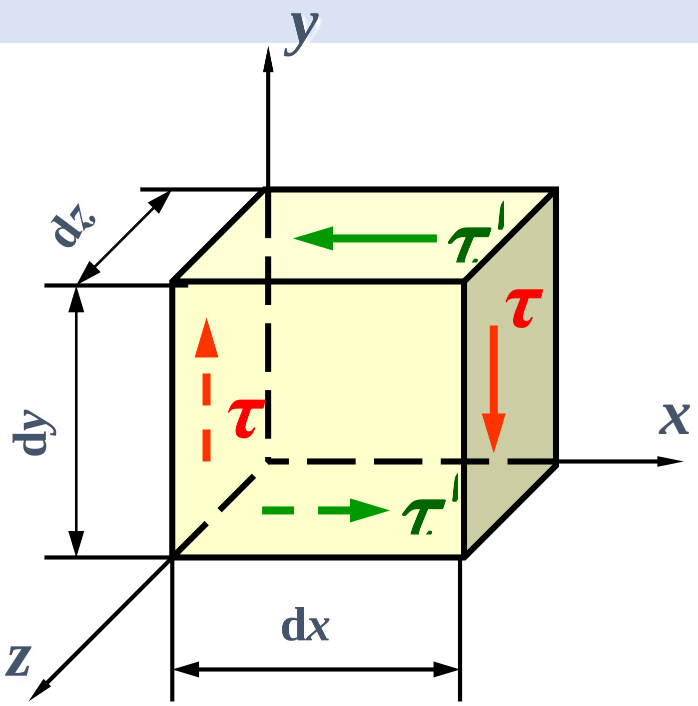
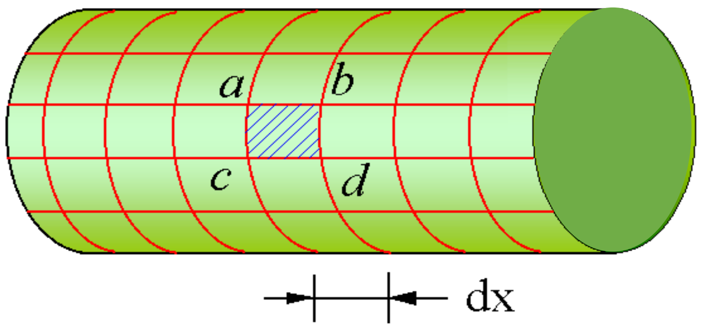
第三章　扭转

■ 切应力互等定理

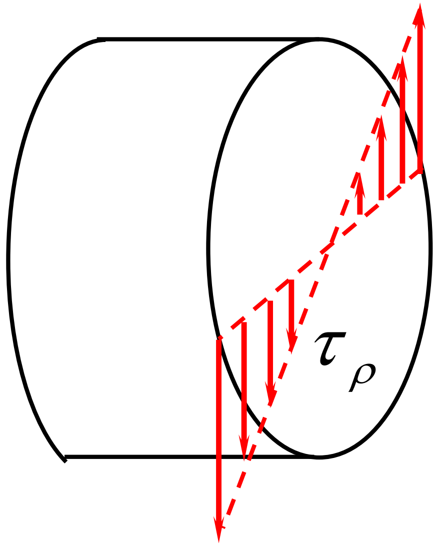
$$\boxed{\tau' = \tau}$$

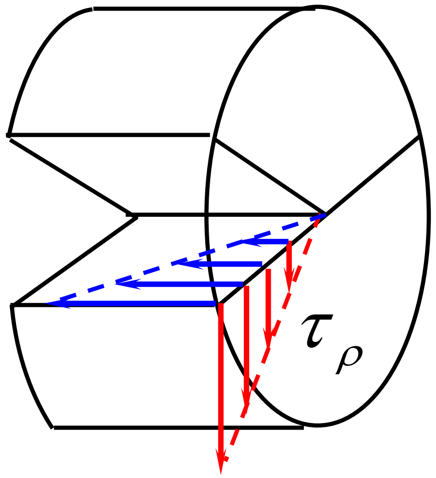
- 在相互垂直的两个平面上，切应力**必然成对存在**，且数值相等；
- 两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。





