN}$$

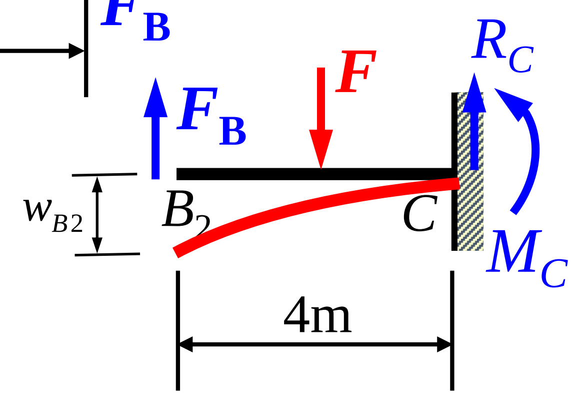
$$\sum M_C = 0,\quad M_C + 2F - 4F_B = 0$$

$$M_C = 4F_B - 2F$$

$$= 4\times(-8.75) - 2\times 40 = -115\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

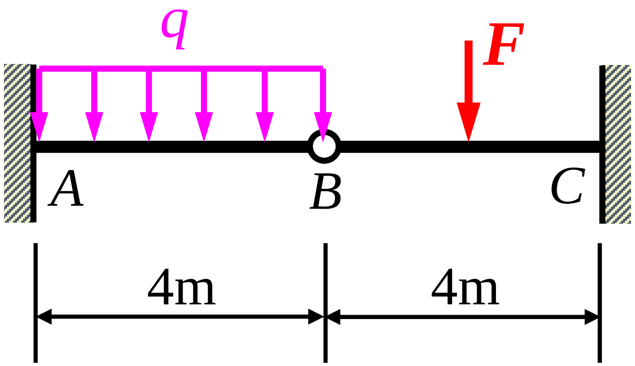


$$F_B = F_B'$$



例题7

梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



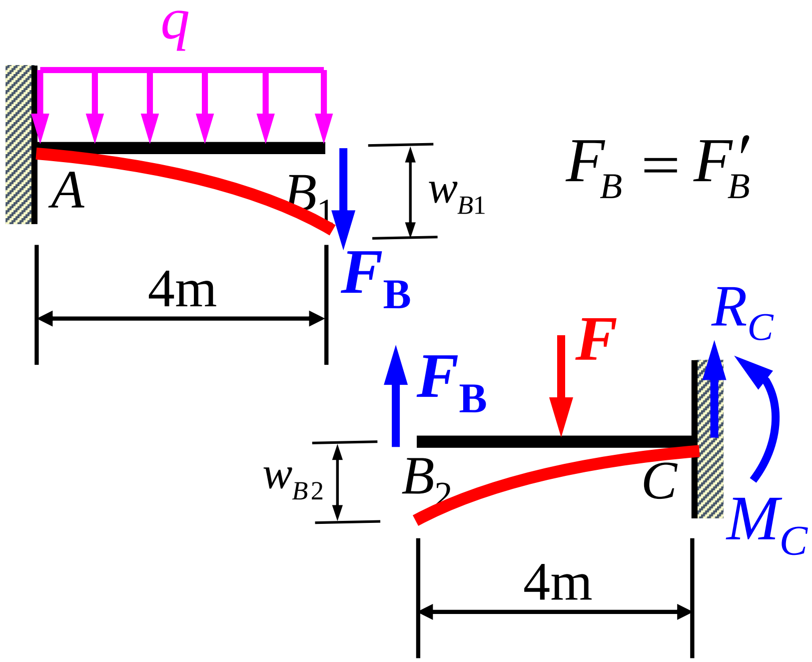
解：（6）A、C端的约束力已求出

$$R_A = 71.25 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_A = 125 \text{ kN}\cdot\text{m}(\circlearrowleft)$$

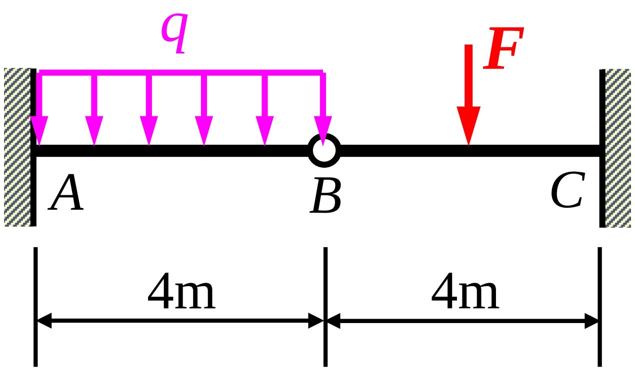
$$R_C = 48.75 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_C = 115 \text{ kN}\cdot\text{m}(\circlearrowright)$$

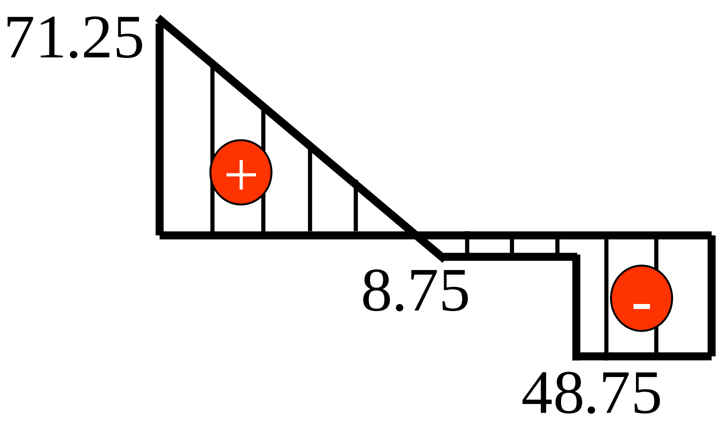


例题7

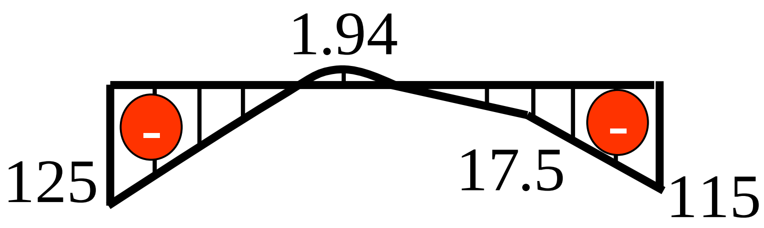
梁AB和BC在B处铰接，A、C两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F=40 kN，q=20 kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



解：（7）作出梁的剪力图和弯矩图

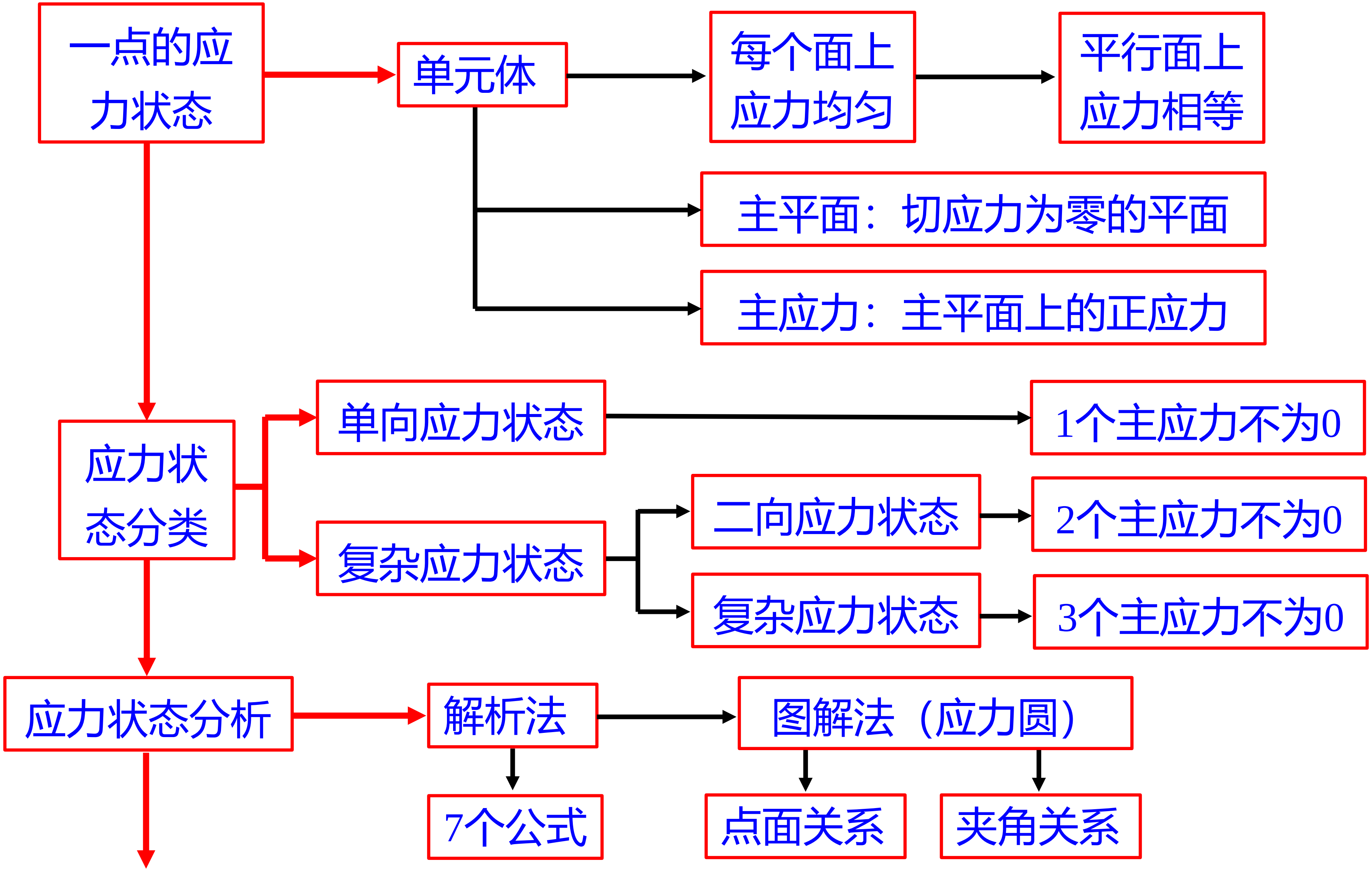


剪力图



弯矩图

七、应力和应变分析、强度理论



七、应力和应变分析、强度理论

- 广义胡克定律 → 应力应变关系
- 广义胡克定律 → 强度理论
  - 脆性断裂 → 第一强度理论 → 第二强度理论
  - 塑性断裂 → 第三强度理论 → 第四强度理论

第一强度理论：

$$\sigma_{r1}=\sigma_1$$

第二强度理论：

$$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$$

第三强度理论：

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$$

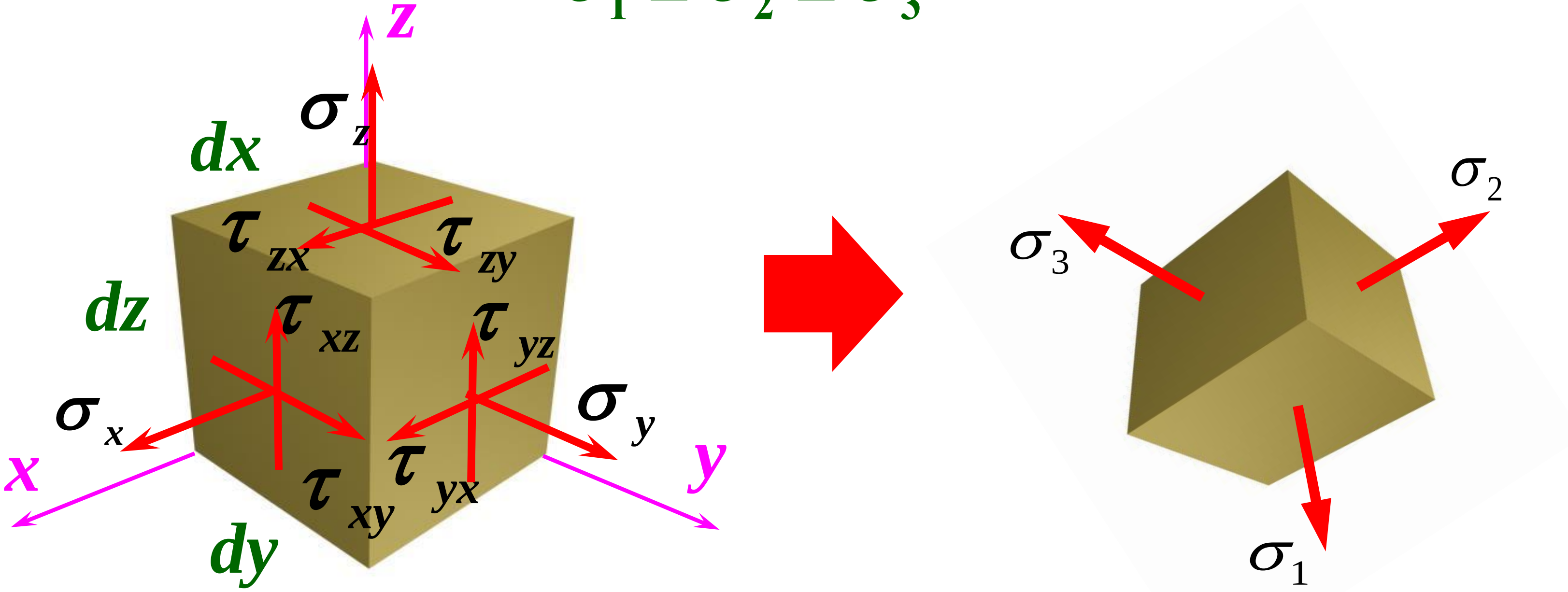
第四强度理论：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

3、单元体、主单元体、主平面、主应力。

一点处必定存在这样的一个主应力单元体， 其中三个相互垂直的面均为主平面，三个互相垂直的主应力分别记为σ_1、σ_2、σ_3且规定按代数值大小的顺序来排列，即

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



主应力单元体

本章复习

5、任意斜截面的应力

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

6、最大正应力的方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$$

7、最大正应力

$$\left.\begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

8、最大切应力的方位

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ \end{cases}$$

本章复习

9、最大切应力

$$\left.\begin{cases}\tau_{\max} \\ \tau_{\min}\end{cases}\right. = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

