



10 机器运转速度波动调节

10-1 机器的真实运动

10-2 等效动力学模型

10-3 真实运动的求解

10-4 周期性速度波动及其调节

10-5 非周期性速度波动的调节



10-1 机器的真实运动

一、作用在机械上的生产阻力与驱动力

生产阻力取决于生产工艺过程的特点，有如下几种情况：

- ①生产阻力为常数，如车床；
- ②生产阻力为机构位置的函数，如惯性力、压力机；
- ③生产阻力为执行构件速度的函数，如鼓风机、搅拌机等；
- ④生产阻力为时间的函数，如球磨机、揉面机等；

作用于机械的驱动力也往往是变化的，比如：

- ①内燃机的输出力矩即是活塞位置的函数。
- ②电动机的输出力矩则是转子转速的函数。

10-1 机器的真实运动

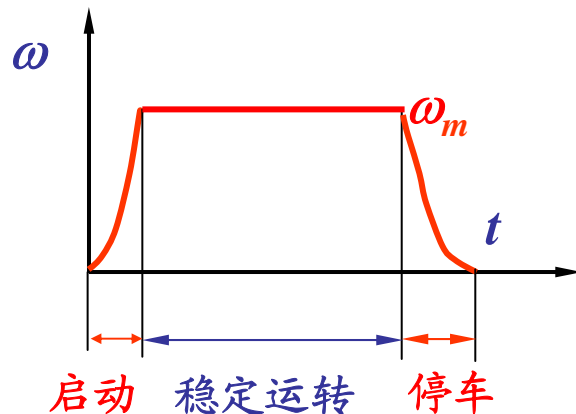
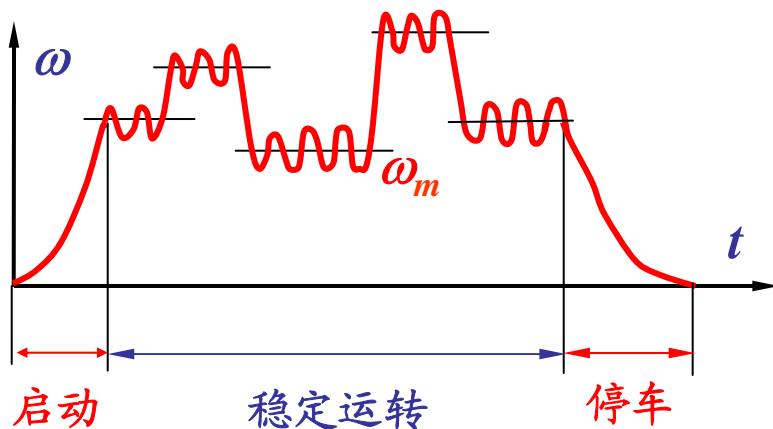
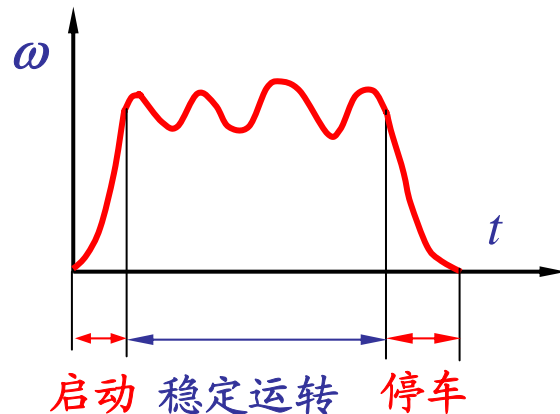
二、机械的真实运动

稳定运转阶段的状况有：

① 匀速稳定运转： $\omega = \text{常数}$

② 周期变速稳定运转： $\omega(t) = \omega(t + T_p)$

③ 非周期变速稳定运转



匀速稳定运转时，速度不需要调节。



10-1 机器的真实运动

速度波动产生的不良后果:

- ①在运动副中引起附加动压力，加剧磨损，使工作可靠性降低。
- ②引起弹性振动，消耗能量，使机械效率降低。
- ③影响机械的工艺过程，使产品质量下降。
- ④载荷突然减小或增大时，发生飞车或停车事故

