第 三 章
流体动力学基础
(1)

3-1 描述流体运动的两种方法

着眼点不同

拉格朗日法（ Lagrange ）： 流体质点

跟踪追迹法

欧拉法（ Euler ）： 空间

设立观察站法

一、 拉格朗日描述法与质点系

（a, b, c）为 $t=t_0$ 起始时刻质点所在的空间位置坐标，称为拉格朗日变数。任何质点在空间的位置（x, y, z）都可看作是（a, b, c）和时间 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(a,b,c,t) \\ y = y(a,b,c,t) \\ z = z(a,b,c,t) \end{cases}$$

或 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a, b, c, t)$

（**1**）（a, b, c）=const，t 为变数，可以得出某个指定质点在任意时刻所处的位置。

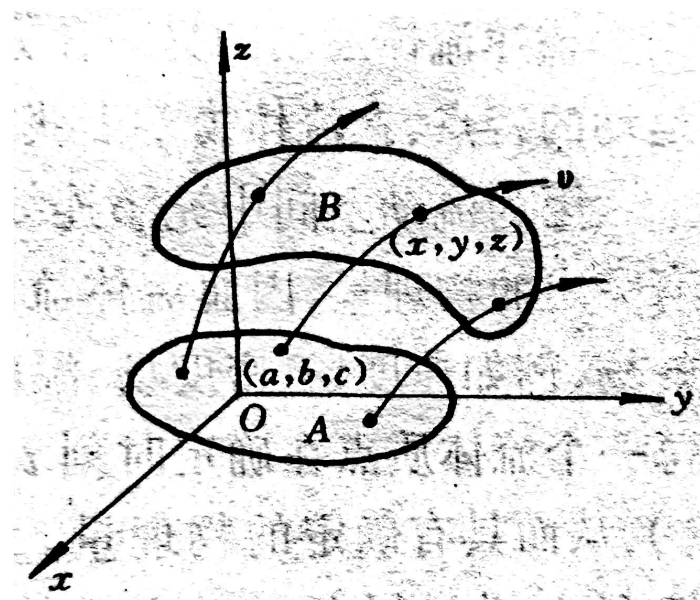
（**2**）（a, b, c）为变数，t=const，可以得出某一瞬间不同质点在空间的分布情况。

流体质点任一物理量 B（如速度、压力、密度等）表示为

：

质点系：　$B = B\ (a, b, c, t)$

在 $t = 0$ 时紧密毗邻的具有不同起始坐标（a, b, c) 的无数质点组成一个有确定形状、有确定流动参数的质点系。经过 t 时间之后，质点系的位置和形状发生变化。



二、 欧拉描述法与控制体

欧拉法不直接追究质点的运动过程，而是以充满运动流体质点的空间——流场为对象。流体质点的物理量 B 是时空（x, y, z, t）的连续函数：

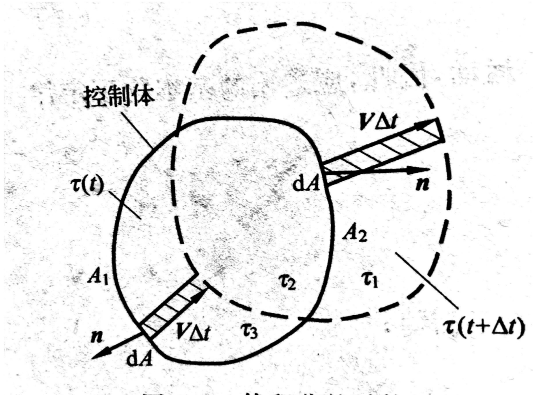
$$B = B(x, y, z, t)$$

（x, y, z, t）——欧拉变量

速度场：

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t), \\ v &= v(x, y, z, t), \\ w &= w(x, y, z, t). \end{aligned}\right\}$$

控制体：将孤立点上的观察站扩大为一个有适当规模的连续区域。控制体相对于坐标系固定位置，有任意确定的形状，不随时间变化。控制体的表面为控制面，控制面上有流体进出。



三、 两种描述方法之间的联系

如果标号参数为 (a, b, c) 的流体质点，在 t 时刻正好到达 (x, y, z) 这个空间点上，则有

$$B = B(x, y, z, t) = B(x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t)$$

$$= B(a, b, c, t)$$

3-2 流体运动的几个基本概念

一、物理量的质点导数

质点导数定义：流体质点的物理量随时间的变化率。

随体导数

1 、拉格朗日描述中的随体导数

如速度 $\boldsymbol{V}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{V}(a,b,c,t)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(a,b,c,t).$$

$$\boldsymbol{a}(a,b,c,t)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V}(a,b,c,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{r}(a,b,c,t).$$

$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中展开：

$$\left.\begin{aligned} u(a,b,c,t) &= \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}, \\ v(a,b,c,t) &= \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}, \\ w(a,b,c,t) &= \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}, \end{aligned}\right\}$$

和

$$\left.\begin{aligned} a_x(a,b,c,t) &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ a_y(a,b,c,t) &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ a_z(a,b,c,t) &= \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\}$$

2、欧拉描述中随体导数

以速度在直角坐标系为例：

流体质点运动速度在欧拉法中， $V = V(x, y, z, t)$，由于位置又是时间 t 的函数，所以流速是 t 的复合函数，对流速求导可得加速度：

$$\boldsymbol{a}(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{V}(x, y, z, t) = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z},$$

写成分量形式

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\
a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\
a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}\right\}$$

用哈密顿算子表示：

$$a=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}.$$

局部（当地）加速度：同一空间点上流体速度随时间的变化率。定常流动该项为 0 。

迁移（位变）加速度：同一时刻由于不同空间点的流体速度差异而产生的速度变化率。均匀流场该项为 0 。

对于任一物理量 B：

$$\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial B}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)B,$$

质点导数

局部（当地）导数，表示流场的非定常性。

迁移（位变）导数，表示流场的均匀性。

例题： 已知流场中质点的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= kx \\ v_y &= -ky \\ v_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (y \geqslant 0)$$

试求流场中质点的加速度.

