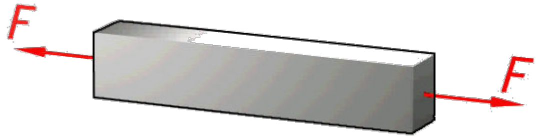
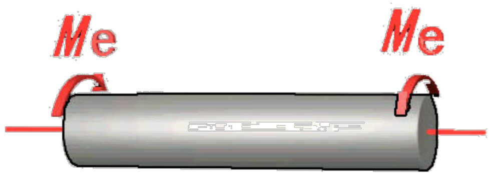
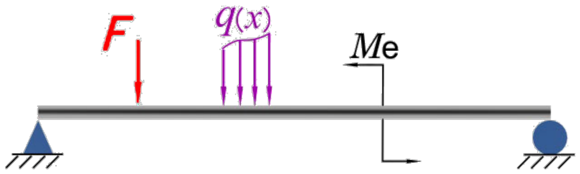
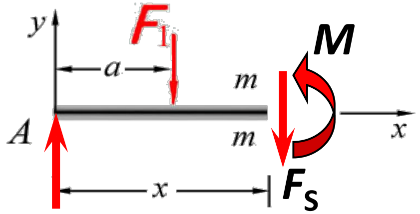
第五章 弯曲应力



弯曲应力

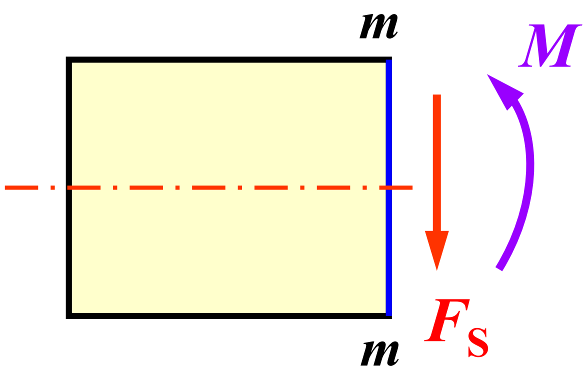
§5.1 纯弯曲

1、回顾与比较

	受力特点	内力	应力
拉伸			$\sigma=\dfrac{F_N}{A}$
扭转			$\tau=\dfrac{T\rho}{I_P}$
弯曲			$\sigma=?$ $\tau=?$

2、弯曲构件横截面上的应力

当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既有弯矩M，又有剪力F_S。

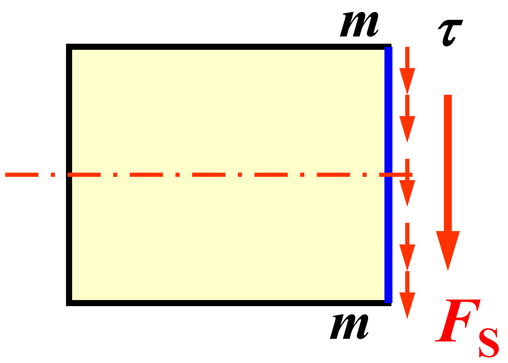


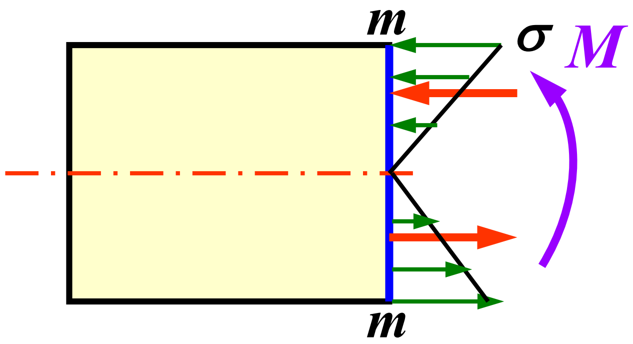
2、弯曲构件横截面上的应力

内力 $\begin{cases} \text{剪力}F_S \longrightarrow \text{切应力}\tau \\ \text{弯矩}M \longrightarrow \text{正应力}\sigma \end{cases}$