为了减小这些不良影响，就必须对速度波动范围进行调节。

三、速度波动调节的方法

- ①对周期性速度波动，可在转动轴上安装一个质量较大的回转体（俗称**飞轮**）达到调速的目的。
- ②对非周期性速度波动，需采用专门的调速器才能调节。

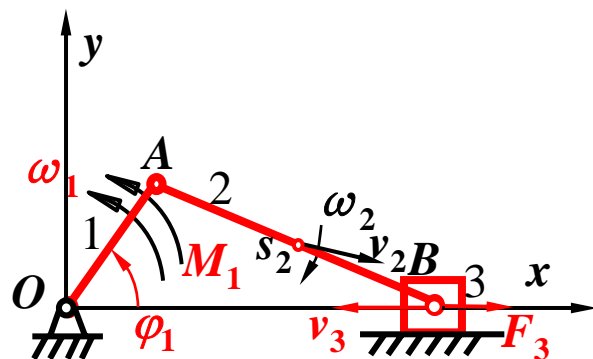
10-2 等效动力学模型

一、机器运动方程的一般表达式

动能定理：机械系统在时间 Δt 内的动能增量 ΔE 应等于作用于该系统所有外力的所作的功 ΔW 。

写成微分形式： $dE=dW$

举例：图示曲柄滑块机构中，设已知各构件角速度、质量、质心位置、质心速度、转动惯量，驱动力矩 M_1 ，阻力 F_3 。



动能增量为：

$$dE = d(J_1 \omega_1^2 / 2 + J_{s_2} \omega_2^2 / 2 + m_2 v_{s_2}^2 / 2 + m_3 v_3^2 / 2)$$

外力所作的功： $dW = N dt = (M_1 \omega_1 + F_3 v_3 \cos \alpha_3) dt$

瞬时功率为： $N = M_1 \omega_1 + F_3 v_3 \cos \alpha_3 = M_1 \omega_1 - F_3 v_3$

10-2 等效动力学模型

$$d(J_1\omega_1^2/2 + J_{c2}\omega_2^2/2 + m_2v_{c2}^2/2 + m_3v_3^2/2) = (M_1\omega_1 - F_3v_3)dt$$

一般地，设机械系统有 n 个活动构件，用 E_i 表示其动能。则：

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} J_{ci} \omega_i^2 \right)$$

设作用在构件 i 上的外力为 F_i ，力矩 M_i 为，力 F_i 作用点的速度为 v_i 。则瞬时功率为：

$$N = \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n \pm M_i \omega_i$$

式中 α_i 为 F_i 与 v_i 之间的夹角， M_i 与 ω_i 方向相同时取“+”。

则机器运动方程的一般表达式为：

$$d\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} J_{ci} \omega_i^2\right)\right] = \left[\sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n \pm M_i \omega_i\right] dt$$

上述方程的求解过程比较繁琐，有必要进行简化处理。

10-2 等效动力学模型

二、机械系统的等效动力学模型

上例有结论:

$$d(J_1\omega_1^2/2 + J_{c2}\omega_2^2/2 + m_2v_{c2}^2/2 + m_3v_3^2/2) = (M_1\omega_1 - F_3v_3)dt$$

重写为:

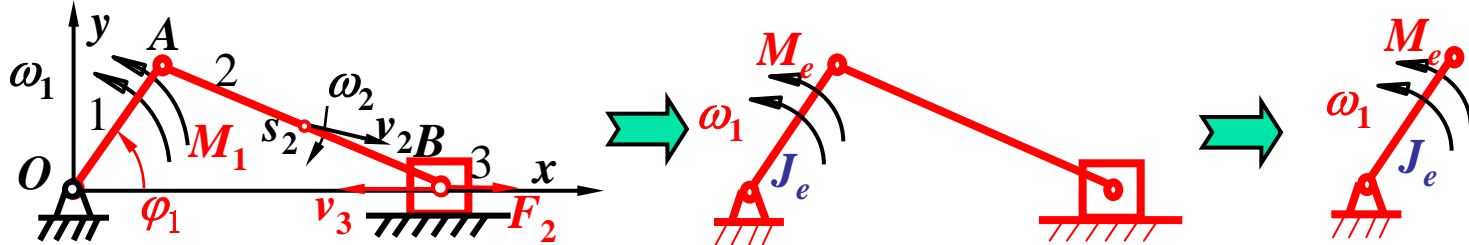
$$\begin{aligned} d\{\omega_1^2/2 [J_1 + J_{c2}(\omega_2/\omega_1)^2 + m_2(v_{c2}/\omega_1)^2 + m_3(v_3/\omega_1)^2]\} \\ = \omega_1 [M_1 - F_3(v_3/\omega_1)]dt \end{aligned}$$

