1.6

设半径为R的圆形截面试件中通过微波振荡产生了均匀的热生成Q,已知环境温度为T_h,表面热交换系数为h,导线的导热系数为k,试求达成热平衡之后导线中心的温度C。

对于该试件

$$H(T)=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)-Q=0$$

转化到极坐标下$\begin{cases}x=rcos\theta\\y=rsin\theta\end{cases}$

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)-Q=0$$

边界条件$T=T_1,k\frac{\partial T}{\partial r}=h(T_h-T_1)$

在稳态及轴对称条件下$\frac{\partial T}{\partial t}=0,\frac{\partial T}{\partial\theta}=0$

则有

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-Q$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{Q}{2k}r^2$$

$$T=C-\frac{Q}{4k}r^2$$

又

$$k\frac{\partial T}{\partial r}=h\left(T_h-C+\frac{Q}{4k}R^2\right)$$

所以

$$C=\frac{Q}{4k}R^2+\frac{Q}{2h}R+T_h$$

$$T=\frac{Q}{4k}R^2+\frac{Q}{2h}R+T_h-\frac{Q}{4k}r^2$$

对于中心温度，有$r=0$，则

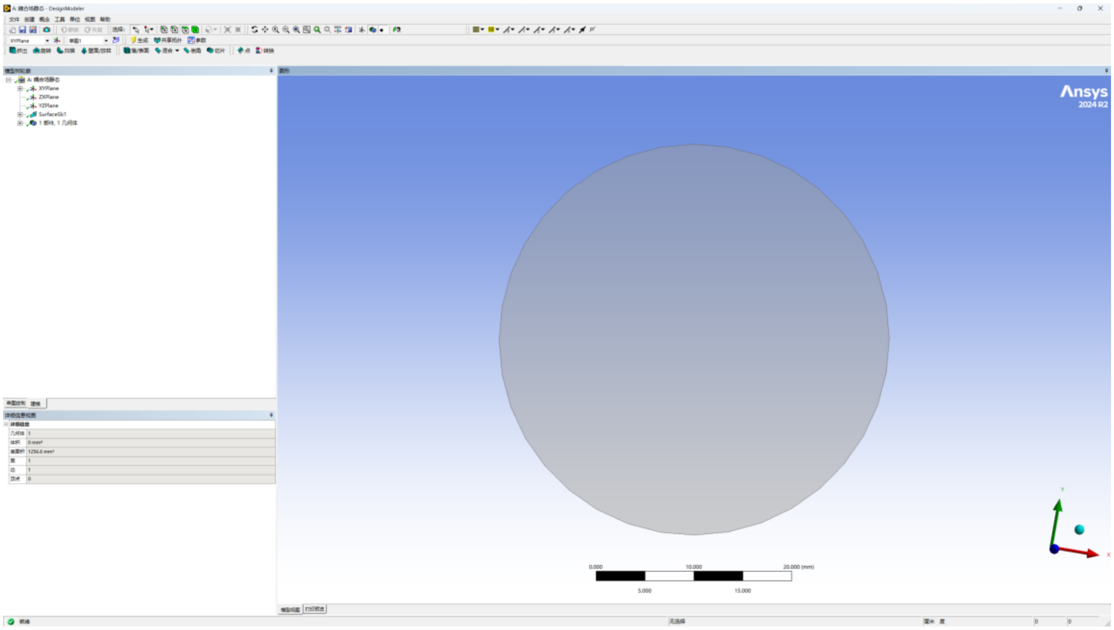
$$T_C=\frac{Q}{4k}R^2+\frac{Q}{2h}R+T_h$$