思考：周向的纵截面切应力？



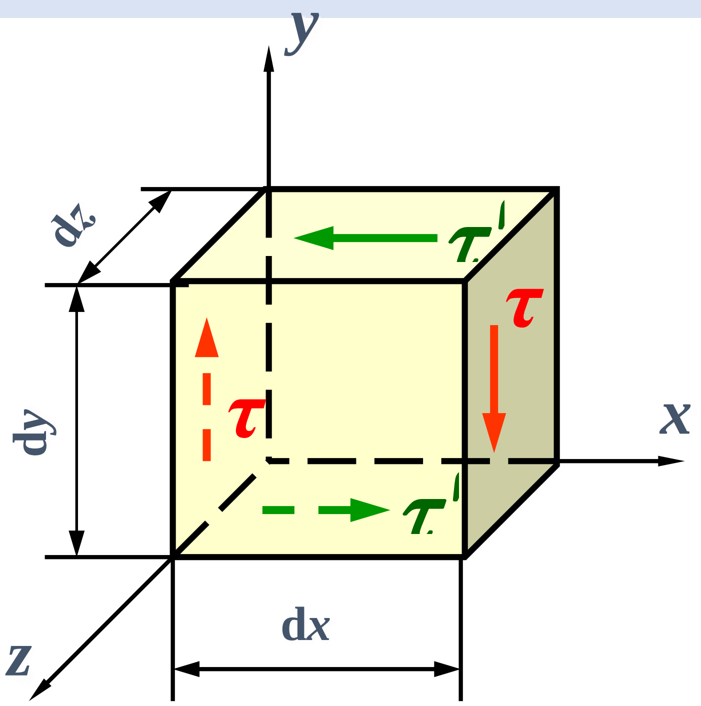


重要概念的回顾与强化

■ **切应力互等定理**

$$\boxed{\tau' = \tau}$$

- 在相互垂直的两个平面上，切应力**必然成对存在**，且数值相等；
- 两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。



■ **剪切胡克定律**

当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应变 γ 与切应力 τ 成正比，这个关系称为剪切胡克定律。

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$

重要概念的回顾与强化

■ 剪切应变能与应变能密度

类比正应力引起的应变能

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$$

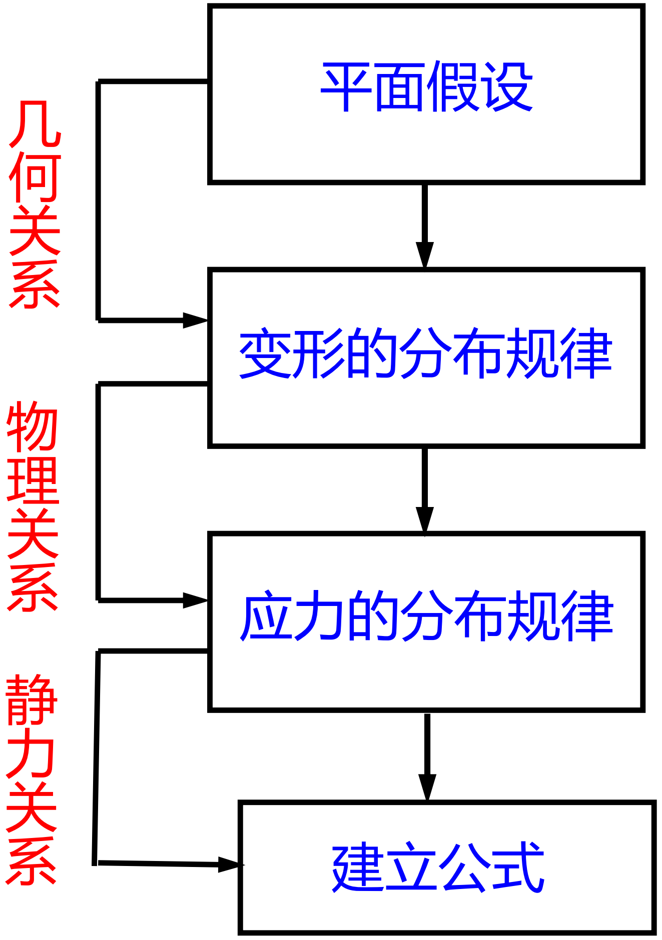
$$\tau = G\gamma$$

$$v_{\gamma} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

$$v_{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

重要概念的回顾与强化

圆截面杆扭转时的应力和应变公式，均建立在平面假设的基础上。



圆轴扭转横截面刚性转动，形状和大小不变，相邻截面间距不变

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_\mathrm{p}}$$

$$\boxed{\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_\mathrm{p}}}$$

$\tau_{\max}$的计算

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{TR}{I_\mathrm{p}} = \frac{T}{\frac{I_\mathrm{p}}{R}}}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T}{W_\mathrm{t}}}$$