左边括号内具有转动惯量纲，右边括号内具有力矩的量纲。

$$\text{令: } J_e = (J_1 + J_{c2}\omega_2^2/\omega_1^2 + \dots), \quad M_e = M_1 - F_3(v_3/\omega_1)$$

$$\text{则有: } d(J_e\omega_1^2/2) = M_e\omega_1 dt = M_e d\varphi$$

10-2 等效动力学模型



最右图称为原系统的等效动力学模型，而把假想构件1称为等效构件， J_e 为等效转动惯量， M_e 为等效力矩。

同理，可把运动方程重写为：

$$d\left\{ \frac{v_3^2}{2} [J_1(\omega_1 / v_3)^2 + J_{c2}(\omega_2 / v_3)^2 + m_2(v_{c2} / v_3)^2 + m_3] \right\} \\ = v_3 [M_1(\omega_1 / v_3) - F_3] dt$$

左边括号内具有质量的量纲，右边括号内具有力的量纲。

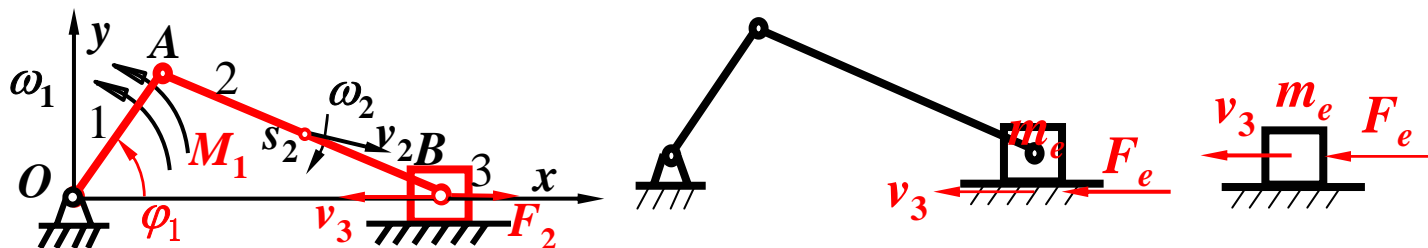
$$\text{令： } m_e = (J_1\omega_1^2 / v_3^2 + J_{c2}\omega_2^2 / v_3^2 + m_2v_{c2}^2 / v_3^2 + m_3)$$

$$F_e = M_1(\omega_1 / v_3) - F_3$$

10-2 等效动力学模型

则有: $d(m_e v_3^2/2) = F_e v_3 dt = F_e ds$

同样, 最右图也称为原系统的等效动力学模型。称构件3为等效构件, m_e 为等效质量, F_e 为等效力。



等效替换的条件:

1. 等效力或力矩所作的功与所有外力和外力矩所作的功相等。

$$N_e = \sum N_i$$

2. 等效构件所具有的动能与所有运动构件的动能之和。

$$E_e = \sum E_i$$

10-2 等效动力学模型

取转动构件作为等效构件：

求得等效力矩：

$$M_e = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_{i=1}^n \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega}$$

得等效转动惯量：

$$J_e = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{ci}}{\omega} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{ci} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2$$

取移动构件作为等效构件：

求得等效力：

$$F_e = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \left(\frac{v_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^n \left[\pm M_i \left(\frac{\omega_i}{v} \right) \right]$$

得等效质量：

$$m_e = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{ci}}{v} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{ci} \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2$$

10-2 等效动力学模型

$$\left\{ \begin{aligned} m_e &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{ci}}{v} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{ci} \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2 \\ J_e &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{ci}}{\omega} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{ci} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

