《机械系统动力学》——浙江大学本科生课程（08192050）

第四章 多自由度系统

主讲：祝毅

（yiz@zju.edu.cn）

2024年春

内容提要

- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

内容提要

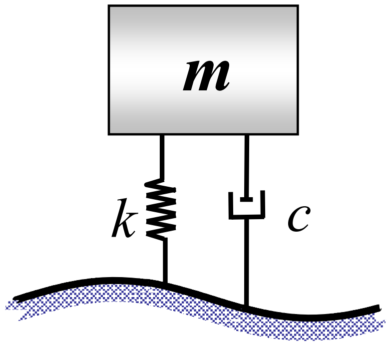
- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

1 物理模型和数学方程

- 物理模型
- 数学方程

1.1 物理模型

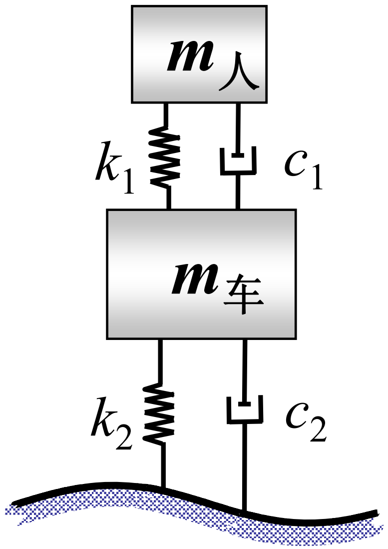
- 实例：轿车在路面上行驶，欲研究轿车内乘客感受的振动情况
  - 建模方法一：将车厢和人假设为一个集总质量，轮胎假设为一个集总弹簧和阻尼器。