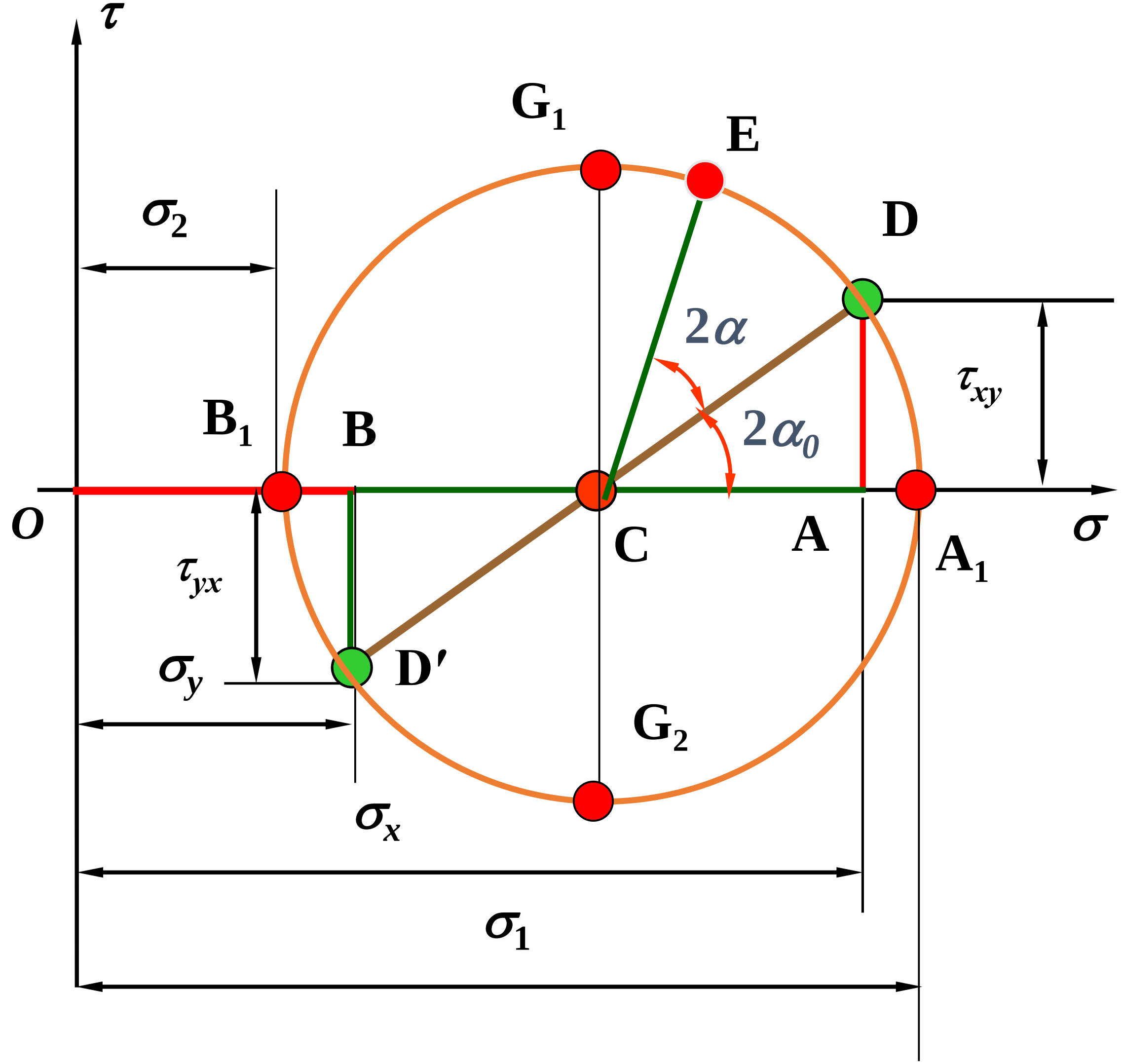
10、应力圆（莫尔圆）

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

圆心的坐标 $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$

圆的半径 $R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$

11、应力圆的画法及应用

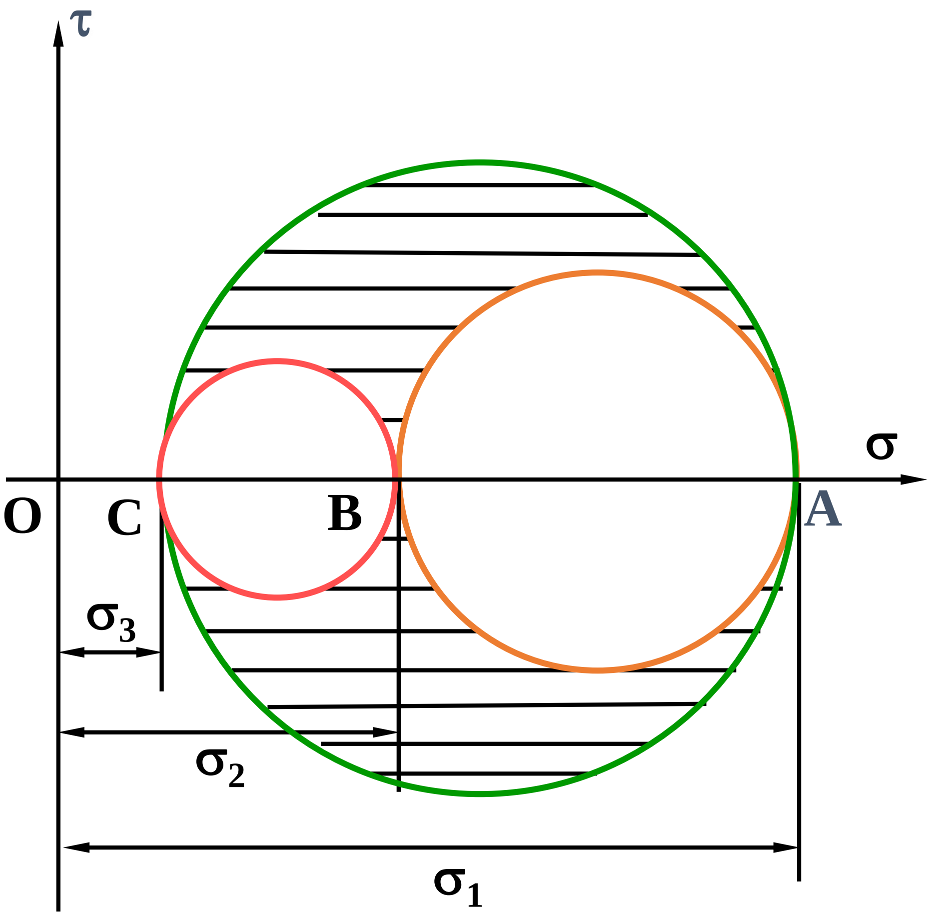


12、三向应力状态

三个应力圆圆周上的点及由它们围成的阴影部分上的点的坐标代表了空间应力状态下所有截面上的应力。

该点处的最大正应力（指代数值）应等于最大应力圆上A点的横坐标 σ_1。

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$

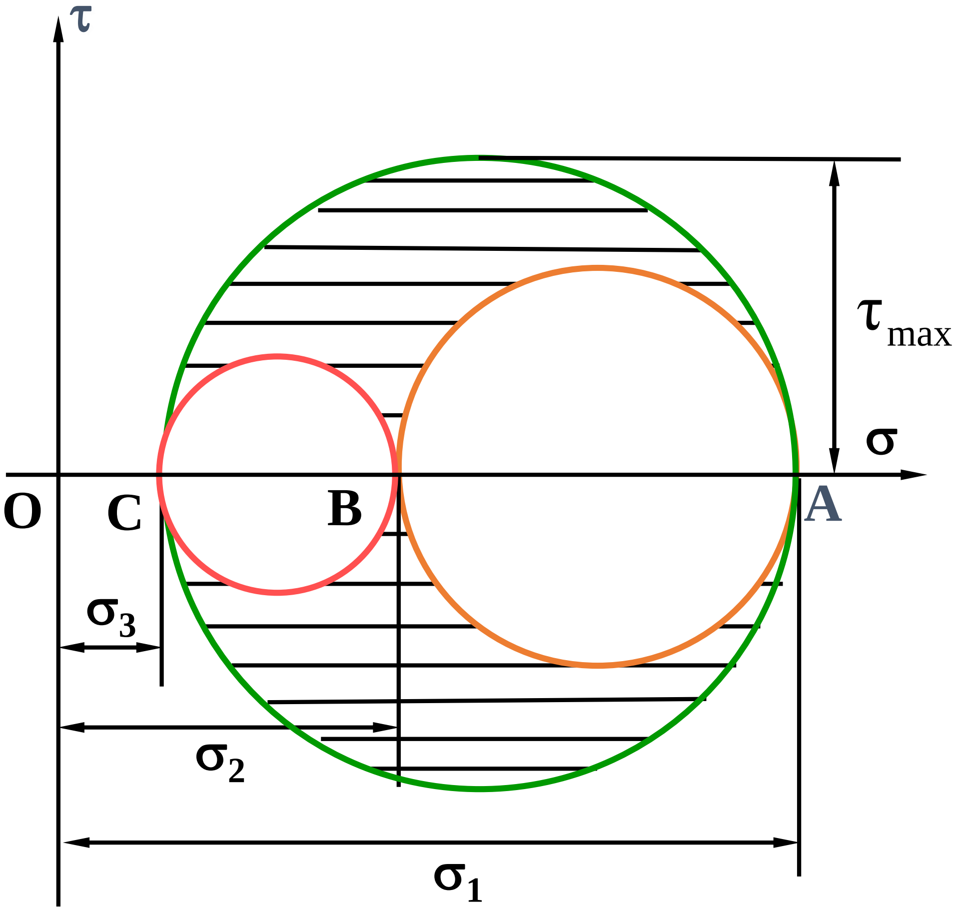


12、三向应力状态

最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$$

最大切应力所在的截面与σ_2所在的主平面垂直，并与σ_1和σ_3所在的主平面成45°角。

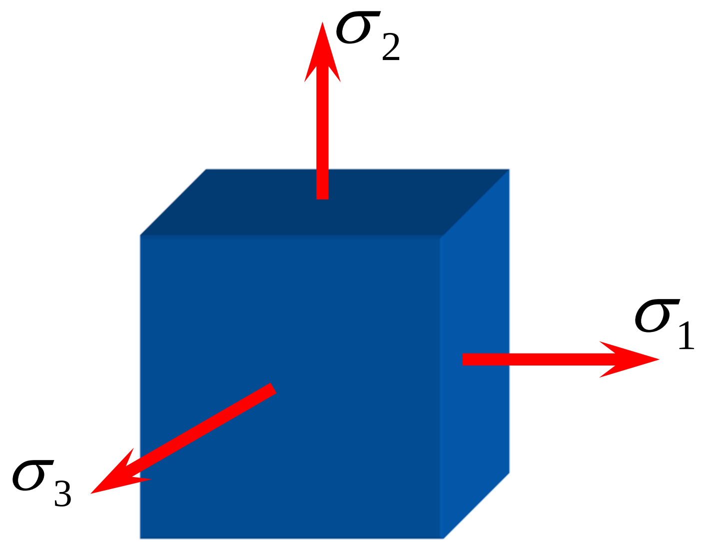


13、广义胡克定律（主应力）

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\mu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\mu\left(\sigma_3+\sigma_1\right)\right]$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left[\sigma_3-\mu\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\right]$$



材料为各向同性，且变形处于线弹性范围。

本章复习

21、材料破坏（失效）的两种类型：断裂与屈服

脆性材料：断裂，破坏极限 σ_b

塑性材料：屈服，破坏极限 σ_S

22、四个强度理论

- 第一类强度理论：以脆断作为破坏的标志。

  包括：最大拉应力理论和最大伸长线应变理论。

- 第二类强度理论：以出现屈服现象作为破坏的标志。

  包括：最大切应力理论和畸变能密度理论。

本章复习

23、最大拉应力理论（第一强度理论）

$$\sigma_1 \le [\sigma]$$ （脆性材料）

24、最大伸长线应变理论（第二强度理论）

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]$$ （脆性材料）

25、最大切应力理论（第三强度理论）

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$$ （塑性材料）

26、畸变能密度理论（第四强度理论）

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le \frac{\sigma_s}{n_s} = [\sigma]$$

（塑性材料）

27、相当应力

把各种强度理论的强度条件写成统一形式

$$\sigma_{r} \leq [\sigma]$$

σ_r称为复杂应力状态的相当应力.

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

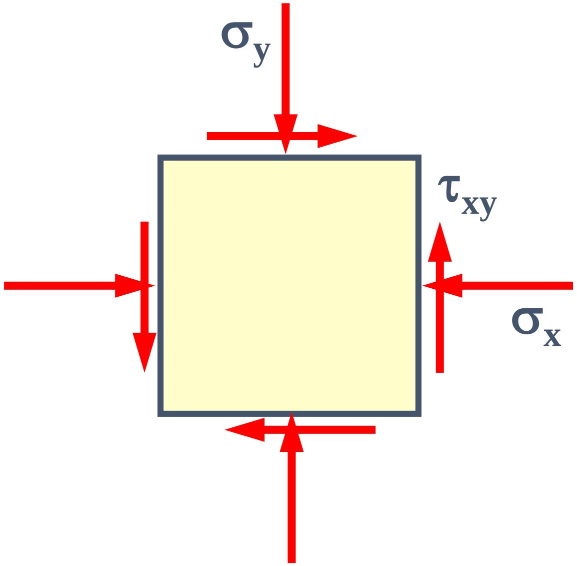
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x = -1$ MPa，$\sigma_y = -0.4$ MPa，$\tau_{xy} = -0.2$ MPa，$\tau_{yx} = 0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在$\alpha=30^{\circ}$和$\alpha = -40^{\circ}$两斜面上的应力。

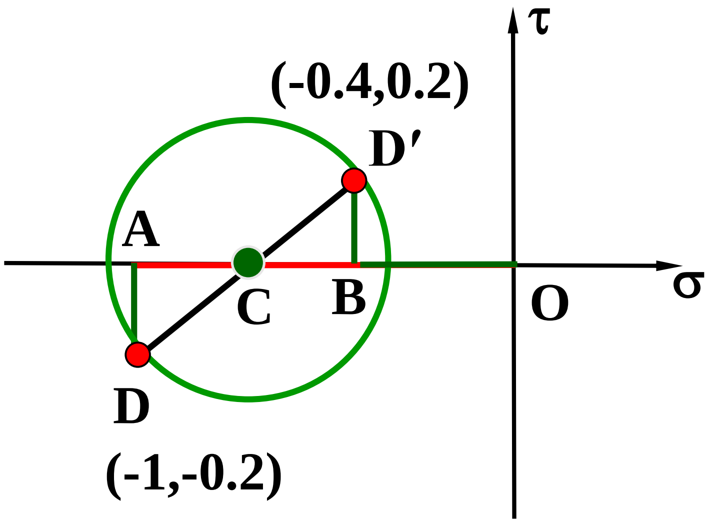


解：(1) 画应力圆

量取OA= $\sigma_x = -1$，AD = $\tau_{xy} = -0.2$，定出D点；

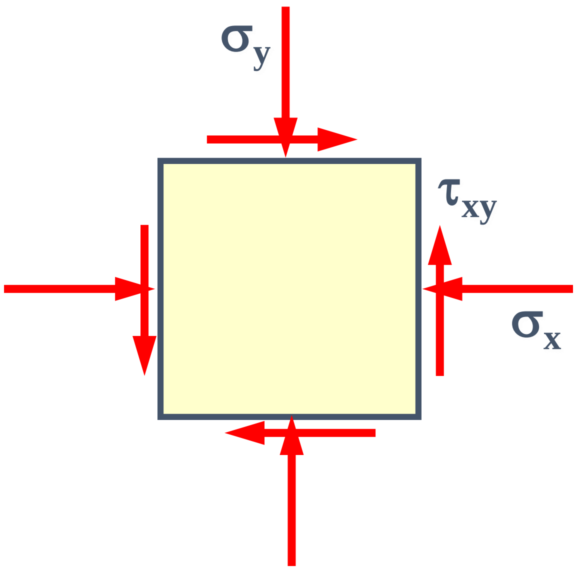
量取OB = $\sigma_y = -0.4$，BD′ = $\tau_{yx} = 0.2$，定出 D′点。

以 DD′ 为直径绘出的圆即为应力圆。



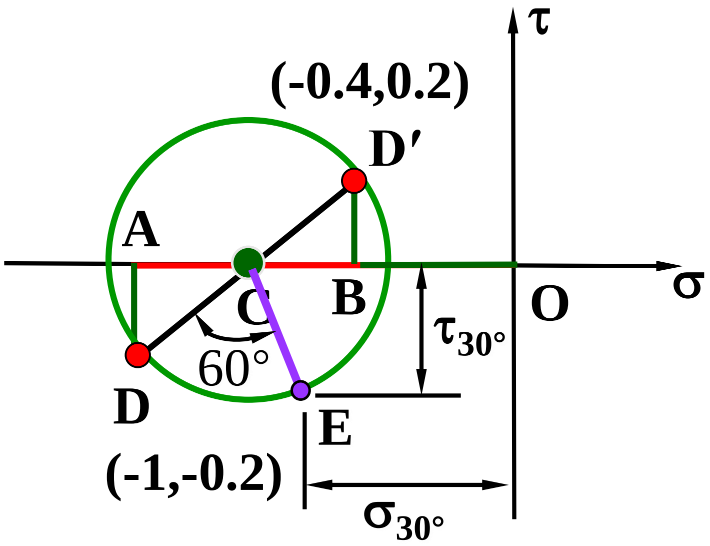
例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x = -1$ MPa，$\sigma_y = -0.4$ MPa，$\tau_{xy} = -0.2$ MPa，$\tau_{yx} = 0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在$\alpha=30^{\circ}$和$\alpha = -40^{\circ}$两斜面上的应力。



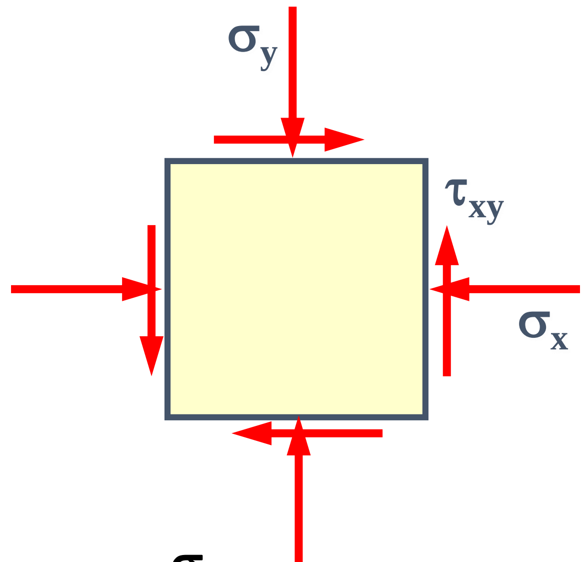
解：（2）确定$\alpha=30^{\circ}$斜截面上的应力

将半径CD逆时针转动$2\alpha=60^{\circ}$到半径CE，E点的坐标就代表$\alpha=30^{\circ}$斜截面上的应力。



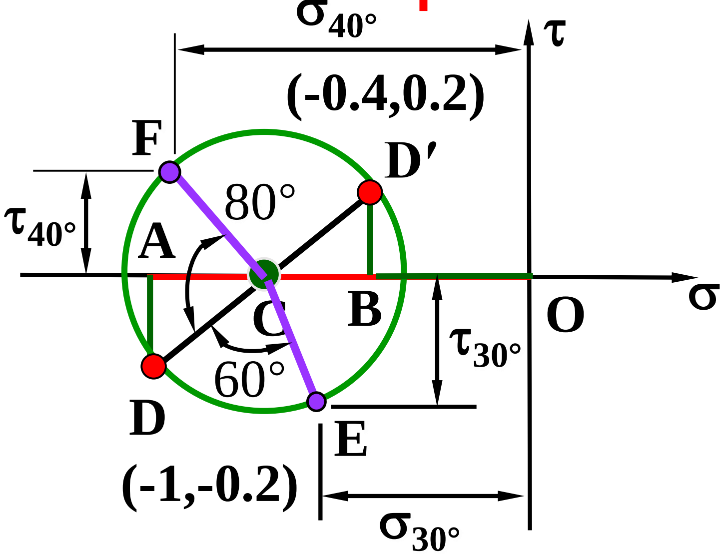
例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x = -1$ MPa，$\sigma_y = -0.4$ MPa，$\tau_{xy} = -0.2$ MPa，$\tau_{yx} = 0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在$\alpha=30^o$和$\alpha = -40^o$两斜面上的应力。



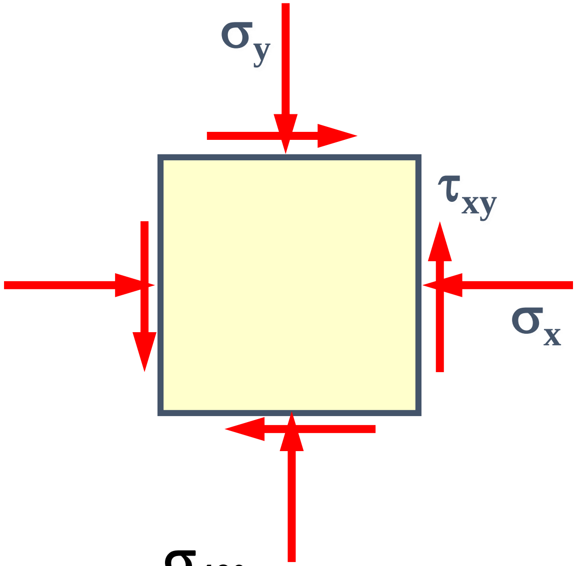
解：(3) 确定$\alpha=-40^o$斜截面上的应力

将半径CD顺时针转动$2\alpha=80^o$到半径CF，F点的坐标就代表$\alpha=-40^o$斜截面上的应力。



例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x = -1$ MPa，$\sigma_y = -0.4$ MPa，$\tau_{xy} = -0.2$ MPa，$\tau_{yx} = 0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在α=30º和$\alpha = -40$º两斜面上的应力。