等效质量 m_e 和等效转动惯量 J_e 只与速度比的平方有关，而与真实运动规律无关，而速度比又随机构位置变化，即：

$$m_e = m_e(\varphi) \quad J_e = J_e(\varphi)$$

而 F_i 、 M_i 可能与 φ 、 ω 、 t 有关，因此，等效力 F_e 和等效力矩 M_e 也是这些参数的函数：

$$F_e = F_e(\varphi, \omega, t) \quad M_e = M_e(\varphi, \omega, t)$$

也可将驱动力和阻力分别进行等效处理，得出等效驱动力矩 M_{ed} 或等效驱动力 F_{ed} 和等效阻力矩 M_{er} 和等效阻力 F_{er} ，则有：

$$M_e = M_{ed} - M_{er} \quad F_e = F_{ed} - F_{er}$$

10-3 真实运动的求解

以等效构件定轴转动为例，等效动力学方程为：

$$d\left(\frac{1}{2} J_e \omega^2\right) = M_e d\varphi$$

两边同时从 φ_0 到 φ 积分，有：

$$\frac{1}{2} J_e(\varphi) \omega^2(\varphi) - \frac{1}{2} J_e(\varphi_0) \omega^2(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_e d\varphi = W(\varphi)$$

其中 $W(\varphi)$ 称为区间 $[\varphi_0, \varphi]$ 上的盈亏功，一般只有数值解。

一旦获得 $W(\varphi)$ ，则：

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2W(\varphi) + J_e(\varphi_0) \omega^2(\varphi_0)}{J_e(\varphi)}}$$

10-4 周期性速度波动及其调节

一、机器运转的不均匀系数 δ

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$$

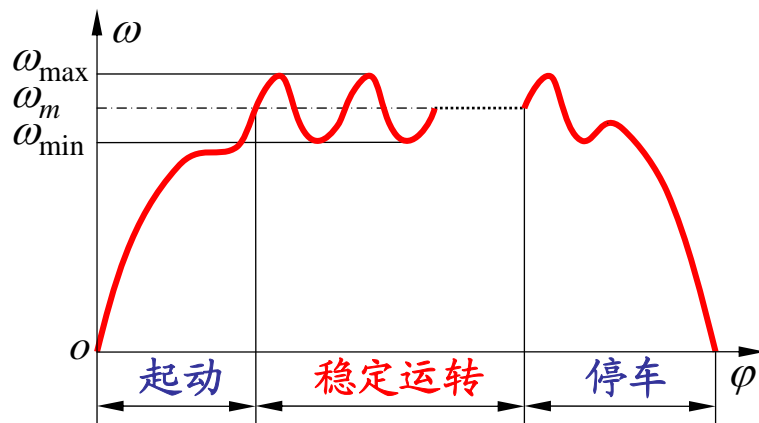
$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

由此:

$$\omega_{\max} = (1 + \frac{1}{2}\delta)\omega_m$$

$$\omega_{\min} = (1 - \frac{1}{2}\delta)\omega_m$$

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\delta\omega_m^2$$



[δ] 破碎机: 1/5~1/20; 航空发动机: <1/200。

10-4 周期性速度波动及其调节

二、周期性速度波动的调节原理

设在一个周期内， ω 分别在 φ_a 与 φ_b 处达到最大及最小值，则：

$$\frac{1}{2} J_e(\varphi_b) \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} J_e(\varphi_a) \omega_{\min}^2 = W(\varphi_b) - W(\varphi_a)$$

若在等效构件上人为增加转动惯量 J_F ，则上式成为：

$$\frac{1}{2} [J_e(\varphi_b) + J_F] \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} [J_e(\varphi_a) + J_F] \omega_{\min}^2 = W(\varphi_b) - W(\varphi_a)$$

由于右端不变，因此必然降低不均匀系数。

这里的 J_F 是通过加装飞轮实现的。关于飞轮，有两点说明：

- ①一般加在高速轴上。
- ②不仅只为降低速度波动。

10-4 周期性速度波动及其调节

三、飞轮转动惯量的近似计算

由于等效转动惯量是 φ 的函数，所以盈亏功 $W(\varphi_a)$ 在 φ_a 、 $W(\varphi_b)$ 在 φ_b 未必达到极值。

但当 J_e 远小于 J_F 时，可略去 J_e ，从而有：

$$\frac{1}{2} J_F \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} J_F \omega_{\min}^2 = W(\varphi_b) - W(\varphi_a) = W_{\max} - W_{\min}$$

其中， $W_{\max} - W_{\min} = \Delta W_{\max}$ 称为最大盈亏功。

于是，为满足给定的机器运转不均匀系数 $[\delta]$ ，所需的 J_F 为：

$$J_F = \frac{2\Delta W_{\max}}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = \frac{\Delta W_{\max}}{[\delta]\omega_m^2}$$

10-4 周期性速度波动及其调节

四、飞轮转动惯量的精确计算[古奇亚尔法]