7.1

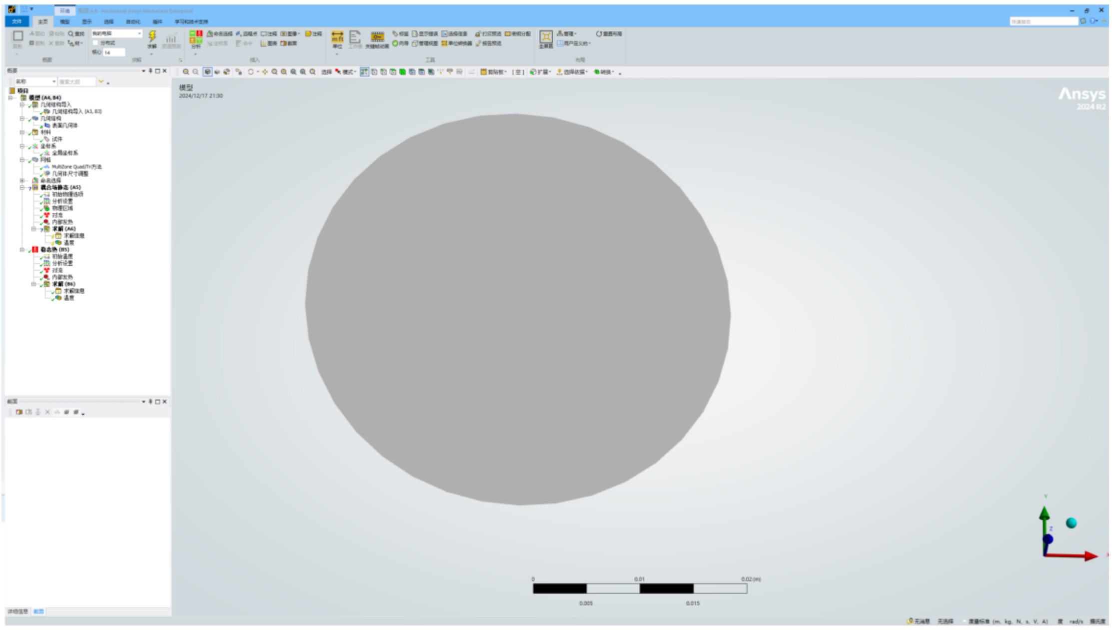
参照思考题 1.6，已知$R=20mm,Q=10mW\cdot mm^{-3},T_h=10℃,h=20mW\cdot mm^{-2}\cdot ℃^{-1},k=200mW\cdot mm^{-1}\cdot ℃^{-1}$,试用有限元方法求达成热平衡之后导线中心的温度 C,并与理论值进行比较。