优点：模型简单，
解算容易。
缺点：模型粗糙，
结果精度差。

1.1 物理模型

- 实例：轿车在路面上行驶
  - 建模方法二：在方法一的基础上，考虑人与车厢之间的作用。



优点：模型较为精确，

解算较容易。

缺点：没有考虑车厢与

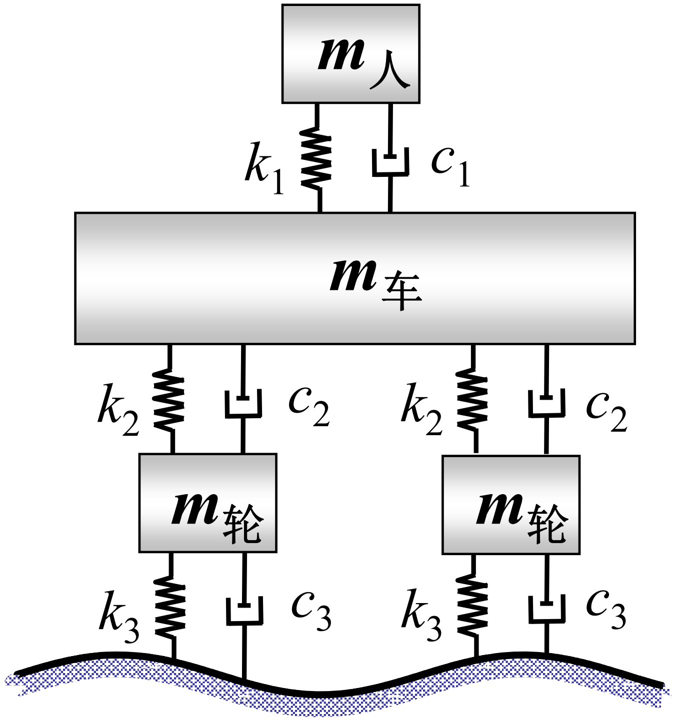
车轮之间的耦合关系。

1.1 物理模型

- 实例：轿车在路面上行驶
  - 建模方法三：在方法二的基础上，考虑车轮与车厢的作用。

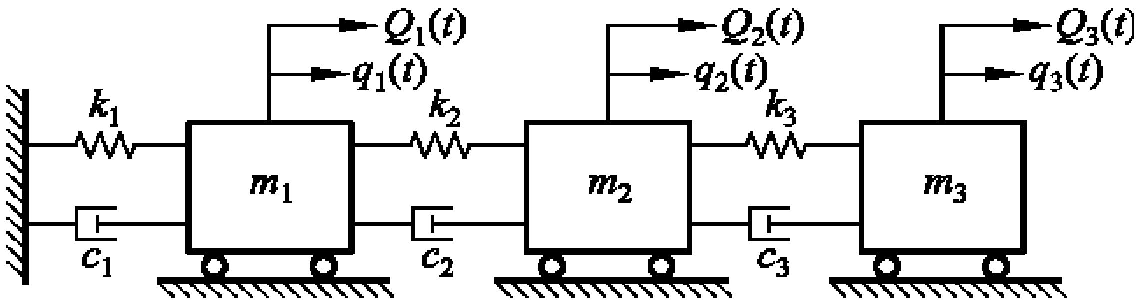
优点：模型精确。

缺点：解算复杂。



1.1 物理模型

- 振动系统需要由两个以上独立坐标描述其运动。
- 典型的多自由度集总系统模型如下图。



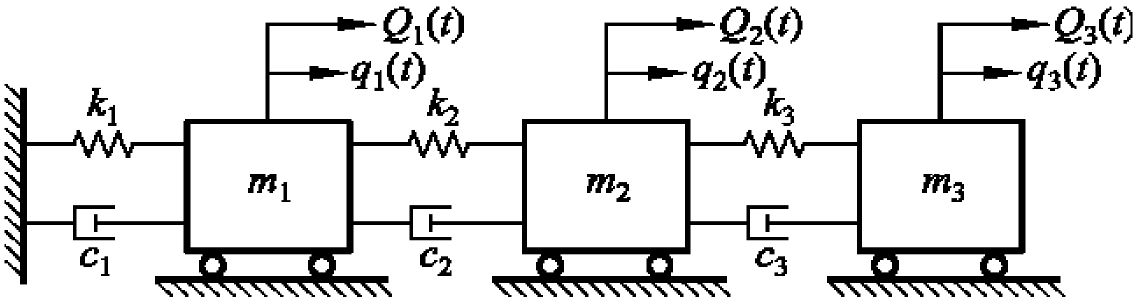
- 系统为线性、时不变集总参数系统。

1.2 数学方程

- <u>牛顿力学方法：</u>前面介绍的方法，对研究对象进行受力分析，然后根据牛顿第二定律建立数学方程。
- <u>分析力学方法：</u>这种方法首先应该合理选取系统的广义坐标，然后根据拉格朗日方程，建立系统的运动方程，由于这种方法仅涉及动能、势能和功等标量形式的物理量，对于复杂的多自由度振动系统建立运动微分方程较为方便。

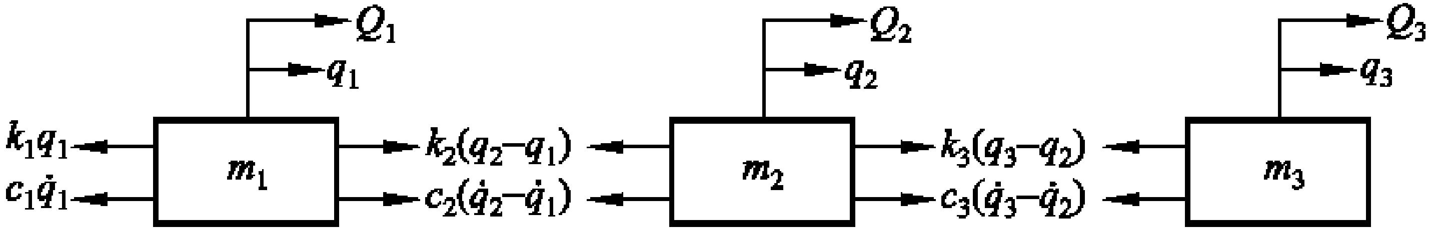
1.2 数学方程

- 实例1：考虑图所示的三自由度系统，应用牛顿第二定律导出系统的运动微分方程。



1.2 数学方程

- 实例1：三自由度系统。



$$m_1\ddot{q}_1=Q_1-c_1\dot{q}_1-k_1q_1+c_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)+k_2(q_2-q_1)$$

$$m_2\ddot{q}_2=Q_2-c_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)-k_2(q_2-q_1)+c_3(\dot{q}_3-\dot{q}_2)+k_3(q_3-q_2)$$

$$m_3\ddot{q}_3=Q_3-c_3(\dot{q}_3-\dot{q}_2)-k_3(q_3-q_2)$$

1.2 数学方程

- 实例1：三自由度系统。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{Q}$$

其中

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},\quad \dot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