加装飞轮后，系统的运动方程成为：

$$\frac{1}{2}[J_e(\varphi) + J_F]\omega^2(\varphi) - \frac{1}{2}[J_e(\varphi_0) + J_F]\omega^2(\varphi_0) = W(\varphi)$$

从而

$$W(\varphi) - \frac{1}{2}J_e(\varphi)\omega^2(\varphi) = \frac{1}{2}J_F\omega^2(\varphi) - \frac{1}{2}[J_e(\varphi_0) + J_F]\omega^2(\varphi_0)$$

然后，构造两个能量函数 $E_1(\varphi)$ 与 $E_2(\varphi)$ ，有：

$$\begin{cases} E_1(\varphi) = W(\varphi) - \frac{1}{2}J_e(\varphi)\omega_{\min}^2 \geq W(\varphi) - \frac{1}{2}J_e(\varphi)\omega^2(\varphi) \\ E_2(\varphi) = W(\varphi) - \frac{1}{2}J_e(\varphi)\omega_{\max}^2 \leq W(\varphi) - \frac{1}{2}J_e(\varphi)\omega^2(\varphi) \end{cases}$$

显然，以上两式中的等号分别在 φ_a 与 φ_b 处成立，即：

10-4 周期性速度波动及其调节

$$\begin{cases} E_{1\min} = E_1(\varphi_a) = \frac{1}{2} J_F \omega_{\min}^2 - \frac{1}{2} [J_F + J_e(\varphi_0)] \omega^2(\varphi_0) \\ E_{2\max} = E_2(\varphi_b) = \frac{1}{2} J_F \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} [J_F + J_e(\varphi_0)] \omega^2(\varphi_0) \end{cases}$$

两式相减，有：

$$J_F = \frac{2(E_{2\max} - E_{1\min})}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = \frac{E_{2\max} - E_{1\min}}{[\delta] \omega_m^2}$$

$$\begin{cases} E_1(\varphi) = W(\varphi) - \frac{1}{2} J_e(\varphi) \omega_{\min}^2 \geq W(\varphi) - \frac{1}{2} J_e(\varphi) \omega^2(\varphi) \\ E_2(\varphi) = W(\varphi) - \frac{1}{2} J_e(\varphi) \omega_{\max}^2 \leq W(\varphi) - \frac{1}{2} J_e(\varphi) \omega^2(\varphi) \end{cases}$$

显然，以上两式中的等号分别在 φ_a 与 φ_b 处成立。

10-4 周期性速度波动及其调节

五、飞轮转动惯量计算实例及讨论

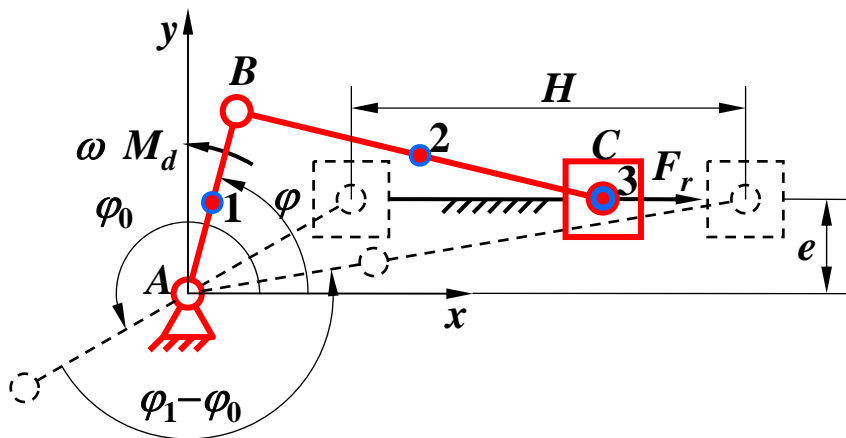
$l_1=100\text{mm}$, $m_1=0.10\text{kg}$, 质心在 AB 中点, $J_1=120\text{kg}\cdot\text{mm}^2$;
 $l_2=200\text{mm}$, $m_2=0.15\text{kg}$, 质心在 BC 中点, $J_2=600\text{kg}\cdot\text{mm}^2$;
 $m_3=0.2\text{kg}$; $e=50\text{mm}$ 。