解：

质点加速度为

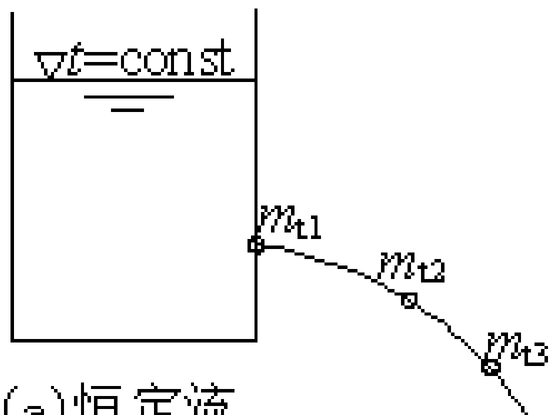
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = k^2 x$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = k^2 y$$

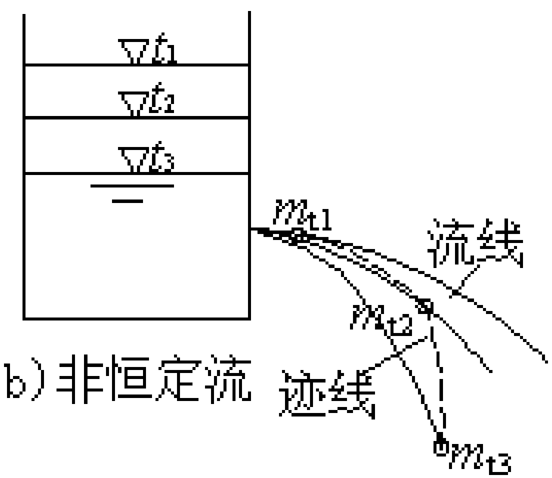
$$a_z = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 r$$

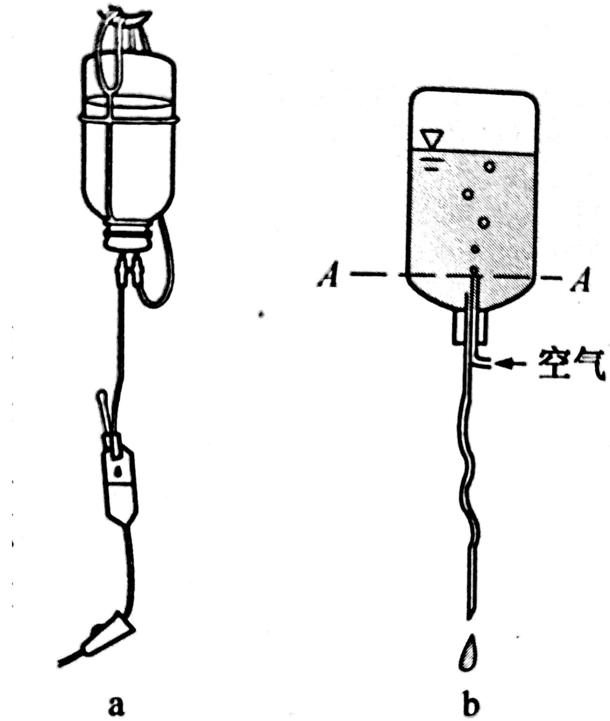
二、定常流与非定常流（或恒定流与非恒定流）



(a)恒定流



(b)非恒定流



马利奥特容器——点滴吊瓶

变液位下的恒定流动装置

三、均匀流与非均匀流

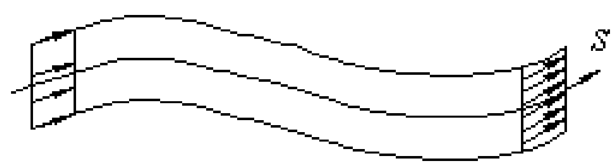
四、一元流、二元流与三元流

按流体运动要素所含空间坐标变量的个数分：

（1）一元流

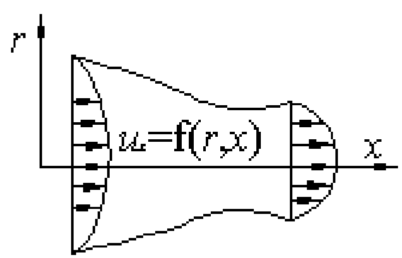
一元流 (one-dimensional flow): 流体在一个方向流动最为显著，其余两个方向的流动可忽略不计，即流动流体的运动要素是一个空间坐标的函数。若考虑流道（管道或渠道）中实际液体运动要素的断面平均值，则运动要素只是曲线坐标 s 的函数，这种流动属于一元流动。

$v=f(s)$ 取断面流速 v 分析时



（2）二元流

二元流 (two-dimensional flow): 流体主要表现在两个方向的流动，而第三个方向的流动可忽略不计，即流动流体的运动要素是二个空间坐标（不限于直角坐标）函数。