切向内力元素$dF_S=\tau dA$

法向内力元素$dF_N=\sigma dA$

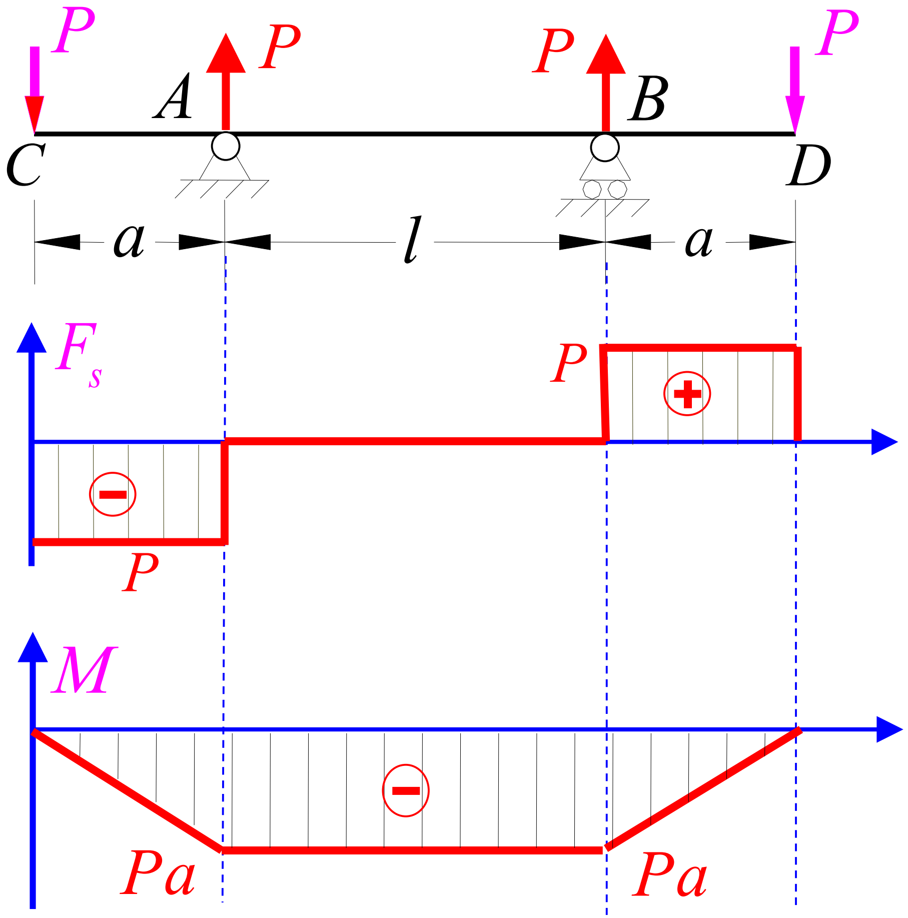




所以，在梁的横截面上一般既有正应力又有切应力。

3、纯弯曲和横力弯曲

$P=G$



内力图中

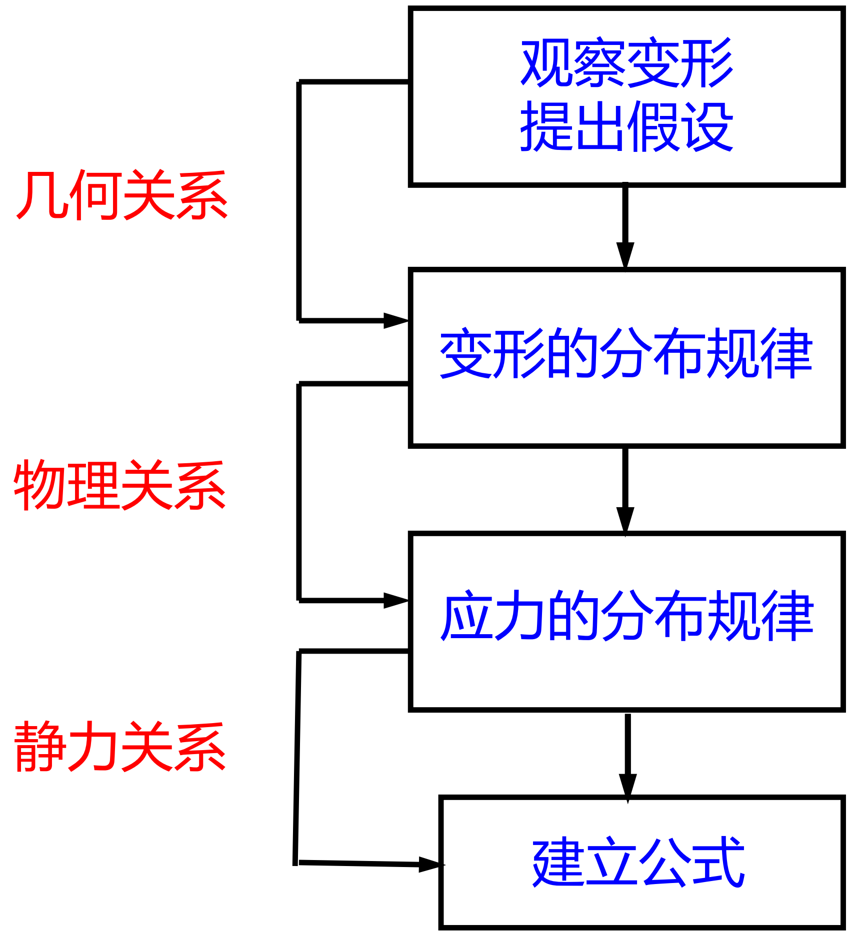
AB段：　$F_s=0,\ \ M=\text{const}$　（纯弯曲）

AC和BD段：　$F_s\neq 0,\ \ M\neq 0$　（横力弯曲）

§5.1 纯弯曲

求解弯曲应力

几何关系、　物理关系、　静力关系



纯弯曲情形：

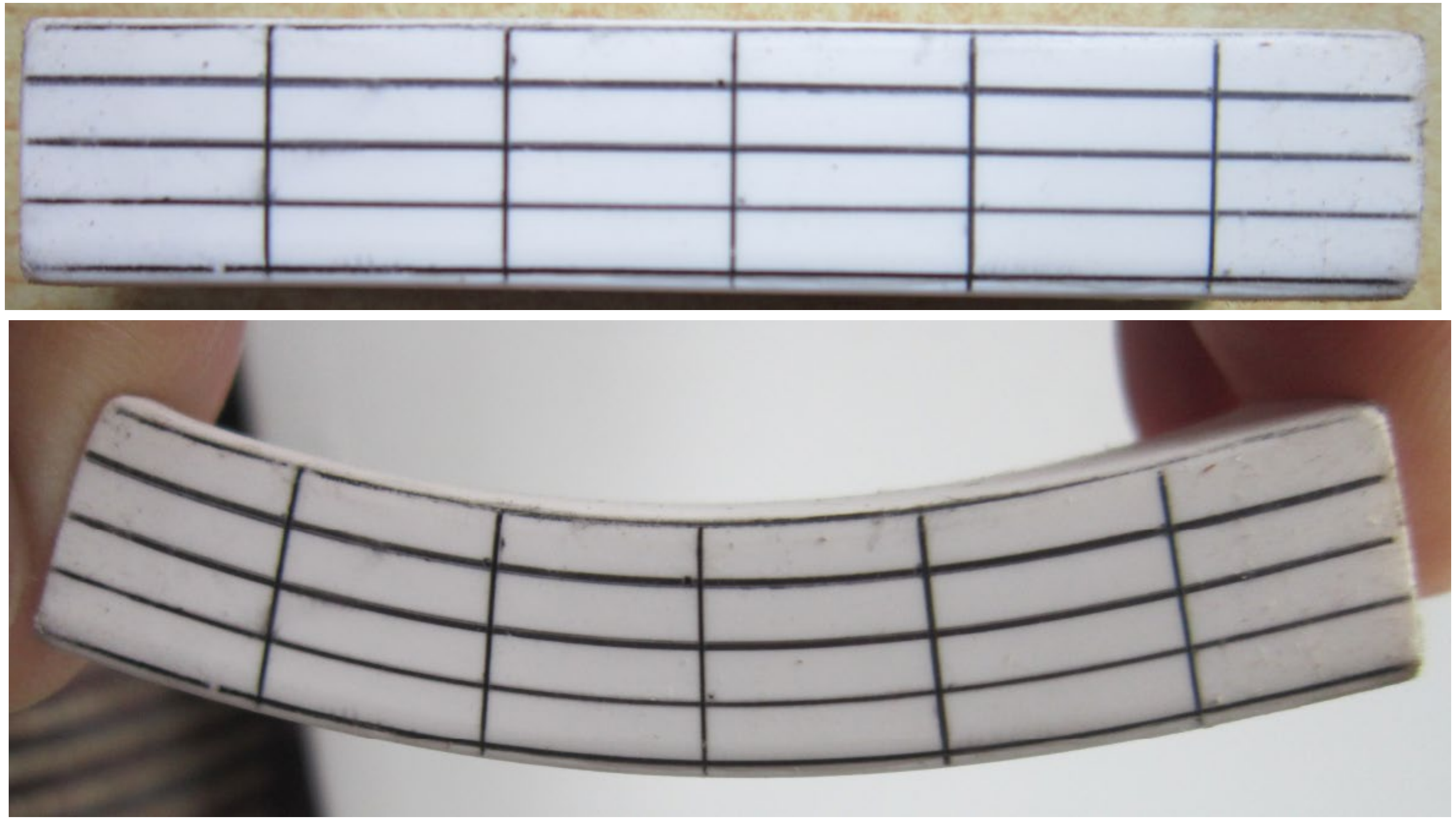
$$F_s = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$M \neq 0 \Rightarrow \sigma = ?$$