摩擦阻力 $F_r=2\text{N}$ 作用于滑块质心, 方向与滑块的速度相反;
机构的主动力矩为恒力矩。

曲柄的平均转速 $\omega_m=1.2\text{s}^{-1}$,
许用不均匀系数 $[\delta]=0.1$ 。

试求飞轮的转动惯量 J_F 。

解: 选滑块位于左极限位置时曲柄的转角作为稳定运转周期的起点。



10-4 周期性速度波动及其调节

由所给尺寸得，左右极限位置时分别有 $\varphi_0=210^\circ$ ，
 $\varphi_1=369.6^\circ$ ，滑块行程为 $H=209.2\text{mm}$ 。

1) 求曲柄上的等效转动惯量。

$$(\omega_2 / \omega)^2 = l_1^2 \cos^2 \varphi / (l_2^2 - (l_1 \sin \varphi - e)^2)$$

$$(v_2 / \omega)^2 = \frac{1}{4} l_1^2 \left\{ \left[2 \sin \varphi - \frac{\cos \varphi (l_1 \sin \varphi - e)}{\sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin \varphi - e)^2}} \right]^2 + \cos^2 \varphi \right\}$$

$$(v_3 / \omega)^2 = l_1^2 \left[\sin \varphi - \cos \varphi (l_1 \sin \varphi - e) / \sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin \varphi - e)^2} \right]^2$$

从而

$$J_e(\varphi) = J_1 + m_1 l_1^2 / 4 + J_2 (\omega_2 / \omega)^2 + m_2 (v_2 / \omega)^2 + m_3 (v_3 / \omega)^2$$

$J_{e\max}=5908.9\text{kg}\cdot\text{mm}^2$ 、 $J_{e\min}=891.1\text{kg}\cdot\text{mm}^2$ ，两者之比高达6.6。

10-4 周期性速度波动及其调节

2) 求等效力矩。

$$M_e = M_d - M_r = M_d - F_r |v_3 / \omega| = M_d - F_r |ds_3 / d\varphi|$$

$$\because \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} M_e d\varphi = 2\pi M_d - 2F_r H = 0 \quad \therefore M_d = F_r H / \pi$$

代入数值计算, $M_d=133.18\text{N}\cdot\text{mm}$

3) 计算等效力矩所作的功

当 $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ 时, 滑块向右运动:

$$\begin{aligned} W(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_e d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_d d\varphi - F_r \int_{\varphi_0}^{\varphi} |ds_3 / d\varphi| d\varphi \\ &= M_d(\varphi - \varphi_0) - F_r[s_3(\varphi) - s_3(\varphi_0)] \end{aligned}$$

当 $\varphi_1 \leq \varphi < 2\pi$ 时, 滑块向左运动:

10-4 周期性速度波动及其调节

$$\begin{aligned} W(\varphi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_e d\varphi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_d d\varphi - F_r \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |ds_3 / d\varphi| d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi} |ds_3 / d\varphi| d\varphi \right) \\ &= M_d(\varphi - \varphi_0) - F_r[2H - s_3(\varphi) + s_3(\varphi_0)] \end{aligned}$$

其中 $s_3(\varphi) = l_1 \cos \varphi + \sqrt{l_2^2 - (l_1 \sin \varphi - e)^2}$

代入数值计算, $W_{\max} = 57.50 \text{ N} \cdot \text{mm}$, $W_{\min} = -91.31 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 。

4) 近似计算飞轮的转动惯量

$$J_F = \frac{\Delta W_{\max}}{[\delta] \omega_m^2} = \frac{W_{\max} - W_{\min}}{[\delta] \omega_m^2} = \frac{57.50 + 91.31}{0.1 \times 1.2^2} = 1033.4 (\text{kg} \cdot \text{mm}^2)$$

与 $J_{e\max} = 5908.9 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$ 对照可知, 近似算法不适用于本例。