内容提要

- 物理模型和数学方程
- 无阻尼自由振动和特征值问题
- 特征向量的正交性
- 对初始条件的响应
- 无阻尼强迫振动
- 有阻尼系统

2 无阻尼自由振动和特征值问题

- 多自由度振动系统的数学模型
- 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值
- 实例分析

2 无阻尼自由振动和特征值问题

- 多自由度振动系统的数学模型
- 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值
- 实例分析

2.1 多自由度振动系统的数学模型

- 数学模型

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{Q}$$

其中，**M**、**C**和**K**分别为$n\times n$阶的质量、阻尼和刚度矩阵，$\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ 和**Q**分别为广义坐标、广义速度、广义加速度和广义力的n维向量。

2 无阻尼自由振动和特征值问题

- 多自由度振动系统的数学模型
- 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值
- 实例分析

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 无阻尼多自由度振动系统数学模型

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{0}$$

它表示一组n个联立的齐次微分方程组

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_j=0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 无阻尼多自由度振动系统的解

对于n个联立的齐次方程一定存在着同步运动的解，即在运动过程中，所有坐标应具有对时间相同的依赖关系。在数学上，这一类运动可以表示为

$$q_j(t)=u_j f(t) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

式中，u_j是一组常数，而$f(t)$对于所有坐标$q_j(t)$是相同的。

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 无阻尼多自由度振动系统的解

将解代入原方程，并注意到函数$f(t)$不依赖于下标j，有

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\ddot{f}(t)\sum_{j=1}^{n} m_{ij}u_j + f(t)\sum_{j=1}^{n} k_{ij}u_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{k_{11}u_1 + k_{12}u_2}{m_1 u_1} = \frac{k_{21}u_1 + k_{22}u_2}{m_2 u_2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} k_{ij}u_j}{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}u_j}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 无阻尼多自由度振动系统的解

方程的左边与i无关，而方程的右边与时间t无关，所以，方程的左右应该分别等于常数，并且可以证明，这个常数是一正实数，令为$\lambda=\omega^2$，所以有

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}k_{ij}u_j}{\sum_{j=1}^{n}m_{ij}u_j}=\lambda=\omega^2,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 无阻尼多自由度振动系统的解

$$
\begin{cases}
\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \\
\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) u_j = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{cases}
f(t) = C \sin(\omega t + \varphi) \\
(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}
\end{cases}
$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 考虑以上第二个方程，即

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

或

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}=\omega^2\mathbf{u}$$

它们是关于矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特征值问题。

以上方程存在非零解u的条件是：当且仅当系数行列式等于零，即得特征方程或频率方程，

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 特征方程

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^{2n}+a_1\omega^{2(n-1)}+a_2\omega^{2(n-2)}+\cdots+a_{n-1}\omega^2+a_n=0$$

方程有n个根（r=1,2,…,n），这些根称为特征值，它们的平方根ω_r (r=1,2,…,n)称为系统的固有频率。将固有频率由小到大依次排列，有

$$\omega_1\le\omega_2\le\cdots\le\omega_r\le\cdots\le\omega_n$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 特征值
  - 基频 ω_1 是所有频率中最重要的一个。
  - 对于系统的质量矩阵为正定实对称矩阵，刚度矩阵为正定或半正定的实对称矩阵时，**所有的特征值都是实数，并且是正数或零**。
  - 只有当刚度矩阵为半正定时，系统才有零特征值。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 特征向量

  将求得的固有频率ω_r $(r=1,2,\ldots,n)$分别代入原方程，得

$$(\mathbf{K}-\omega_r^2\mathbf{M})\mathbf{u}^{(r)}=0,\quad (r=1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}^{(r)}=[u_1^{(r)}\ u_2^{(r)}\ \cdots\ u_n^{(r)}]^{\mathrm{T}},\quad (r=1,2,\cdots,n)$$

称向量$\mathbf{u}^{(r)}$为对应特征值ω_r^2的特征向量，也称为振型向量或模态向量，它表示了所谓的固有振型。

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 特征向量的特征
  - 特征向量的各元素的值是不唯一确定的量，但任意两个元素 $u_i^{(r)}$ 和 $u_j^{(r)}$ 的比值是一常数。
  - $\mathbf{u}^{(r)}$为齐次方程组的解，那么$\alpha_r\mathbf{u}^{(r)}$也是一个解，α_r为任意常数。
  - 固有振型的形状是唯一的，而振幅不是唯一的。
  - 如果特征向量$\mathbf{u}^{(r)}$中的一个元素被指定为某一个值，那么特征向量就是唯一确定的向量。