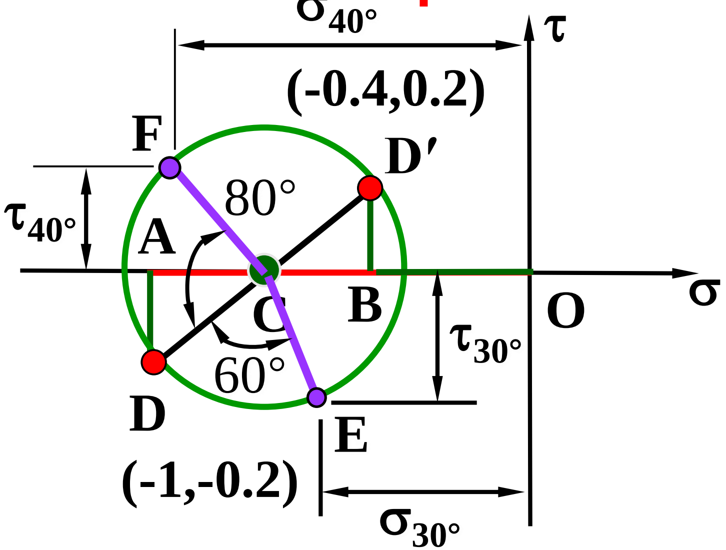
解：(4)

$$\sigma_{30°} = -0.68\ \text{MPa}$$

$$\tau_{30°} = -0.36\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{-40°} = -0.95\ \text{MPa}$$

$$\tau_{-40°} = -0.26\ \text{MPa}$$



八、组合变形

- 组合变形 → 叠加原理
  - 1、载荷分解
  - 2、基本变形应力分析
  - 3、应力叠加
  - 4、强度分析
- 拉（压）弯组合 → 危险点为单向应力状态
  - 强度条件 → $\sigma_{\max} = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A} + \dfrac{M}{W} \le [\sigma]$
- 薄壁承压圆筒 → 危险点为二向应力状态
  - $\sigma_1 = \sigma_{\mathrm{t}} = \dfrac{pD}{2\delta} \qquad \sigma_2 = \sigma_x = \dfrac{pD}{4\delta}$ → 强度条件

八、组合变形

弯扭组合

危险点为二向应力状态

强度理论

脆性断裂

$$\sigma_{r1}=\sigma_1\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\le[\sigma]$$

塑性屈服

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}\le[\sigma]\qquad \sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W}\le[\sigma]$$

本章复习

1、构件在荷载作用下发生两种或两种以上的基本变形，则构件的变形称为组合变形。

2、处理组合变形的基本方法：叠加法

3、拉弯组合：作用在杆件上的外力既有轴向拉(压)力，还有横向力，杆件将发生拉伸（压缩) 与弯曲组合变形。

4、应力分析

横截面上任意一点(z, y)处的正应力计算公式为：

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

本章复习

5、弯扭组合

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

σ 是危险点的正应力，τ 是危险点的切应力

- 该公式适用于塑性材料的平面应力状态，且横截面不限于圆形截面；
- 该公式适用于弯+扭组合变形、拉（压）+扭转的组合变形、以及拉（压）+扭转+弯曲的组合变形；
- 切应力的方向可以不用考虑。

5、弯扭组合

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^{2}+T^{2}}\leq[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^{2}+0.75T^{2}}\leq[\sigma]$$

W为抗弯截面系数，M、T为轴危险截面的弯矩和扭矩。

➢ 该公式仅适用于塑性材料发生弯+扭组合变形时，且其截面为实心圆截面或空心圆截面。

$$W=\frac{\pi d^{3}}{32} \qquad W=\frac{\pi D^{3}}{32}\left(1-\alpha^{4}\right)$$

本章复习

6、弯拉（压）扭组合

$$\sigma_{r3}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+4\tau_T^2}\le[\sigma]$$

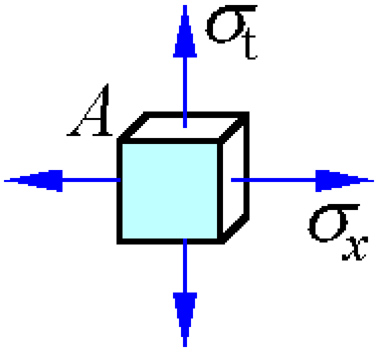
$$\sigma_{r4}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+3\tau_T^2}\le[\sigma]$$

7、薄壁圆筒的应力与强度分析　　$\delta\le D/20$

轴向应力　$\sigma_x=\dfrac{pD}{4\delta}$　　周向应力　$\sigma_t=\dfrac{pD}{2\delta}$

$$\sigma_1=\sigma_t=\frac{pD}{2\delta}\qquad \sigma_2=\sigma_x=\frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_3=0$$



本章复习

6、弯拉（压）扭组合

$$\sigma_{r3}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+4\tau_T^2}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{(\sigma_M+\sigma_N)^2+3\tau_T^2}\le[\sigma]$$

7、薄壁圆筒的应力与强度分析　　$\delta\le D/20$

对于脆性材料

$$\sigma_{r1}=\frac{pD}{2\delta}\le[\sigma] \qquad \sigma_{r2}=\frac{pD}{4\delta}(2-\mu)\le[\sigma]$$

对于塑性材料

$$\sigma_{r3}=\frac{pD}{2\delta}\le[\sigma] \qquad \sigma_{r4}=\frac{\sqrt{3}pD}{4\delta}\le[\sigma]$$

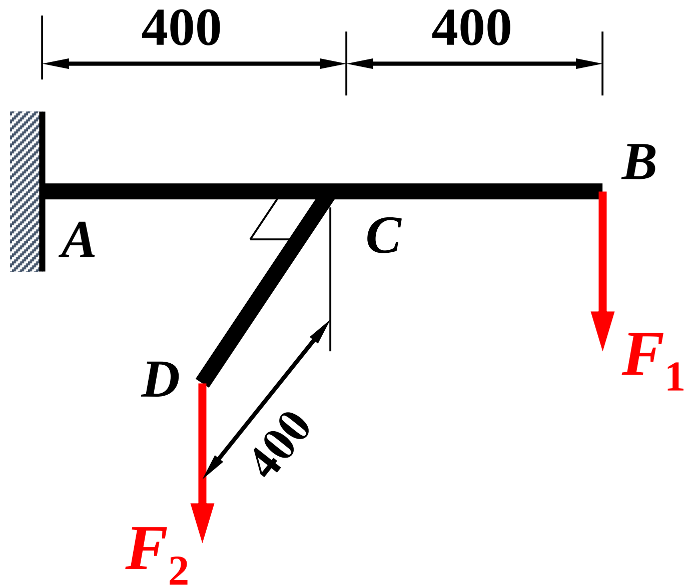
§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

F_1=0.5 kN，F_2=1 kN，[σ]=160 MPa。

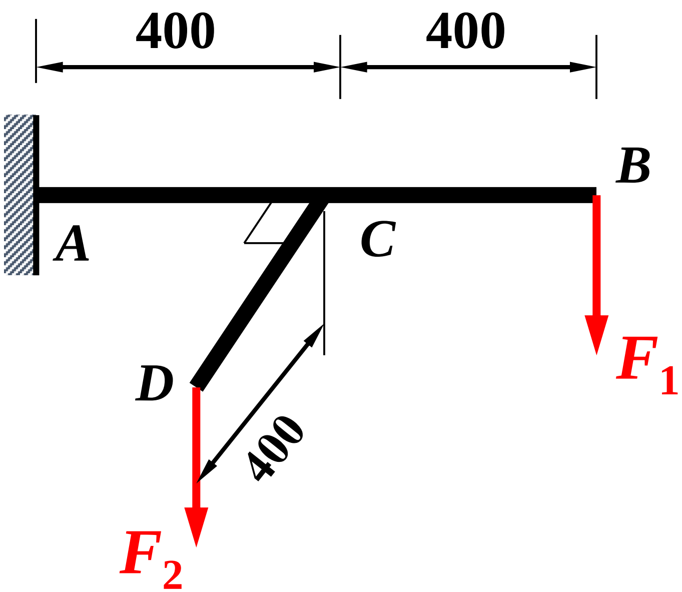
（1）用第三强度理论计算AB的直径。

（2）若AB杆的直径 d=40 mm，并在B端加一水平力 F_3 = 20 kN，校核AB杆的强度。



§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9



解：1）将力F向AB轴的C截面形心简化

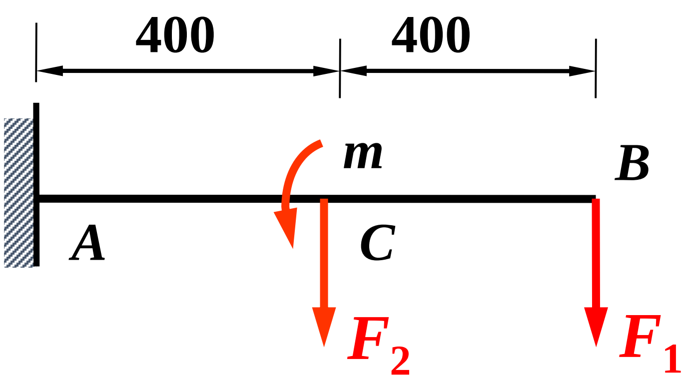
$$F_2 = 1\ \text{kN} \qquad m = 0.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

AB 为弯、扭组合变形

固定端截面是危险截面

$$M_{\max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$T_{\max} = 0.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_{\max}^2 + T_{\max}^2}}{W} \le [\sigma]$$

$$d = 38.5\ \text{mm}$$

§8.4 扭转与弯曲的组合

例题8.9

解： 2）在B端加拉力F_3

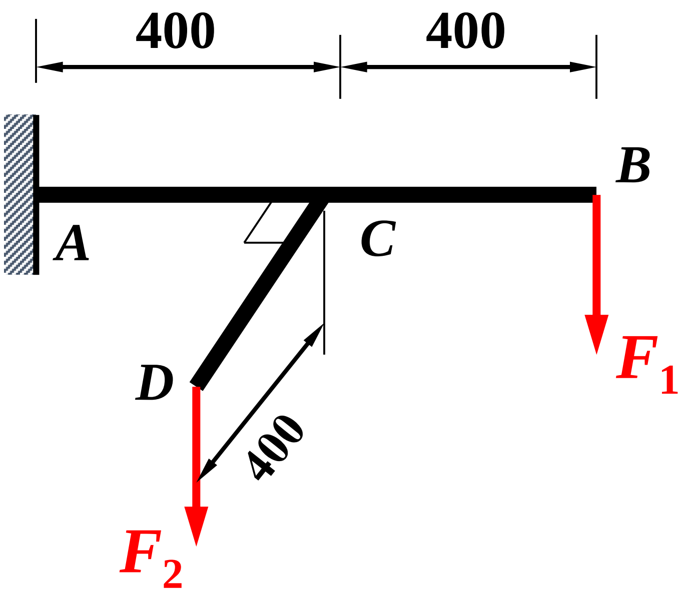
AB为弯+扭+拉组合变形

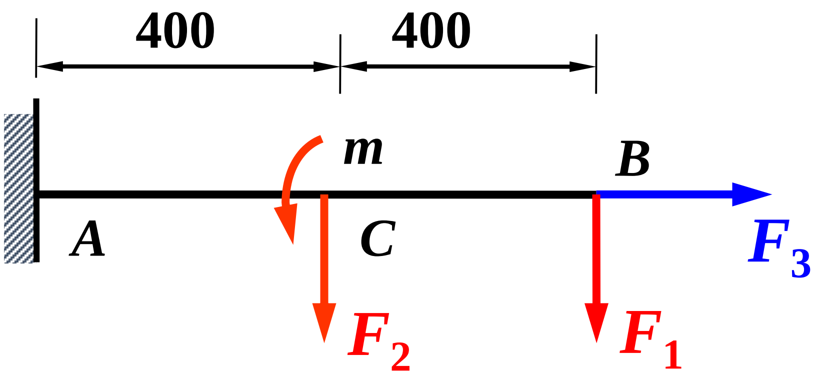
固定端截面是危险截面

$$M_{\max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8 \ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max} = 0.4 \ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{\text{N}} = F_3 = 20 \ \text{kN}$$





例题8.9

解：2）在B端加拉力F_3

固定端截面最大的正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_{z}}+\frac{F_{N}}{A}=143\ \text{MPa}$$

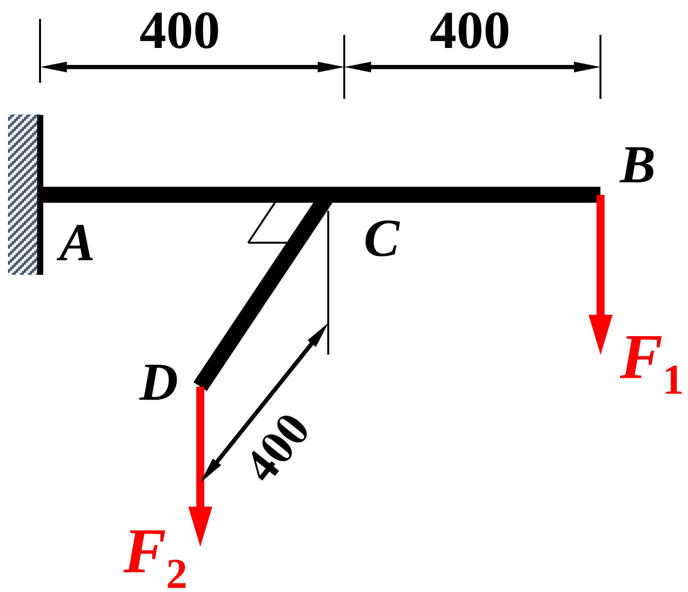
最大切应力为

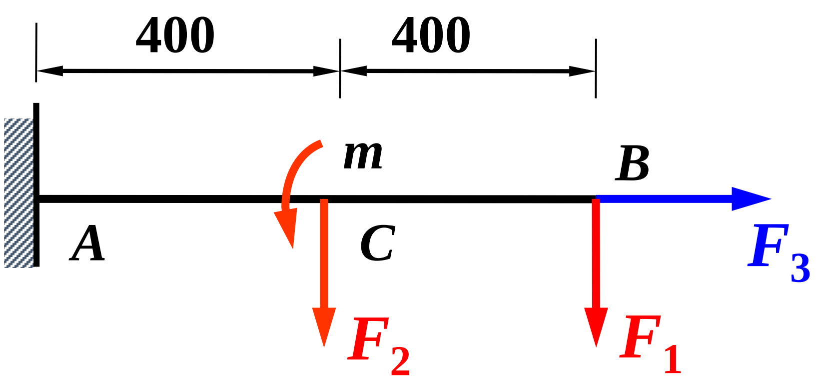
$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_{t}}=31.8\ \text{MPa}$$

由第三强度理论

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^{2}+4\tau^{2}}$$

$$=157\ \text{MPa}\le[\sigma]$$





九、压杆稳定

- 压杆稳定 → 压杆保持原有直线平衡状态的能力
- 临界压力 F_{cr} → 临界应力：$\sigma_{cr}=\dfrac{F_{cr}}{A}$
- 长度因数 μ
  - 两端铰支：$\mu=1$ → 一端自由，一端固定：$\mu=2$
  - 两端固定：$\mu=0.5$ → 一端铰支，一端固定：$\mu\approx 0.7$
- 柔度（长细比） → $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$ → 惯性半径：$i=\sqrt{\dfrac{I}{A}}$
- 大柔度杆：$\lambda\geq\lambda_p$ → 欧拉公式 → $\sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ → $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$
- 中柔度杆：$\lambda_0\leq\lambda\leq\lambda_p$ → 经验公式 → $\sigma_{cr}=a-b\lambda$
- 小柔度杆：$\lambda\leq\lambda_0$ → 强度公式 → $\sigma_{cr}=\sigma_S$
- 压杆稳定计算 → $n=\dfrac{F_{cr}}{F}\geq n_{st}$

本章复习

2、两段铰支细长压杆的临界压力（欧拉公式）

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

4、长细比

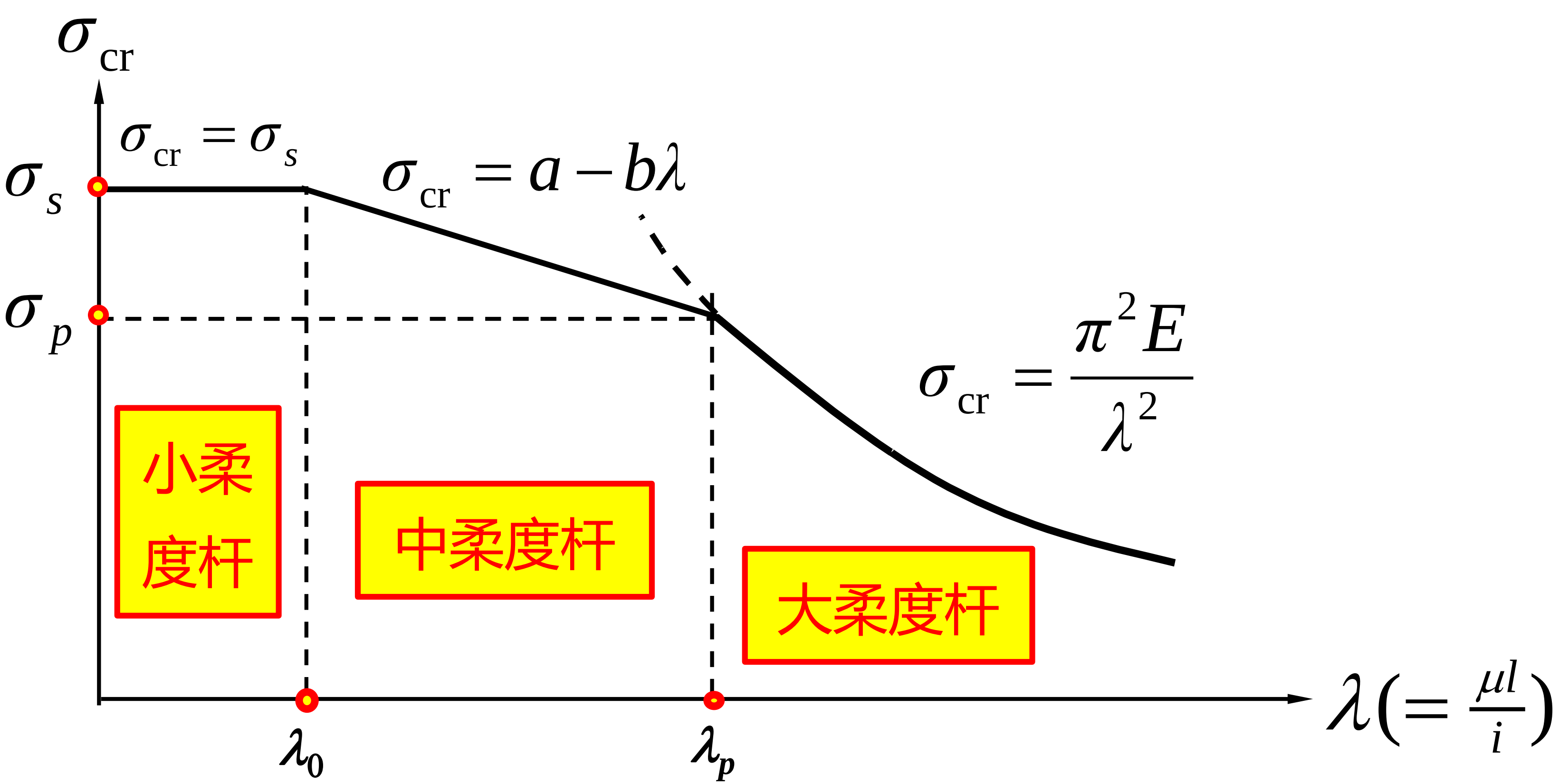
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \qquad \lambda_0 = \frac{a-\sigma_s}{b} \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

