材料力学（乙）

Mechanics of Materials

重要概念的回顾与强化

■ 强度准则：

杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力，即强度条件为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\max} = \frac{\boldsymbol{F_N}}{\boldsymbol{A}} \le [\boldsymbol{\sigma}]$$

解决三类强度设计问题

(1) 强度校核： $\sigma_{\max} = \dfrac{F_N}{A} \le [\sigma]$ 已知载荷、截面和材料

(2) 截面设计： $A \ge \dfrac{F_N}{[\sigma]}$ 已知载荷、材料

(3) 确定许可载荷： $F_N \le A[\sigma]$ 已知截面、材料

重要概念的回顾与强化

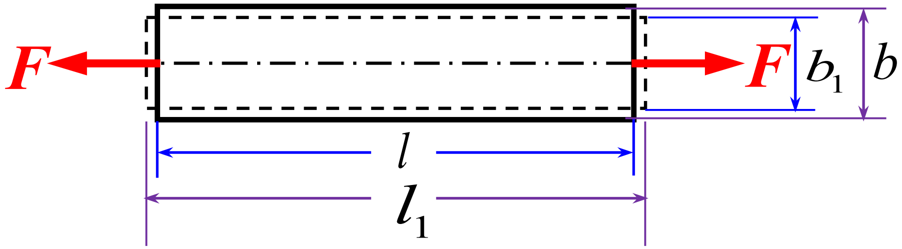
拉压杆的变形

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

抗拉（抗压）刚度

§2.7 轴向拉伸或压缩时的变形

泊松比（Poisson’s ratio）



1、轴向变形与应变

$$\Delta l = l_1 - l \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$ (泊松比)

2、横向变形与应变

$$\Delta b = b_1 - b \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}$$

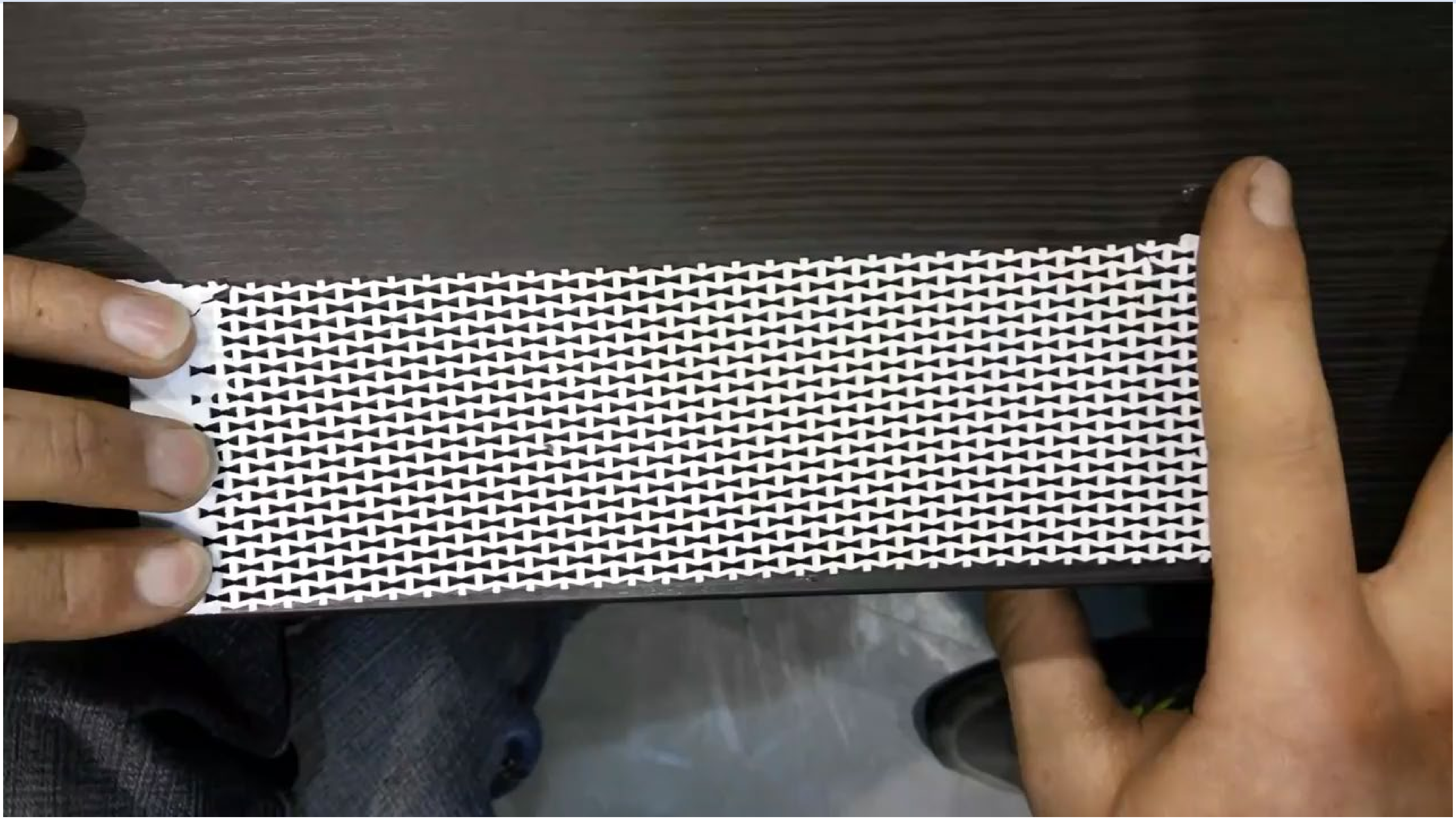
横向应变 $\varepsilon_y = -\mu \varepsilon_x$

应变能不能为负：各向同性材料泊松比的取值范围：$\mathbf{-1 \leq \mu \leq 0.5}$

钢的 μ 约为0.25到0.33

负泊松比的材料成为拉胀材料

§2.7 轴向拉伸或压缩时的**变形**



负泊松比材料

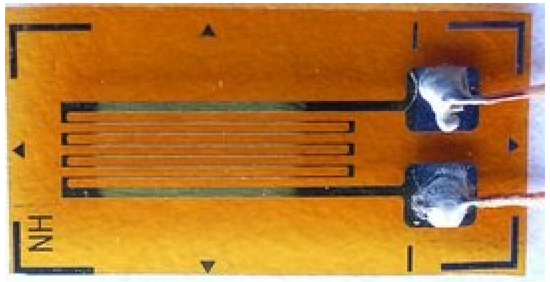
泊松比（Poisson’s ratio）

西莫恩·德尼·泊松（*Simeon-Denis Poisson*），19世纪法国数学家、几何学家和物理学家。泊松在众多学科均作出了巨大贡献，以他名字命名的科学名词包括数学：泊松分布、泊松积分、泊松定理、泊松常数、泊松比等。

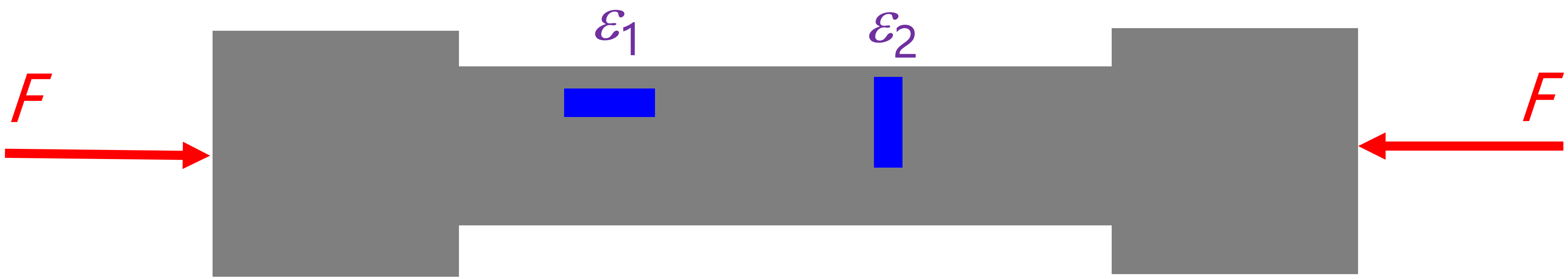
在板状试件的表面上，沿纵向和横向粘贴两个应变片ε_1和ε_2，在F力作用下，测得$\varepsilon_1 = -120 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_2 = 40 \times 10^{-6}$，则该试件材料的泊松比是（ C ）