§5.2 纯弯曲时的正应力

1、几何关系

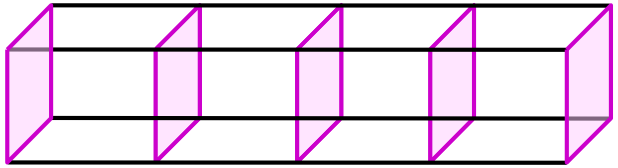
实验现象

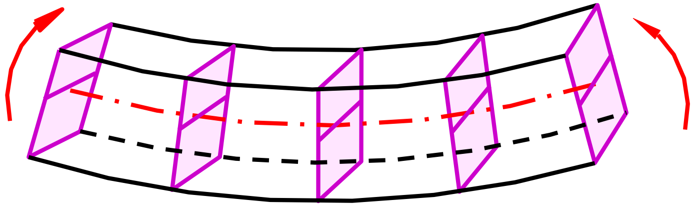


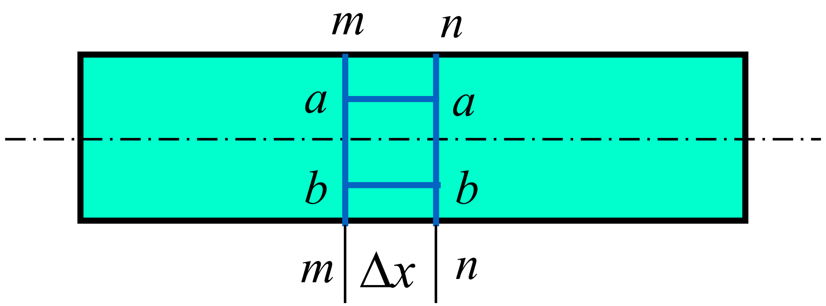
矩形截面等直梁

1、几何关系

变形观察





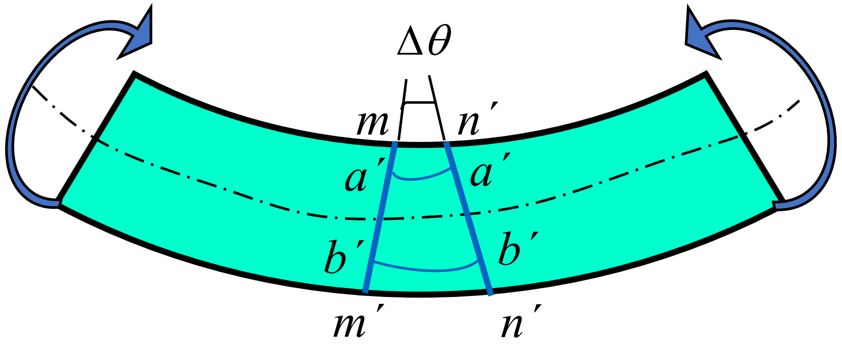


纵向线

各纵向线段弯成弧线；

靠近顶端的纵向线段缩短；

靠近底端的纵向线段伸长。



横向线

各横向线仍保持为直线；

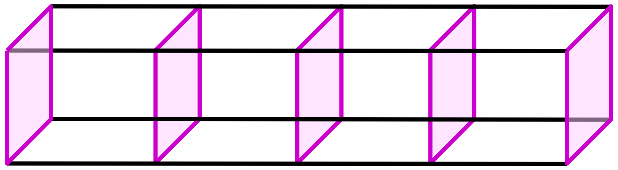
相对转过了一个角度；

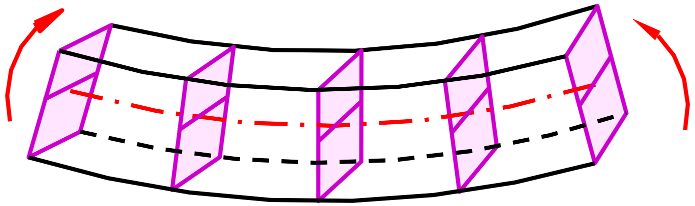
仍与变形后的纵向弧线垂直。

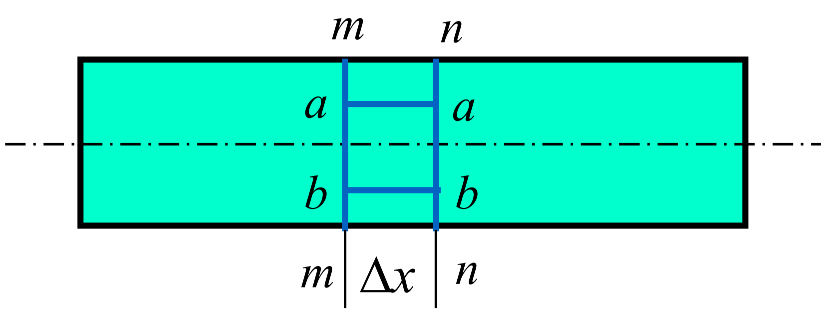
§5.2 纯弯曲时的正应力

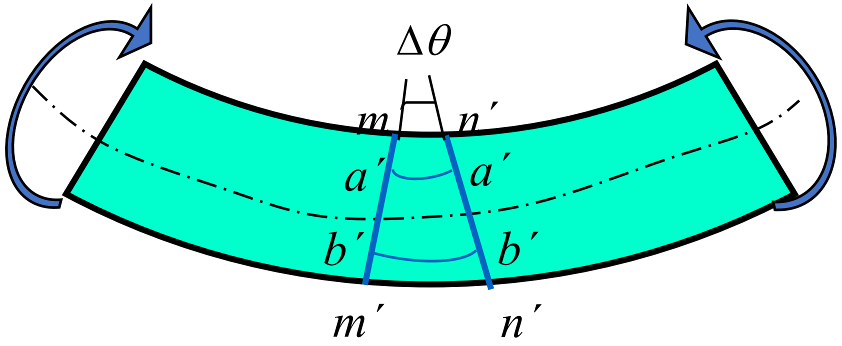
1、几何关系

变形观察









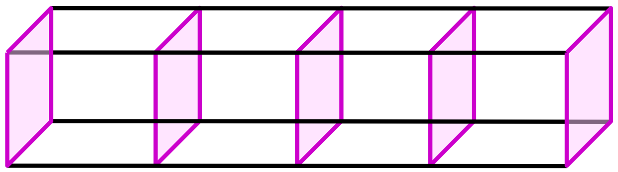
（1）平面假设：

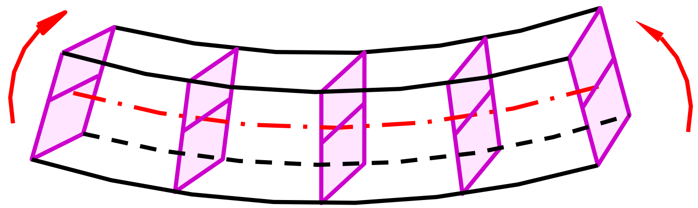
变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面，且垂直于变形后的梁轴线，只是绕截面内某一轴线偏转了一个角度。

