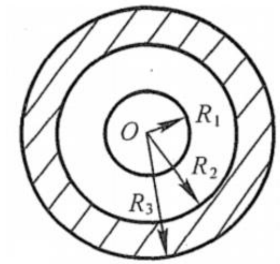
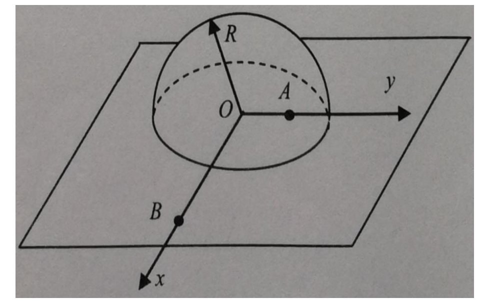
小测1A （2023）

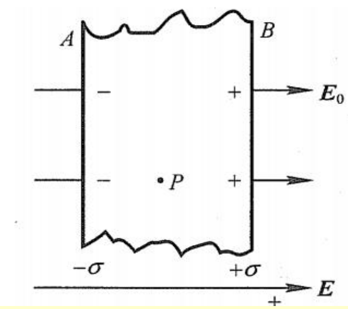
1．半径为R_1的金属球带有电荷q_A，球外有一个内外半径分别为R_2、R_3的同心导体球壳B，带有总电量q_B。现先将球壳B接地然后断开，再将A球接地。求：金属球A和球壳B内、外表面上各带多少电量以及球A和球壳B的电势。

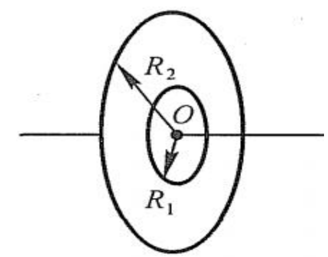


2、如图所示，某半球面半径为R，倒扣在xOy平面上，半球面上的电荷均匀分布，面密度为σ。已知A点坐标为（0，R/2），B点坐标为（2R，0）。则A、B两点的电势差U_{AB}= __________。



3、如图所示，把一无限大的金属平板置于电场强度为E_0的均匀电场中，试求平板上的感应电荷面密度。



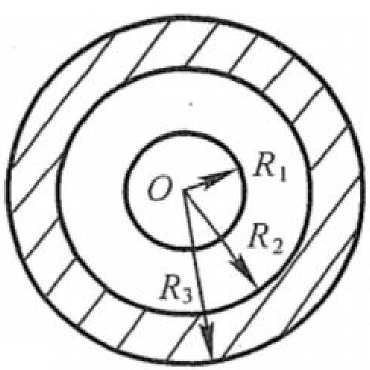


4、如图所示，在静电透镜实验装置中，有一均匀带电圆环，其内半径R_1，外半径R_2，总电量Q 。现有一电子沿轴线从无限远处射向带负电的圆环。欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少多大？

5、 半径为a的长直导线外面套有内径为b的同轴导体圆筒，两导体间充满相对介电常数为ε_r的电介质；沿轴向单位长度上的导线带电+λ，圆筒带电-λ。忽略边缘效应，求沿轴向单位长度的电场能量。

小测1解答

1．半径为R_1的金属球带有电荷q_A，球外有一个内外半径分别为R_2、R_3的同心导体球壳B，带有总电量q_B。现先将球壳B接地然后断开，再将A球接地。求：金属球A和球壳B内、外表面上各带多少电量以及球A和球壳B的电势。



一、解

$\Rightarrow q_A+q_B$

未接地时：

$$U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{R_1}-\frac{q_A}{R_2}+\frac{q_A+q_B}{R_3}\right)>0$$

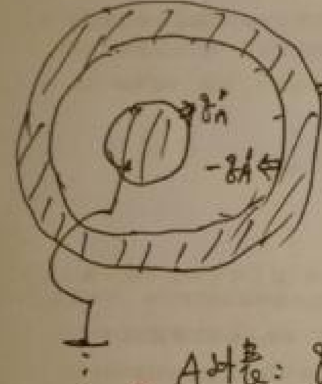
$$U_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_A+q_B}{R_3}>0$$

B接地后，$U_B=0$，∴此时B的外表面电荷为0．剪断后亦是

此时 $U_A=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)>0$

再当A接地后，$U_A=0$．设此时A外表面带电 q_A' $(<q_A)$

B内表面 $-q_A'$，B外表面 $+q_A'-q_A$



$$\therefore U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A'}{R_1}-\frac{q_A'}{R_2}+\frac{q_A'-q_A}{R_3}\right)=0$$

$$\Rightarrow q_A'\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=\frac{q_A}{R_3}\Rightarrow\therefore$$

A外表：$q_A'=\dfrac{q_A}{R_3\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}$