(A) $\mu = 3$ (B) $\mu = -3$

(C) $\mu = 1/3$ (D) $\mu = -1/3$

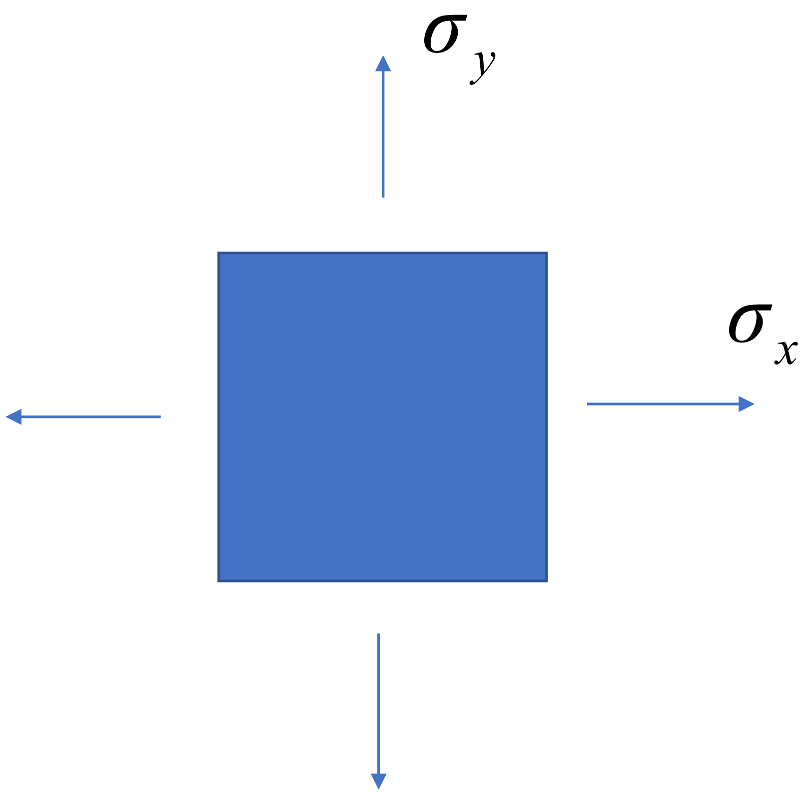


应变片



一维胡克定律

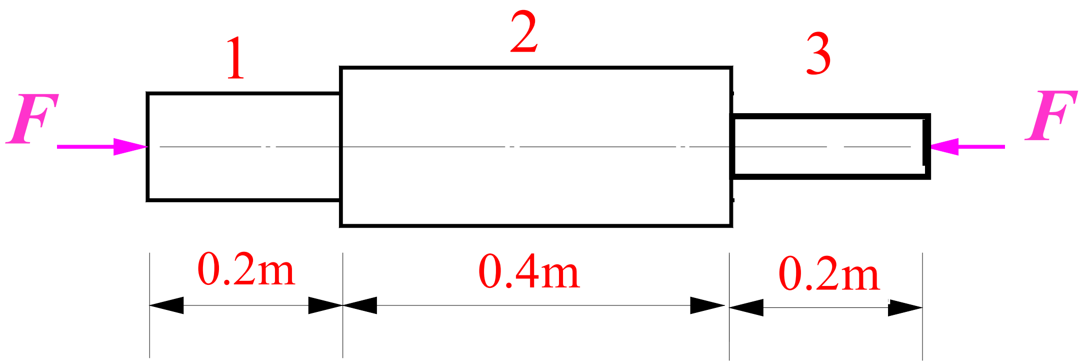
$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x \\ \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x \end{cases}$$



广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

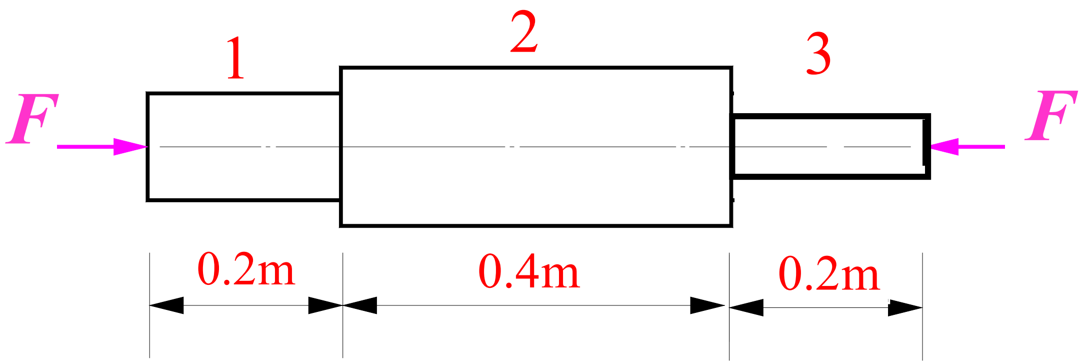
例题2.11 阶梯杆，1段为直径$d_1 = 20$ mm的圆杆，2段为边长$a = 25$ mm的方杆，3段为直径$d_3 = 12$ mm的圆杆。已知2段杆内的应力$\sigma_2 = -30$ MPa，$E = 210$ GPa，求整个杆的长度变化量Δl。



思考：轴向是均匀变形吗？

$$\Delta l = \frac{F_{N1}l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2}l_2}{EA_2} + \frac{F_{N3}l_3}{EA_3}$$

例题2.11 阶梯杆，1段为直径$d_1 = 20$ mm的圆杆，2段为边长$a = 25$ mm的方杆，3段为直径$d_3 = 12$ mm的圆杆。已知2段杆内的应力$\sigma_2 = -30$ MPa，$E = 210$ GPa，求整个杆的长度变化量Δl。



解：$F = \sigma_2 A_2 = -30 \times 25^2\,\text{N} = -18.75\text{kN}$

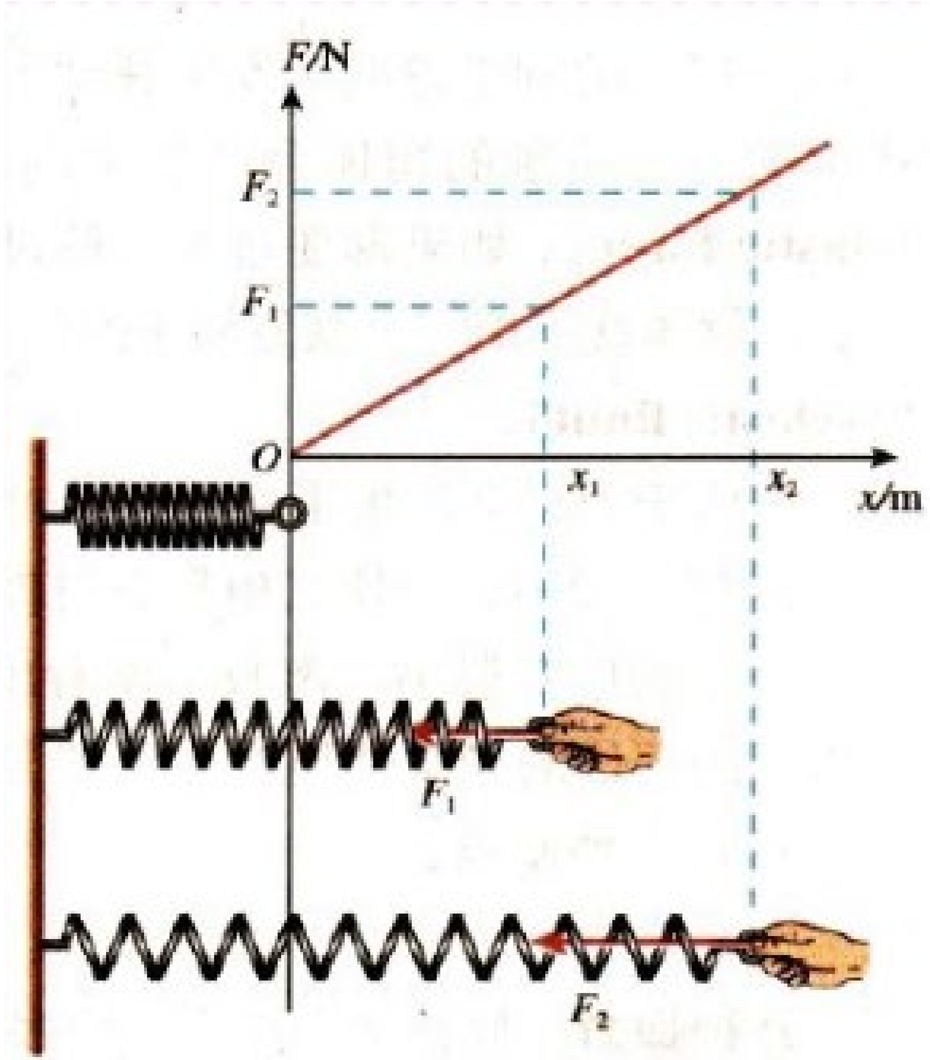
$$\Delta l = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} + \frac{F_{N3} l_3}{EA_3}$$

$$= -\frac{18750}{210 \times 10^9} \times \left(\frac{0.2}{\frac{\pi \cdot 0.02^2}{4}} + \frac{0.4}{0.025^2} + \frac{0.2}{\frac{\pi \cdot 0.012^2}{4}} \right) = -0.272\ \text{mm}$$