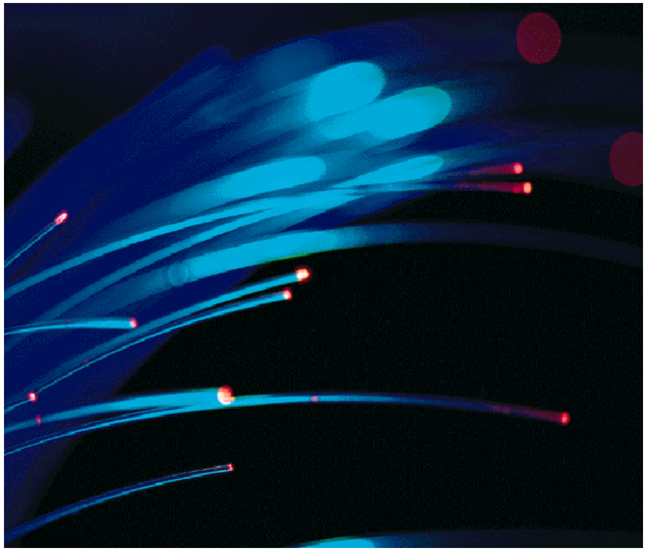
（3）三元流

三元流（ three-dimensional flow): 流动流体的运动要素是三个空间坐标函数。

五、迹线与流线

1 、迹线

迹线流体质点在流场中的运动轨迹线。是拉格朗日法描述流体运动的基础。



2、流线

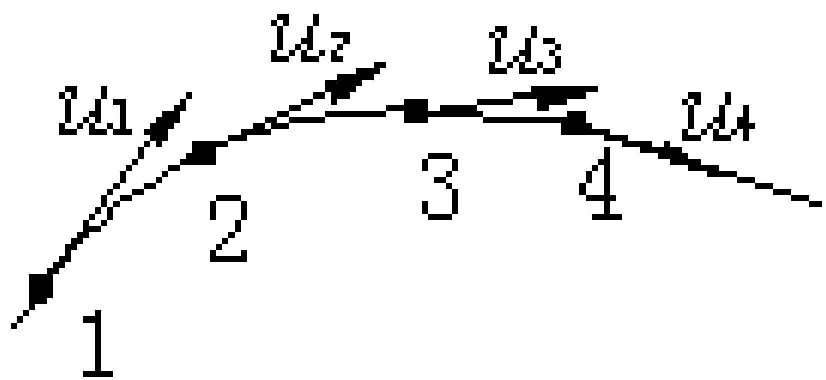
流线是流场中这样一条曲线，曲线上任一点的切线方向与该点的流速方向重合。流线是欧拉法描述流体运动的基础。图为流线谱中显示的流线形状。

流谱流线

Flow Spectrum And Streamline

流线的作法：

在流场中任取一点，绘出某时刻通过该点的流体质点的流速矢量 u_1，再画出距 1 点很近的 2 点在同一时刻通过该处的流体质点的流速矢量 u_2…，如此继续下去，得一折线 1234 …，若各点无限接近，其极限就是某时刻的流线。



流线方程：

设 d$\boldsymbol{r}$ 为流线上 A 处的一微元弧长矢量： $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$

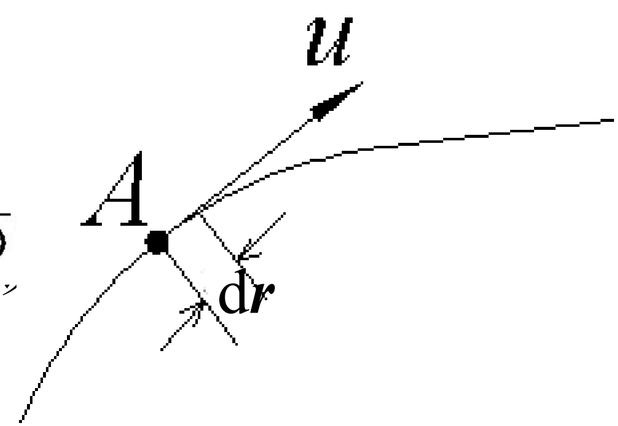
$\boldsymbol{V}$ 为流体质点在 A 点的流速： $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$

根据流线的定义，可以求得流线的微分方程：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}=0,$$

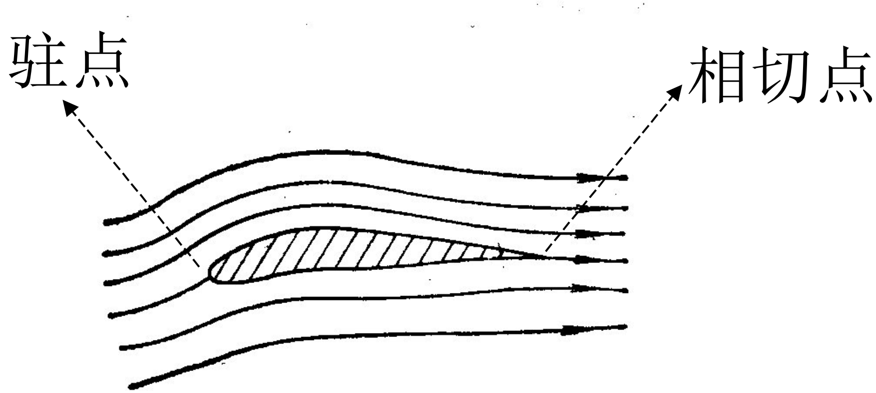
展开后得到：

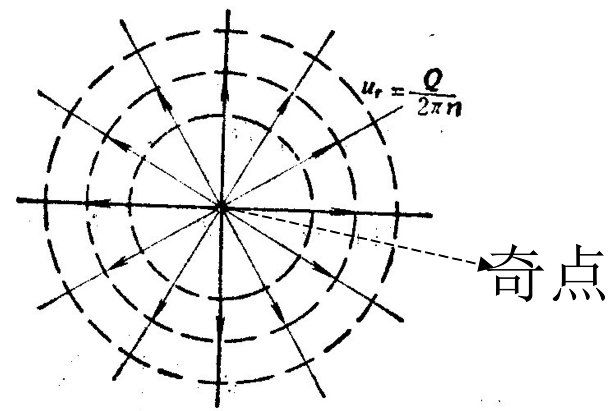
$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}$$



流线的性质：

1. 在某一时刻，过某一空间点只有一条流线。流线不能相交，不能突然转折。三种例外：



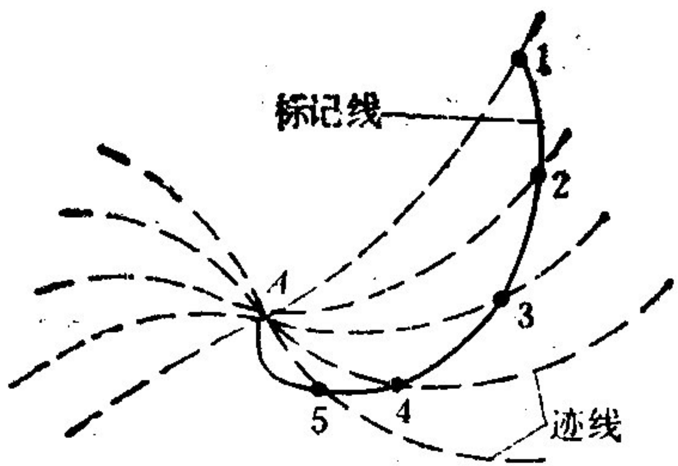


2. 对于非定常流动，流线具有瞬时性。

3. 一般情况下，流线迹线不重合。定常流动中流线形状不随时间变化，而且流体质点的迹线和流线重合

脉线 *

在一段时间内，会有不同的流体质点相继经过同一空间固定点，在某一瞬时将这些质点所处的位置点光滑连接而成的曲线。



流线、迹线和脉线是本质不同的三种描述流体运动的线，定常时互相重合。

流动可视化

- **Flow visualization is the art of making flow patterns visible. Most fluids (air, water, etc.) are transparent, thus their flow patterns are invisible to us without some special methods to make them visible.**