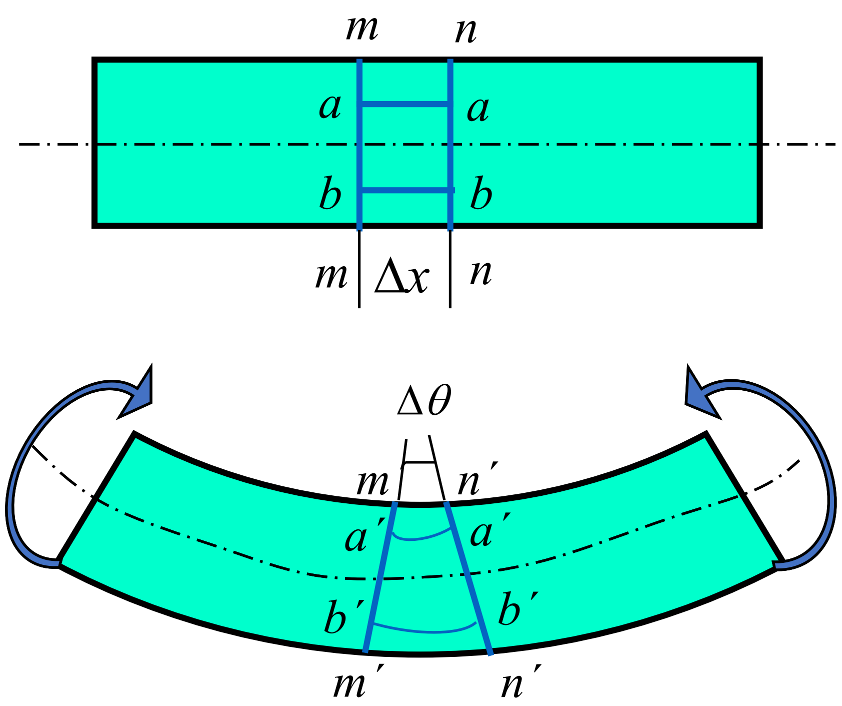
§5.2 纯弯曲时的正应力

1、几何关系

变形观察







（2）单向受力假设：

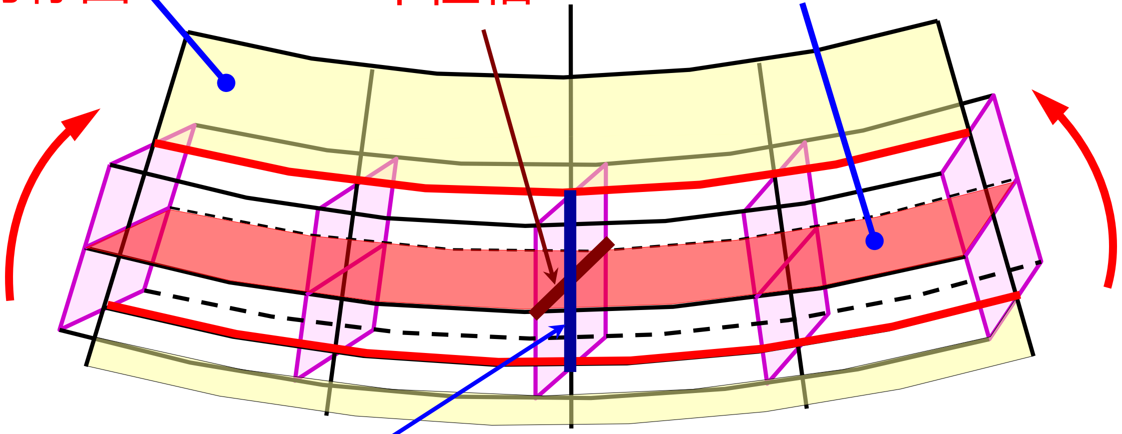
纵向纤维不相互挤压，

只受单向拉压。

§5.2 纯弯曲时的正应力

1、几何关系

中性层和中性轴

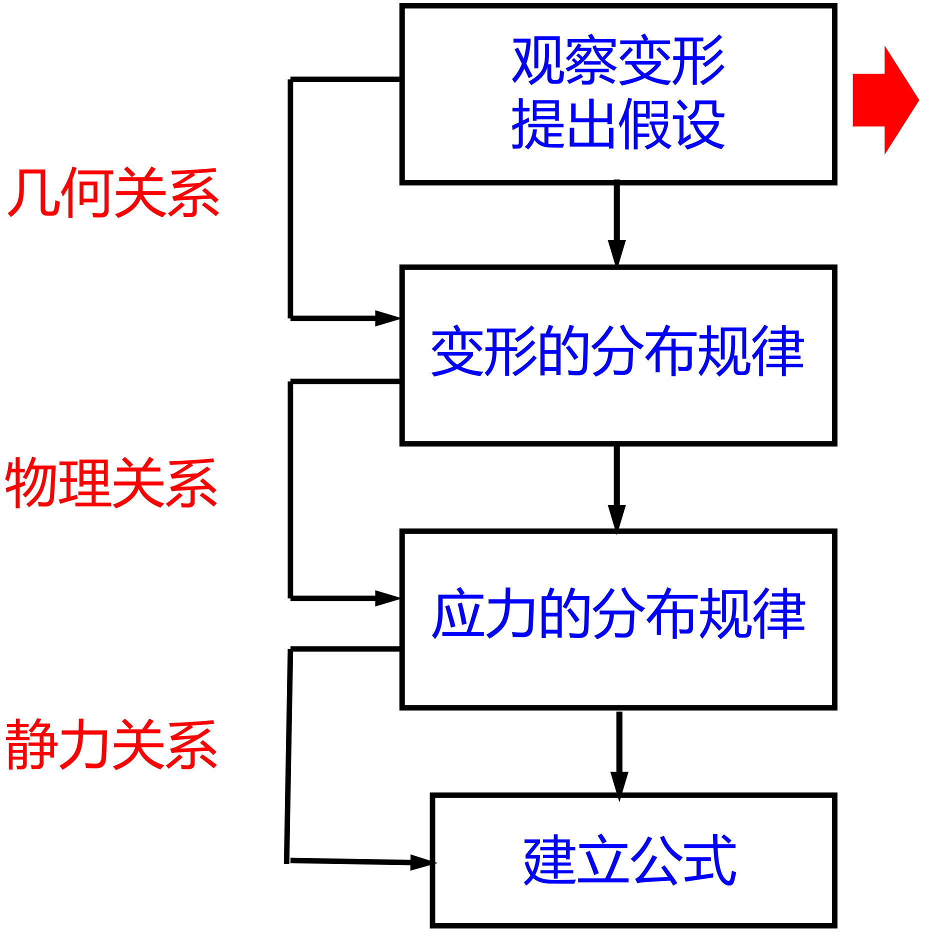


- 变形前后长度不变的纤维层：中性层
- 中性层与横截面的交线：中性轴

§5.2 纯弯曲时的正应力

求解弯曲应力

几何关系、　物理关系、　静力关系



平面假设
单向受力假设
中性层、中性轴

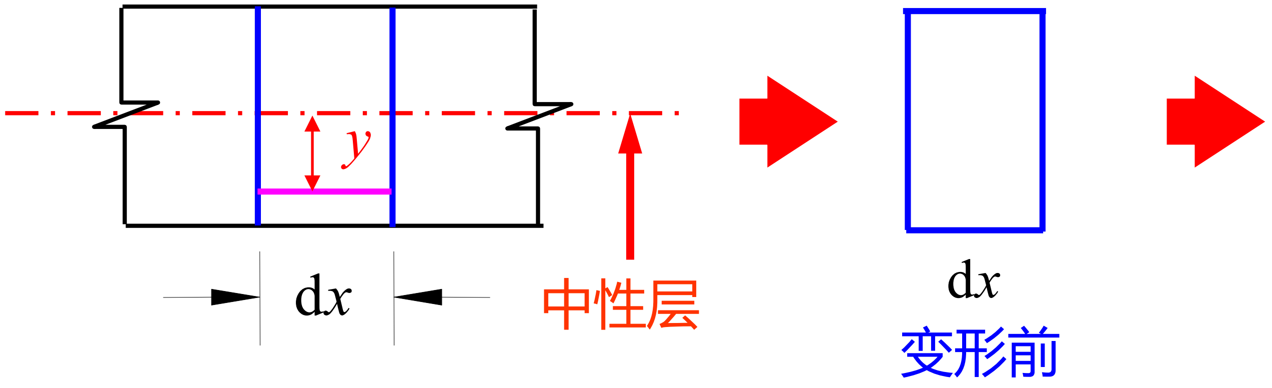
纯弯曲情形：

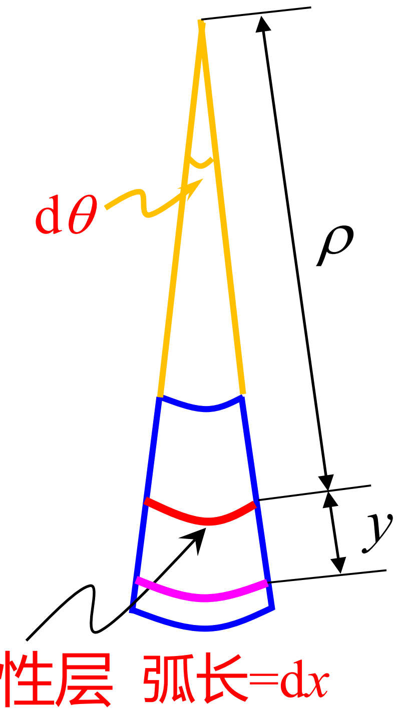
$$F_s = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$M \neq 0 \Rightarrow \sigma = ?$$

1、几何关系

几何关系的二维图示





横截面上距中性层（轴）y处 的纵向纤维

其纵向线应变为

$$\boxed{\varepsilon=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho}}$$

应变分布规律

直梁纯弯曲时纵向线应变与它到中性层的距离成正比