（缩短）

§2.8 轴向拉伸或压缩的**应变能**

物体发生变形，外力在物体上的作用点也会发生移动。



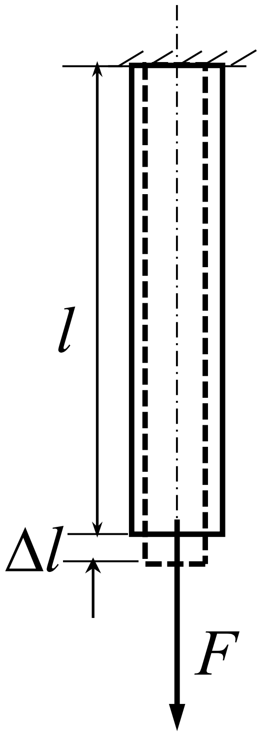
外力做功

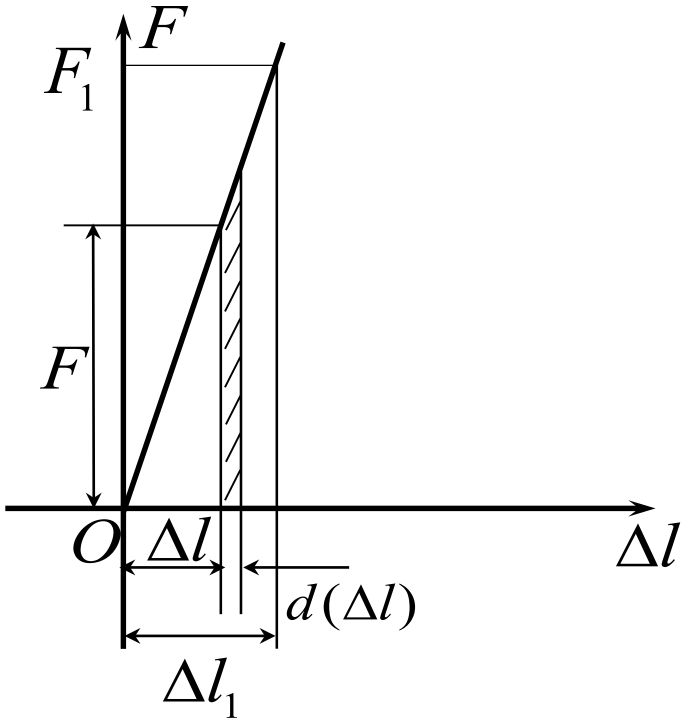
弹性势能

§2.8 轴向拉伸或压缩的**应变能**

应变能（V_ε）：变形体在外力作用下，因变形而储存的能量。

当外力逐渐减小时，弹性体变形逐渐恢复，所储存的应变能被释放而做功。





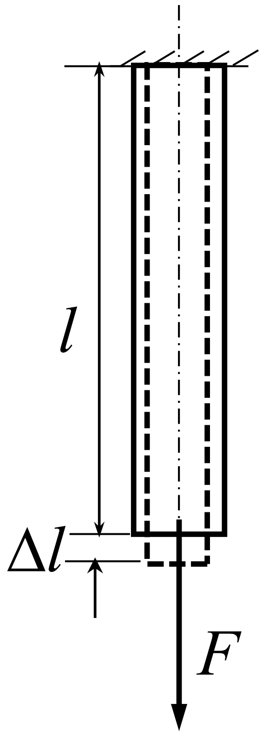
$$dW = Fd(\Delta l)$$

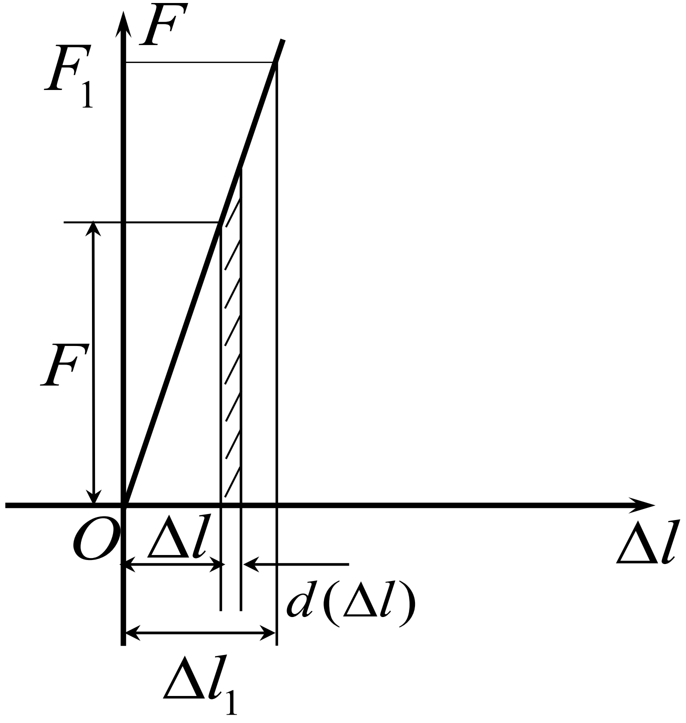
$$W = \int_0^{\Delta l_1} Fd(\Delta l)$$ 外力做功

§2.8 轴向拉伸或压缩的应变能

应变能（V_ε）：变形体在外力作用下，因变形而储存的能量。

当外力逐渐减小时，弹性体变形逐渐恢复，所储存的应变能被释放而做功。





$$F = k\Delta l$$

$$W = \frac{1}{2}k\Delta l_1^{\,2} = \frac{1}{2}F_1\Delta l_1$$

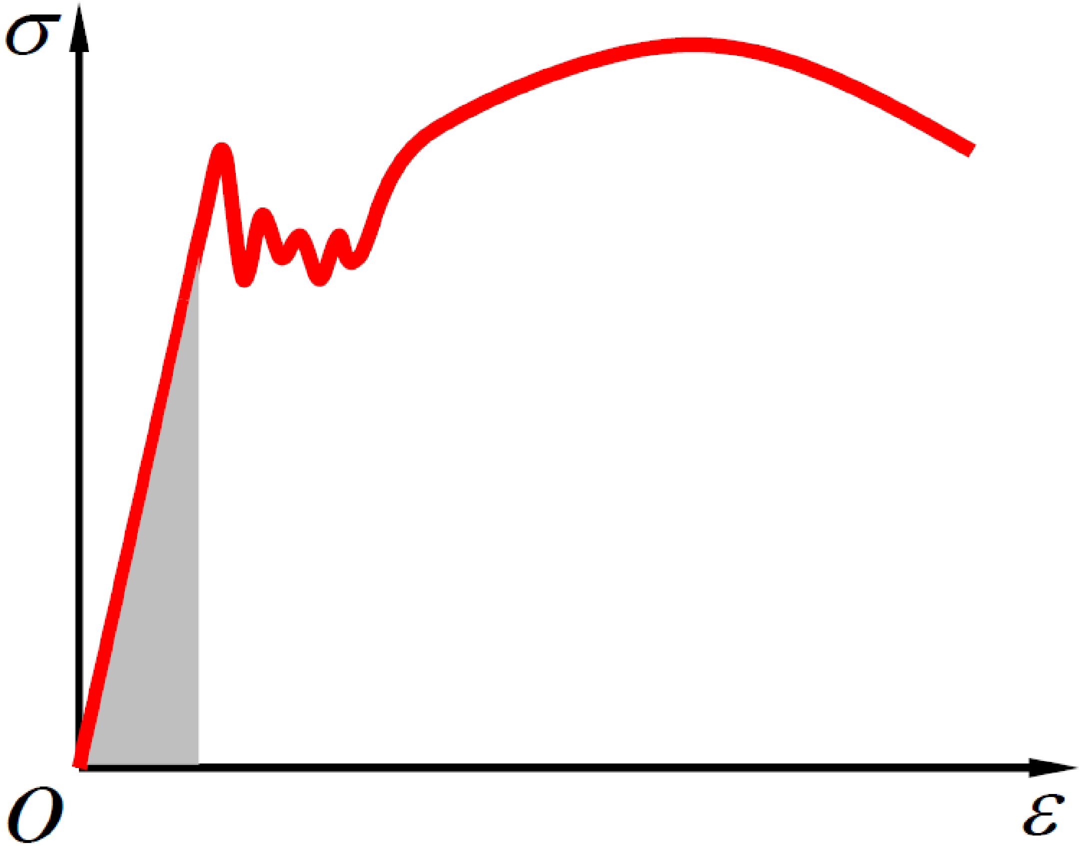
$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F_1\Delta l_1$$ 应变能

$$\boxed{V_\varepsilon = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{F^2 l}{2EA}}$$

§2.8 轴向拉伸或压缩的应变能

应变能密度：单位体积内储存的应变能

$$v=\frac{V_{\varepsilon}}{\mathrm{V}}=\frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{A\,l}=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$



胡克定律把应力和应变互相联系了起来

应变能密度把应力和应变二者共同作用的结果提了出来

应变能密度：单位体积内储存的应变能

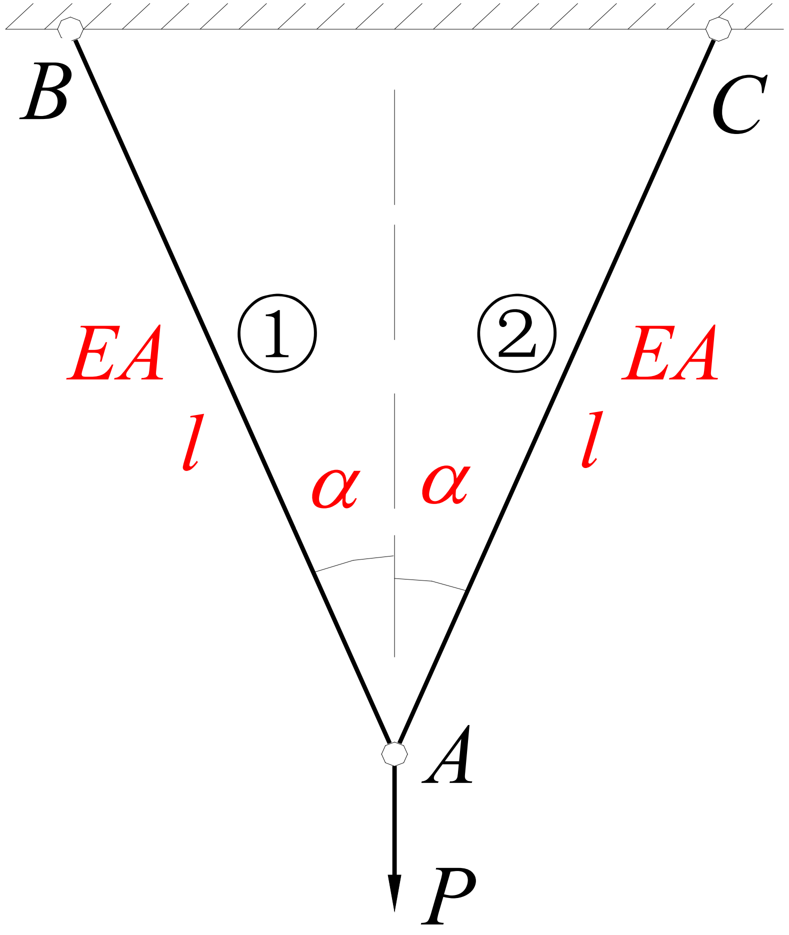
$$\boxed{v=\frac{V_{\varepsilon}}{\mathrm{V}}=\frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{A\,l}=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon}$$

$$\sigma=E\varepsilon$$

$$\boxed{v=\frac{1}{2E}\sigma^{2}} \longleftrightarrow \boxed{v=\frac{1}{2}E\varepsilon^{2}}$$