5、欧拉公式的适用范围：大柔度杆

6、经验公式的适用范围：中柔度杆 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$

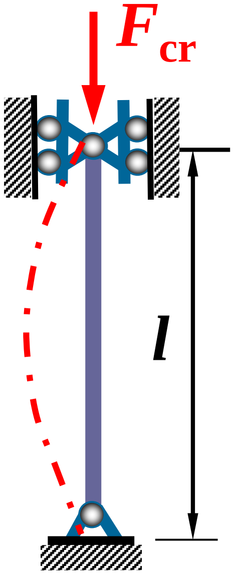
7、强度条件的适用范围：小柔度杆 $\sigma_{cr} = \sigma_s$

8、临界应力总图

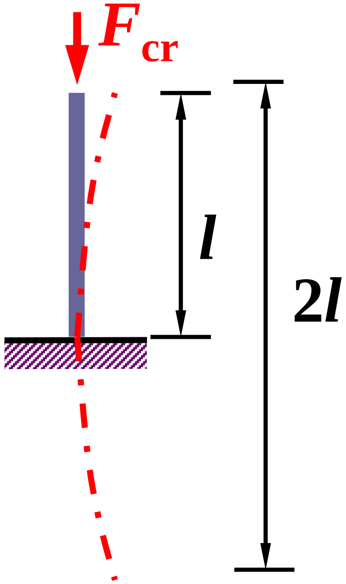


临界应力总图

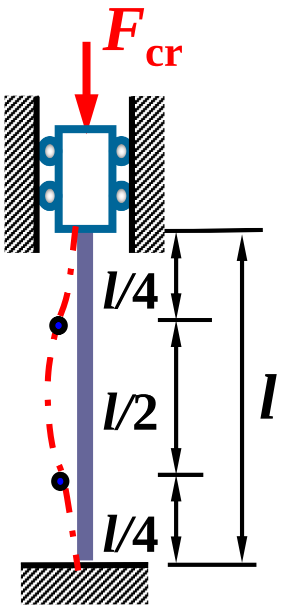
3、各种支座下的欧拉公式

两端绞支	μ 长度系数	欧拉公式
	1	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$

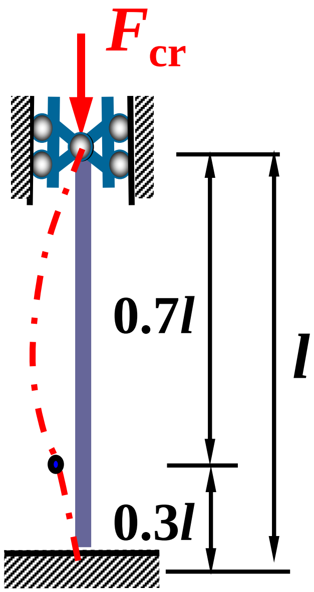
3、各种支座下的欧拉公式

一端固定 一端自由	μ 长度系数	欧拉公式
	2	$F_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$

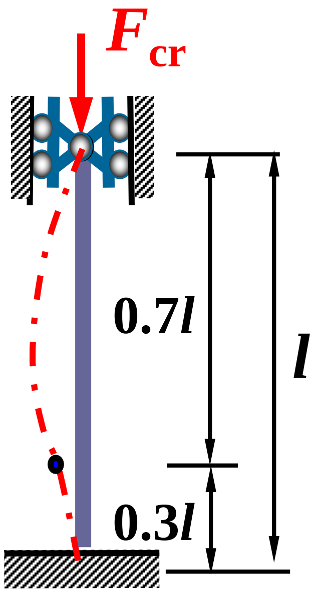
3、各种支座下的欧拉公式

两端固定	μ 长度系数	欧拉公式
	0.5	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$

3、各种支座下的欧拉公式

一端固定 一端绞支	μ 长度系数	欧拉公式
	0.7	$F_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$

3、各种支座下的欧拉公式

一端固定 一端绞支	μ 长度系数	欧拉公式
	0.7	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$

9、压杆的稳定校核

$$F \leq \frac{F_{\mathrm{cr}}}{[n_{st}]} \qquad n = \frac{F_{\mathrm{cr}}}{F} \geq [n_{st}]$$

压杆实际压力

计算步骤

（1）计算最大的柔度系数$\lambda_{\max}$；

（2）根据$\lambda_{\max}$选择公式计算临界应力；

（3）根据稳定性条件，判断压杆的稳定性或确定许可载荷。

10、提高压杆稳定性的关键

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$ 欧拉公式

F_{cr} 越大越稳定

减小压杆长度 l

减小长度系数 μ（增强约束）

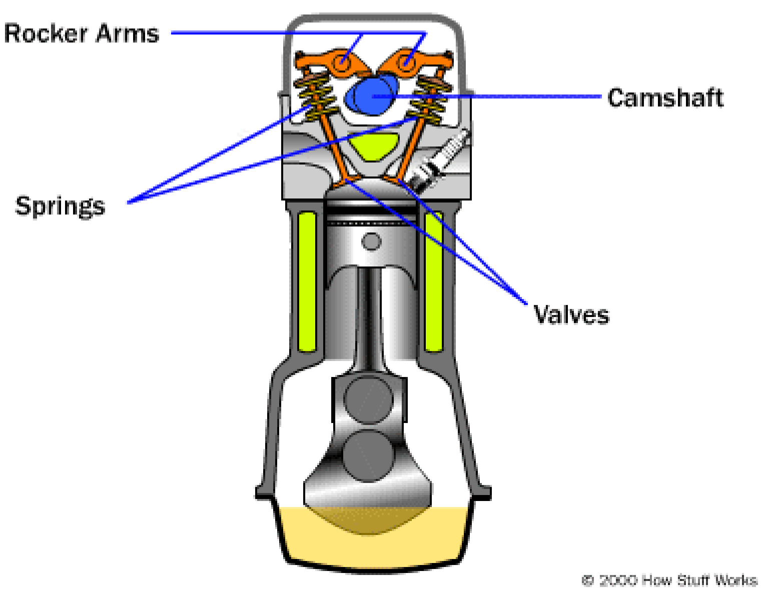
增大截面惯性矩 I（合理选择截面形状）

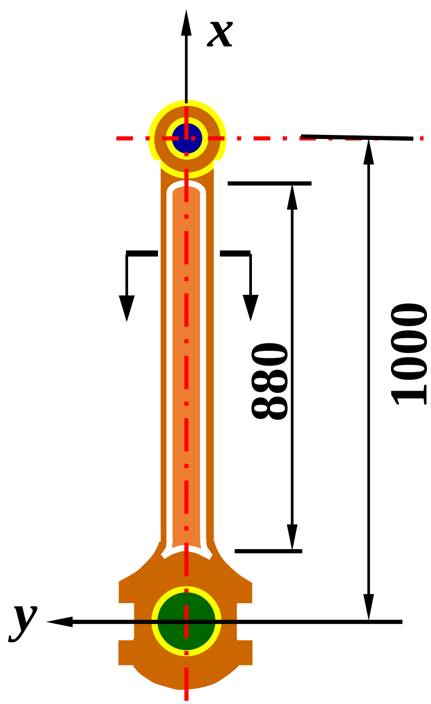
增大弹性模量 E（合理选择材料）

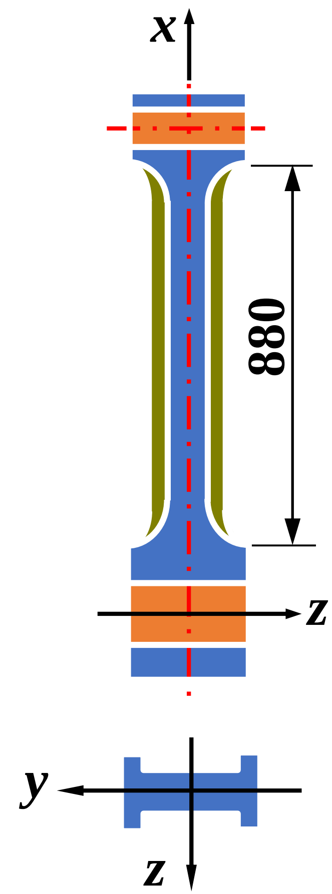
§9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

例题9.1

已知一内燃机、空气压缩机的连杆为细长压杆，截面形状为工字钢形，惯性矩I_z=6.5×10^4 mm^4，I_y=3.8×10^4 mm^4，弹性模量E=2.1×10^5 MPa。试计算临界力F_{cr}。





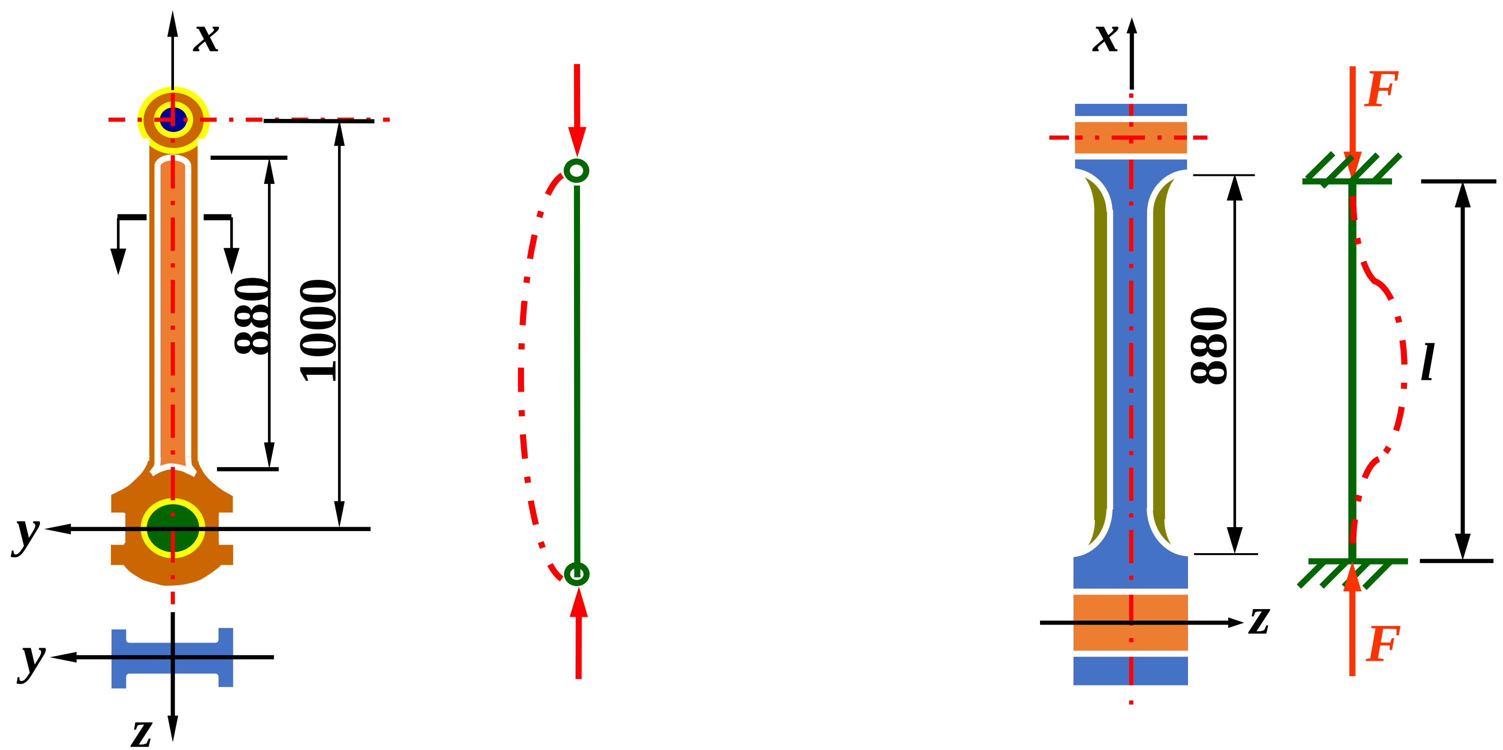


§9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

例题9.1

分析思路：（1）杆件在两个方向的约束情况不同；

（2）计算出两个临界压力，最后取小的一个作为压杆的临界压力。



§9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

例题9.1

解： xOy面：约束情况为两端铰支，

$\mu=1$， $I=I_z$， $l=1\ \text{m}$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{3.14^2\times 2.1\times 10^{11}\times 6.5\times 10^{-8}}{(1\times 1)^2}$$

$$=134.6\ \text{kN}$$

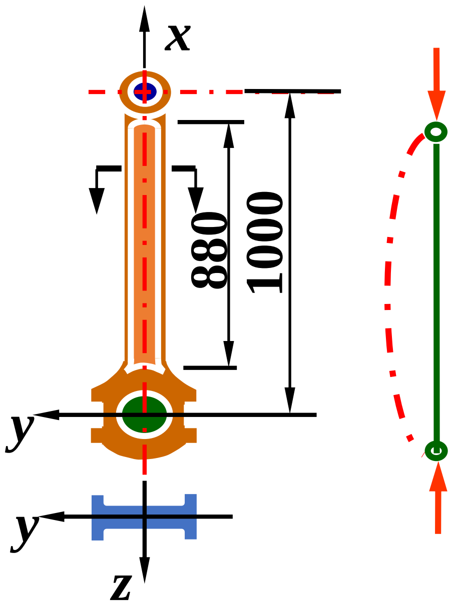
xOz面：约束情况为两端固定，

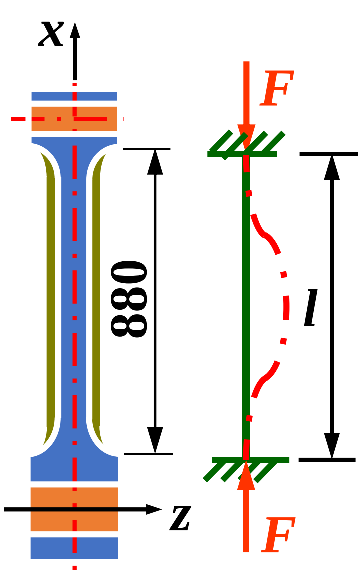
$\mu=0.5$， $I=I_y$， $l=0.88\ \text{m}$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{3.14^2\times 2.1\times 10^{11}\times 3.8\times 10^{-8}}{(0.5\times 0.88)^2}$$

$$=406.4\ \text{kN}$$

所以连杆的临界压力为134.6 kN。





十、动载荷

动载荷 → 动荷因数 K_{d}

构件有加速度时的应力计算 → 动静法、达朗伯原理 → 匀加速度a向上提升的杆件

匀角速度ω旋转圆环

能量法解冲击问题 → $T+V=V_{\varepsilon d}$

1、冲击物从高处自由下落： $K_{\mathrm{d}}=1+\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{st}}}$

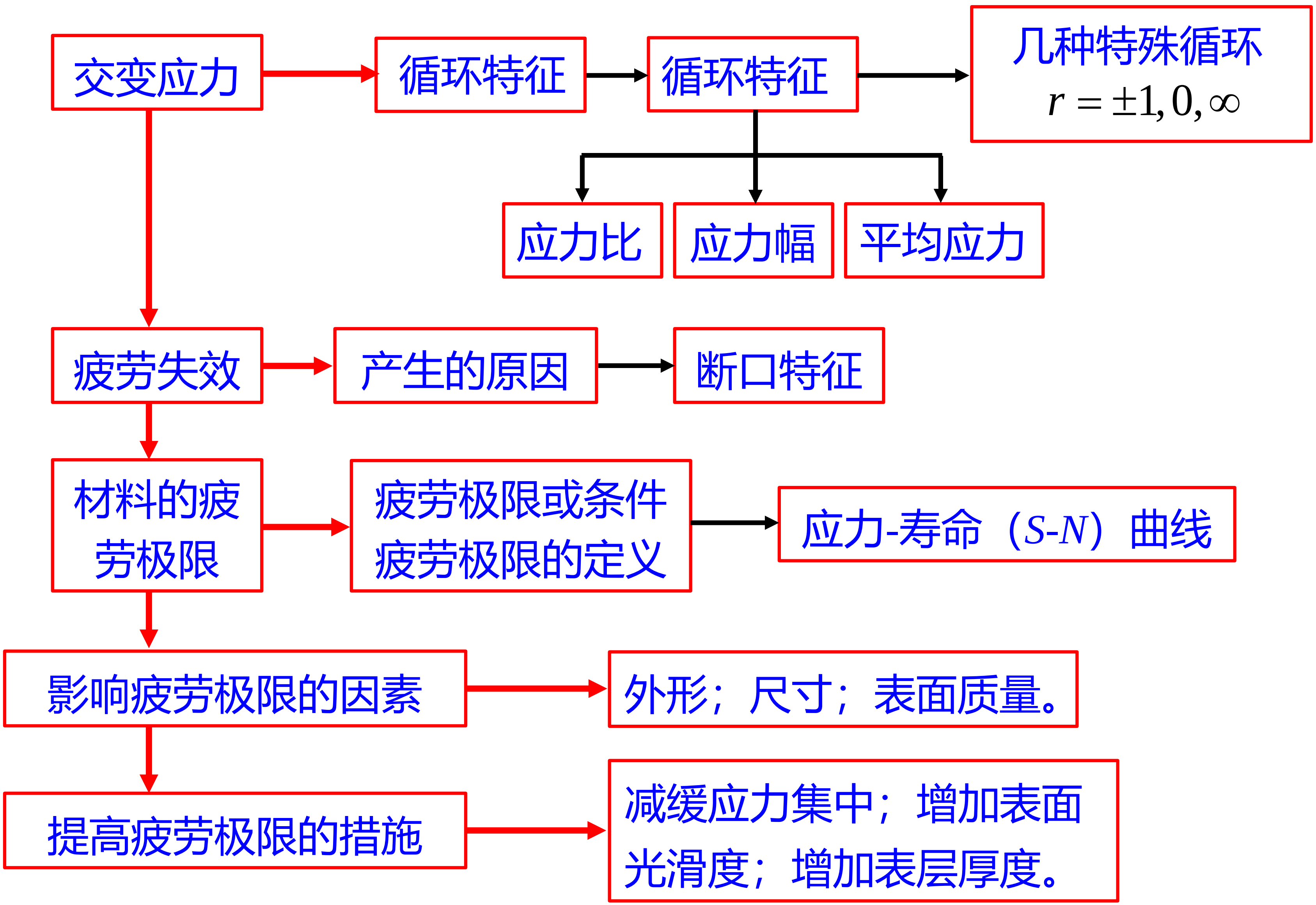
2、冲击物在h处的速度为v： $H=\dfrac{v^2}{2g}+h$

3、接触时的速度为v： $K_{\mathrm{d}}=1+\sqrt{1+\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