六、流管与流束

1. 流面

在流场中作一条任意的空间曲线 L （非流线），过此曲线的每一点作流线，这些无数密集的流线所构成的曲面。

性质：（与流线相似）

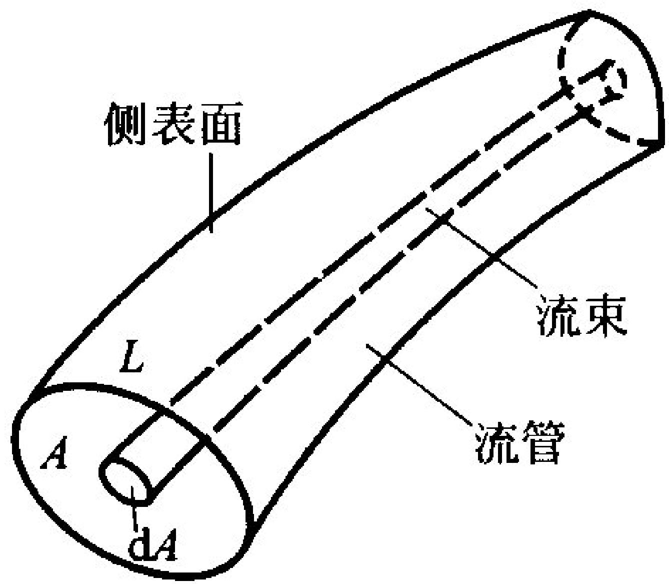
（ 1 ）在某一时刻，过一条曲线只有一个流面；

（ 2 ）非定常时，流面形状随时间变化；

（ 3 ）流体不能穿越流面。

2. 流管与流束

流管： P137～



流管与流束

流管性质：

（1）不能相交；

（2）形状和位置在非定常时随时间变化；

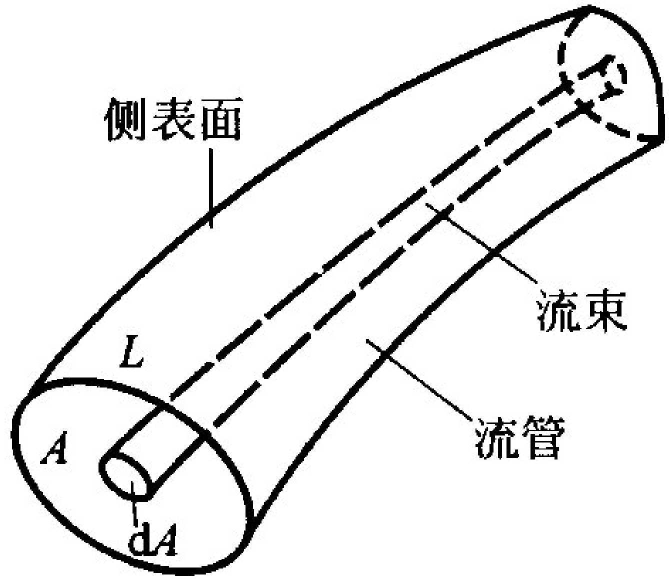
（3）不能在流场内部中断，只能始于或终于流场的边界。如物面，自由面等。

流束：

总流：

微元流束：

流管控制体：



流管与流束

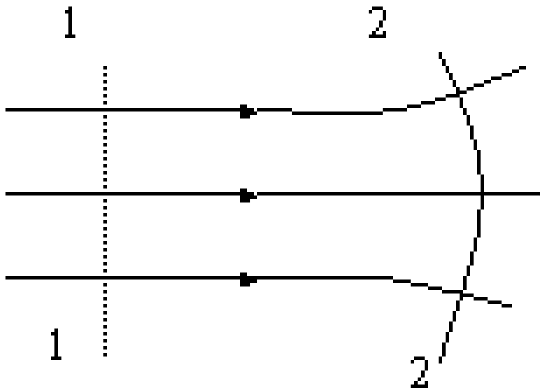
微元流束除了有流管的性质以外，还具有：

（1）截面上的速度处处相等；

（2）微小截面看成是平面。

流管截面：以 L 为周界可以作很多的面，可以是平面或曲面。

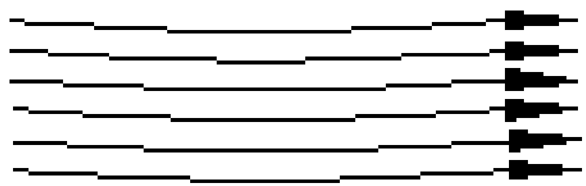
有效截面（过流断面）：截面上的流速方向处处与该面垂直



缓变流动：如果微小流束（流线）间的夹角及流束的曲率都非常小，这种流动称为缓变流动。反之急变流。缓变流的过流断面可看作是平面。急变流的过流断面是曲面。


夹角很小，接近于平行线

(a)


弧度很小，接近于平行线

(b)