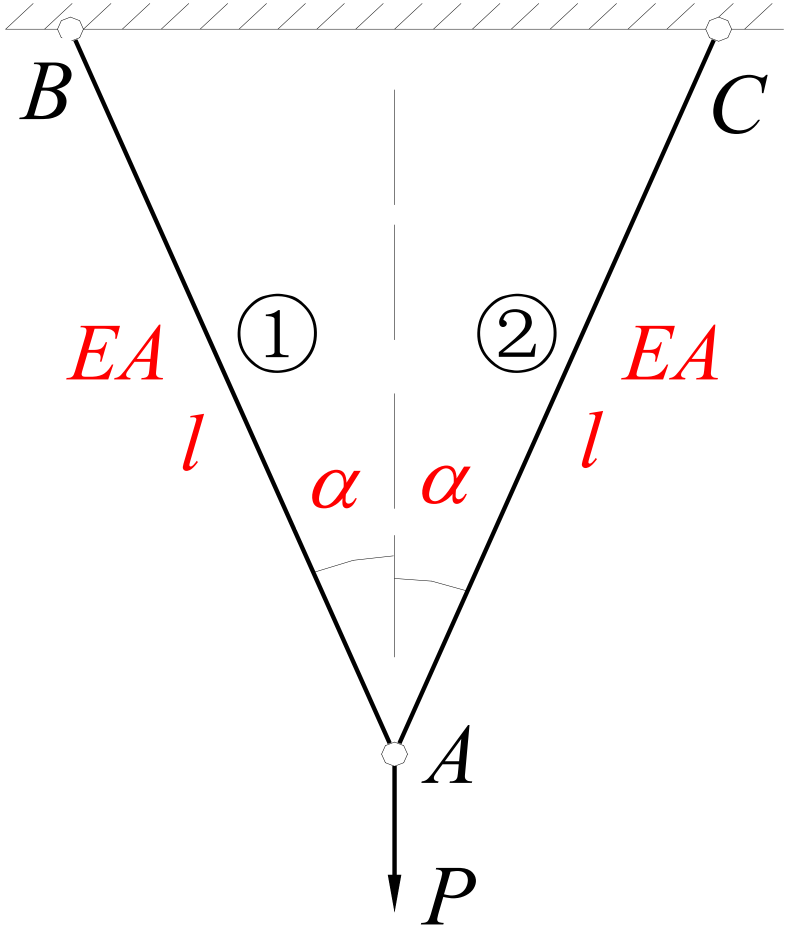
例题2.12

求图示结构节点A的垂直位移。



几何法求位移的复杂性

- 根据受力分析，计算杆的伸长量
- 建立杆的伸长量与外力作用点位移之间的关系
- 往往需要建立复杂的几何关系



能量法求位移

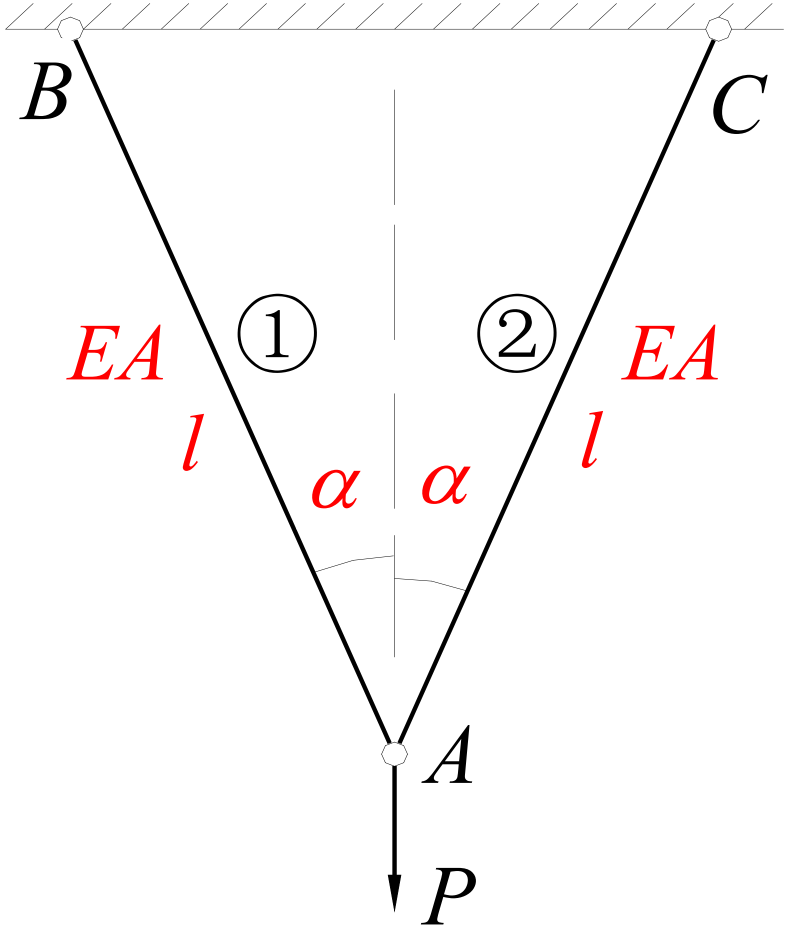
系统应变能

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{2} \frac{F_{Ni}^{2} l_i}{2E_i A_i} = \frac{l}{EA}\left(\frac{P}{2\cos\alpha}\right)^2$$

外力做功

$$W = \frac{1}{2} P\Delta$$

能量守恒 $W = V_\varepsilon$



能量法容易计算

例题2.12

求图示结构节点A的垂直位移。

解： $F_{N1}=F_{N2}=\dfrac{P}{2\cos\alpha}$

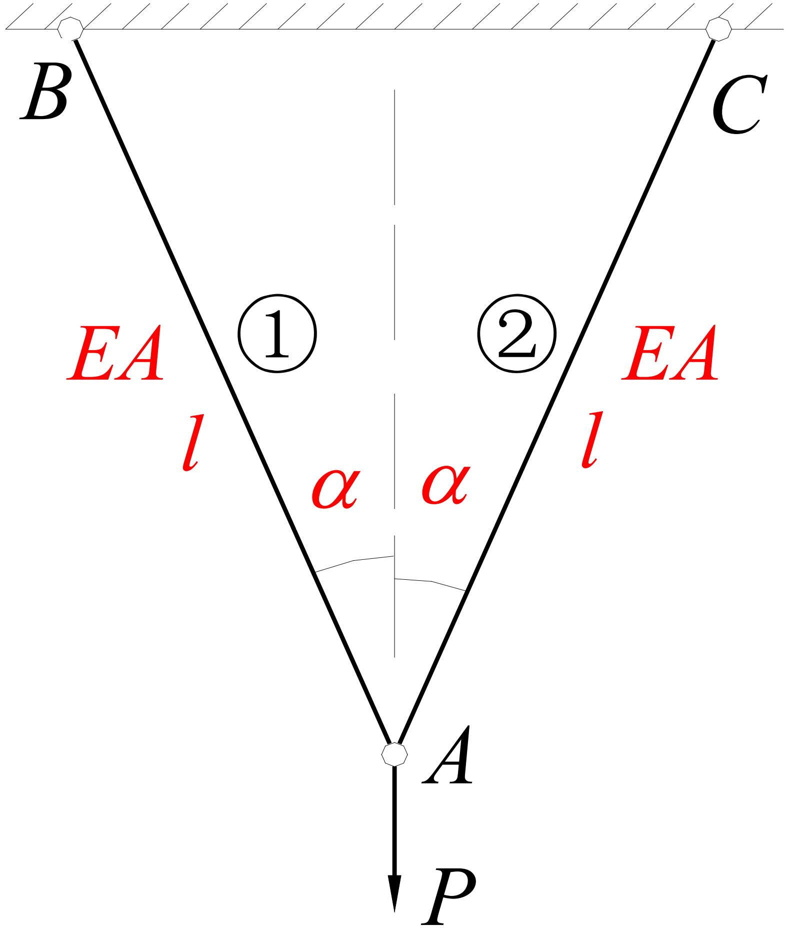
系统应变能

$$V_{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{Ni}^{2}l_i}{2E_iA_i}=\frac{l}{EA}\left(\frac{P}{2\cos\alpha}\right)^2$$