2.2 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值

- 正则振型
  - $\mathbf{u}^{(r)}$为齐次方程组的解，那么$\alpha_r\mathbf{u}^{(r)}$也是一个解，α_r为任意常数。
  - 调整固有振型的元素使

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(r)}=1, \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

所得到的向量称为<u>正则振型</u>。

此外，还有

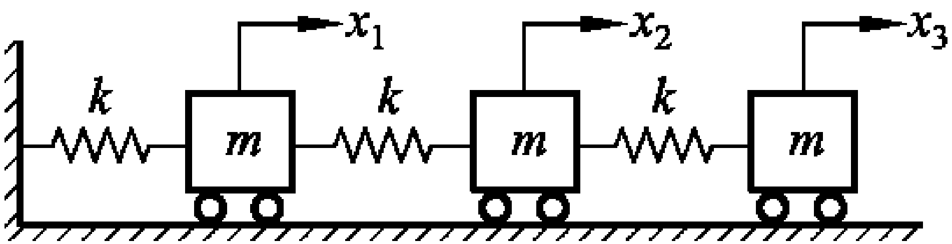
$$\mathbf{u}^{(r)\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)}=\omega_r^2, \qquad (r=1,2,\cdots,n)$$

2 无阻尼自由振动和特征值问题

- 多自由度振动系统的数学模型
- 无阻尼多自由振动的解及系统的特征值
- 实例分析

2.3 实例分析（1）

- 图所示一个三自由度系统，求其固有频率和固有振型，并求正则振型。



2.3 实例分析（2）

解：振动的微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

其中，

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},\qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

2.3 实例分析（3）

其特征值问题

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u} \qquad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

从而得特征方程，即

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$= \left(2k - \omega^2 m\right)^2 \left(k - \omega^2 m\right) - \left(3k - 2\omega^2 m\right) k^2 = 0$$

2.3 实例分析（4）

固有频率为

$$\omega_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

将ω_1代入特征值问题方程，有

$$\begin{bmatrix} 1.8019 & -1 & 0 \\ -1 & 1.8019 & -1 \\ 0 & -1 & 0.8019 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 实例分析（5）

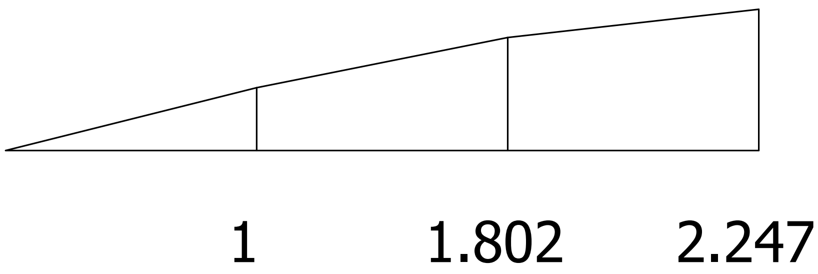
令 $u_1^{(1)}=1$，可解得

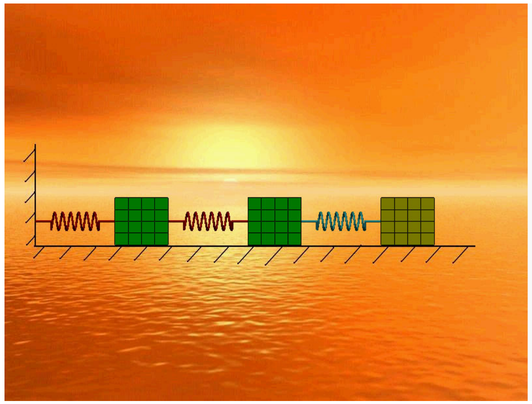
$$\begin{bmatrix} u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix}$$