缓变流动

七、流量、净通量

1 、流量

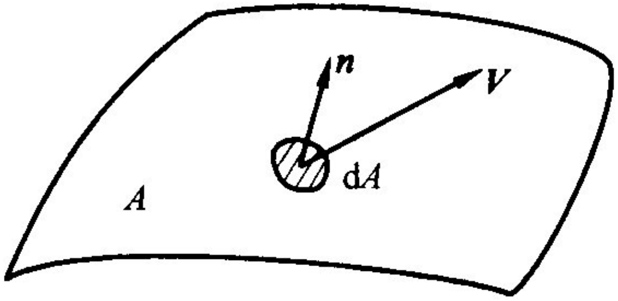
单位时间内流过某一控制面的流体量。体积流量 q_v 表示，质量流量 q_m 。

$$q_v = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

体积流量（ m3/s ）：

$$q_m = \rho \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

质量流量（ kg/s ）：



过 A 面的流量

如果 A 是过流断面，则

体积流量（ m3/s ）：

$$q_v = \int_A v dA = \bar{v} A$$

质量流量（ kg/s ）：

$$q_m = \rho \int_A v dA = \rho \bar{v} A$$

2 、净通量

流过全部封闭控制面 A 的流量称为净流量，或净通量。

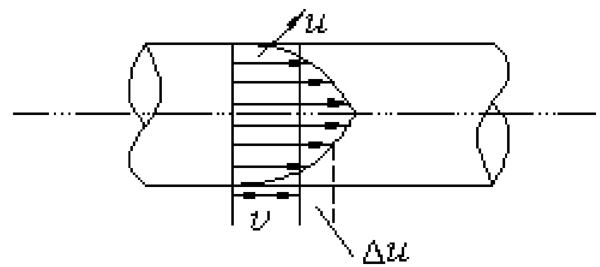
$$q_v = \oint_A v \cdot n dA$$

八、过流断面上的平均速度与动能动量修正系数

1、断面平均速度

过流断面上各点的流速是不相同的，所以常采用一个平均值来代替各点的实际流速，称断面平均流速。

$$\bar{v}=\frac{q_v}{A}=\frac{\int_A v dA}{A}$$



2、动能及动能修正系数

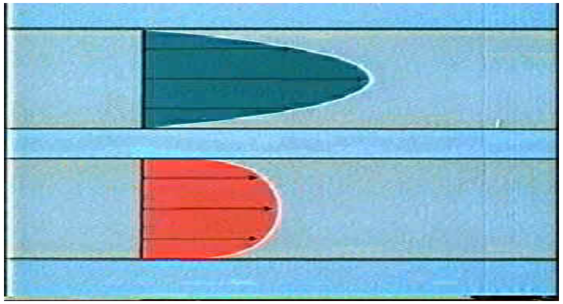
动能：是指物体由于机械运动而具有的能量。

单位时间内通过过流断面的流体动能是：

$$E_k=\frac{1}{2}\int dm\cdot v^2=\frac{1}{2}\int_A \rho v^3 dA$$

动能修正系数α——是实际动能与按断面平均流速计算的动能的比值。

$$\alpha=\frac{\frac{1}{2}\int_A \rho v^3 dA}{\frac{1}{2}\rho \bar{v}^3 A}=1+\frac{3}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 dA>1$$



层流流速分布

湍流流速分布

注意： 动能修正系数是无量纲数，它的大小取决于总流过水断面上的流速分布，分布越均匀， α 值越小，越接近于 1.0

。

2、动量及动量修正系数

动量是物体运动的一种量度，是描述物体机械运动状态的一个重要物理量。

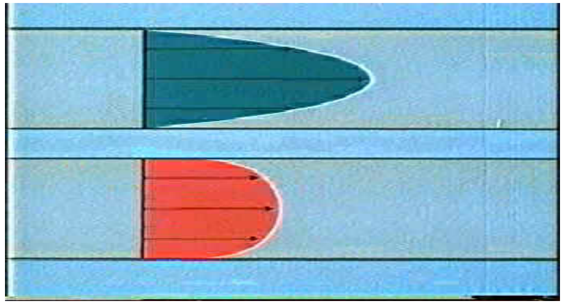
单位时间内通过过流断面的流体动量是：

$$K = \int dmv = \int_A \rho v^2 dA$$

动量修正系数β——是实际动量与按断面平均流速计算的动量的比值。

$$\beta = \frac{\int_A \rho v^2 dA}{\rho \bar{v}^2 A} = 1 + \frac{1}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 dA > 1$$

动量修正系数是无量纲数，它的大小取决于总流过水断面的流速分布，分布越均匀，β 值越小，越接近于1.0。



层流流速分布

湍流流速分布

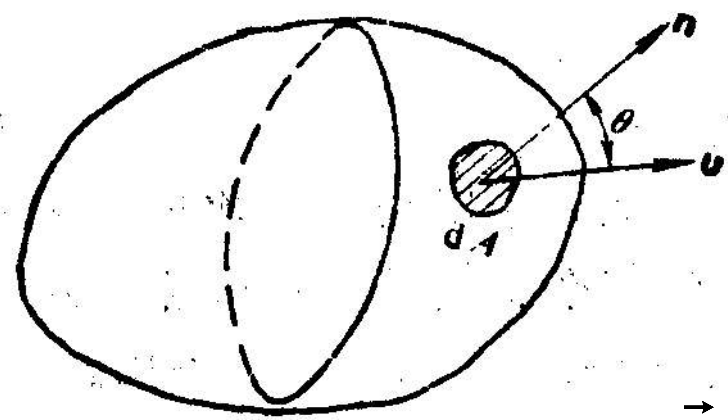
	断面流速分布	动能修正系数	动量修正系数
圆管层流	旋转抛物面	$\alpha=2.0$	$\beta=4/3$
圆管湍流	对数规律	$\alpha=1.05$~1.1	$\beta=1.02$~1.05

3-3 连续方程式

一、基本原理

基于质量守恒定律：质量不能无缘无故的自生自灭。

建立一控制体



在单位时间内流过控制面的净质量流量：

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

在单位时间内控制体的质量减少：

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$$

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$$

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = 0$$

—— 连续方程式的积分形式

特例：

定常流动

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_A \rho \vec{v}\cdot\vec{n}dA = 0$$