4、突加载荷： $h=0,\quad K_{\mathrm{d}}=2$

5、水平冲击： $K_{\mathrm{d}}=\sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

十一、交变应力


交变应力
循环特征
循环特征
几种特殊循环
$r = \pm 1, 0, \infty$
应力比
应力幅
平均应力
疲劳失效
产生的原因
断口特征
材料的疲劳极限
疲劳极限或条件疲劳极限的定义
应力-寿命（S-N）曲线
影响疲劳极限的因素
外形；尺寸；表面质量。
提高疲劳极限的措施
减缓应力集中；增加表面光滑度；增加表层厚度。

两章复习

1、动载荷：载荷作用过程中其随时间快速变化，或其本身不稳定（包括大小、方向），构件内各质点加速度较大。

2、动响应：构件在动载荷作用下产生的各种响应（如应力、应变、位移等）。

3、实验表明，在静载荷下服从胡克定律的材料，只要应力不超过比例极限，在动载荷下胡克定律仍成立。

4、动荷系数：$K_d = \dfrac{\text{动响应}}{\text{静响应}}$

两章复习

5、冲击：当运动着的物体碰撞到一静止的构件时，前者的运动将受阻而在短时间停止运动，这时构件就受到了冲击作用。

6、冲击的求解：能量守恒定律。

7、竖直冲击：

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

水平冲击：

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

两章复习

8、交变应力：构件内一点处的应力随时间作周期性变化，这种应力称为交变应力。

9、疲劳破坏：材料在交变应力作用下的破坏。

10、疲劳破坏的特点：破坏应力值一般低于静载荷作用下的强度极限值；表现为脆性断裂；断口表面可分为光滑区与粗糙区。

11、疲劳破坏的过程：裂纹萌生；裂纹扩展；构件断裂。

12、交变应力的分类：对称循环、非对称循环、静循环。

13、疲劳极限。

§10.3 构件受冲击时的应力和变形

例题10.6

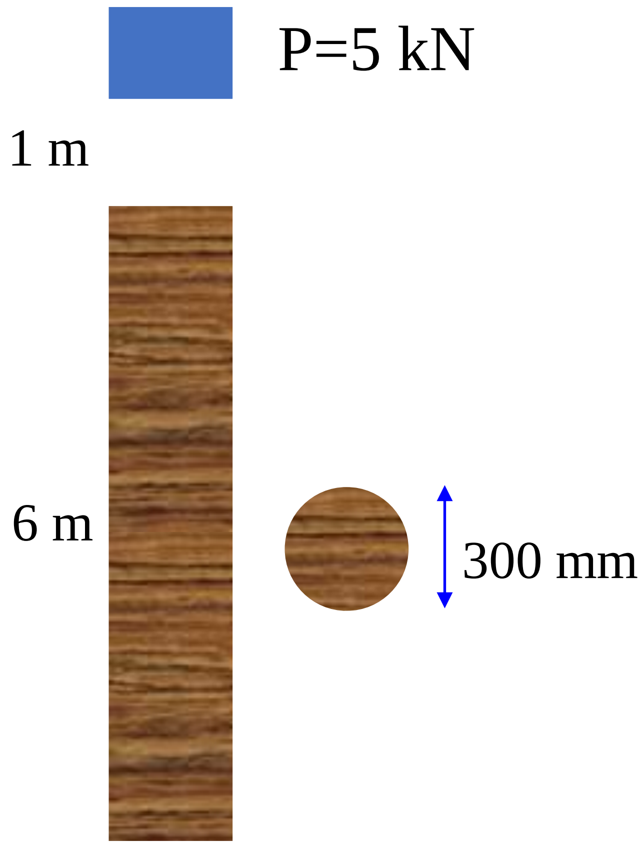
木柱E=10 GPa，橡皮E=8 MPa，求加橡皮前后的动荷因数。

解： （1）不垫橡皮

$$\Delta_{st}=\frac{Pl}{EA}=\frac{5\times10^3\times6\times10^3}{10\times10^3\times\frac{1}{4}\times3.14\times300^2}=4.25\times10^{-2}\ \text{mm}$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{2\times1\times10^3}{4.25\times10^{-2}}}=218$$

$$\sigma_d=K_d\sigma_{st}=K_d\frac{P}{A}=218\times\frac{5\times10^3}{\frac{1}{4}\times3.14\times300^2}=15.4\ \text{MPa}$$



§10.3 构件受冲击时的应力和变形

例题10.6

木柱E=10 GPa，橡皮E=8 MPa，求加橡皮前后的动荷因数。

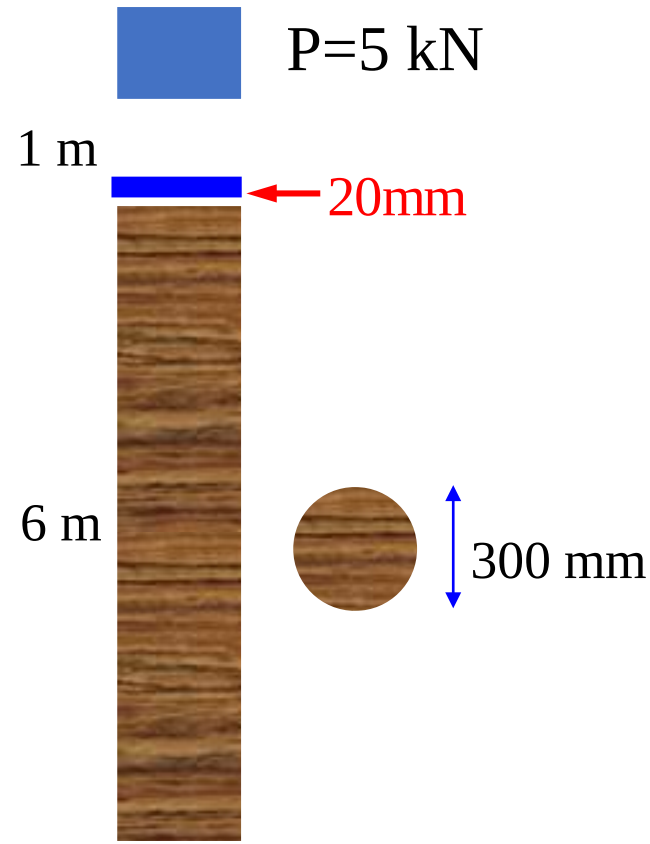
解：（2）垫橡皮

$$\Delta_{st}=\Delta_{st}^{(1)}+\Delta_{st}^{(2)}=4.25\times10^{-2}+\frac{5\times10^{3}\times20}{8\times\frac{1}{4}\times3.14\times300^{2}}$$

$$=0.18+0.0425=0.22(mm)$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h'}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{2\times(1\times10^{3}-20)}{0.22}}=95$$

动荷系数显著减小



十三、能量法

能量原理（与功、能有关的定理的统称）

功能原理：弹性范围内 $V_\varepsilon = W$

应变能的计算

轴向拉压：$V_\varepsilon = \dfrac{F^2 l}{2EA} = \dfrac{EA\Delta l^2}{2l} = \dfrac{1}{2}F\Delta l$

圆轴扭转：$V_\varepsilon = \dfrac{T^2 l}{2GI_p} = \dfrac{GI_p\varphi^2}{2l} = \dfrac{1}{2}T\varphi$

弯曲：$V_\varepsilon = \dfrac{M^2 l}{2EI} = \dfrac{EI\theta^2}{2l} = \dfrac{1}{2}M\theta$

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}F\delta$$

应变能的普遍表达式

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F_1\delta_1 + \frac{1}{2}F_2\delta_2 + \dots + \frac{1}{2}F_n\delta_n$$

克拉贝依隆原理

组合变形时

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} + \int_l \frac{T^2(x)dx}{2GI_p}$$

十三、能量法

互等定理

功的互等定理

位移互等定理

卡氏定理

卡氏第一定理 $F_i = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial \delta_i}$

卡氏第二定理 $\delta_i = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$

拉压： $\delta_i = \int_l \dfrac{F_N}{EA} \cdot \dfrac{\partial F_N}{\partial F_i} dx$

弯曲： $\delta_i = \int_l \dfrac{M}{EA} \cdot \dfrac{\partial M}{\partial F_i} dx$

扭转： $\delta_i = \int_l \dfrac{T}{EA} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial F_i} dx$

桁架： $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{F_{Nj} l_j}{EA} \cdot \dfrac{\partial F_{Nj}}{\partial F_i}$

单位载荷法

（莫尔积分）

$$\Delta = \int_l \frac{F_N \cdot \overline{F}}{2EA} dx + \int_l \frac{M \cdot \overline{M}}{2EI} dx + \int_l \frac{T \cdot \overline{T}}{2GI_p} dx$$

1、线弹性范围；2、 $\overline{M} = \dfrac{\partial M}{\partial F}$ ；3、位移为沿广义力方向的广义位移。

$$\Delta = \frac{\omega_N \cdot \overline{F_{NC}}}{EA} + \frac{\omega_M \cdot \overline{M_C}}{EI} + \frac{\omega_T \cdot \overline{T_C}}{GI_p}$$

图乘法：在单位载荷作用下，$\overline{F_N}, \overline{T}, \overline{M}$ 图为直线或折线。

本章复习

4、杆件的应变能

		应力	功	应变
应变能密度	正应力	$v=\frac{1}{2E}\sigma^2$	$v=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$	$v=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$
	切应力	$v=\frac{1}{2G}\tau^2$	$v=\frac{1}{2}\tau\gamma$	$v=\frac{1}{2}G\gamma^2$
应变能		力	功	变形
	拉压	$V_\varepsilon=\frac{F^2 l}{2EA}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}F\Delta l$	$V_\varepsilon=\frac{EA}{2l}\Delta l^2$
	扭转	$V_\varepsilon=\frac{T^2 l}{2GI_\mathrm{p}}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}T\varphi$	$V_\varepsilon=\frac{GI_\mathrm{p}}{2l}\varphi^2$
	弯曲	$V_\varepsilon=\frac{M^2 l}{2EI}$	$V_\varepsilon=\frac{1}{2}M\theta$	$V_\varepsilon=\frac{EI}{2l}\theta^2$

仅适用于满足$\sigma=E\varepsilon$的线性情况，其他形式需要求积分 $V_\varepsilon=W=\int_0^\Delta F\mathrm{d}\Delta$

本章复习

5、应变能的普遍表达式

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}(F_1\delta_1+F_2\delta_2+F_3\delta_3)$$

克拉贝依隆原理（只限于线性结构）

6、功的互等定理

$$F_1\delta_1' + F_2\delta_2' = F_3\delta_3' + F_4\delta_4'$$

7、位移互等定理

$$\delta_1' = \delta_3'$$

9、卡氏第二定理

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon(F_1, F_2 \cdots F_n)}{\partial F_i}$$

10、卡氏第二定理的应用

（1）轴向拉压

$$\delta_i=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}=\frac{\partial}{\partial F_i}\int\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}=\int\frac{F_N(x)}{EA}\cdot\frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i}dx$$

（2）扭转

$$\delta_i=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}=\frac{\partial}{\partial F_i}\int\frac{T^2(x)dx}{2GI_\mathrm{p}}=\int\frac{T(x)}{GI_\mathrm{p}}\cdot\frac{\partial T(x)}{\partial F_i}dx$$

（3）弯曲

$$\delta_i=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}=\frac{\partial}{\partial F_i}\int\frac{M^2(x)dx}{2EI}=\boxed{\int\frac{M(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial F_i}dx}$$

10、卡氏第二定理的应用

(4) 桁架

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{Nj} l_j}{EA} \cdot \frac{\partial F_{Nj}}{\partial F_i}$$

(5) 组合变形

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\left[\int \frac{F_N^2(x)dx}{2EA} + \int \frac{T^2(x)dx}{2GI_\mathrm{p}} + \int \frac{M^2(x)dx}{2EI}\right]$$

$$= \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{T(x)}{GI_\mathrm{p}} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$$

本章复习

13、单位载荷法

$$1\cdot\varDelta=\int_l(\bar{M}\mathrm{d}\theta+\bar{F}_S\cdot\mathrm{d}\lambda+\bar{F}_N\mathrm{d}\delta+\bar{T}\mathrm{d}\varphi)$$

$$1\cdot\varDelta=\int_l\left(\bar{M}\,\frac{M}{EI}\mathrm{d}x+\bar{F}_S\cdot\frac{\alpha_s F_S}{GA}\mathrm{d}x+\bar{F}_N\,\frac{F_N}{EA}\mathrm{d}x+\bar{T}\,\frac{T}{GI_P}\mathrm{d}x\right)$$

14、普遍形式的莫尔定理

$$\Delta=\int_l\frac{F_N(x)\bar{F}_N(x)}{EA}\mathrm{d}x+\int_l\frac{T(x)\bar{T}(x)}{GI_p}\mathrm{d}x+\boxed{\int_l\frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x}$$

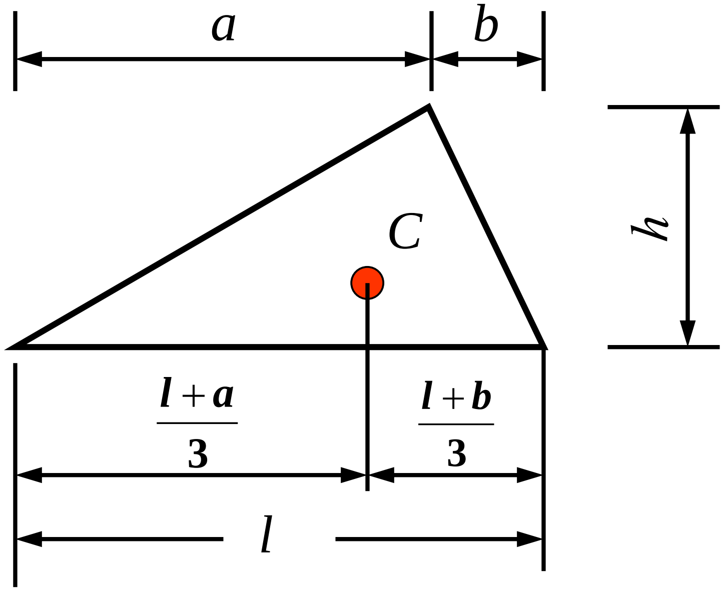
该式中$\varDelta$应看成广义位移，把单位载荷看成与相对应的广义力。

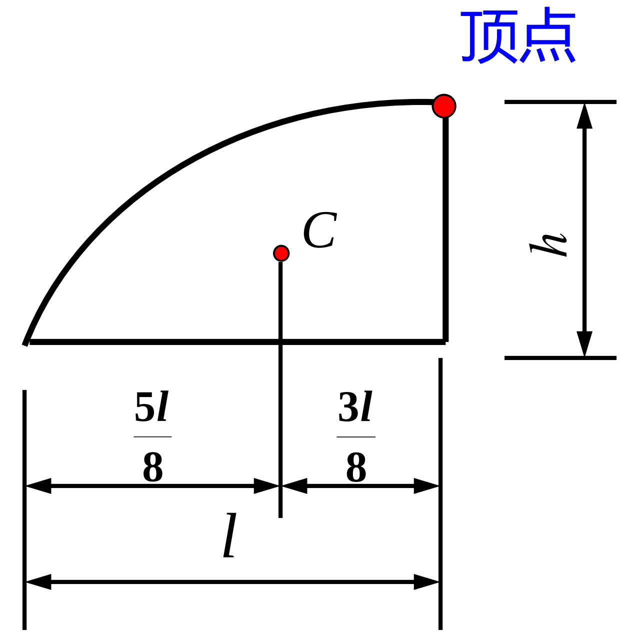
15、图乘法（等直杆弯曲）

$$\Delta=\frac{1}{EI}\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x=\frac{\omega\cdot\bar{M}_C}{EI}$$

§13.8 计算莫尔积分的图乘法

2、几种常见图形的面积和形心计算公式

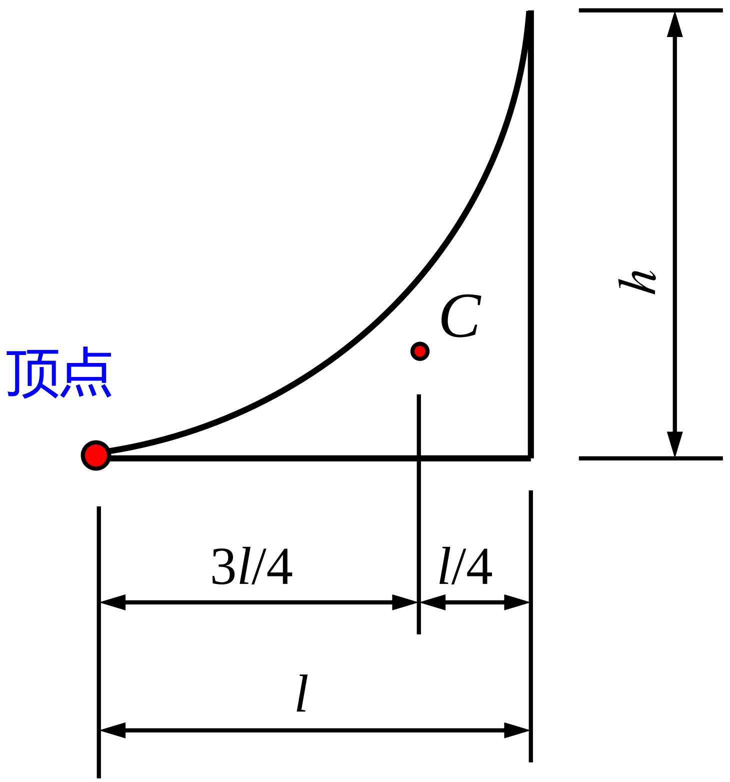


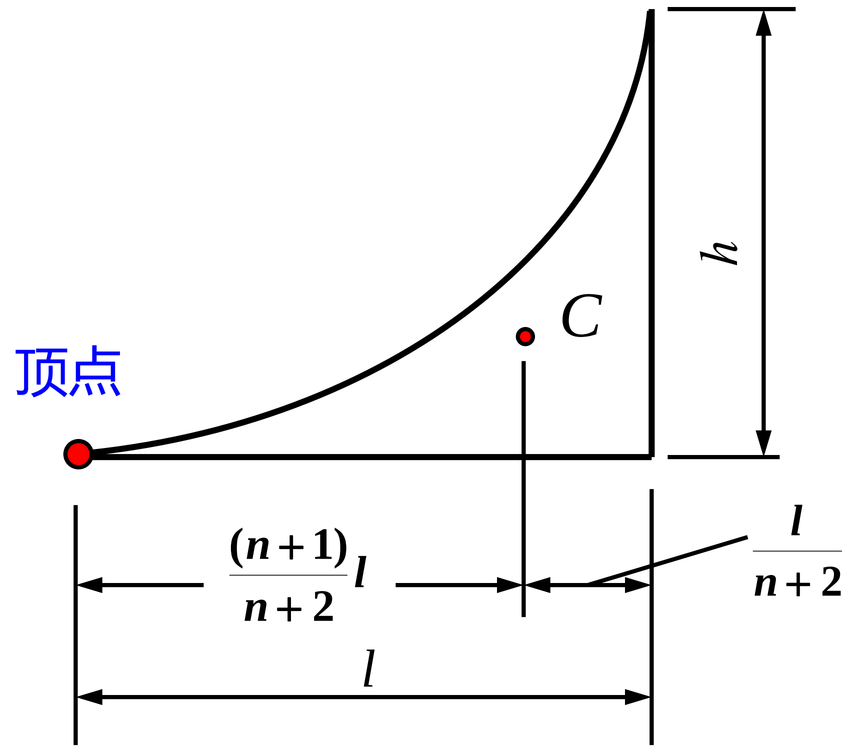


三角形 $\boxed{\omega = \dfrac{l \cdot h}{2}}$

二次抛物线 $\boxed{\omega = \dfrac{2}{3} h \cdot l}$

2、几种常见图形的面积和形心计算公式





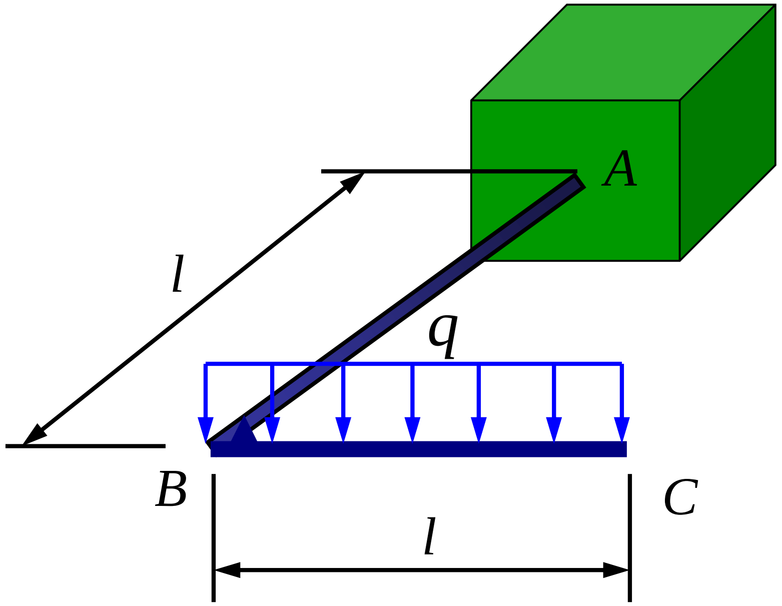
二次抛物线 $\boxed{\omega = \frac{l \cdot h}{3}}$

