《数值计算方法》期末考试归纳 by 喵星考拉 2018.7

第1章 误差

误差来源：

模型误差（数学模型与实际问题之间的误差）

观测误差/参量误差（观测产生的误差）

截断误差/方法误差（数值计算近似解和准确解之间的误差）

舍入误差（计算机子长有限产生的误差）

绝对误差：$e^*(x)=x-x^*$（近似值减去准确值）

误差限（绝对误差限）：$\left|e^*(x)\right|=\left|x-x^*\right|\le\varepsilon^*$

工程上常表示为：$x=x^*\pm\varepsilon^*$

相对误差：$e_r(x)=\dfrac{e^*(x)}{x}=\dfrac{x-x^*}{x}\approx\dfrac{x-x^*}{x^*}$，相对误差限（常用百分数表示）

数值计算中需要注意的几个原则：

（1）选用数值稳定性好的算法

（2）相近两数避免相减

（3）绝对值太小的数不宜作除数

（4）避免大数吃小数的情况发生

（5）简化计算步骤，减少运算次数

第二章 非线性方程求根

二分法（操作略）

对于任意给定的误差ε，只要二分次数满足不等式 $\dfrac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon$ 则可得到满足要求近似根

局限性：不能求复数根和偶数重根

迭代法：将方程化为 $x=g(x)$，从而根据 $x_{k+1}=g(x_k)$ 求解。

迭代法收敛的充分条件：

（1） 在区间$[a,b]$上$g'(x)$存在，且$\left|g'(x)\right|\le L\le 1$

（2） 对任意$x\in[a,b]$，都有$g(x)\in[a,b]$

牛顿法：方程 $f(x)=0$ 近似线性化为 $f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$ 从而得到迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿迭代法收敛的充分条件

条件1：对于方程 $f(x)=0$，若存在区间(a,b)使

（1） 在区间(a,b)内存在方程的单根x^*；

（2） $f''(x)$在区间(a,b)内连续

则牛顿迭代法在x^*附近具有局部收敛性。

条件2：对于方程 $f(x)=0$，若存在区间$[a,b]$使

（1） $f''(x)$在$[a,b]$上连续

（2） $f(a)f(b)<0$；

（3）对任意$x\in[a,b]$都有 $f'(x)\ne0$；

（4） $f''(x)$在$[a,b]$上保号

则当初值$x_0\in[a,b]$且$f(x_0)f''(x_0)>0$时，牛顿迭代序列收敛于区间上唯一实根x^* 。

第三章 线性方程组解法

1、高斯消元法（略）（也称顺序消元法）

2、列主元消元法（让每一次消元的列主元绝对值尽可能的大）

3、LU分解法，分解$A=LU$后，分别解方程$LY=b$与$UX=Y$

4、雅可比迭代法

向量范数：1范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 2范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$ ∞范数：$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

矩阵的范数：

1范数（列模）（每列各个元素绝对值相加之和，取最大）

2范数（谱模）$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}$

∞范数（行模）（每行各个元素绝对值相加之和，取最大）

矩阵条件数（用来刻画方程组病态程度）$Cond(A)=\|A^{-1}\|\|A\|$ 如果条件数特别大，则矩阵是病态的，很难求出其准确的解。

第4章 插值与拟合

拉格朗日插值多项式：$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

两点差值——线性插值；三点插值——抛物插值

高次的插值会导致Runge现象，在区间端点出现明显的震荡。

三次样条插值：每一段上都是不高于三次的多项式，保证段和段之间二阶导数连续。
一种比较简便的办法：利用$S(x)$在节点处的二阶导数值$M_i=S''(x_i)$表示$S_i(x)$，用$S'(x)$在内节点x_i上的连续性和边界条件来确定M_i
记$M_i=S''(x_i)$，$h_i=x_i-x_{i-1}$ 利用插值条件，整理得到

$$S_i(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+\left(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}}{6}h_i^2\right)\frac{x_i-x}{h_i}+\left(y_i-\frac{M_i}{6}h_i^2\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$

这样就将求n个函数$S_i(x)$的问题转化为求n+1个未知数的问题
利用一阶导数连续的条件：记

$$\mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\qquad \lambda_i=\frac{h_i+1}{h_i+h_{i+1}}=1-\mu_i\qquad g_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$$ 从而得到

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=g_i\qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

区间有n个，未知数有n+1个，方程有n-1个，还需要两个边界条件，可以解出方程。解出Mi之后代入上面的方程即可求出S(x)。

最小二乘法：

$\varphi(x)=F(a_0,a_1,\dots,a_n,x)$，选择参数使得$S=\sum_{i=1}^{m}\left[F(a_0,a_1,\dots,a_n,x_i)-y_i\right]^2$取到最小值，也就是说点$(a_0^*,a_1^*,\dots,a_n^*)$是该方程组的极值点，因此解法方程组$\frac{\partial S}{\partial a_k}=0$即可解出所求的参数。一般情况下法方程组不是线性的，当且仅当$\varphi(x)=F(a_0,a_1,\dots,a_n,x)$是由一系列已知函数的线性组合时，法方程组为线性方程组。此时可以代入矩阵求解。

当函数为线性拟合时，最小二乘法退化为：$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$，$y=a+bx$

数值积分

1、中点法：$M=hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$　　　2、梯形法：$T=h\frac{f(a)+f(b)}{2}$
中点法和梯形法的误差相反，且中点法准确性是梯形法的两倍，对其进行加权平均：
3、辛普森法则：$S=\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}T=\frac{h}{6}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]$

微分方程：

1、欧拉法 设一阶方程可以写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，$x\in[a,b]$，$y(a)=y_0$
把$[a,b]$分为i等分，记分点为$x_i=a+ih$，则有$y'(x_i)=f(x_i,y_i)=f(x_i,y(x_i))$
用向前差商代替导数，有近似值$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y(x_i))$ 欧拉公式步进法

2、改进欧拉法 $\widetilde{y_{i+1}}=y_i+hf(x_i,y_i)$，$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\widetilde{y_{i+1}})\right]$

3、龙格库塔法

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_i,y_i) \\ K_2=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4=f(x_i+h,y_i+hK_3) \end{cases}$$