$$W=\frac{1}{2}P\Delta$$

$$V_{\varepsilon}=W \quad \Rightarrow \quad \Delta=\frac{Pl}{2EA\cos^2\alpha}$$

能量法！

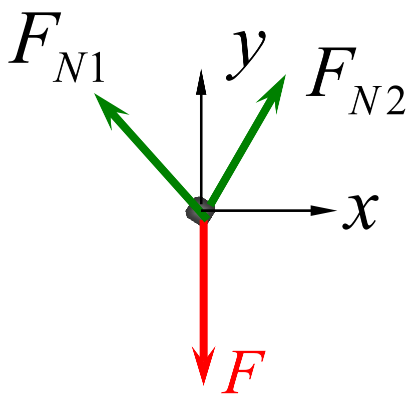


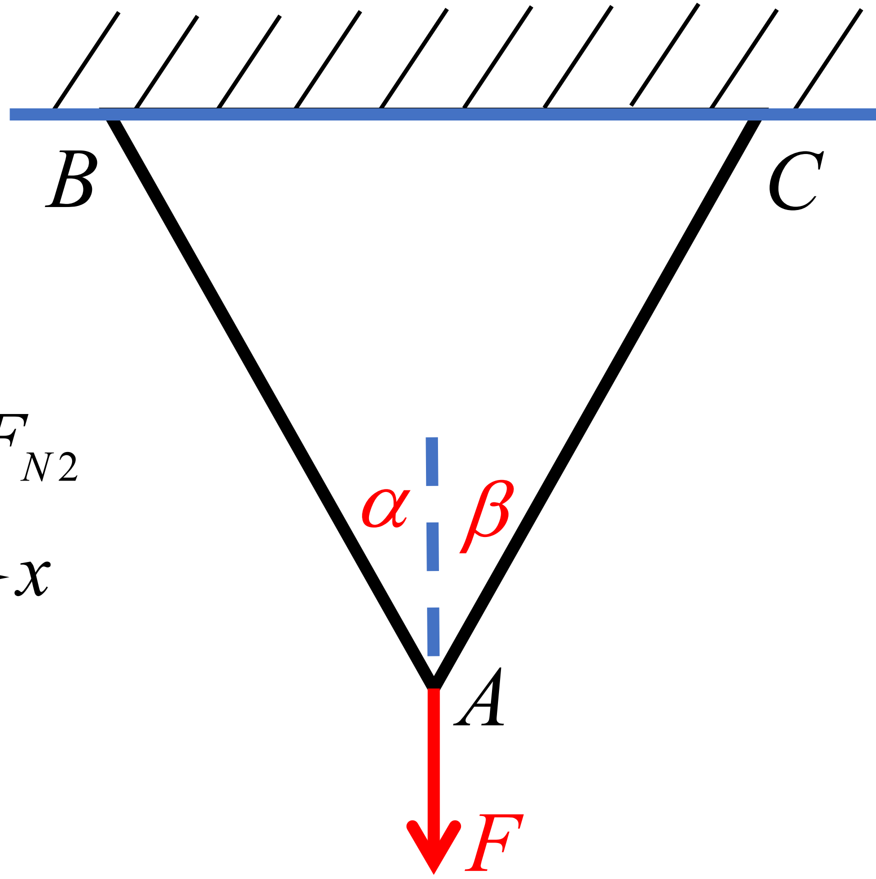
§2.9 拉伸、压缩的超静定问题

静定结构： 静力平衡方程可以解出全部未知力

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N1}\sin\alpha - F_{N2}\sin\beta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\beta - F = 0$$



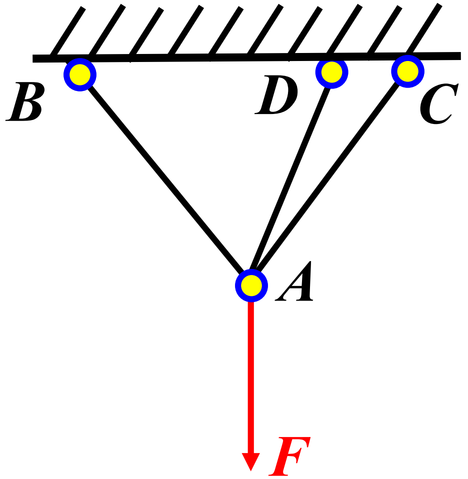


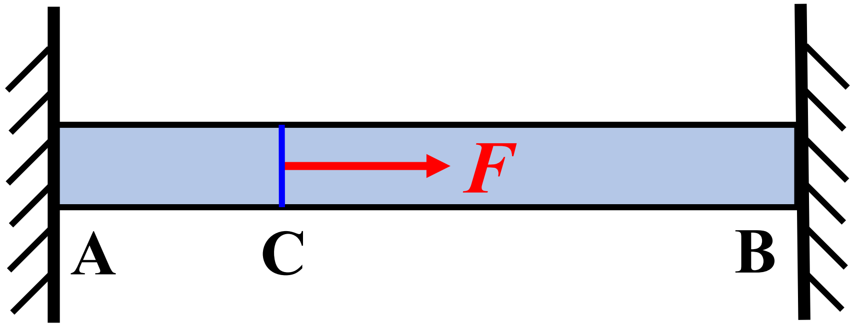
轴力可由静力平衡方程求得：

未知力（内力）个数=独立的平衡方程数

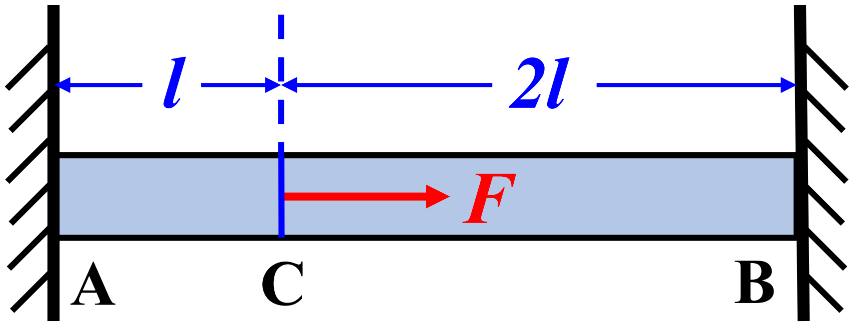
超静定结构： 结构的强度和刚度均得到提高

静力平衡方程不能解出全部未知力。





例题2.13



求杆在A处与B处的受力。

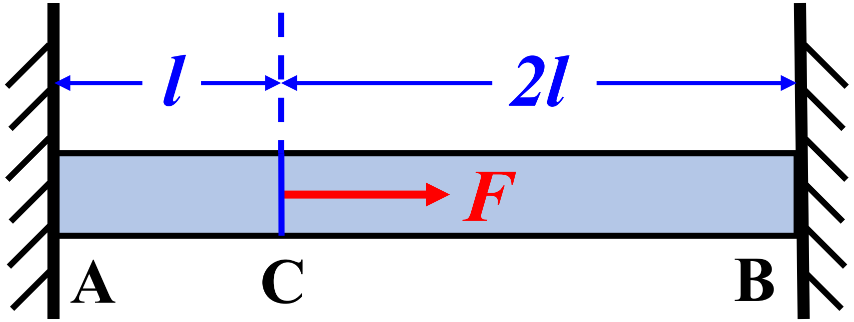
分析杆件的受力和变形！

$$\Delta l_{AB} = 0$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0$$

变形协调（compatible）方程

例题2.13



求杆在A处与B处的受力。

拉压杆变形计算公式：

物理方程：力和变形的关系

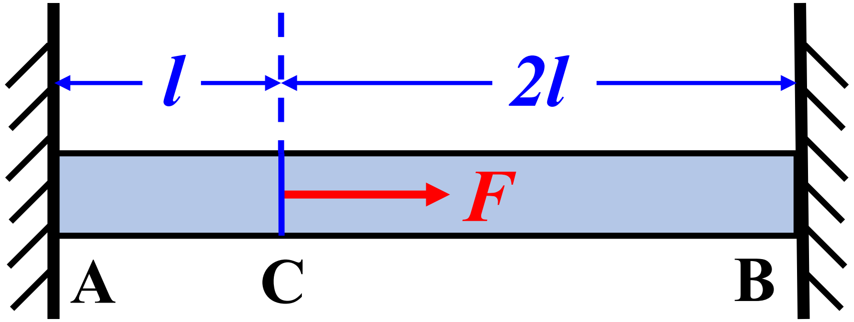
$$\Delta l_{AC} = F_A l_{AC}/EA \qquad \Delta l_{CB} = -F_B l_{CB}/EA$$

变形协调方程：

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0$$

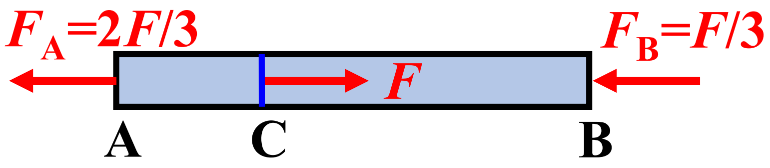
$$\Rightarrow \quad F_A = 2F_B$$

例题2.13



求杆在A处与B处的受力。

平衡方程



$$F_A + F_B = F$$

➡ $F_A = 2F/3$，$F_B = F/3$

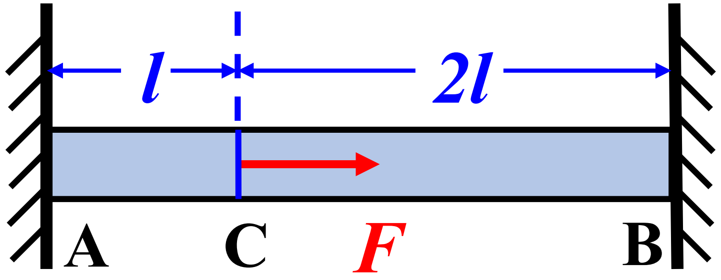
思考：如何设计杆件，使得两端约束力相等？

超静定问题求解思路

除平衡方程外，还需根据多余约束对位移或变形的限制，建立各部分位移或变形之间的几何关系，即建立变形协调方程。同时利用力与位移或变形之间的物理关系，即物理方程或称本构方程。

