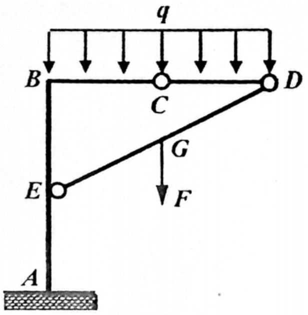
2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷

计算题（共 6 题）

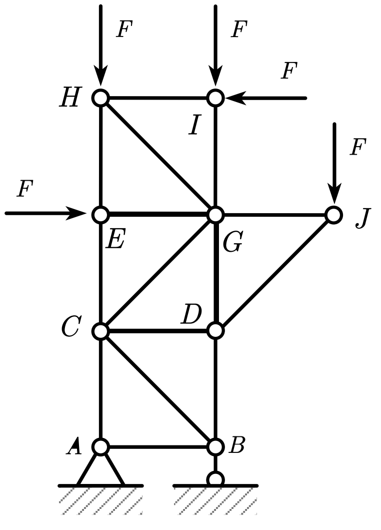
一、**(15 分)** 图示平面构架，A端固定，B处刚性连接，C、D、E处均为光滑铰连接，杆AB垂直，BC与CD水平，长度$AE=BE=BC=CD=b$。杆BC与CD受垂直均匀分布力作用，集度为q，杆DE中点G处受垂直力$F=qb$作用，各杆重不计。

求：（1）固定端A的约束力及力偶;（2）铰C的约束力。



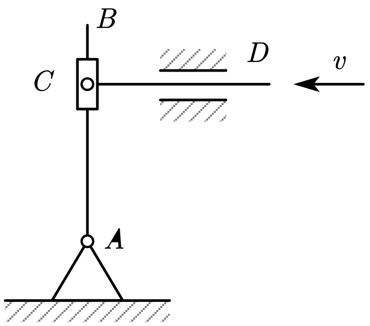
二、**(15 分)** 图示平面桁架，$ABCD$、$CDEG$与$EGHI$为相等的正方形，边长均为b，杆EG与GJ水平，长$GJ=b$，A处为固定铰支座，B处为滑动铰支座约束。节点E、I分别受水平力F作用，节点H、I、J分别受垂直力F作用，各杆重不计。

求：杆BC、CE和CG的内力。

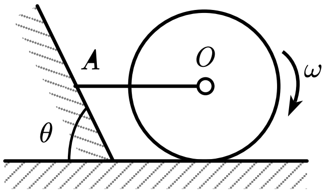


三、**(20 分)**（a）图示机构，杆AB绕A轴转动，杆CD在水平滑道内滑动，C处为套筒联接。图示瞬时，杆AB垂直，$AC=b$，杆CD的速度为v，加速度为零。求：此时杆AB的角速度与角加速度。

（b）图示圆轮，半径为R，轮心O处铰接杆OA，杆长为$\sqrt{3}R$。轮O在水平地面上纯滚动，带动杆运动，杆A端置于光滑斜面上，斜角$\theta=60°$。图示瞬时，轮的角速度为ω。求：此时杆OA的角速度与A端的速度。



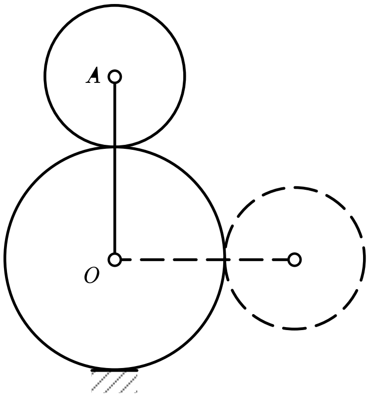
题（a）图



题（b）图

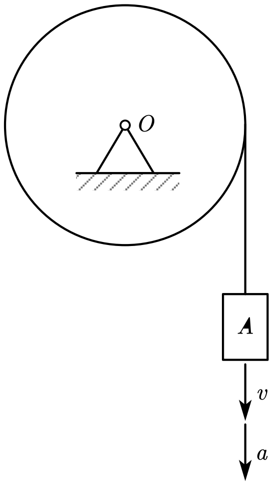
四、(**20 分**)图示大圆O固定，半径为$2R$，圆心O处铰接杆OA，杆A端铰接圆轮A，轮半径为R。均质轮质量为$2m$，均质杆质量为m。轮在大圆上作纯滚动，同时杆绕O轴转动。初始时，轮与杆静止，杆垂直。然后，轮滚下，杆顺时针倒下，杆到达水平状态。