§5.2 纯弯曲时的正应力

从三方面考虑变形问题：

几何关系、 物理关系、 静力关系

观察变形
提出假设 ⇒ 平面假设、单向受力假设、中性层、中性轴

↓ 几何关系

变形的分布规律 ⇒ $\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$

↓ 物理关系

应力的分布规律

↓ 静力关系

建立公式

纯弯曲情形：

$$F_s = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

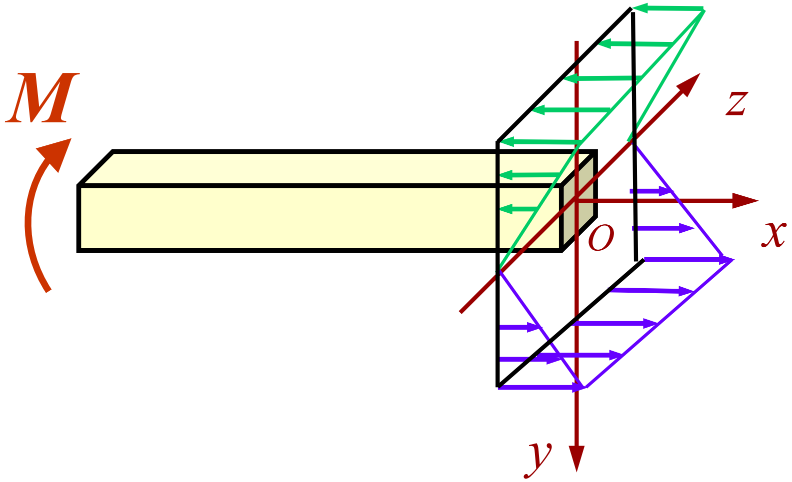
$$M \neq 0 \Rightarrow \sigma = ?$$

2、物理关系

单向受力假设：假设各纵向纤维之间互不挤压。

根据胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$

$$\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$$



应力分布规律：

等直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力，与它到中性轴的距离成正比。

§5.2 纯弯曲时的正应力

3、静力关系

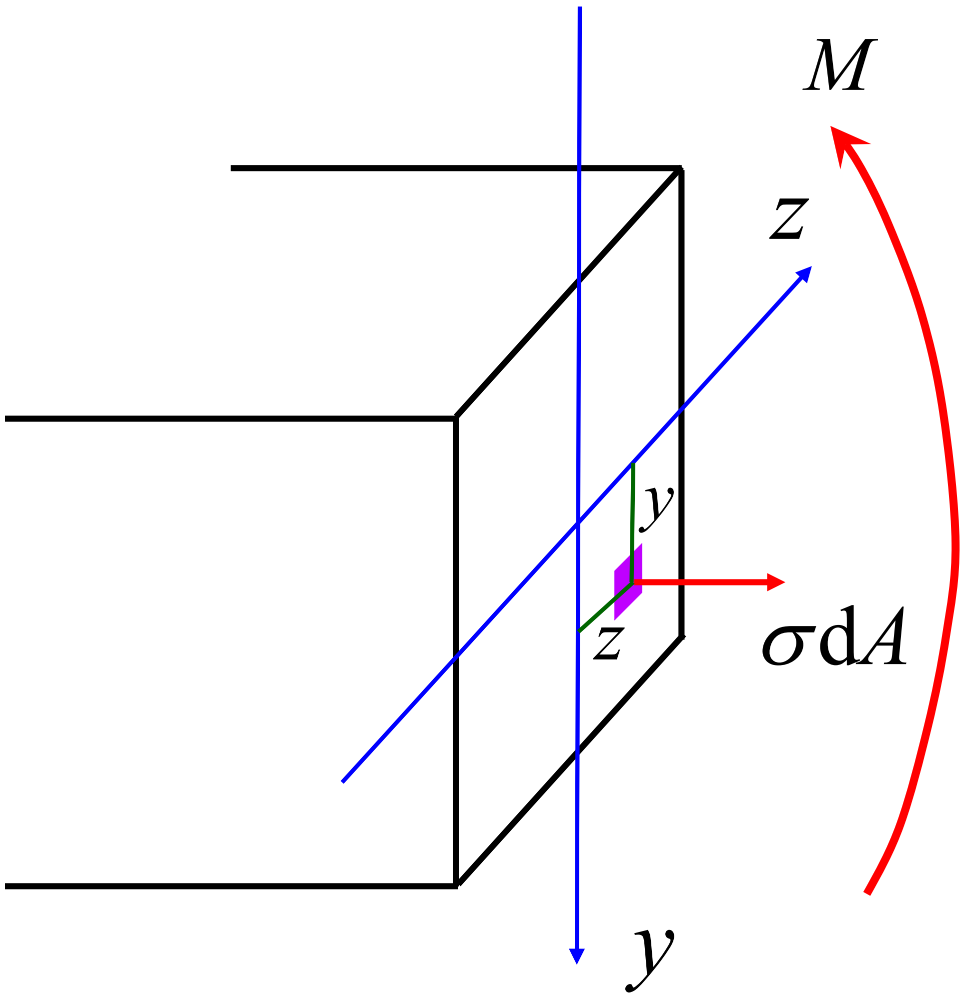
横截面上存在正应力

正应力能得到哪些内力分量?