圆轴扭转强度准则

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

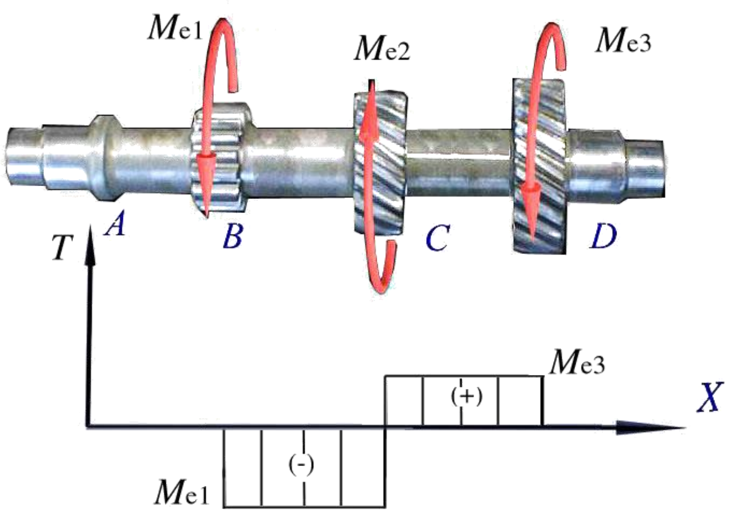
强度条件的应用：

（1）校核强度 $$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \leq [\tau]$$

（2）设计截面 $$W_t \geq \frac{T}{[\tau]}$$

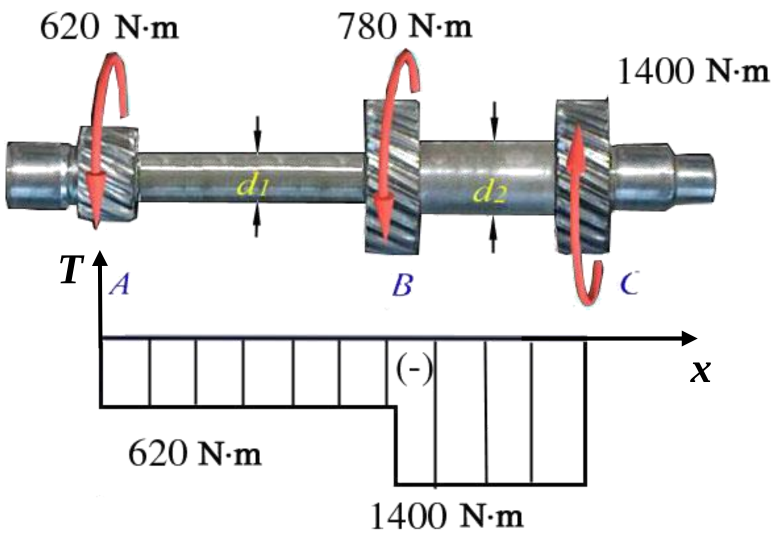
（3）确定载荷 $$T \leq W_t [\tau]$$

等截面圆轴



$$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_t}$$

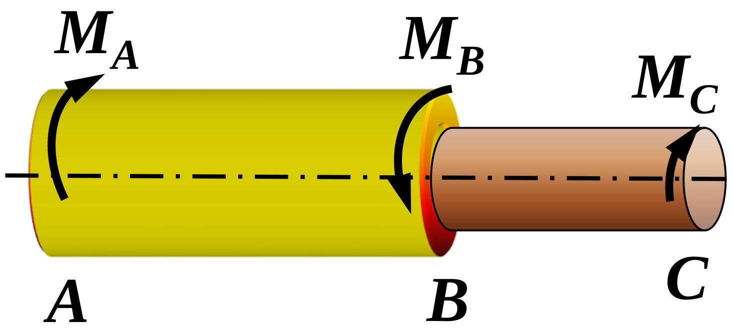
阶梯形圆轴



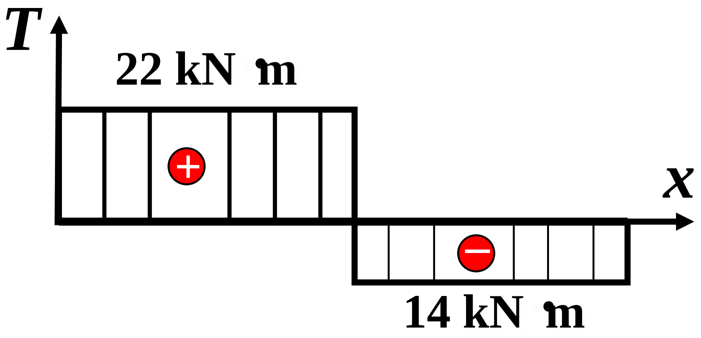
$$\tau_{max}=\left(\frac{T_{max}}{W_t}\right)_{max}$$

例题3.3

图示阶梯圆轴，AB段的直径$d_1 = 120$ mm，BC 段的直径$d_2 = 100$ mm。 扭转力偶矩为$M_A = 22$ kN m，$M_B = 36$ kN m ，$M_C = 14$ kN m . 已知材料的许用切应力$[\tau] = 80$ MPa，试校核该轴的强度。



解：（1）做轴的扭矩图



分别校核两段轴的强度

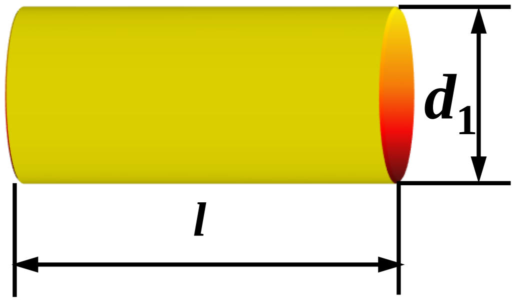
$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{T_1}{\pi d_1^3/16} = \frac{22\times10^3}{\pi(0.12^3)/16} = 64.84\ \text{MPa} < [\tau]$$