求：此时，（1）杆OA与轮A的角速度；（2）轮A处的约束力。

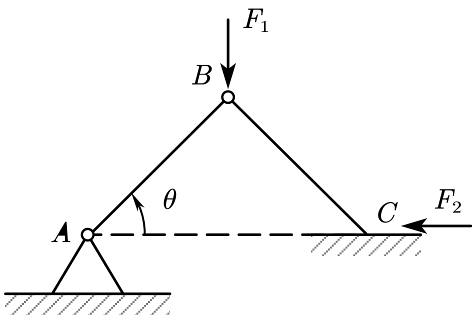


五、**(15 分)**（a）图示均质圆轮，半径为R，质量为m_1，绕O轴转动。轮上缠绕细绳，绳另一端悬挂重物A，物A的质量为m_2。图示瞬时，物A的速度为v，加速度为a。求：此时轮与重物的惯性力系向点O简化的结果。

（b）图示平面内，杆AB与BC的长度均为L，A端为固定铰支座，B处光滑铰连接，C端在光滑平面上，AC连线水平。铰B受垂直力F_1作用，C端受水平力F_2作用，各杆重不计。平衡时，杆AB的斜角为θ。求：用虚角位移原理计算力F_1与F_2的关系。



题（a）图



题（b）图

六、**(15 分)**设某单自由度系统的广义坐标为θ，动能T、势能V、非保守广义力$\tilde{Q}$分别为（其中m，b，c，g，F，e为常数，t为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(b+c\sin t)\dot{\theta}^2，V=mg(b-\cos\theta)，\tilde{Q}=Ft-e\dot{\theta}$$

求：（1）系统的拉格朗日方程；（2）系统的哈密顿方程。

2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

计算题(共 6 题)

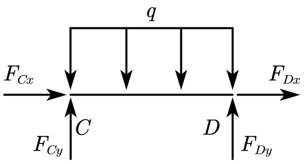
一、【解析】(1) 整体，受力如图，平衡

$$\sum F_x=0 \quad 得F_{Ax}=0,$$

$$\sum F_y=0,\ F_{Ay}-F-2qb=0 \quad 得F_{Ay}=3qb$$

$$\sum M_A=0,\ M_A-Fb-2qb^2=0 \quad 得M_A=3qb^2$$

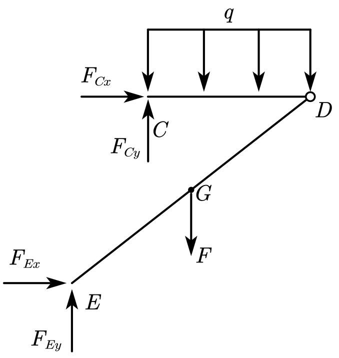
(2) 杆CD，受力如图，平衡



$$\sum M_b=0,\ F_{Cy}b-\frac{1}{2}qb^2=0$$

$$得F_{Cy}=\frac{1}{2}qb$$

(3) 杆$CD+DE$，受力如图，平衡



$$\sum M_E=0,\ F_{Cx}b-F_{Cy}b+Fb+\frac{3}{2}qb^2=0$$

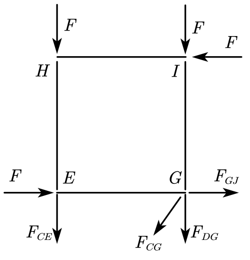
$$得F_{Cx}=-2qb$$

【考点延伸】平面力系平衡方程

二、【解析】(1) 截取$DCHIJ$，受力如图，平衡

$$\sum F_x=0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F_{BC}+F-F=0 \quad 得F_{BC}=0$$

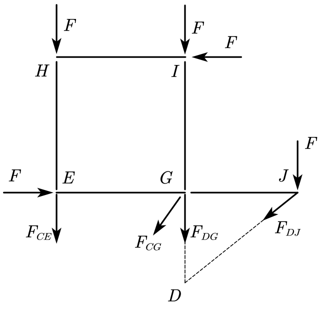
（2）截取$EHIG$，受力如图，平衡



$$\sum M_G=0,\quad F_{CE}b+Fb+Fb=0$$

得$F_{CE}=-2F$

（3）截取$EHIGJ$，受力如图，平衡



$$\sum M_D=0,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}F_{CG}b+F_{CE}b-Fb+Fb+2Fb-Fb=0$$

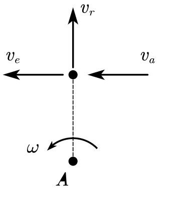
得$F_{CG}=\sqrt{2}F$

【考点延伸】平面桁架受力分析

三、【解析】（a）动点：杆CD上C点　动系：杆AB上　定系：地面上

绝对运动：水平直线　相对运动：沿AB直线　牵连运动：绕A定转

速度合成$\vec{v}_n=\vec{v}_e+\vec{v}_r$　关系如图，$v_a=v$



到$v_e=v_a=v$，杆角速度$\omega=\dfrac{v_e}{AC}=\dfrac{v}{b}$　$v_r=0$

加速度合成$\vec{a}_a=\vec{a}_e^{\tau}+\vec{a}_e^{n}+\vec{a}_r+\vec{a}_c$，$a_a=0$，$a_c=0$