超静定度（次）数：

n = 未知力的个数 - 独立平衡方程的数目



§2.9 拉伸、压缩的超静定问题

独立平衡方程数：

平面一般力系：3个

平面汇交力系：2个

平面平行力系：2个

平面共线力系：1个

空间任意力系：6个

§2.9 拉伸、压缩的超静定问题

求解超静定问题的步骤

(1) 列静力平衡方程，确定超静定度数n；

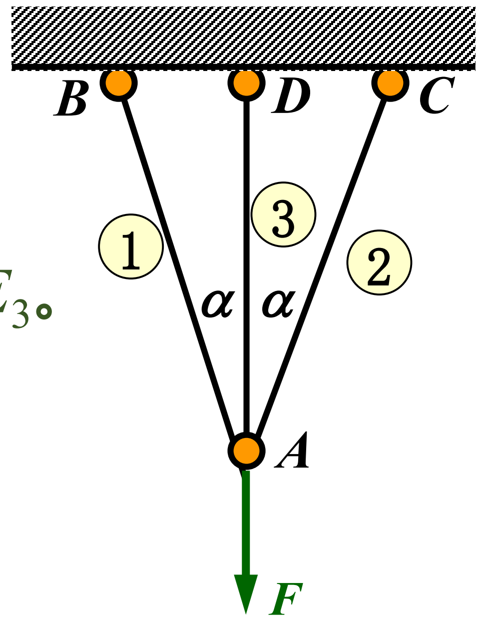
(2) 根据变形约束的条件，列变形协调方程;

(3) 利用物理方程（胡克定律），建立力与变形的关系；

(4) 联立补充方程和静力平衡方程，求解未知力。

例题2.14

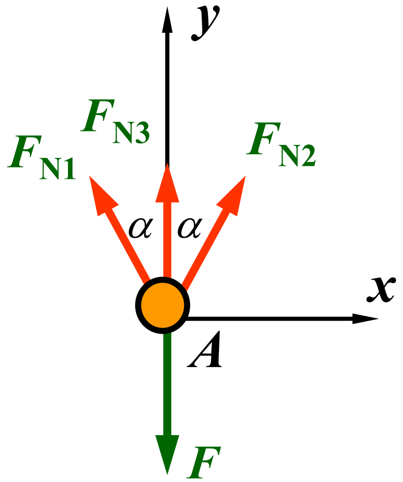
在图示结构中，设 1、2、3 三杆用绞链连结，如图所示，$l_1 = l_2 = l$，$A_1 = A_2 = A$，$E_1 = E_2 = E$，3杆的长度 l_3 ，横截面积 A_3，弹性模量E_3。试求在沿铅垂方向的外力 F 作用下各杆的轴力。



解：1、列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{N1} = F_{N2}$$

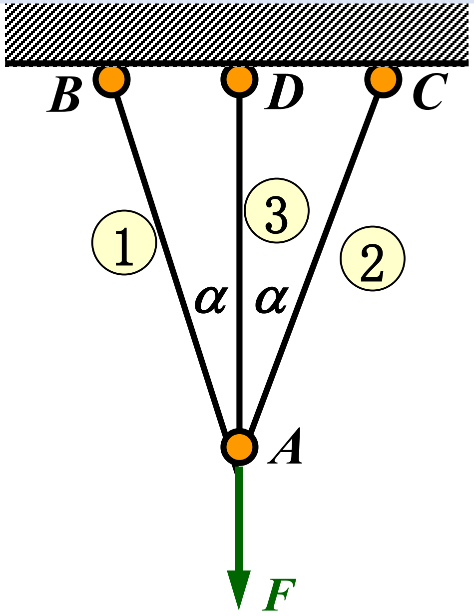
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{N1} cos\alpha + F_{N2} cos\alpha + F_{N3} - F = 0$$



因此，这是一次超静定问题。

例题2.14

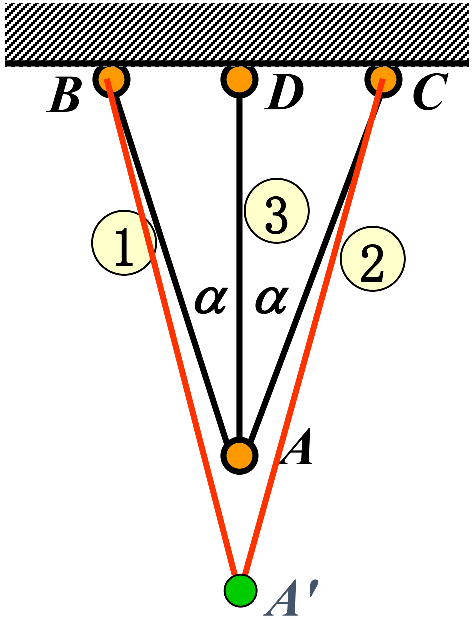
在图示结构中，设 1、2、3 三杆用绞链连结，如图所示，$l_1 = l_2 = l$，$A_1 = A_2 = A$， $E_1 = E_2 = E$，3杆的长度 l_3，横截面积 A_3，弹性模量E_3。试求在沿铅垂方向的外力 F 作用下各杆的轴力。



解：2、变形协调方程：

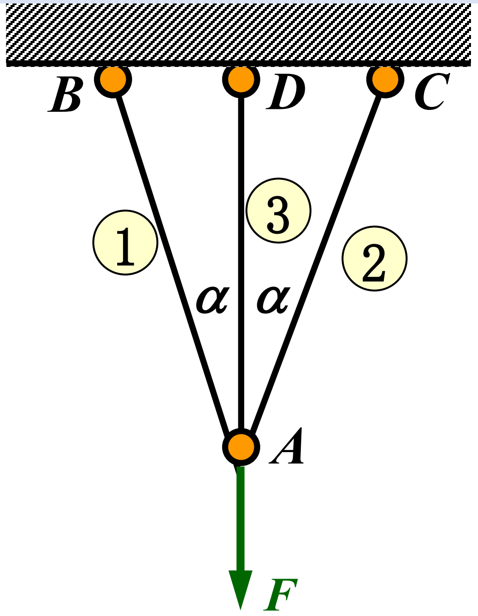
由于问题在几何，物理及受力方面都是对称，所以变形后A点将沿铅垂方向下移。

变形协调条件是变形后三杆仍绞结在一起。



例题2.14

在图示结构中，设 1、2、3 三杆用绞链连结，如图所示，$l_1 = l_2 = l$，$A_1 = A_2 = A$，$E_1 = E_2 = E$，3杆的长度 l_3，横截面积 A_3，弹性模量E_3。试求在沿铅垂方向的外力 F 作用下各杆的轴力。



解：2、变形协调方程：

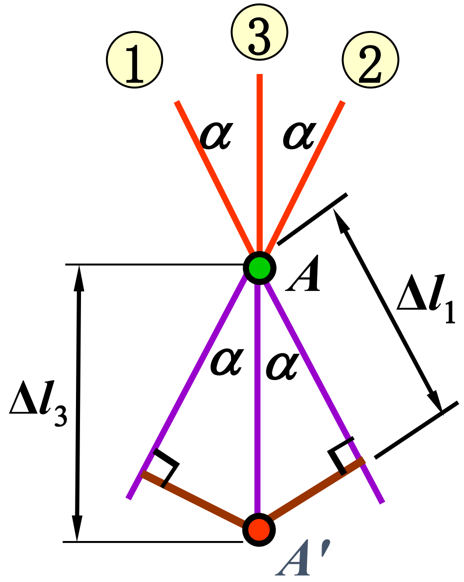
$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha$$

物理方程：

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} \qquad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_1 \cos\alpha}{E_3 A_3}$$

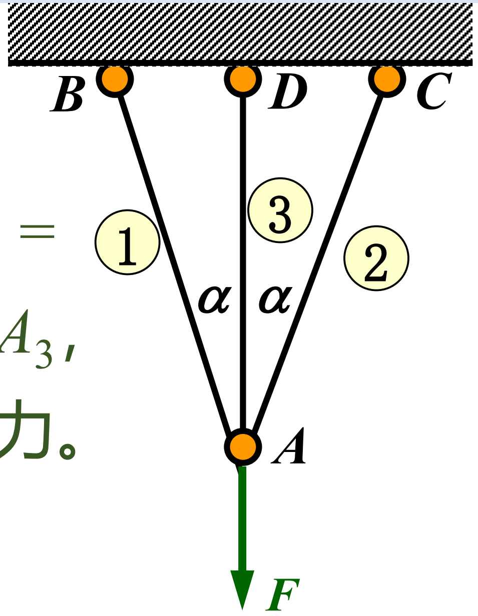
3、补充方程

$$F_{N1} = F_{N3} \frac{EA}{E_3 A_3} \cos^2\alpha$$



例题2.14

在图示结构中，设 1、2、3 三杆用绞链连结，如图所示，$l_1 = l_2 = l$，$A_1 = A_2 = A$，$E_1 = E_2 = E$，3杆的长度 l_3，横截面积 A_3，弹性模量E_3。试求在沿铅垂方向的外力 F 作用下各杆的轴力。