不可压缩流动，

ρ 为常数 $\longrightarrow$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = 0$$

$$\oint_A \vec{v}\cdot\vec{n}dA = 0$$

$$\sum_i (A_i V_i)_{out} = \sum_i (A_i V_i)_{in}$$

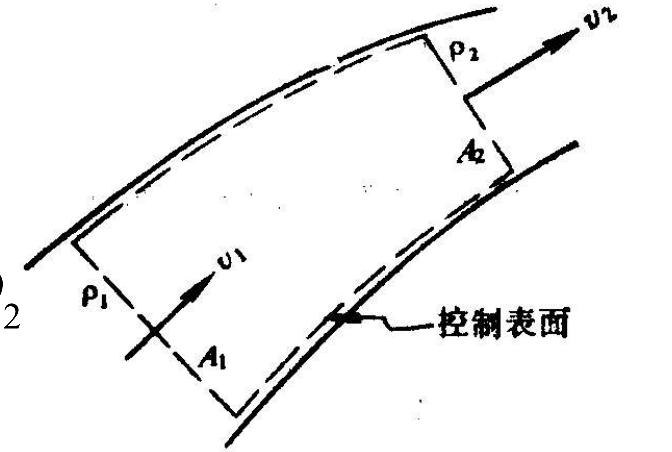
$Q_i = A_i V_i$ Volume flux 体积流量

流管流动的连续性方程的应用:

恒定流动时： $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

对于不可压缩流体，则

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad Q_1 = Q_2$$



壶口瀑布是我国著名的第二大瀑布。两百多米宽的黄河河面，突然紧缩为 **50** 米左右，跌入 **30** 多米的壶形峡谷。入壶之水，奔腾咆哮，势如奔马，浪声震天，声闻十里。“黄河之水天上来”之惊心动魄的景观。

二、连续性方程的微分形式

连续性方程的积分形式：

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = 0$$

由奥一高公式

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

根据控制体与时间的无关性

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

直角坐标系下连续性方程的微分形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

想一想：恒定、不可压情况下，连续性方程的微分形式。

连续性方程积分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho \mathrm{d}\tau+\oint_{A}\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}A=0$$

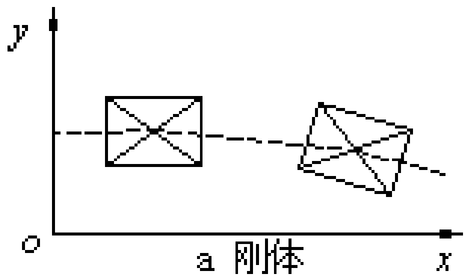
微分形式：

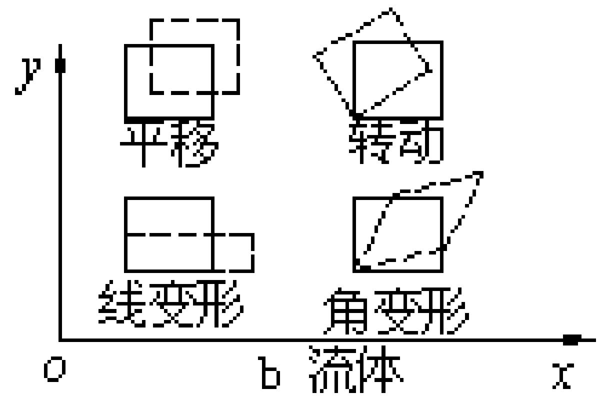
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0$$

1. 上述两式都是运动学的方程，与作用力无关，对于粘性流体还是无粘流体都一样。
2. 对于非惯性系中的相对运动，也适用。

3-4 流体微团的运动分析

流体与刚体比较



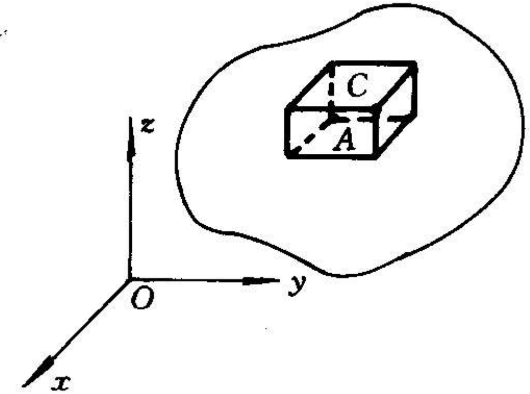


刚体的运动是由平移和绕某瞬时轴的转动两部分组成。

流体质点的运动，一般除了平移、转动外，还要发生变形（角变形和线变形）。

一、流体微元的速度分解

$A(x, y, z)$ 点速度为 v_x, v_y, v_z， 则 C 点的速度为：



$$v_x' = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

$$v_y' = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz$$

$$v_z' = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz$$

$$v_x' = v_x + \theta_{xx}dx + \varepsilon_{xy}dy + \varepsilon_{xz}dz + \omega_y dz - \omega_z dy$$

$$v_y' = v_y + \theta_{yy}dy + \varepsilon_{yz}dz + \varepsilon_{yx}dx + \omega_z dx - \omega_x dz$$

$$v_z' = v_z + \theta_{zz}dz + \varepsilon_{zx}dx + \varepsilon_{zy}dy + \omega_x dy - \omega_y dx$$

备注：泰勒公式

$$1: f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

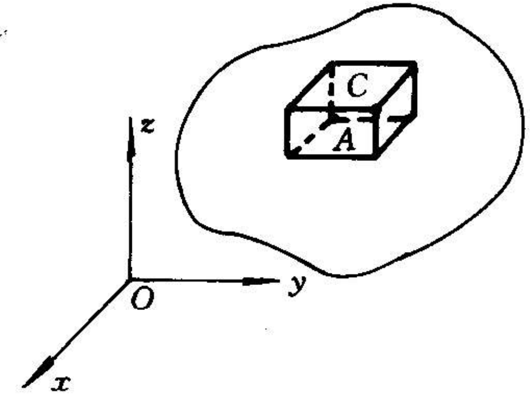
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n \cdots (Taylor)\text{公式}$$