$$\tau_{2\max} = \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{T_2}{\pi d_2^3/16} = \frac{14\times10^3}{\pi(0.10^3)/16} = 71.30\ \text{MPa} < [\tau]$$

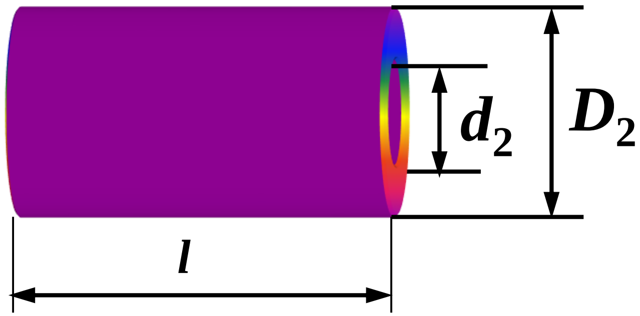
因此，该轴满足强度要求。

例题3.4

有材料相同，长度相等的实心圆轴1和空心圆轴2，两端施加相等的外力偶矩 M_e 使其破坏。若空心圆轴内外径比为α=0.8，试求空心圆轴外径和实心圆轴直径之比，以及两轴的重量比。



(a)



(b)

解：外力偶矩相等，则两轴的扭矩也相等

破坏意味着最大切应力达到许用切应力

$$\tau_{\max 1}=\frac{T}{W_{t1}} \qquad \tau_{\max 2}=\frac{T}{W_{t2}}$$

$$\tau_{\max 1}=\tau_{\max 2} \Rightarrow \frac{T}{W_{t1}}=\frac{T}{W_{t2}} \Rightarrow W_{t1}=W_{t2}$$

$$W_{t1}=\frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$W_{t2}=\frac{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}{16}$$

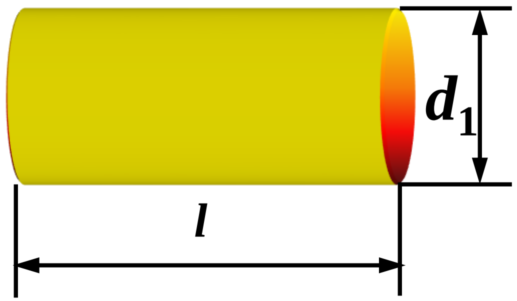
得：$$\frac{D_2}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-0.8^4}}=1.194$$