利用 Workbench 进行分析

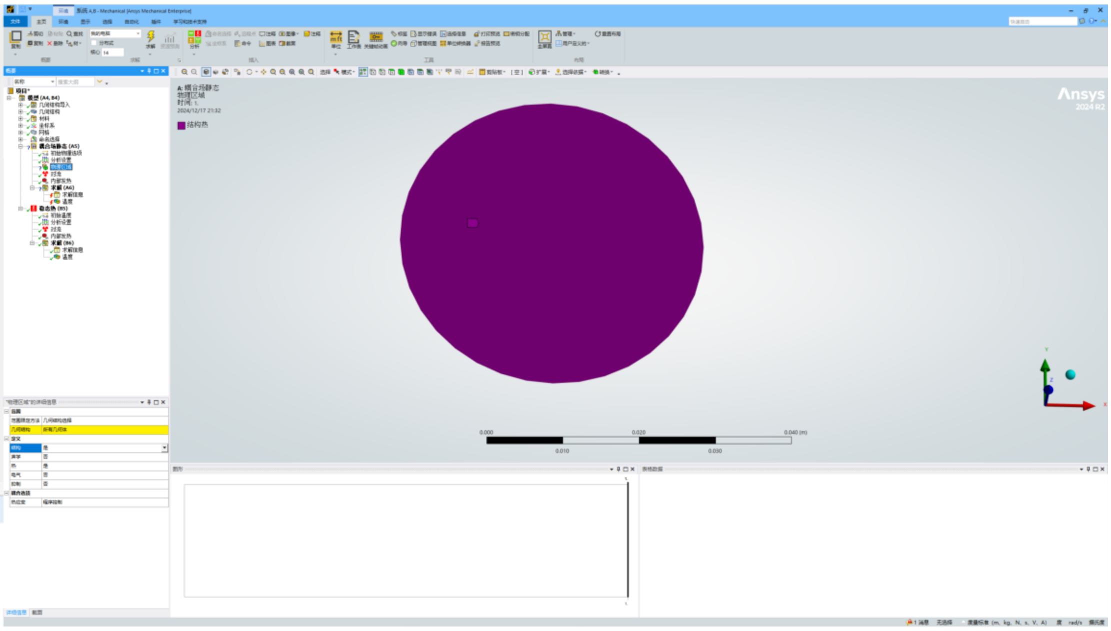
首先设置材料，然后建立圆形平面



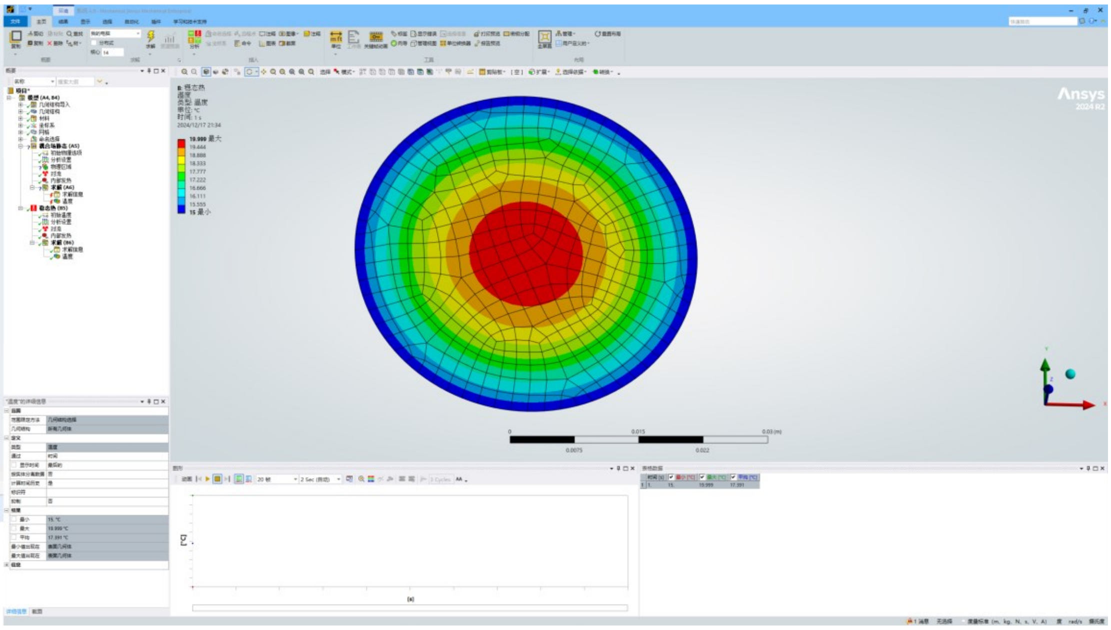
刚开始想用耦合场静态来做



模仿例题的步骤划分网络，加入对流和内部发热



发现如果同样用结构与热分析，无法选择一个平面作为几何体（例题中有两个平面）因此只能拖入热分析来继承前面的设置继续分析



热分析确实可行，给出了较为合理的热量分布图，中心最高温度为 19.999℃

由 1.6 可知 C 的理论值为

$$C = \frac{Q}{4k}R^2 + \frac{Q}{2h}R + T_h = 20℃$$

可以认为仿真结果与理论值相等

7.2

为什么在式（7.9）中采用了“≙”而不是“=”?

$$\oiint_{\Sigma_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} q^{(e)} \mathrm{dS} \triangleq \oiint_{\Sigma_1} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} q_1 \mathrm{dS} + \oiint_{\Sigma_2} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} q_2 \mathrm{dS} + \oiint_{\Sigma_3} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} hT_3 - hT^{(e)} \mathrm{dS}$$

$$\triangleq -h \oiint_{\Sigma_3} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} T^{(e)} \mathrm{dS} + q_2 \oiint_{\Sigma_2} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \mathrm{dS} + hT_3 \oiint_{\Sigma_3} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \mathrm{dS}$$

第一，由于内部表面总是成对出现在相邻的单元中，因而其上的热流密度积分，即热流在最后装配时会自动抵消，因而无须计算。此为上式第一处采用“≘”而不是“=”的原因。

第二，对位于表面Σ_1上的单元表面，无须计算，因为对于单元在这个表面上的结点，其对应的积分只对式(7.6)中的$\boldsymbol{K}_c$产生贡献,而这个矩阵在求解$\boldsymbol{T}_u$时用不到，因而无须计算；对于不在这个表面上的结点，则因其相应的形函数在这个表面上为 0，因而计算结果必为 0，无须计算。此为上式第二处采用“≘”的原因。