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M_z = \int_A y \cdot \sigma \mathrm{d}A$$



y : 对称轴
z : 中性轴

3、静力关系

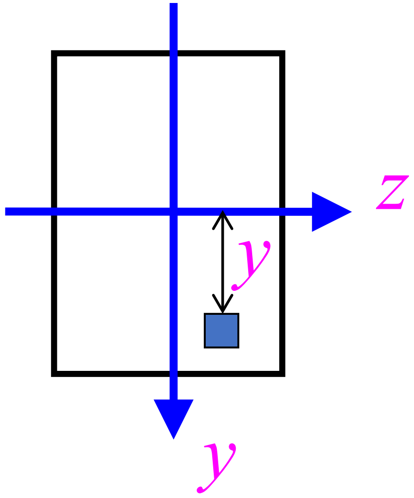
考察轴力

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow \int_A y\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow S_z = 0$$



z轴（即中性轴）必然通过截面的形心

Now you know where the neutral axis is!

3、静力关系

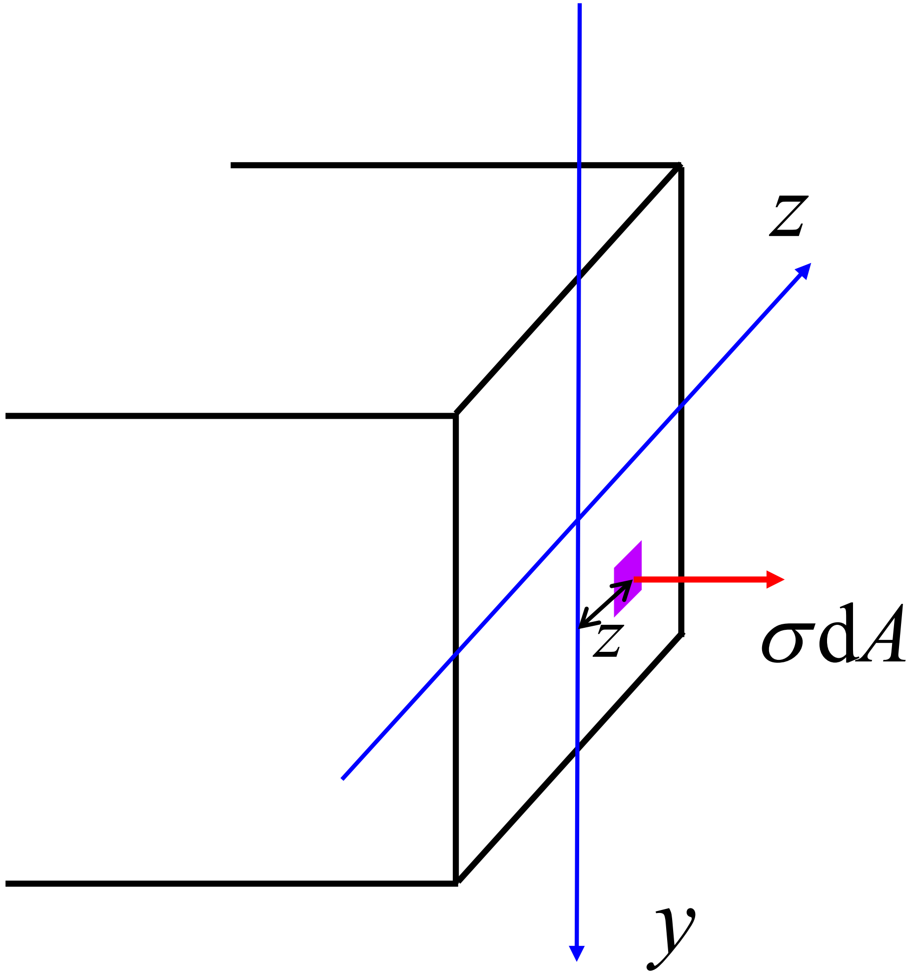
考察对y轴的弯矩

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z \cdot E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow \int_A yz\mathrm{d}A = 0$$

$$I_{yz} = \int_A \mathrm{yzdA} = 0$$



因为y轴是横截面的对称轴（对称弯曲或平面弯曲） $\Rightarrow I_{yz} = 0$

，故截面对坐标系的惯性积必为零

3、静力关系

对z轴的弯矩

$$\int_A y \cdot \sigma \mathrm{d}A = M_z = M$$

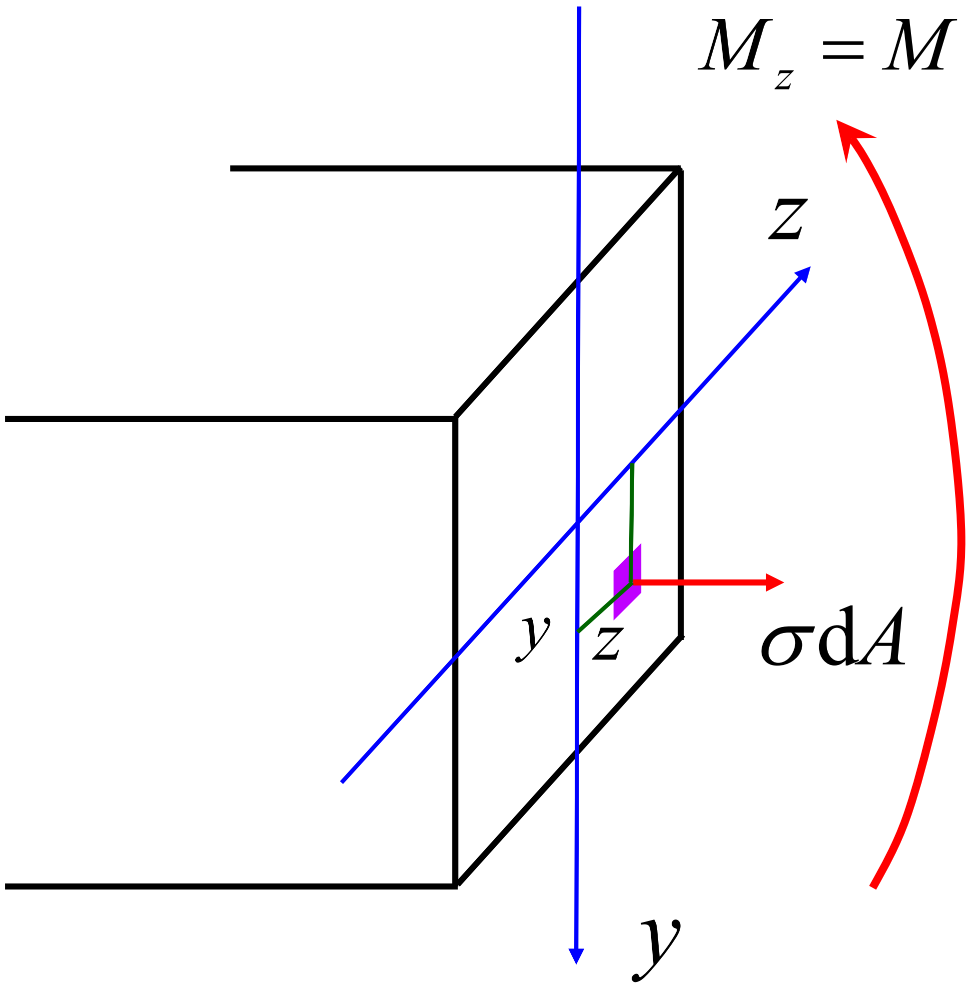
$$\Rightarrow \int_A y \cdot E \frac{y}{\rho} \mathrm{d}A = M$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \mathrm{d}A = M$$

$$\Rightarrow \frac{EI_z}{\rho} = M$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}}$$