解： 两轴材料、长度均相同，故重量比等于横截面面积之比。

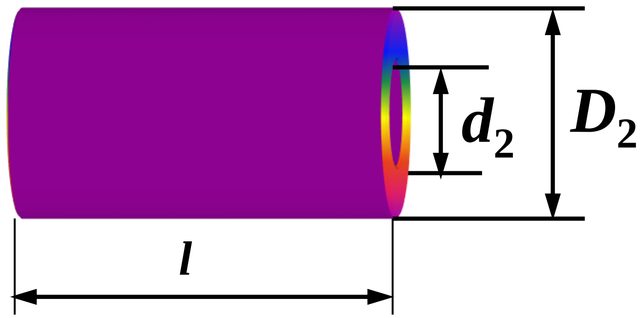
$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2-d_2^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2}$$

$$=\frac{D_2^2(1-\alpha^2)}{d_1^2}$$

$$=1.194^2(1-0.8^2)=0.512$$



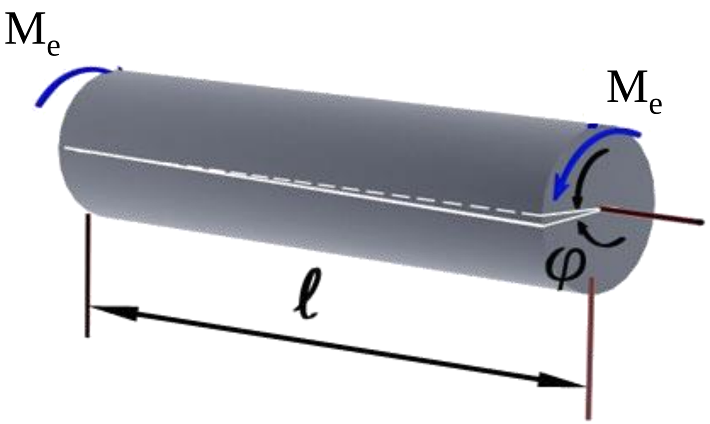
(a)

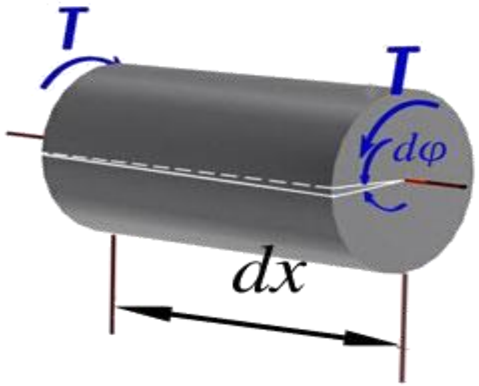


(b)

许用载荷相同的前提下，空心圆轴比实心圆轴好（轻、经济）。

1、扭转变形





φ - 圆轴两端的相对扭转角

$d\varphi$ - 相距dx的横截面间的相对扭转角

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GI_p}$$

圆轴两侧的相对扭转角 φ 的计算公式:

$$\varphi=\int_l d\varphi=\int_l \frac{T}{GI_p}dx=\frac{Tl}{GI_p}$$

§3.5 圆轴扭转时的变形

1、扭转变形

$$\boxed{\varphi = \frac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}}$$

φ：扭转角；GI_{p}：抗扭刚度

单位长度扭转角

$$\varphi' = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \quad (\mathrm{rad/m})$$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \times \frac{180}{\pi} \quad ({}^{\circ}/\mathrm{m})$$

拉压杆的伸长:

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

抗拉（压）刚度

单位长度伸长

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F_N}{EA}$$

§3.5 圆轴扭转时的变形

材料不同的两根圆轴 1 和 2，其直径和长度都相同，在其截面上扭矩相同的情况下，它们的最大切应力和扭转角之间满足（ B ）。

A. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$

B. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

C. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$

D. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{W_t}$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