到$a_e^{\tau}=a_a=0$，杆角加速度$\alpha=\dfrac{a_e^{\tau}}{AC}=0$

（b）轮纯滚动，瞬？，$v=R\omega$

杆OA平面运动，瞬心P，$OP=R$，角速度$\omega_{OA}=\dfrac{v_O}{OP}=\omega$

速度$v_A=AP\cdot\omega_{OA}=2R\omega$

【考点延伸】点的速度与加速度合成

四、【解析】（1）杆OA从垂直到水平，功 $\sum W=mg\times\dfrac{3}{2}R+2mg\times 3R=\dfrac{15}{2}mgR$

动能$T_1=0$　　杆水平时，$v_A=3R\omega_{OA}=R\omega_A$　角速度？$\omega_A=3\omega_{OA}$

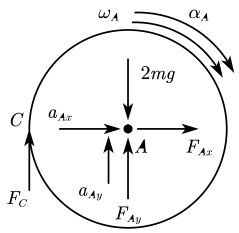
$T_2=\dfrac{1}{2}J_O\omega_{OA}^2+\dfrac{1}{2}J_C\omega_A^2=15mR^2\omega_{OA}^2$

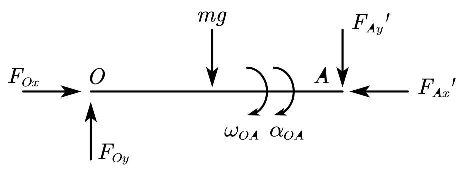
动能定理$T_2-T_1=\sum W$　得杆角速度$\omega_{OA}=\sqrt{\dfrac{g}{2R}}$，轮角速度$\omega_A=\sqrt{\dfrac{9g}{2R}}$

（2）轮变力，运动如图，平面运动方程

$F_{Ax}=2ma_{Ax}$，$F_{Ay}+F-2mg=2ma_{Ay}$

$F_CR=J_A\alpha_A=mR^2\alpha_A$





杆受力，运动如图，转动方程：$F_{Ay}\times 3R+mg\times\dfrac{3}{2}R=J_O\alpha_{OA}=3mR^2\alpha_{OA}$

补充　$a_{Ax}=-3R\omega_{OA}^2=-\dfrac{3}{2}g$　　$a_{Ay}=-3R\alpha_{OA}=-R\alpha_A$　$\rightarrow$　$\alpha_A=3\alpha_{OA}$

解得　$F_{Ax}=-3mg$，$F_{Ay}=-\dfrac{1}{4}mg$

【考点延伸】动能定理，刚体平面运动微分方程

五、【解析】（a）轮的角速度$\omega=\dfrac{v}{R}$，角加速度$\alpha=\dfrac{a}{R}$

惯性力$F_{gox}=-m_1a_{ox}=0$，$F_{goy}=-m_1a_{oy}+m_2a=m_2a$

$$M_{go}=J_o\alpha+F_{gA}R=\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)Ra$$

（b）系统自由度为1，以角θ的广义坐标　　坐标$y_B=L\sin\theta$，$x_c=2L\cos\theta$

虚位移$\delta y_B=L\cos\theta\delta\theta$，$\delta x_C=-2L\sin\delta\theta$

理想约束，平衡，$\sum \delta W = -F_1\delta y_B - F_2\delta x_C = (-F_1 L\cos\theta + 2F_2 L\sin\theta)\delta\theta = 0$

得 $-F_1\cos\theta + 2F_2\sin\theta = 0$，$F_1 = 2F_2\tan\theta$

【考点延伸】惯性力、虚位移原理

六、【解析】（1）拉氏函数 $L = T - V = \frac{1}{2}m(b + c\sin t)\dot{\theta}^2 - mg(b - \cos\theta)$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\dot{\theta}$　　拉氏方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \tilde{Q}$

得 $m(b + c\sin t)\ddot{\theta} + (mc\cos t + e)\dot{\theta} + mg\sin\theta = Ft$

（2）广义动量 $p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m(b + c\sin t)\dot{\theta}$　　$\dot{\theta} = \frac{p}{m(b + c\sin t)}$

哈氏函数 $H = \left(p\dot{\theta} - L\right)_{\dot{\theta}\to p} = \frac{p^2}{2m(b + cint)} + mg(b - \cos\theta)$

广义力 $\tilde{Q} = Ft - \frac{ep}{m(b + c\sin t)}$

哈氏方程 $\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m(b + c\sin t)} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} + \tilde{Q} = -mg\sin\theta + Ft - \frac{ep}{m(b + c\sin t)} \end{cases}$

【考点延伸】拉格朗日方程、哈密尔顿正则方程