N次抛物线 $\boxed{\omega = \frac{l \cdot h}{n+1}}$

§13.5 卡氏定理

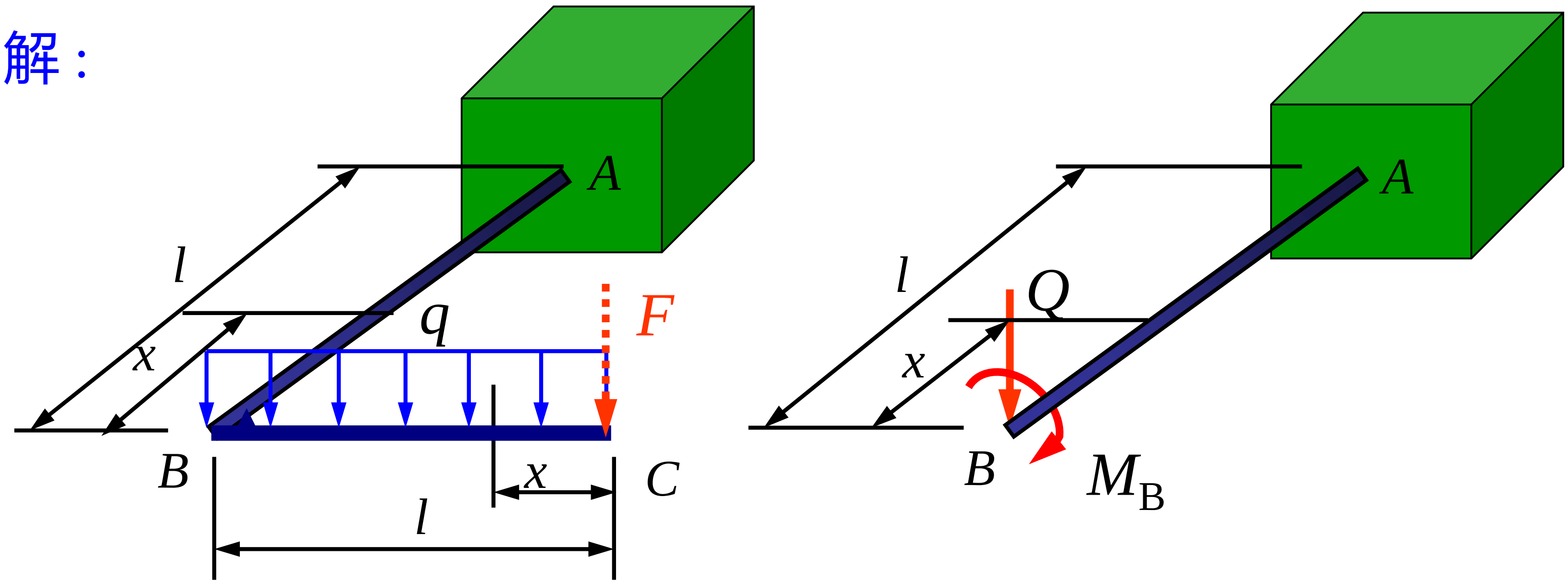
例题13.9

圆截面杆ABC，（∠ABC=90°）位于水平平面内，已知杆截面直径d 及材料的弹性常数 E , G，求C截面处的铅垂位移。不计剪力。



例题13.9

解：

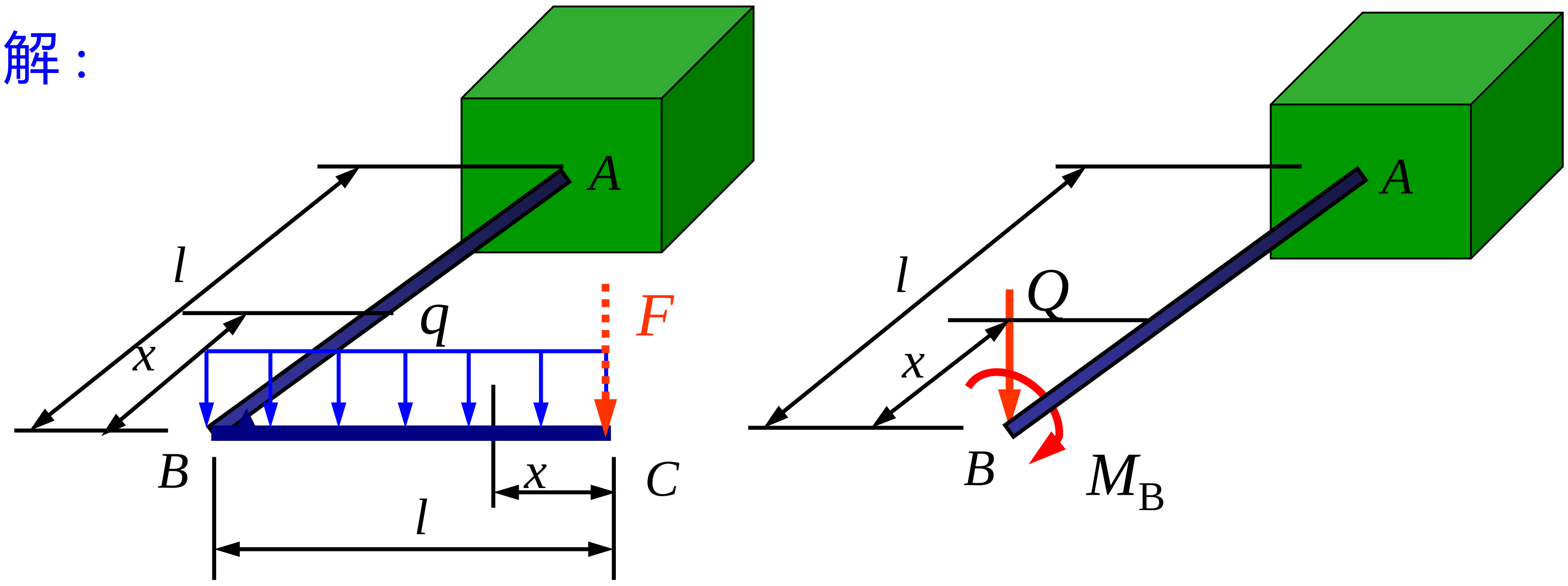


BC：弯曲变形

$$M(x)=-Fx-\frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial F}=-x$$

例题13.9

解：

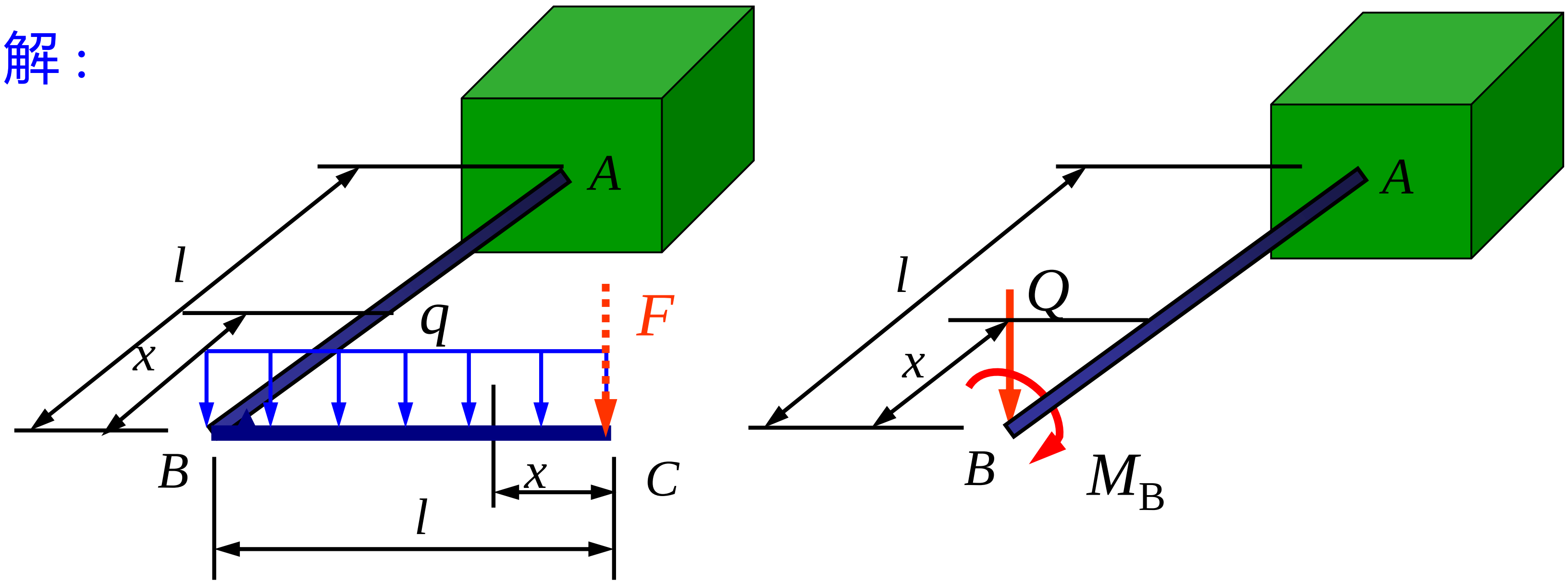


AB：弯扭组合变形　　$Q=F+ql$（弯曲）

$$M(x)=Qx=(F+ql)x \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial F}=x$$

例题13.9

解：



AB：弯扭组合变形 $M_B=Fl+\dfrac{ql^2}{2}$ (扭转)

$$T(x)=M_B=Fl+\frac{ql^2}{2} \qquad \frac{\partial T(x)}{\partial F}=l$$

例题13.9

解：

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}\Big|_{F=0}$$

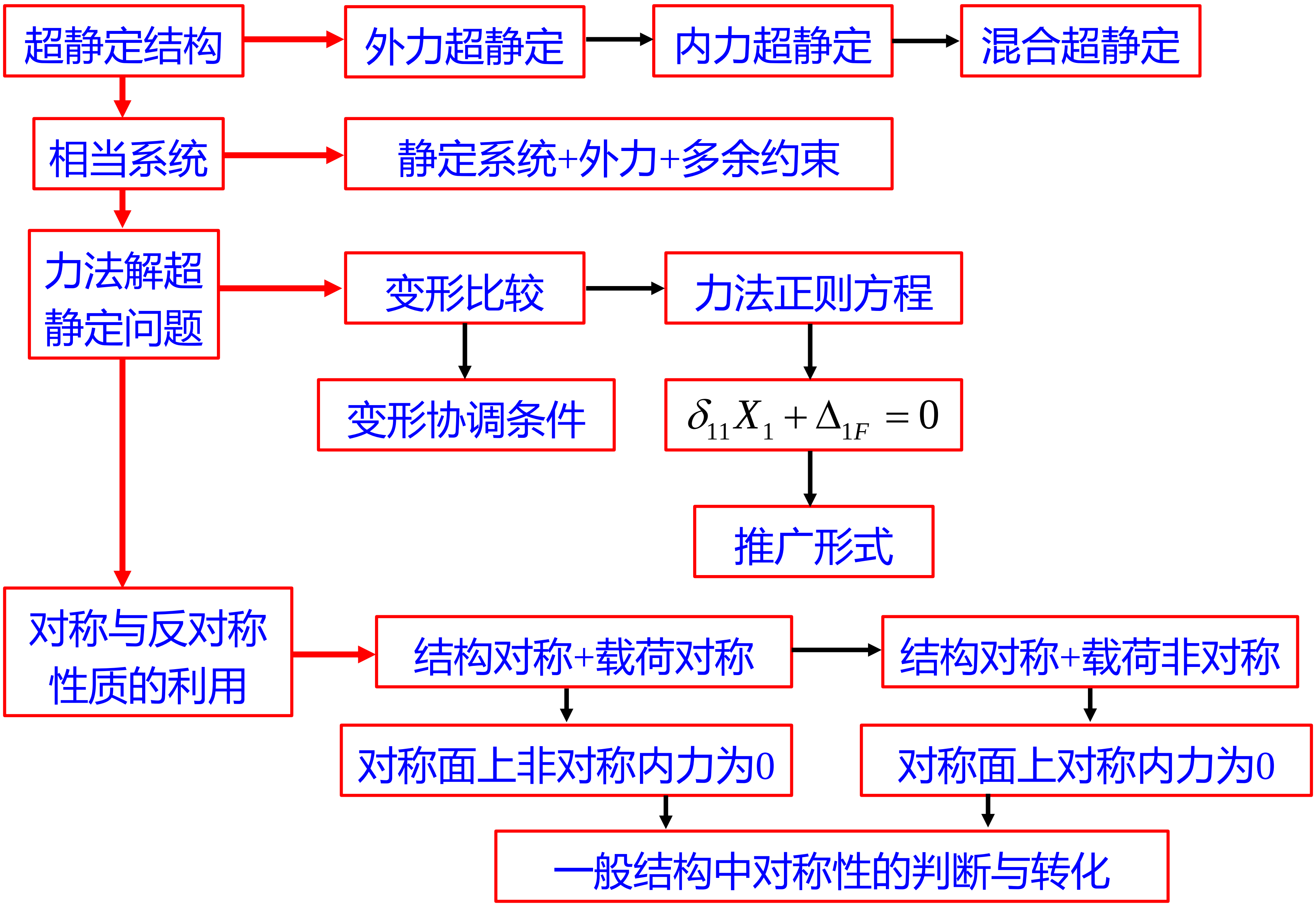
$$= \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \{\int_0^l [\frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx]\}$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l (-\frac{qx^2}{2})(-x)dx + \frac{1}{EI}\int_0^l qlx \cdot xdx + \frac{1}{GI_p}\int_0^l \frac{ql^2}{2} \cdot ldx$$

$$= \frac{11ql^4}{24EI} + \frac{ql^4}{GI_p} \quad (\downarrow)$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

十四、超静定结构



超静定结构
外力超静定
内力超静定
混合超静定
相当系统
静定系统+外力+多余约束
力法解超静定问题
变形比较
力法正则方程
变形协调条件
$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$
推广形式
对称与反对称性质的利用
结构对称+载荷对称
结构对称+载荷非对称
对称面上非对称内力为0
对称面上对称内力为0
一般结构中对称性的判断与转化

本章复习

5、力法的求解过程

（1）判定超静定次数，做出“相当系统”；

（2）在多余约束处满足“变形几何条件”，得到变形协调方程；

（3）由补充方程求出多余约束力；

（4）在相当系统上求解原超静定结构的内力和变形。

6、力法正则方程

以多余力为未知量的变形协调方程可改写成下式

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

此即变形协调方程的标准形式，即所谓的力法正则方程。

7、正则方程的推广

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots\cdots \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots\cdots \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots\cdots \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \\ \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

(位移互等定理)

$$\Delta_{iF} = \int \frac{M_F \cdot \overline{M}_i}{EI} dx \qquad \delta_{ij} = \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} dx$$