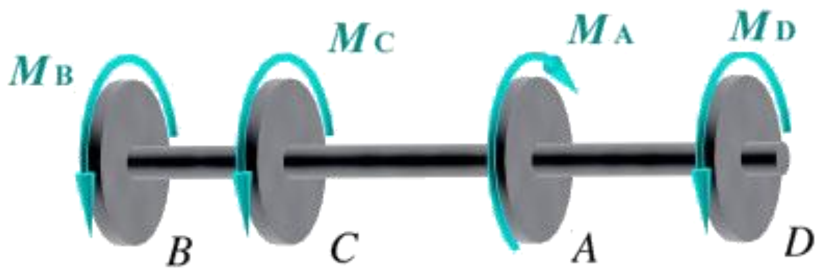
$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}$$

§3.5 圆轴扭转时的变形

1、扭转变形

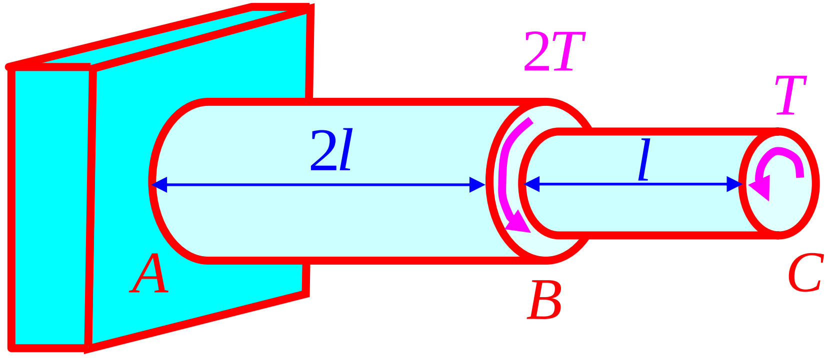
受到多个力偶矩



$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i l_i}{G_i I_{Pi}}$$

例题3.6

阶梯轴左段固定，受力情形及结构尺寸如图所示，求截面C相对于截面A的扭转角（AB段直径为D，BC段直径为$D/2$）。



解：

$$\varphi_{CB}=\frac{T_1 l_{CB}}{GI_{pCB}}=\frac{Tl}{G\frac{1}{32}\pi(\frac{D}{2})^4}=\frac{512Tl}{\pi GD^4}$$

$$\varphi_{BA}=\frac{T_2 l_{BA}}{GI_{pBA}}=\frac{3T\cdot 2l}{G\frac{1}{32}\pi D^4}=\frac{192Tl}{\pi GD^4}$$

$$\varphi_{CA}=\varphi_{CB}+\varphi_{BA}$$

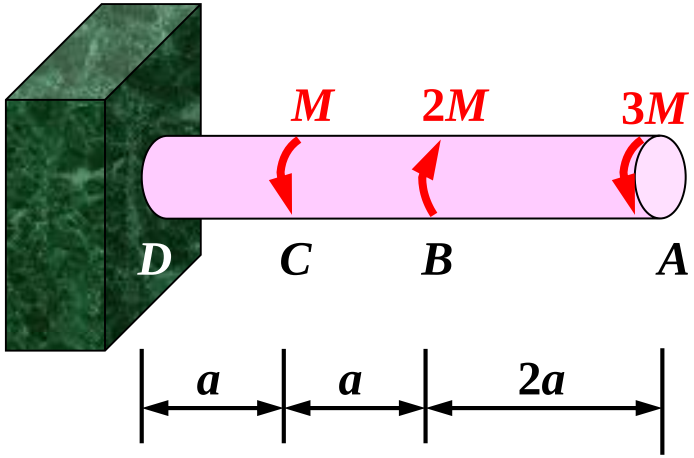
$$\Rightarrow \varphi_{CA}=\frac{704Tl}{\pi GD^4}$$