B内表：$-q_A'=-\dfrac{q_A}{R_3\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}$

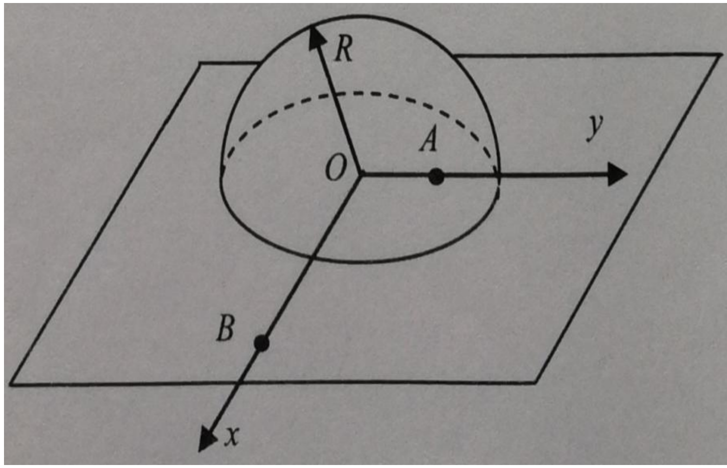
B外表：$q_A'-q_A=q_A\left[\dfrac{1}{R_3\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}-1\right]$

$U_A=0$

$U_B=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_A'-q_A}{R_3}=\dfrac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\left[\dfrac{1}{R_3\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}-1\right]$

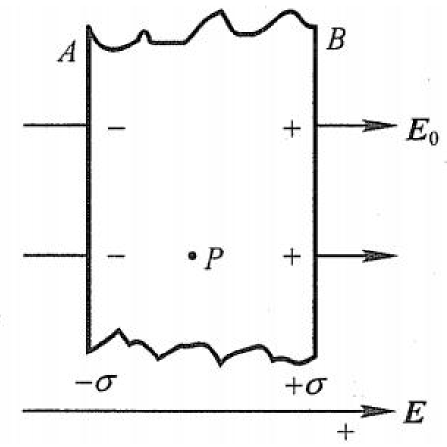
以上仅供参考．

2、如图所示，某半球面半径为R，倒扣在xOy平面上，半球面上的电荷均匀分布，面密度为σ。已知A点坐标为（0, R/2），B点坐标为（2R，0）。则A、B两点的电势差U_{AB}= ________。



$$\frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}$$

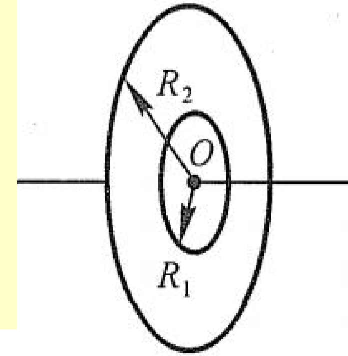
3、如图所示，把一无限大的金属平板置于电场强度为E_0的均匀电场中，试求平板上的感应电荷面密度。



解 先规定向右为电场强度的正方向。设感应电荷面密度为 σ，由导体静电平衡条件，金属平板上任一点 P 的场强为零，即

$$E_P = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \therefore \quad \sigma = \varepsilon_0 E_0$$

4、如图所示，在静电透镜实验装置中，有一均匀带电圆环，其内半径R_1，外半径R_2，总电量Q。现有一电子沿轴线从无限远处射向带负电的圆环。欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少多大？



解　圆环的电荷面密度

$$\sigma=\frac{Q}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$$

先求圆环中心的电势。取半径为r、宽度为$\mathrm{d}r$的窄圆环，由于窄圆环带电$\mathrm{d}q=2\pi r\mathrm{d}r\cdot\sigma$，故在圆心处产生的电势

$$\mathrm{d}V_O=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad V_O=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$

当电子$(q=-e)$从无限远处射穿圆环中心，须克服静电力作功

$$W=q(V_\infty-V_O)=0-E_k$$

$$E_k=\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}$$

5、 半径为a的长直导线外面套有内径为b的同轴导体圆筒，两导体间充满相对介电常数为ε_r的电介质；沿轴向单位长度上的导线带电+λ，圆筒带电-λ。忽略边缘效应，求沿轴向单位长度的电场能量。

解　由高斯定理，两导体间的电介质中

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

电场能量密度为 $u_e=\frac{1}{2}DE=\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^2}$

沿轴向长度为 Δl 的区域内，介质中的电场能量为

$$U_e=\int_a^b\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cdot 2\pi r\Delta l\,\mathrm{d}r=\frac{\lambda^2\Delta l}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

（以上算式中的ε替换为ε_r）

单位长度上电场能量为

$$U'_e=\frac{U_e}{\Delta l}=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$