解：4、联立平衡方程与补充方程：

$$\begin{cases} F_{N1} = F_{N2} \\ F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha + F_{N3} - F = 0 \\ F_{N1} = F_{N3}\dfrac{EA}{E_3A_3}\cos^2\alpha \end{cases}$$

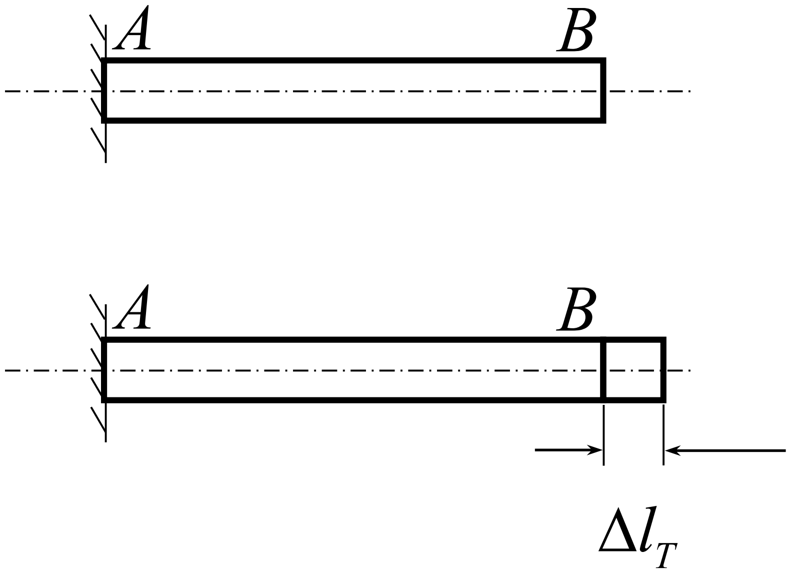
$$\Rightarrow F_{N3} = \frac{F}{1 + 2\dfrac{EA}{E_3A_3}\cos^3\alpha}$$

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + \dfrac{E_3A_3}{EA}}$$

§2.10 温度应力

温度变化引起物体的膨胀或收缩。

静定结构可以自由变形，不会引起构件的内力。



α_l – 材料的线胀系数

单位长度的杆温度升高1℃时杆的伸长量

单位： $/\,^0C$

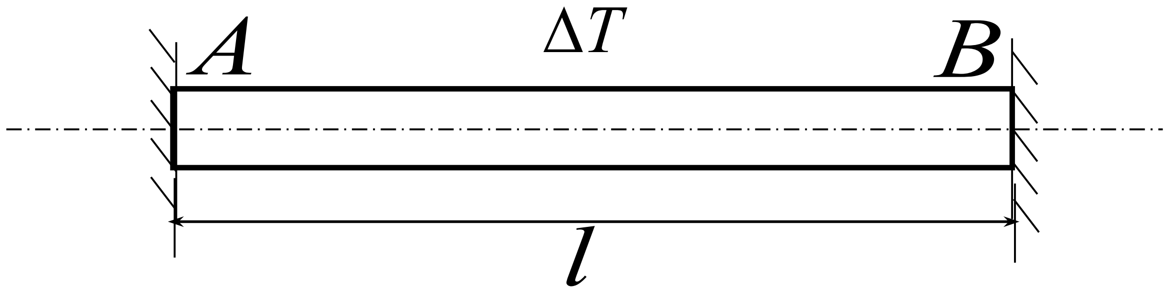
温度变化引起变形

$$\Delta l_T = \alpha_l \Delta T \cdot l$$

§2.10 温度应力

温度变化引起物体的膨胀或收缩。

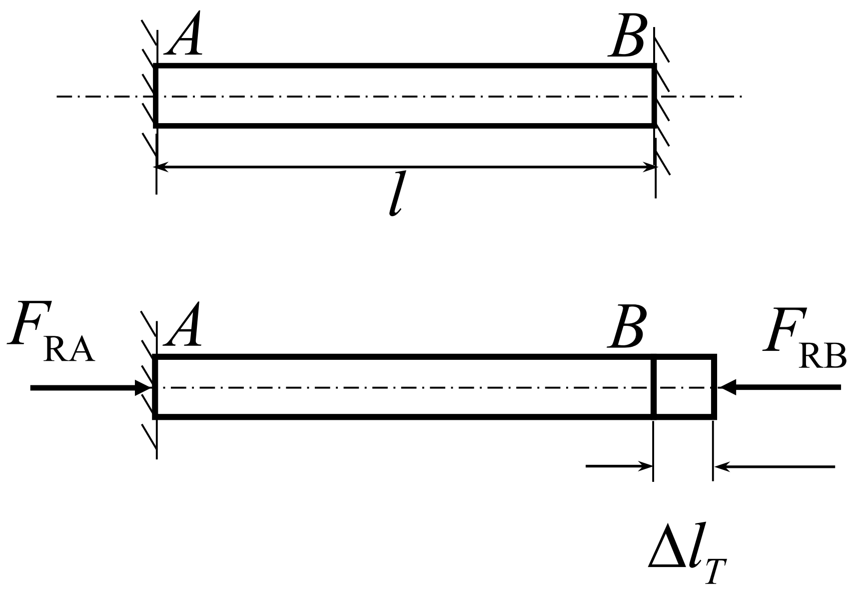
超静定结构的变形受到约束，由此产生的应力称为热应力或温度应力。



思考：这是几次超静定问题?

例题2.15：

一两端刚性支承杆AB，设计长为l，横截面积为A，材料的线膨胀系数为α_l，弹性模量为E。若杆安装时的温度为T_1，使用时温度为T_2（$T_2 > T_1$），试求杆内的温度应力。



解： 1、列出独立的平衡方程

$$F_{RA} - F_{RB} = 0$$

2、温度变化引起变形

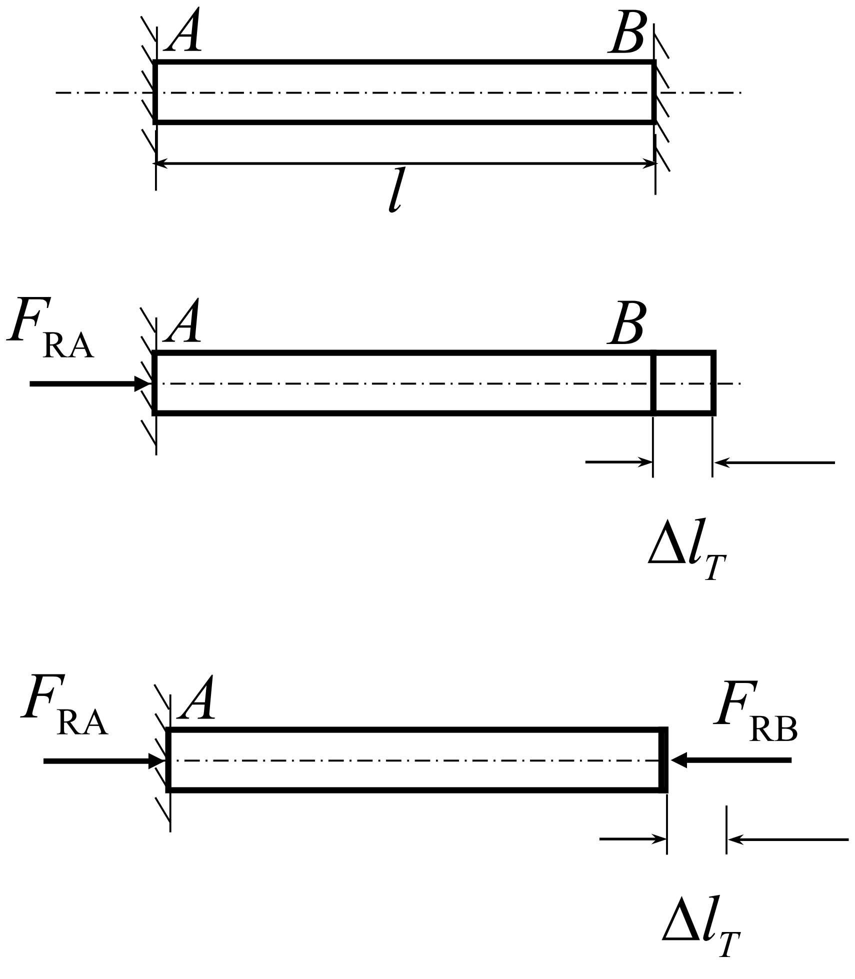
$$\Delta l_T = \alpha_l \Delta T \cdot l = \alpha_l (T_2 - T_1) \cdot l$$