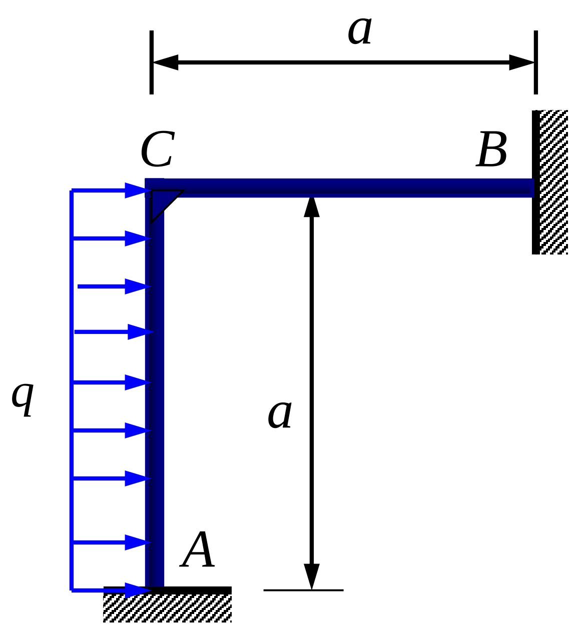
本章复习

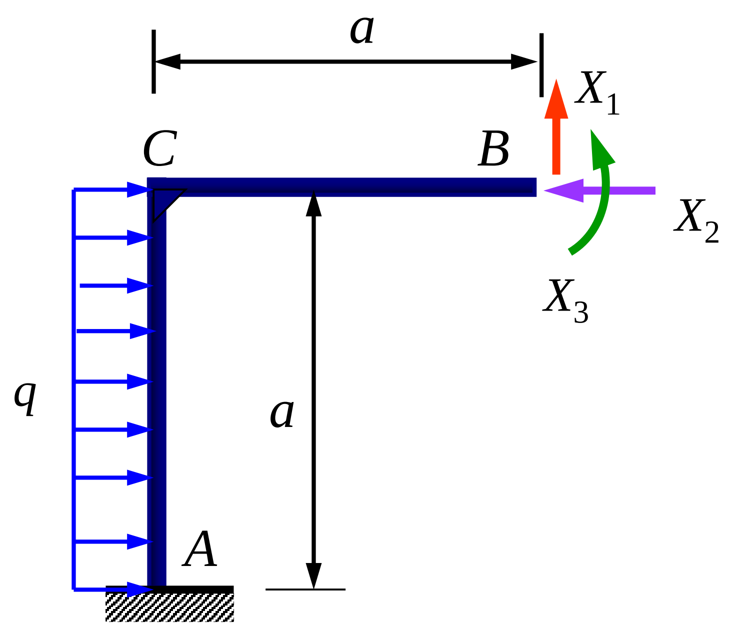
8、当对称结构受力也对称于结构对称轴，则此结构将产生对称变形； 若外力反对称于结构对称轴，则结构将产生反对称变形。

9、当对称结构上作用对称载荷，则对称截面上的非对称内力为零；当对称结构上作用非对称载荷，则对称截面上的对称内力为零 。

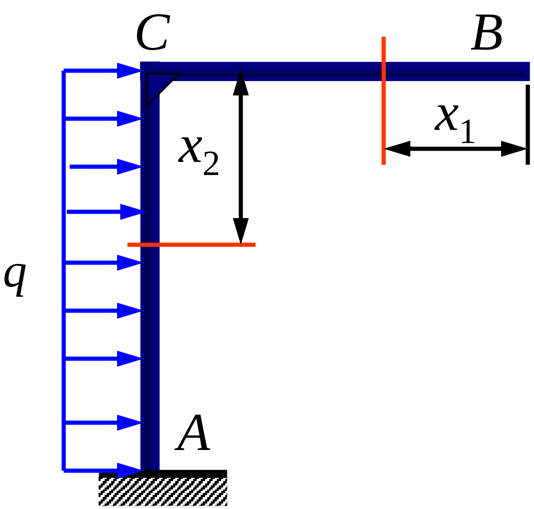
例题14.2

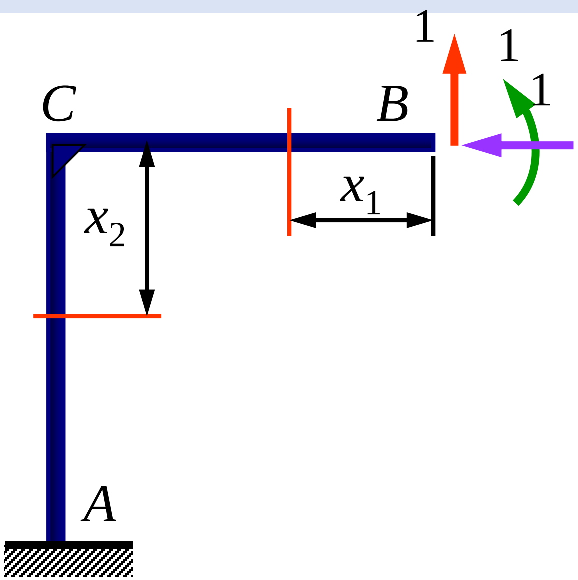
求解静不定结构刚架，设两杆的EI相等。





例题14.2





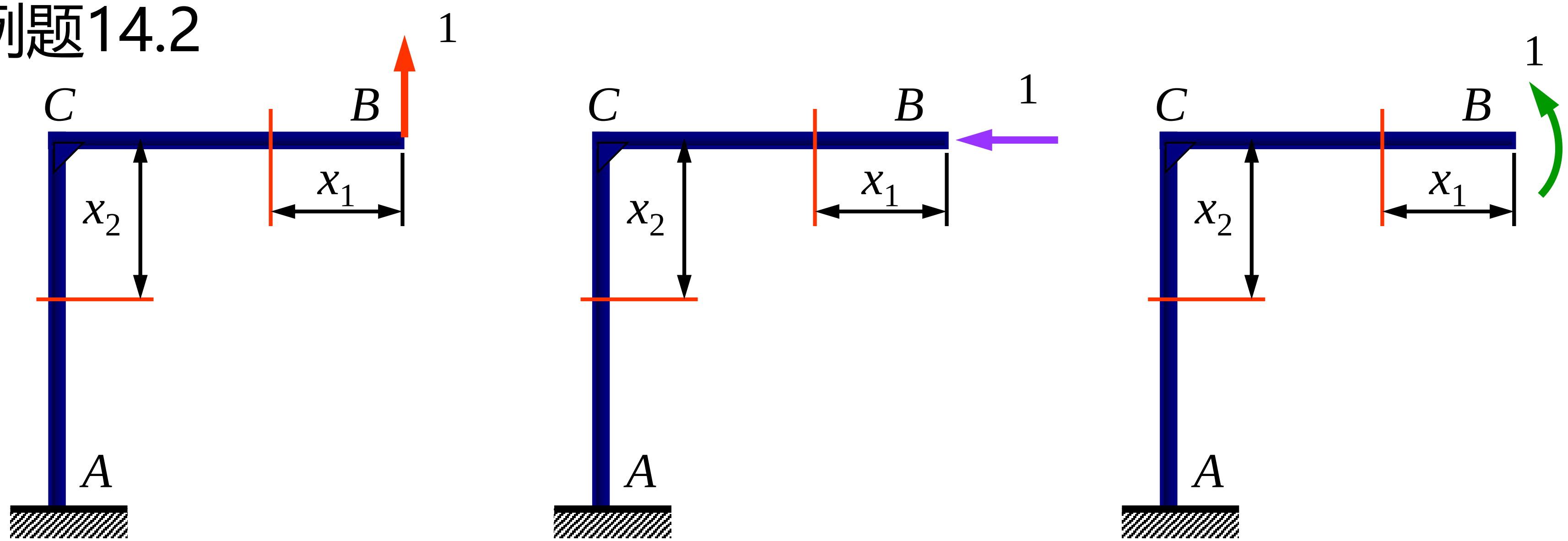
解：（1）用单位载荷法求 $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI}\int_0^a \frac{qx_2^2}{2}\cdot a\cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{6EI}$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI}\int_0^a \frac{qx_2^2}{2}\cdot x_2\cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\Delta_{3F} = -\frac{1}{EI}\int_0^a \frac{qx_2^2}{2}\cdot 1\cdot dx_2 = -\frac{qa^3}{6EI}$$

例题14.2



解：（2）求δ_{ij}

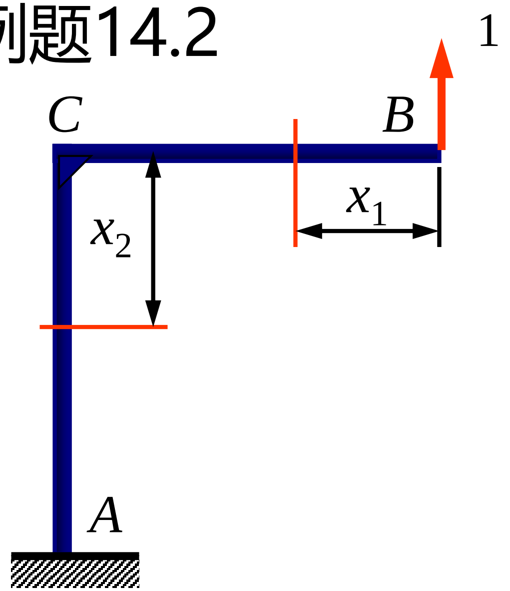
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}[\int_0^a x_1\cdot x_1\cdot dx_1+\int_0^a a\cdot a\cdot dx_2]=\frac{4a^3}{3EI}$$

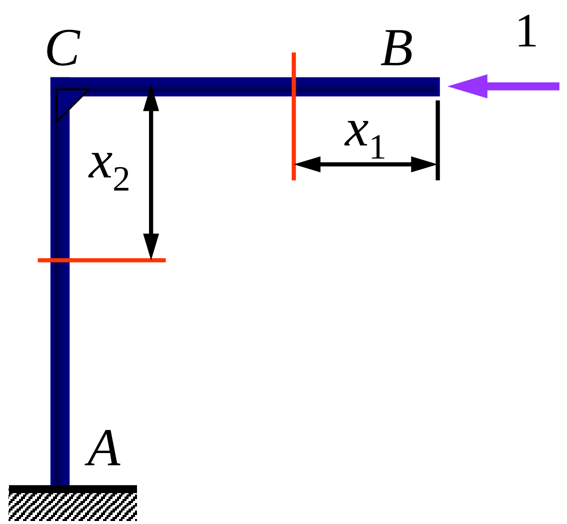
$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\int_0^a x_2\cdot x_2\cdot dx_2=\frac{a^3}{3EI}$$

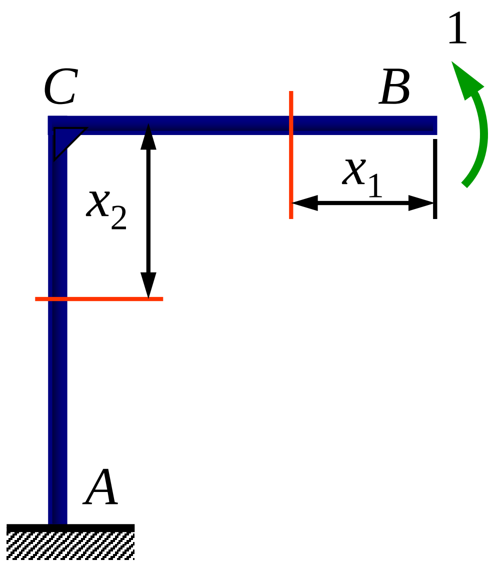
$$\delta_{33}=\frac{1}{EI}[\int_0^a 1\cdot 1\cdot dx_1+\int_0^a 1\cdot 1\cdot dx_2]=\frac{2a}{EI}$$

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2







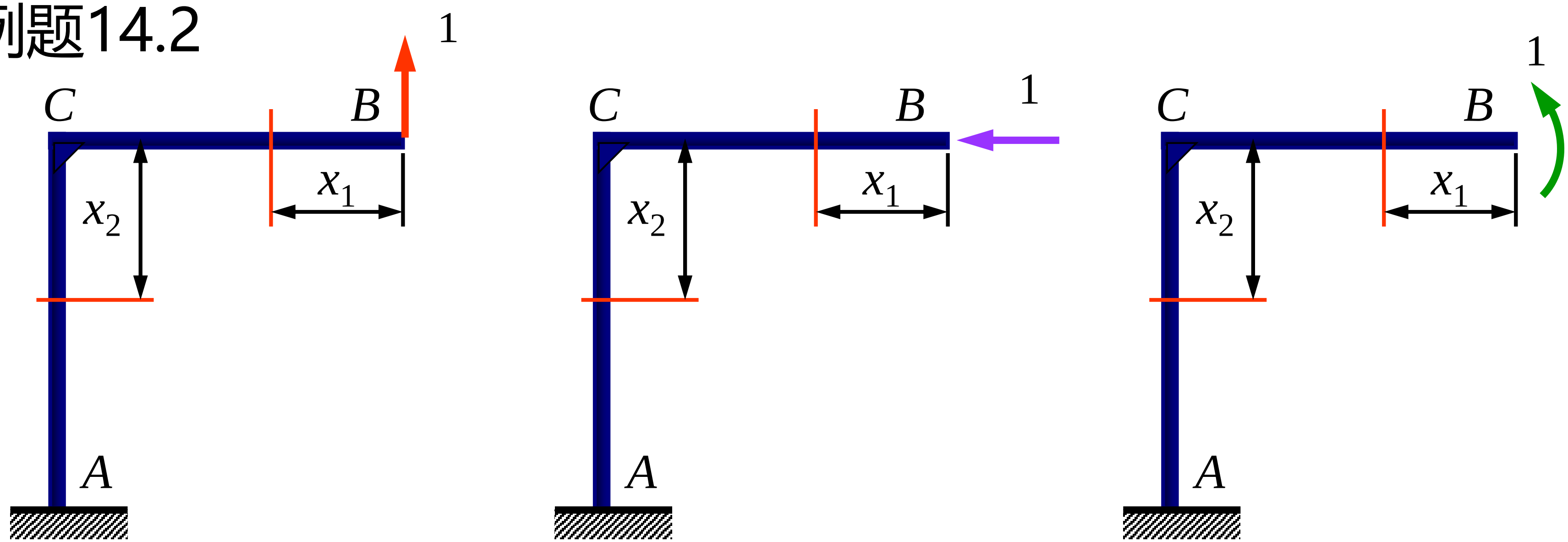
解：（2）求δ_{ij}

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\int_0^a x_2\cdot a\cdot dx_2=\frac{a^3}{2EI}$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\frac{1}{EI}[\int_0^a x_1\cdot 1\cdot dx_1+\int_0^a a\cdot 1\cdot dx_2]=\frac{3a^2}{2EI}$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\frac{1}{EI}\int_0^a x_2\cdot 1\cdot dx_2=\frac{a^2}{2EI}$$

例题14.2

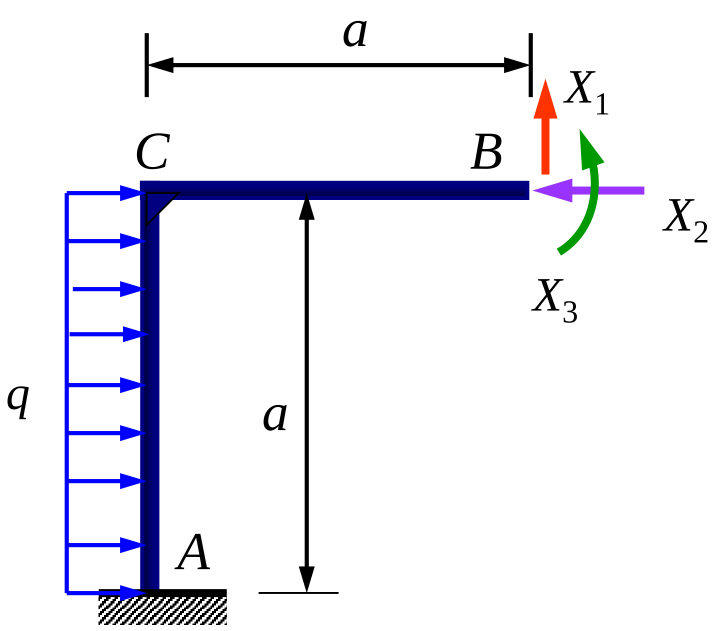


解：（2）求δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EI} dx$$

例题14.2

解：(2) 求δ_{ij}



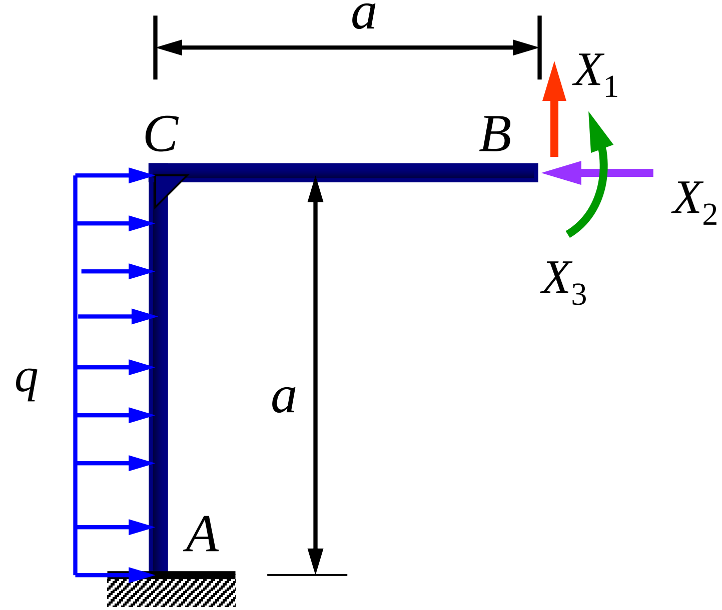
$$\delta_{11}=\frac{4a^3}{3EI} \qquad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{a^3}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{a^3}{3EI} \qquad \delta_{13}=\delta_{31}=\frac{3a^2}{2EI}$$

$$\delta_{33}=\frac{2a}{EI} \qquad \delta_{23}=\delta_{32}=\frac{a^2}{2EI}$$

§14.2 用力法解超静定结构

例题14.2



解：（3）求X_1, X_2, X_3

代入正则方程：

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1F}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2F}=0\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3F}=0\end{cases}$$

化简得:

$$\begin{cases}8aX_1+3aX_2+9X_3=qa^2\\ 12aX_1+8aX_2+12X_3=3qa^2\\ 9aX_1+3aX_2+12X_3=qa^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}X_1=-\dfrac{qa}{16}\\ X_2=\dfrac{7qa}{16}\end{cases}$$

$$X_2=\frac{qa^2}{48}$$

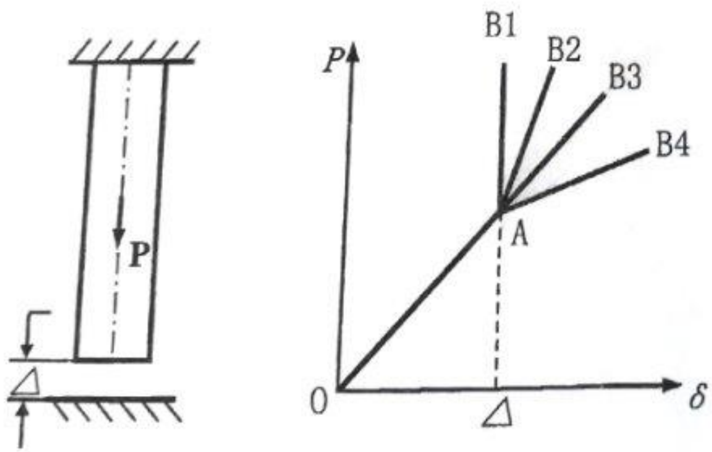
往年真题解析

习题分析：16-17期末考试

一、选择题（每小题4分，共计20分）

1、如下图所示，一杆上端固定，下端离刚支座间有微小的空隙Δ。设P力作用点的位移为δ（$\delta>\Delta$），则P-δ曲线可以用图中的________表示。