若$x_0 = 0$则上式为（Maclaurin）公式

$$2: f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

一、流体微元的速度分解

$A(x, y, z)$ 点速度为 v_x, v_y, v_z，则 C 点的速度为：

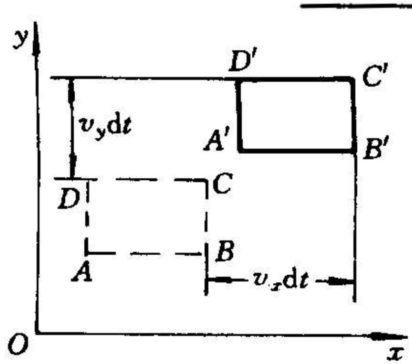


$$
\begin{aligned}
v_x' &= v_x + \theta_{xx}\mathrm{d}x + \varepsilon_{xy}\mathrm{d}y + \varepsilon_{xz}\mathrm{d}z + \omega_y\mathrm{d}z - \omega_z\mathrm{d}y \\
v_y' &= v_y + \theta_{yy}\mathrm{d}y + \varepsilon_{yz}\mathrm{d}z + \varepsilon_{yx}\mathrm{d}x + \omega_z\mathrm{d}x - \omega_x\mathrm{d}z \\
v_z' &= v_z + \theta_{zz}\mathrm{d}z + \varepsilon_{zx}\mathrm{d}x + \varepsilon_{zy}\mathrm{d}y + \omega_x\mathrm{d}y - \omega_y\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

平动　线变形　角变形　转动

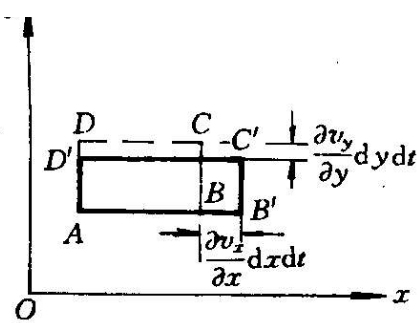
流体微元速度分解公式中的符号

$\theta_{xx}=\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$	$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right)$	$\omega_x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)$
$\theta_{yy}=\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$	$\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right)$	$\omega_y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)$
$\theta_{zz}=\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$	$\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right)$	$\omega_z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x}-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)$



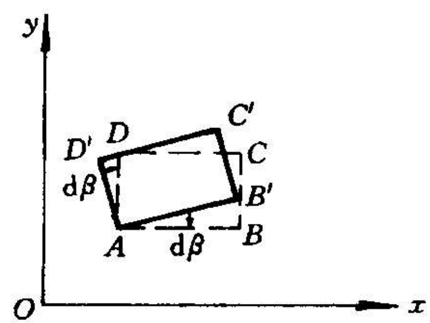
(1)

平动



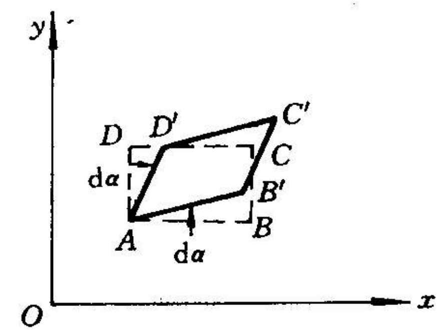
(2)

线变形



(3)

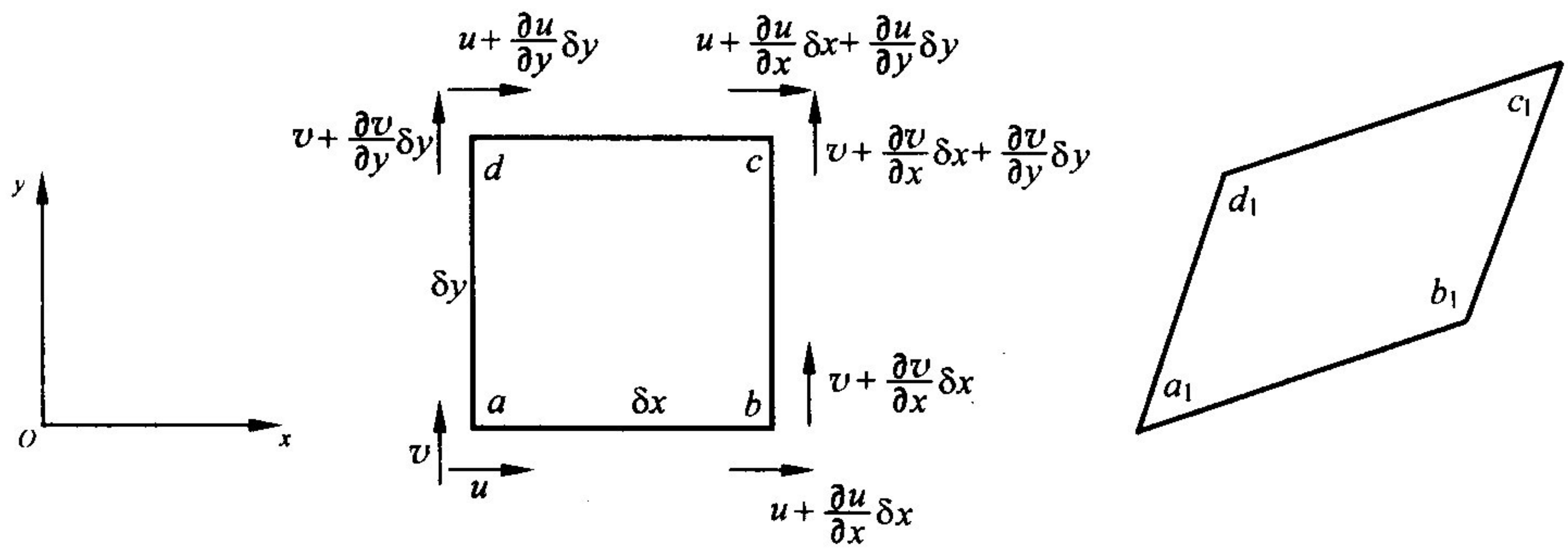
转动



(4)

角变形

流体微团的运动分析



(a) t时刻　　(b) $t+\Delta t$时刻

图 1-7　流体微团的运动分析

1. 线变形分析

x 方向的线应变率：

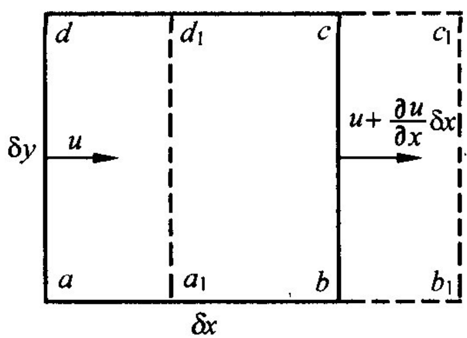


图 1-8　线变形分析

$$\frac{a_1b_1 - ab}{ab \cdot \Delta t} = \frac{bb_1 - aa_1}{ab \cdot \Delta t} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\Delta t - u\Delta t}{\delta x \cdot \Delta t} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\delta x \cdot \Delta t}{\delta x \cdot \Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}.$$

y、 z 方向的线应变率分别为：

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

流体微团的相对体积膨胀率为：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta x_1 \delta y_1 \delta z_1 - \delta x \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z \Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