曲率 curvature



§5.2 纯弯曲时的正应力

3、静力关系

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

ρ 为曲率半径

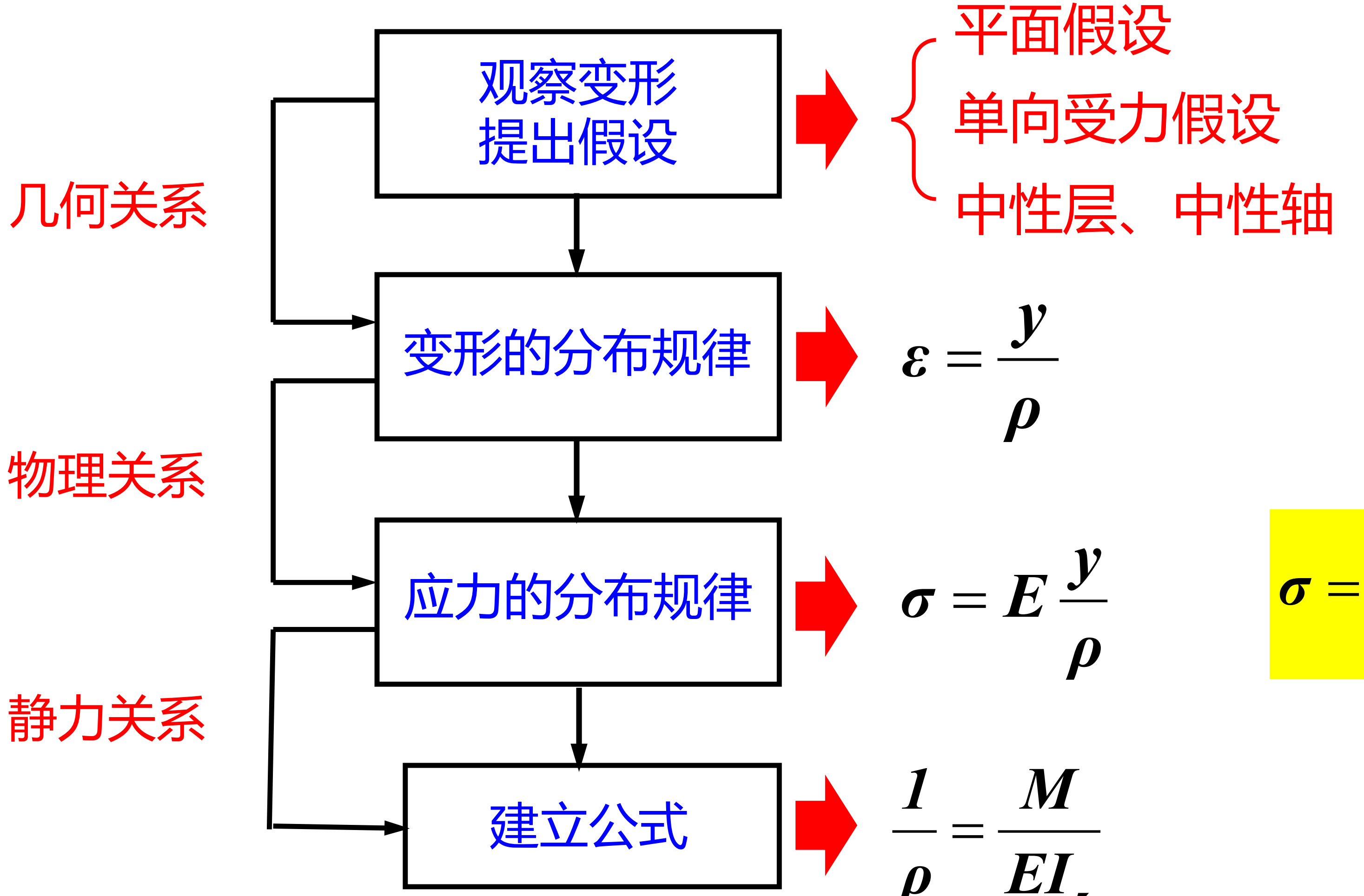
$1/\rho$ 为梁弯曲后的曲率

M 为梁横截面上的弯矩

I_z 为梁横截面对中性轴的惯性矩

y 为梁横截面上任意一点到中性轴的距离

§5.2 纯弯曲时的正应力



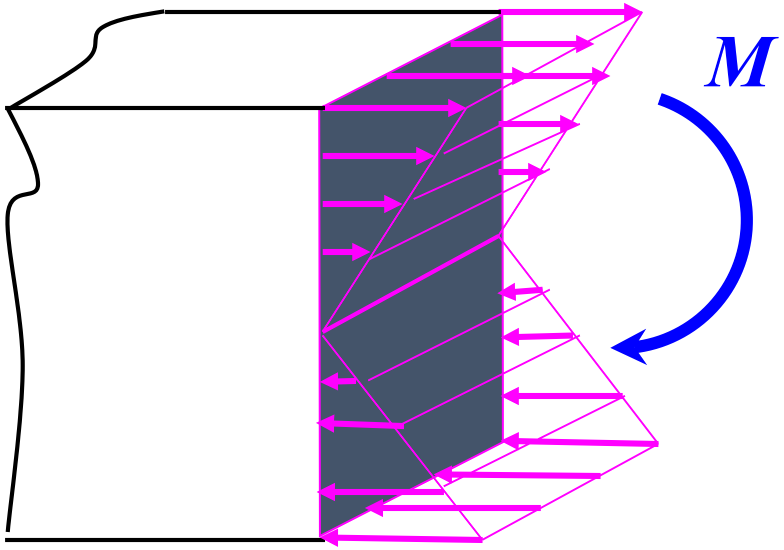
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I_z}}$$