10-4 周期性速度波动及其调节

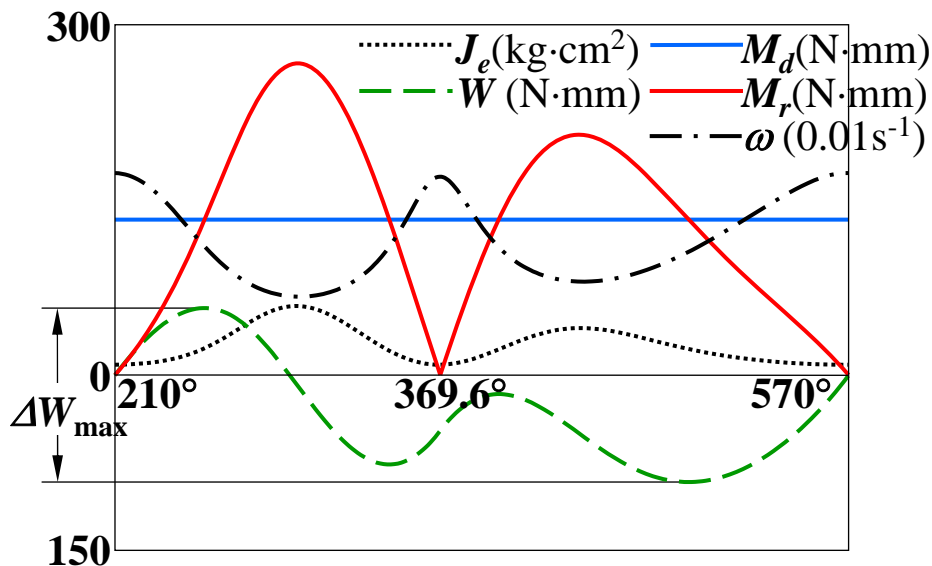
5) 精确计算飞轮的转动惯量

代入数值计算, $E_{1\min} = -3847.49 \text{ N}\cdot\text{mm}$, $E_{2\max} = 4683.85 \text{ N}\cdot\text{mm}$ 。

$$J_F = \frac{E_{2\max} - E_{1\min}}{[\delta]\omega_m^2} = \frac{4683.85 + 3847.49}{0.1 \times 1.2^2} = 59245.4 (\text{kg} \cdot \text{mm}^2)$$

6) 绘制相关曲线

图中的 ω 曲线是未加装飞轮时按运动方程求解得到的, 其不均匀系数高达**0.88**。



10-4 周期性速度波动及其调节

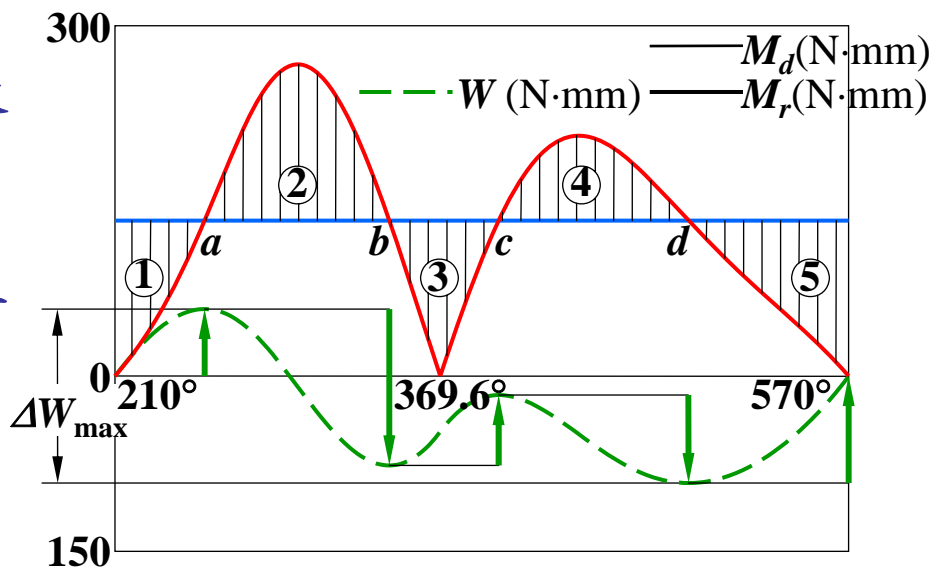
7) 讨论

■ 近似法通常只适合转动惯量变化不大的机构，如轮系等。

■ 本例中计算未加装飞轮时的真实运动时，是取 $\omega(\varphi_0) = 1.73\text{s}^{-1}$ 进行计算的，其目的在于满足 $\omega_m = 1.2\text{s}^{-1}$ 的要求。

■ 通过 $M_d(\varphi)$ 与 $M_r(\varphi)$ 两条曲线，可快速确定最大盈亏功 ΔW_{\max} 。

■ 此种方法仅当两条曲线均为简单曲线，且可采用近似法时才有用。



10-5 非周期性速度波动的调节

对于非周期性速度波动必须用调速器进行调节。

离心式调速器的工作原理：