3、端部约束力引起缩短

$$\Delta l_R = -\frac{F_R l}{EA}$$

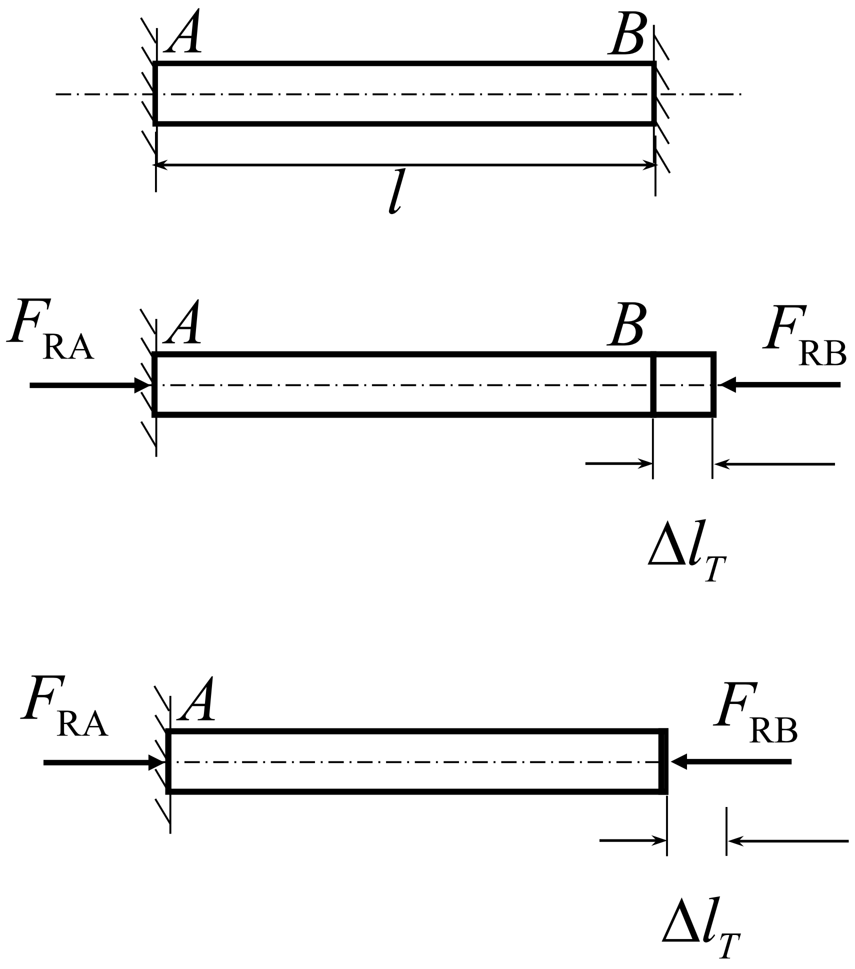
4、杆的总长度不变（变形协调）

$$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_R = 0$$



4、求解约束力

$$F_R = EA\alpha_l \Delta T$$



温度应力

$$\sigma_T = \frac{F_{RB}}{A} = \alpha_l E \Delta T$$

$$= \alpha_l E(T_2 - T_1)$$

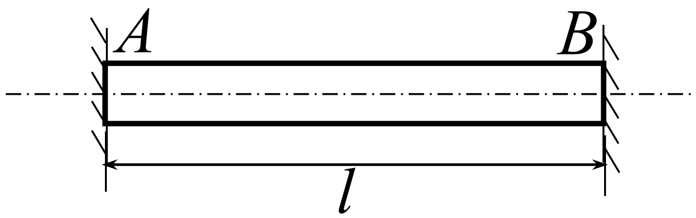
钢 $\alpha_l = 1.25 \times 10^{-5}/°C$

混凝土 $\alpha_l = 1.0 \times 10^{-5}/°C$

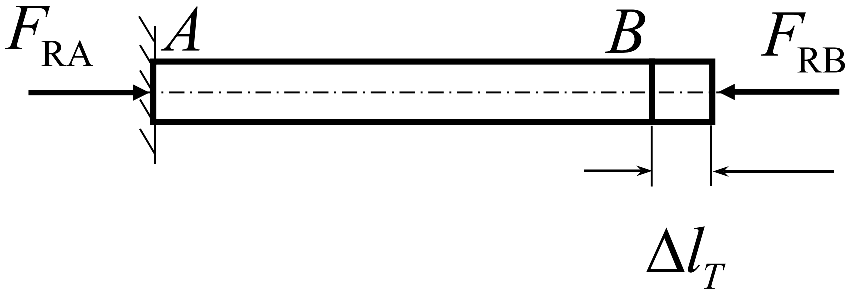
塑料的热膨胀系数很大，是碳钢的3~10倍

§2.10 温度应力

钢 $\alpha_l = 1.25\times10^{-5}/°\mathrm{C}$，$E = 200\ \mathrm{GPa}$，

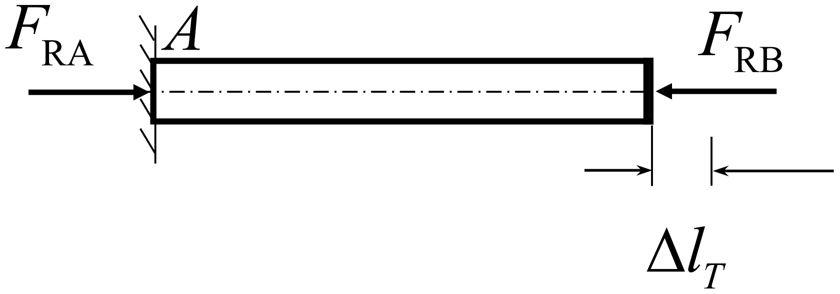


温度应力



$$\sigma_T = \frac{F_{RB}}{A} = \alpha_l E \Delta T$$

$$= \left(2.5\Delta T\ °\mathrm{C}^{-1}\right)\mathrm{MPa}$$



可见当 ΔT 较大时，温度应力数值非常可观

§2.10 温度应力

工程中温度应力预防与控制：

输油管道、蒸汽管道

隔一段距离要设一个弯道 - 膨胀弯（Π型）伸缩节

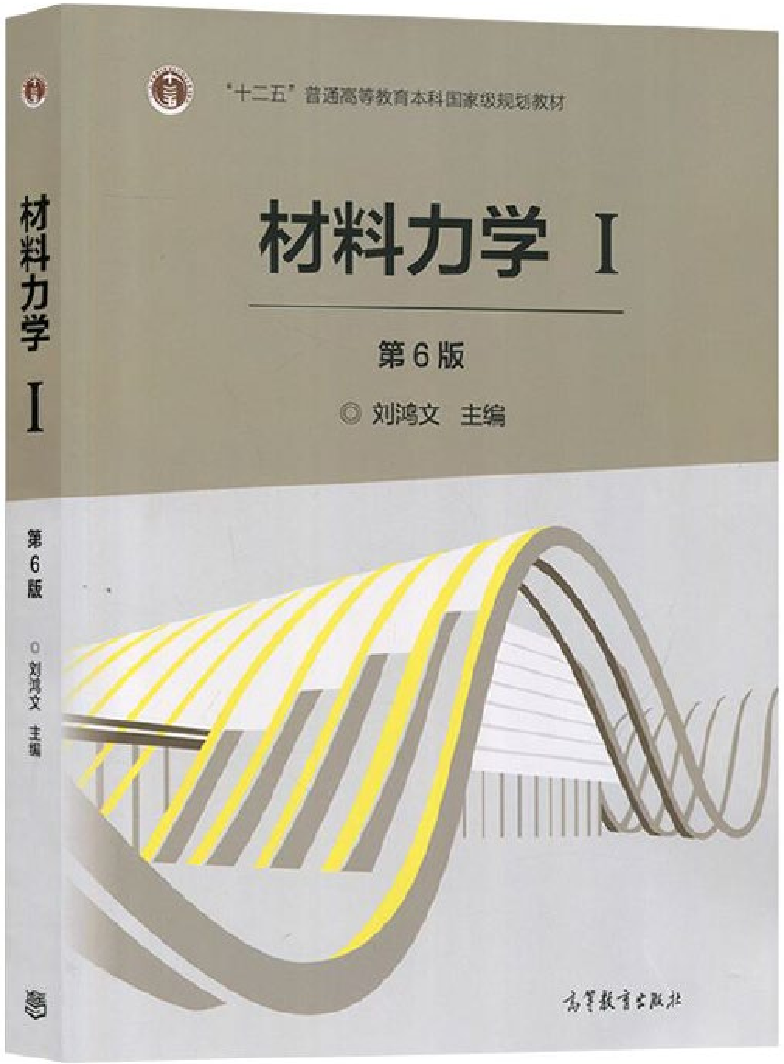
降低因温度变化而产生的热应力，避免构件失效。

工程中温度应力预防与控制：

工程中常采用预留空隙来减轻温度应力的影响。

如铁路钢轨接头处，混凝土路面中。

作业

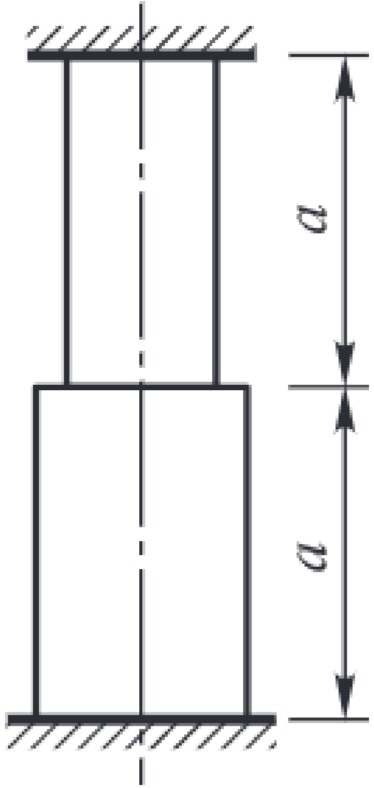


2.47（温度应力）

3.19日(下周二）之前交

作业

2.47 图示阶梯形钢杆的两端在 $T_1=5℃$ 时被固定，杆件上下两段的横截面面积分别是 $A_{上}=500\ \mathrm{mm}^2$，$A_{下}=1\ 000\ \mathrm{mm}^2$。钢材的 $\alpha_l=12.5\times10^{-6}℃^{-1}$，$E=200\ \mathrm{GPa}$。当温度升高至 $T_2=25℃$ 时，试求杆内各部分的温度应力。



题 2.47 图