4、横截面上的正应力分布

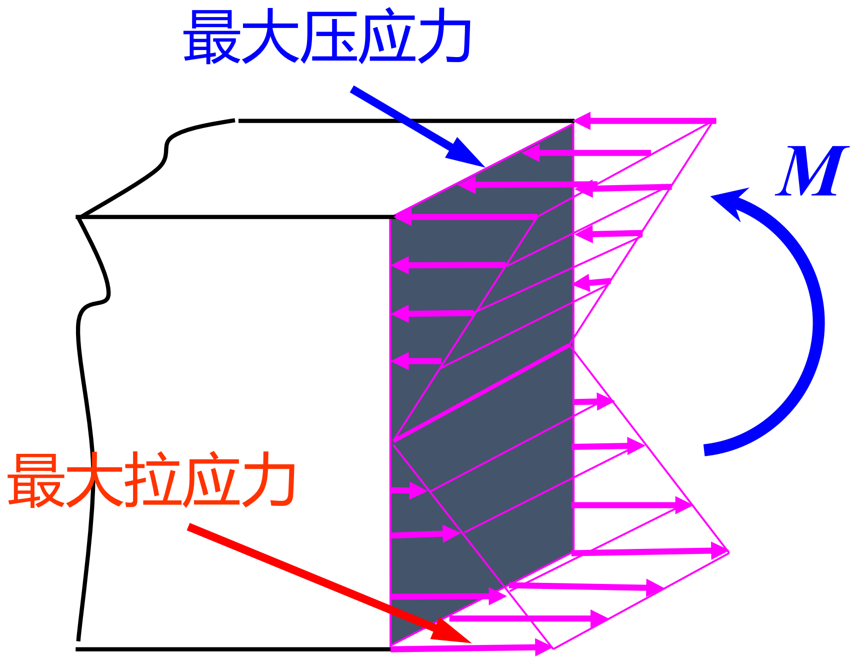


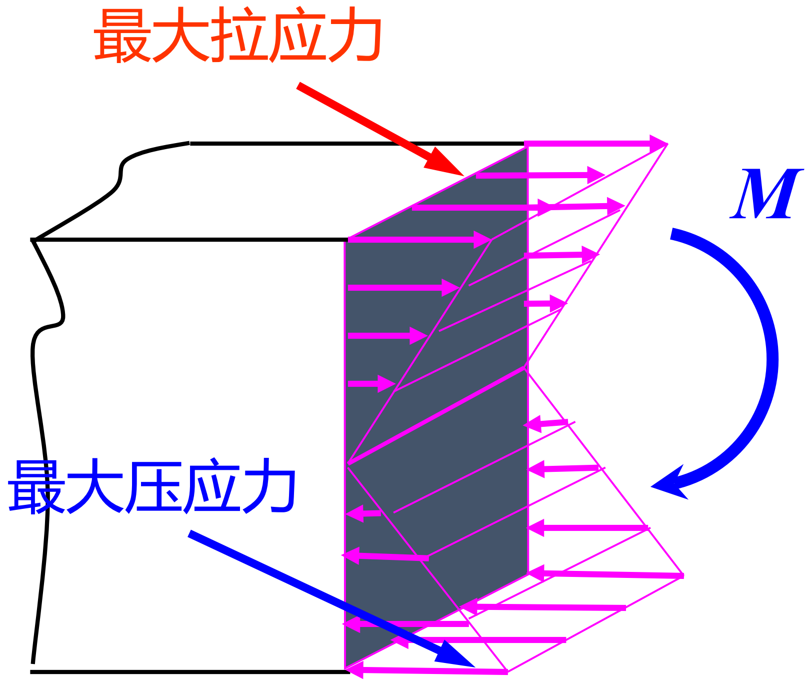
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

- 正应力大小与其到中性轴距离成正比；
- 与中性轴距离相等的点正应力相等；
- 中性轴上正应力为零。

4、横截面上的正应力分布

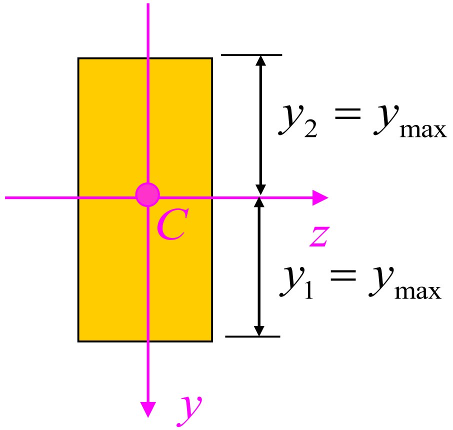
$\boxed{M>0}$ $$\sigma=\frac{My}{I_z}$$ $\boxed{M<0}$





4、横截面上的正应力分布

当中性轴是横截面的对称轴时：



$$y_1 = y_2 = y_{max}$$

$$\sigma_{t\,max} = \sigma_{c\,max}$$

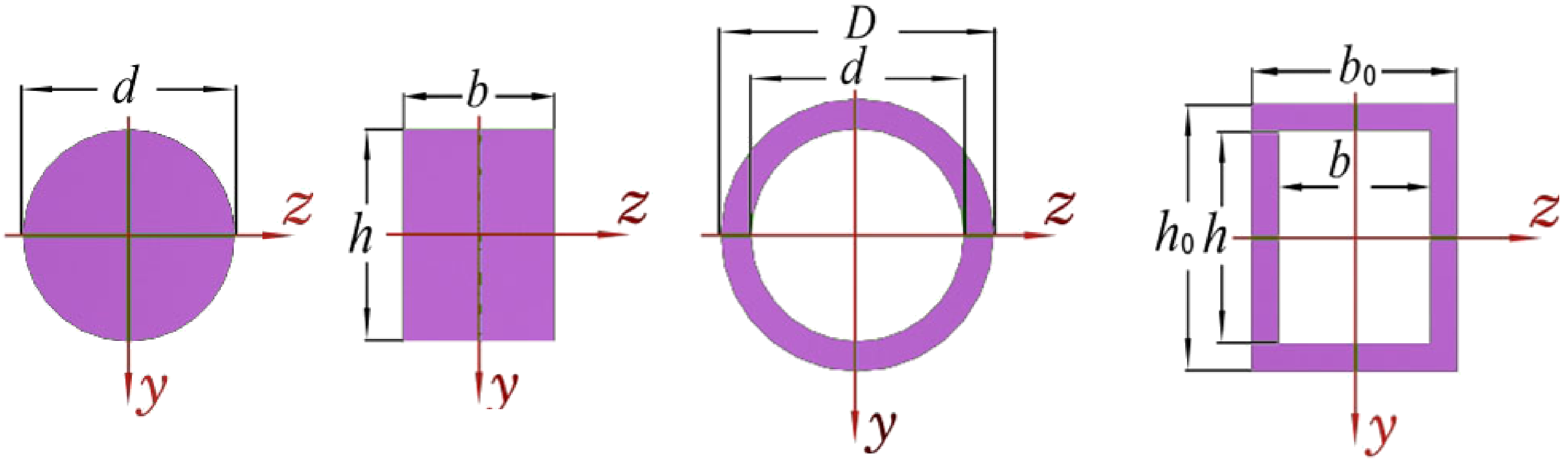
$$\sigma_{max} = \frac{M\,y_{max}}{I_Z} = \frac{M}{W_Z} \qquad \sigma_{min} = -\frac{M}{W_Z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$ ➡ 抗弯截面系数

§5.2 纯弯曲时的正应力

5、常见截面的I_Z和W_Z

$$I_Z = \int_A y^2 dA \qquad W_z = \frac{I_Z}{y_{max}}$$



圆截面　　矩形截面　　空心圆截面　　空心矩形截面

$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64} \qquad I_Z = \frac{bh^3}{12} \qquad I_Z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) \qquad I_Z = \frac{b_0 h_0^{\ 3}}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad W_z = \frac{bh^2}{6} \qquad W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \qquad W_z = (\frac{b_0 h_0^{\ 3}}{12} - \frac{bh^3}{12})/(h_0/2)$$