故求得对应固有频率ω_1的固有振型为

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix}$$

2.3 实例分析（6）

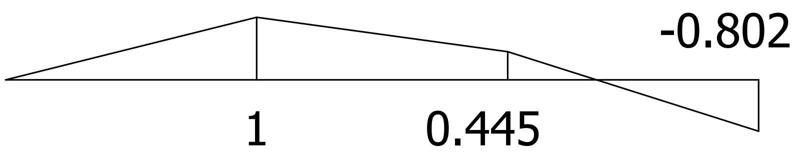


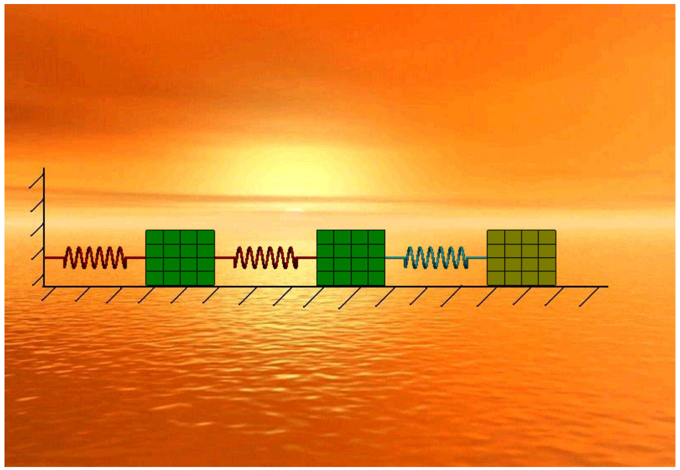


2.3 实例分析（7）

同理，将ω_2代入特征值问题方程，并令 $u_1^{(2)}=1$ 可解出对应固有频率ω_2的固有振型为

$$\begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{bmatrix}$$

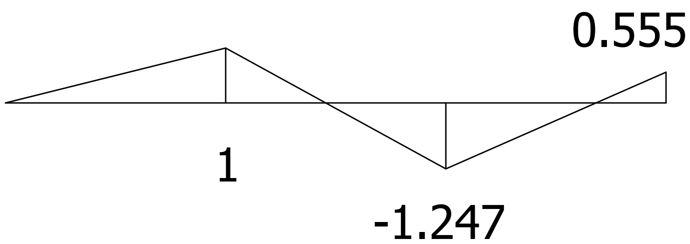


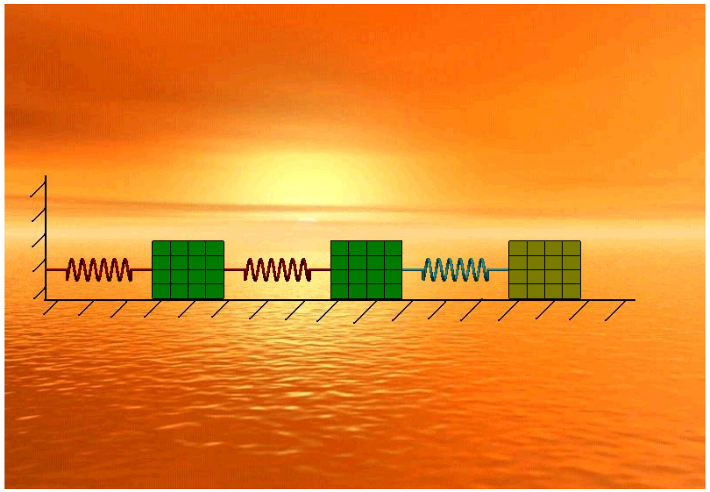


2.3 实例分析（8）

同理，将ω_3代入特征值问题方程，并令 $u_1^{(3)}=1$ 可解出对应固有频率ω_3的固有振型为

$$\begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix}$$





2.3 实例分析（9）

为求正则振型，令

$$\mathbf{u}^{(1)}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1.802\\2.247\end{bmatrix},\qquad \mathbf{u}^{(2)}=\alpha_2\begin{bmatrix}1\\0.445\\-0.802\end{bmatrix},\qquad \mathbf{u}^{(3)}=\alpha_3\begin{bmatrix}1\\-1.247\\0.555\end{bmatrix}$$

代入$\mathbf{u}^{(1)T}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(1)}=1$中，有

$$\alpha_1^2\begin{bmatrix}1 & 1.802 & 2.247\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\0 & m & 0\\0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1.802\\2.247\end{bmatrix}=1 \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{3.049\sqrt{m}}$$

2.3 实例分析（10）

求得第一阶正则振型向量为

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.3280 \\ 0.5910 \\ 0.7370 \end{bmatrix}$$

同理，求出第二、三阶正则振型向量为

$$u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.7369 \\ 0.3279 \\ -0.5910 \end{bmatrix} \qquad u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.5910 \\ -0.7370 \\ 0.3280 \end{bmatrix}$$