对于不可压缩流体： $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$

2. 角变形分析

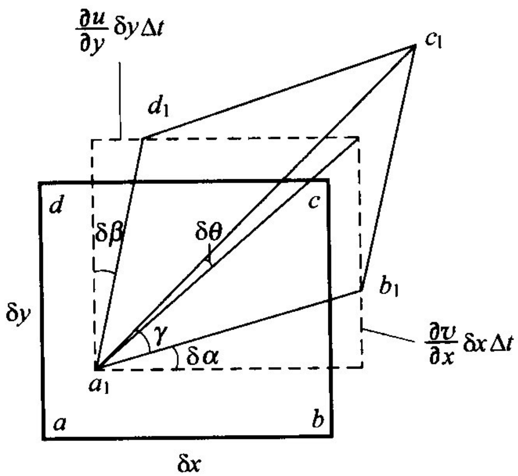


图 1-9　角变形与旋转分析

$$\delta\alpha \approx \tan(\delta\alpha) = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\Delta t/\delta x = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t,$$

$$\delta\beta \approx \tan(\delta\beta) = \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\Delta t/\delta y = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t.$$

角变形速率—剪切应变率：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}(\delta\alpha+\delta\beta)/\Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx},$$

同理： $$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

3. 旋转分析

$$\delta\theta = (\delta\alpha-\delta\beta)/2 \approx \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta t/2.$$

转动角速度： $$\Omega_z = \lim_{\Delta t\to 0}\delta\theta/\Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

同理另外两个方向：Ω_x， Ω_y

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

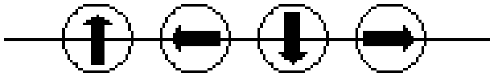
$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{V}).$$

涡量： $\boldsymbol{\omega}=(\nabla\times\boldsymbol{V})=2\boldsymbol{\Omega}$

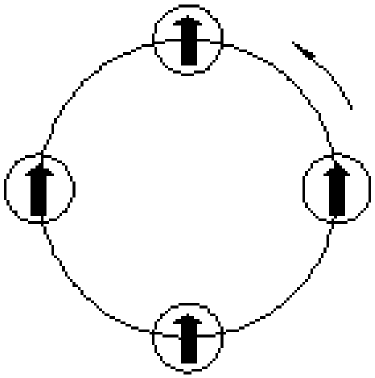
二、有旋流和无旋流

根据流体微团是否绕自身轴旋转，可分为有旋流和无旋流。

1. 定义：有旋流（ vortex ）：亦称“涡流”。流体质点（微团）在运动中不仅发生平动（或形变），而且绕着自身的瞬时轴线作旋转运动。如旋风即为空气的涡流。当流体速度变化较大，由于流体粘滞阻力、压强不均匀等因素的影响，就容易形成涡流。



（a）有旋流



（b）无旋流

无旋流（ potential flow ）亦称“势流”、“有势流”。流体在运动中，它的微小单元只有平动或变形，但不发生旋转运动，即流体质点不绕其自身任意轴转动。

注意：无旋流和有旋流决定于流体质点本身是否旋转，而与运动轨迹无关。

2. 有旋流和无旋流的特性

（1）若$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$，即

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0,\frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z}=0,\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$$

则流动为无旋流，否则，为有旋流。

有旋流（涡流）——ω_x、ω_y、ω_z中任一个或全部不等于零的流体运动，绕自身轴有旋转的运动。（与通常的旋转不同）流场内流体质点具有绕质点自身任意轴的角速度。

（2）有旋流的特征是存在角速度。角速度是一个矢量，所以可如同用流线描述流动一样，可用涡线描述流动的旋转变化。 涡线——在同一瞬时线上各质点的转速矢量都与该曲线相切。

无旋流一般存在于无粘性理想流体中。 有旋流一般存在于有粘性实际流体中。

例题

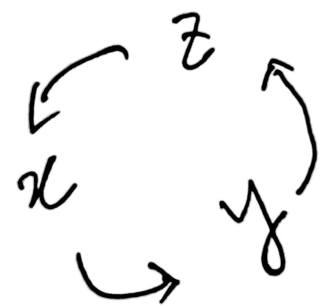
已知流体流动的流速场为 $u_x = ax, u_y = by, u_z = 0$ ，判断该流动是无旋流还是有旋流？

解：

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$$



故液体流动是无旋流。

一流场，$\vec{U} = 3x^2 y\vec{i} - 9y\vec{j} + 6z^2\vec{k}$ 试判断流动：(1) 是否恒定；(2) 维数；(3) 是否可压缩性流体；(4) 是否无旋；(5) 求流体质点在 (3，1，2) 点时的加速度。

（1）恒定；

（2）三维；

（3）$\nabla \cdot u = 6xy - 9 + 12z \neq 0$ 为可压缩

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 6xy - 9 + 12z \neq 0$$

（4）$\nabla \times \vec{u} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - 3x^2\vec{k} \neq 0$ 有旋。

$\nabla \times \vec{u}$: $\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$

$$\omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -3x^2$$

（5）$\vec{a} = (18x^3 y - 27x^2 y)\vec{i} + 81y\vec{j} + 72z^3\vec{k}] = 243\vec{i} + 81\vec{j} + 576\vec{k}$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

$$a_x = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = 3x^2 y \cdot 6xy - 9y \cdot 3x^2 \cdot + 0$$

$$a_y = u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = 3x^2 y \cdot 0 - 9y \cdot (-9) + 0$$

$$a_z = u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 3x^2 y \cdot 0 - 9y \cdot 0 + 6z^2 \cdot 12 \cdot z$$