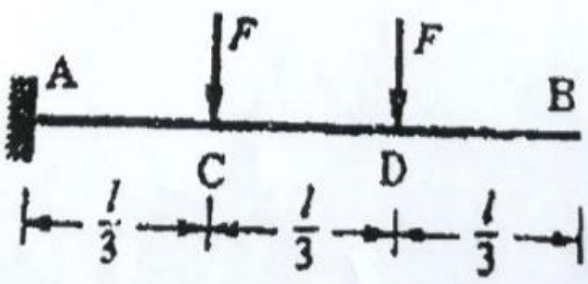
（A）折线 OAB1；（B）折线 OAB2；（C）直线 OAB3；（D）折线 OAB4。



习题分析：16-17期末考试

一、选择题（每小题4分，共计20分）

2、直梁受载如下图，在弹性范围内工作，其应变能为 V_ε，则 $\partial V_\varepsilon / \partial F$ 表示_____。



（A）C、D 两点挠度之和；（B）C、D 两点挠度之差；

（C）C 点挠度；（D）D 点挠度。

习题分析：16-17期末考试

一、选择题（每小题4分，共计20分）

3、线弹性材料杆件在几组外载荷作用下产生微小变形，下面有关其应变能的说法正确的是_______。

（A）与载荷的加载次序有关，与载荷的最终值无关；

（B）与载荷的加载次序无关，与载荷的最终值无关；

（C）与载荷的加载次序有关，与载荷的最终值有关；

（D）与载荷的加载次序无关，与载荷的最终值有关。

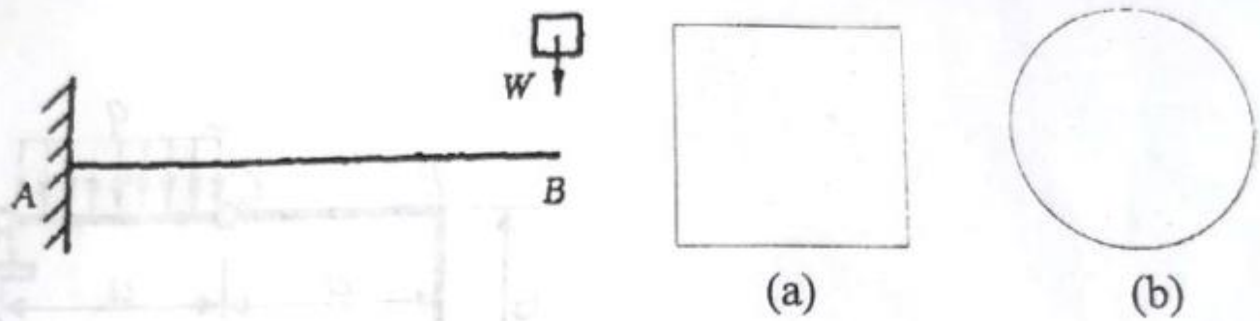
习题分析：16-17期末考试

一、选择题（每小题4分，共计20分）

4、如图所示，重量为 W 的物体自由下落，冲击在悬臂梁 AB 的 B 点上。梁分别为方形截面和圆截面，两者横截面面积相同。比较两种情况下 A 截面处的静应力和动荷系数，其正确的说法是__________。

(A) 图（b）静应力大，动荷系数大　(B) 图（b）静应力小，动荷系数小

(C) 图（a）静应力小，动荷系数大　(D) 图（a）静应力小，动荷系数小



习题分析：16-17期末考试

一、选择题（每小题4分，共计20分）

5、构件在交变应力作用下发生疲劳破坏， 下列说法错误的是________。

（A）断口形貌一般可明显地分为光滑区和粗糙区；

（B）断裂发生时最大应力小于材料的强度极限；

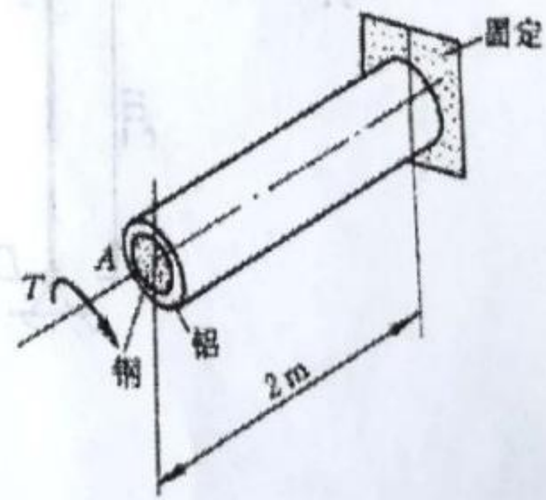
（C）用塑性材料制成的构件，断裂发生前往往有明显的塑性变形；

（D）用脆性材料制成的构件，断裂发生时呈脆性断裂。

习题分析：16-17期末考试

计算题

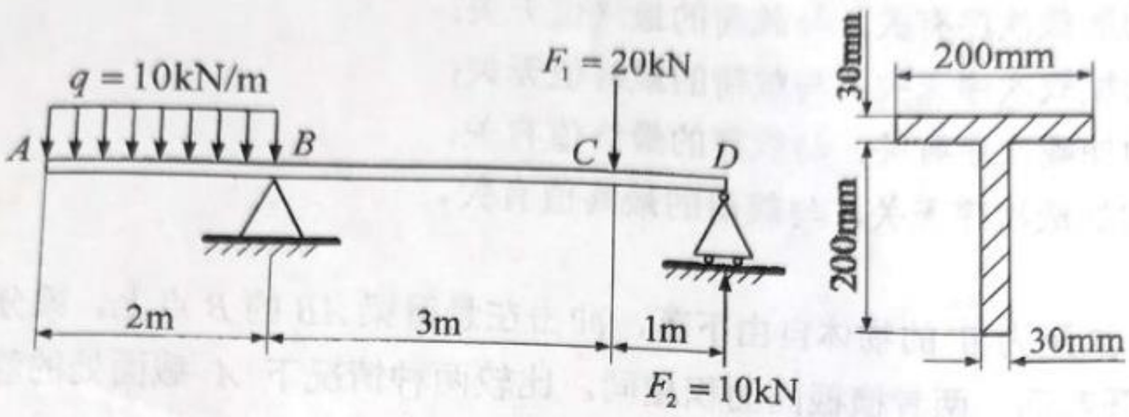
二、如图所示由直径 30mm 的钢芯和外径 40mm、内径 30mm 的铝壳组成的复合材料圆轴，一端固定，另一端承受外加力偶。已知铝壳中的最大切应力为 60MPa，切变模量为 27GPa，钢的切变模量为 80GPa。试求钢芯截面上的最大切应力。（20 分）



习题分析：16-17期末考试

计算题

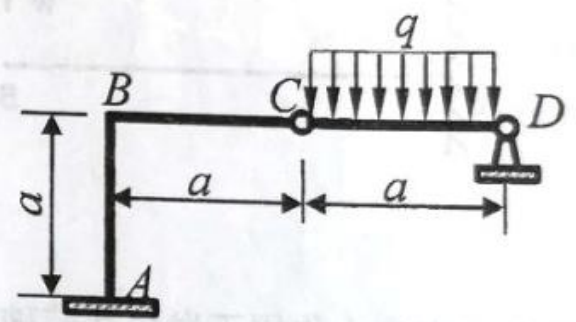
三、一外伸梁的载荷及截面尺寸如下图所示。这种梁材料的许用拉应力$[\sigma_t]$=40 MPa，许用压应力为$[\sigma_c]$=100 MPa。请计算支座 B、D 的支反力，绘制其剪力图和弯矩图，校核梁的正应力强度。（20 分）



习题分析：16-17期末考试

计算题

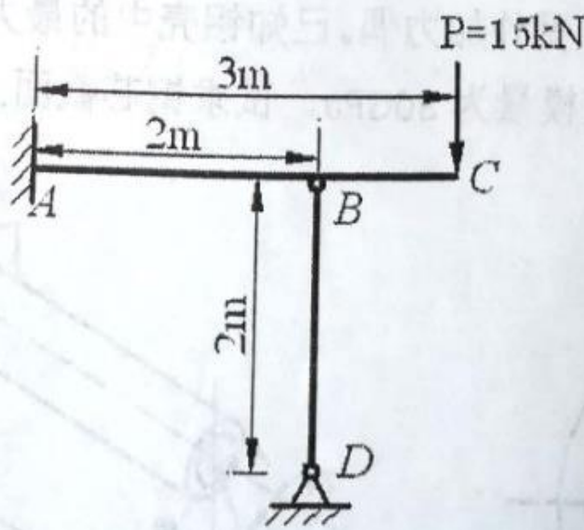
四、结构如图所示，刚架 ABC 和梁 CD 在 C 处用铰链连接。已知刚架和梁的抗弯刚度均为 EI。试求 D 截面的转角。（不计轴力影响，20 分）



习题分析：16-17期末考试

计算题

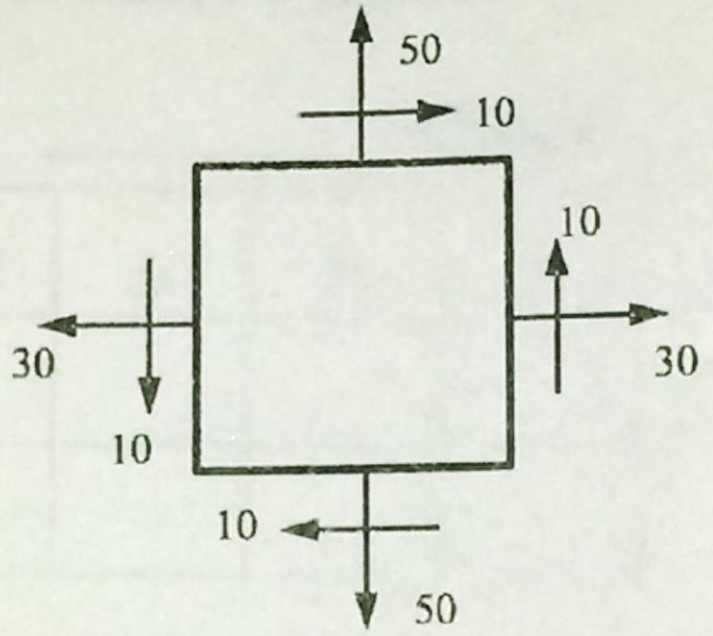
五、结构如图所示，P=15kN，已知梁和杆为一种材料，E=210GPa。梁 ABC 的惯性矩 I=245cm^4；等直圆杆 BD 的直径 D=40mm，材料的σ_p=200MPa，σ_s=240MPa，稳定性直线公式的系数 a=304MPa，b=1.12Mpa。规定杆 BD 的稳定安全系数 n_{st}=2。求：1）BD 杆承受的压力；2）判断 BD 杆的稳定性。（20 分）



习题分析：10-11期末考试

计算题

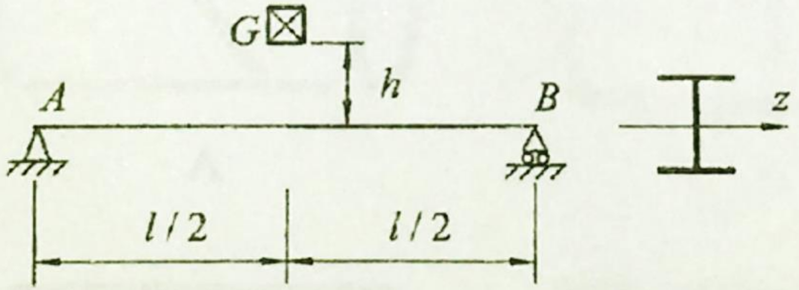
二、某点的应力状态如图所示（图中应力单位：MPa），试求：(1) 该点的主应力大小与方向，并在单元体上画出；(2) 该点的最大切应力；(3) 画出应力圆。（14 分）



习题分析：10-11期末考试

计算题

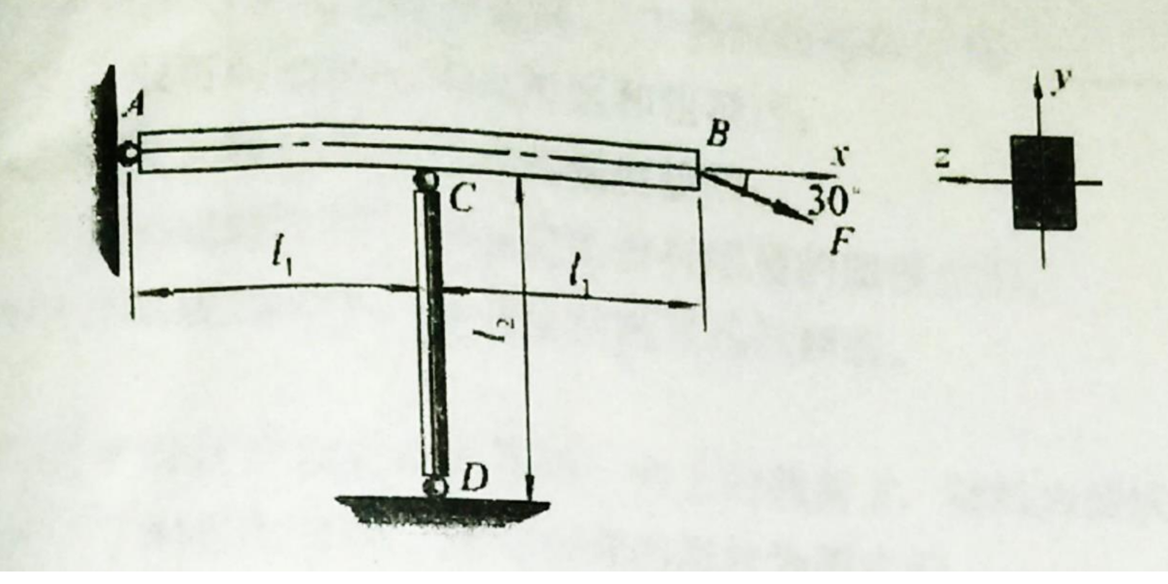
三、图示跨长 $l=8\,\mathrm{m}$ 的简支梁由 No.20a 工字钢制成，有一重 $G=1\,\mathrm{kN}$ 的重物自高度 $h=0.5\,\mathrm{m}$ 处自由下落至梁的中点处。已知材料的许用应力 $[\sigma]=175\,\mathrm{MPa}$，弹性模量 $E=210\,\mathrm{GPa}$。试校核该梁的强度。(20a 截面参数：A=35.5cm^2，I_z=2370cm^4，W_z=237cm^3)（15 分）



习题分析：10-11期末考试

计算题

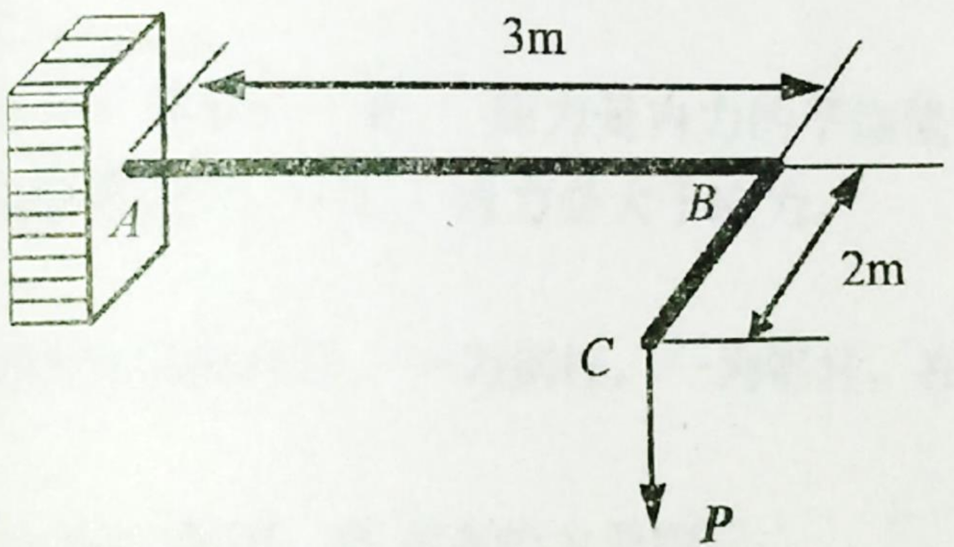
四、如图所示结构，杆 AB 横截面面积 $A=21.5\ \text{cm}^2$，抗弯截面模量 $W_z=102\ \text{cm}^3$，材料的许用应力 $[\sigma]=180$ MPa。圆截面杆 CD，其直径 $d=28$ mm，材料的弹性模量 E=200GPa，比例极限 $\sigma_p=200$ MPa。A、C、D 三处均为球铰约束，若已知：$l_1=1.25$ m，$l_2=0.55$ m，$F=25$ kN，稳定安全系数 $[n]_{st}=1.8$，试校核此结构是否安全。（15 分）



习题分析：10-11期末考试

计算题

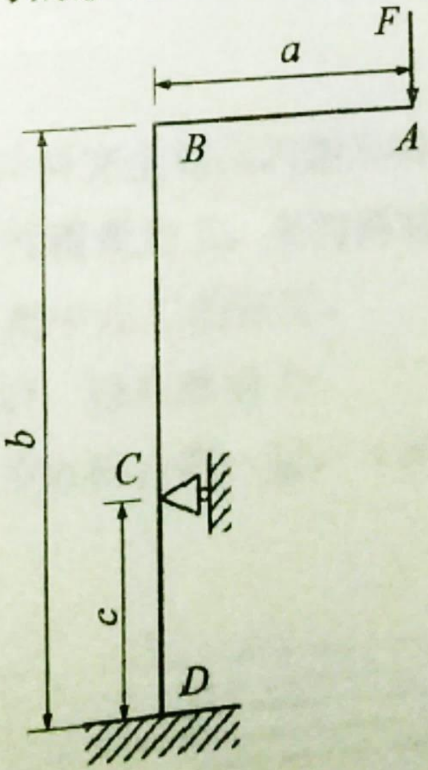
五、如图所示，直径 $d=100\text{mm}$ 的圆形折杆 ABC，AB 杆与 BC 杆处在同一水平面上，且相互垂直，材料的许用应力为 $[\sigma]=160\text{MPa}$。在 C 点受竖向力 $P=5\text{KN}$ 的作用，试指出最危险的点，画出该点应力单元图，并按第三强度理论校核强度。（15 分）



习题分析：10-11期末考试

计算题

六、如下图所示 L 形框架，D 截面处固定，C 截面处水平向支撑，A 端作用有竖向集中力。各段抗弯刚度均为 EI。试画出框架弯矩图，并求 A 端竖向位移（请用能量法求解，忽略轴力的影响）。（20分）



本课程结束

衷心感谢大家的支持！

祝大家一切顺利！