例题3.7

图示等直杆，已知直径d=40 mm，a=400 mm，材料的剪切弹性模量G=80 GPa，φ_{DB}=1°。试求：

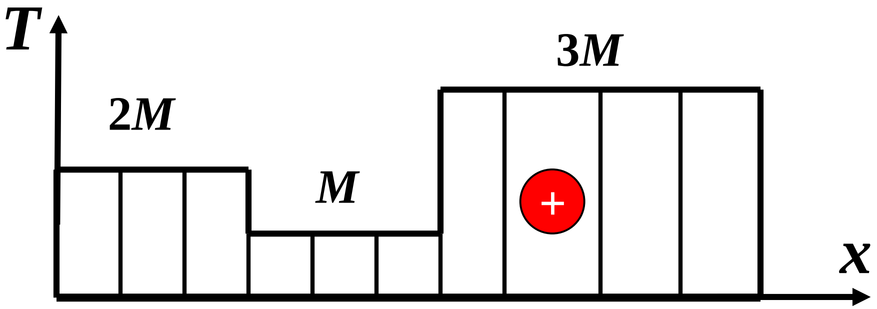
（1） AD杆的最大切应力；

（2）扭转角φ_{CA}。



解：（1）画扭矩图

T_{max}= 3M

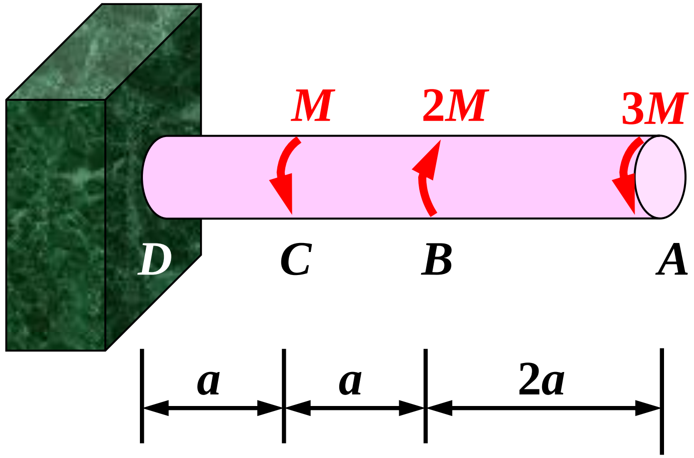


例题3.7

图示等直杆，已知直径d=40 mm，a=400 mm，材料的剪切弹性模量G=80 GPa，φ_{DB}=1°。试求：

（1） AD杆的最大切应力；

（2）扭转角φ_{CA}。

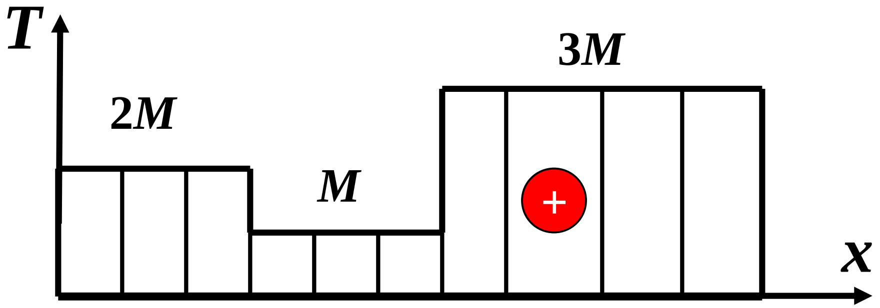


解：（2）计算外力偶矩

$$\varphi_{DB}=\varphi_{DC}+\varphi_{CB}=1^\circ$$

$$\left(\frac{2Ma}{GI_p}+\frac{Ma}{GI_p}\right)\times\frac{180^\circ}{\pi}=1^\circ$$

$$M=292\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

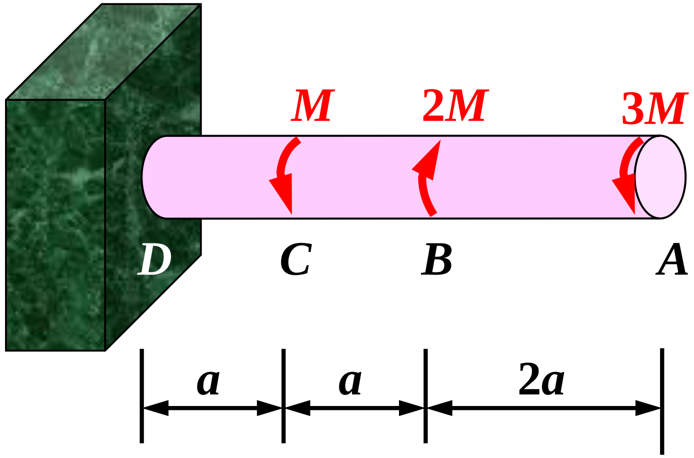


例题3.7

图示等直杆，已知直径d=40 mm，a=400 mm，材料的剪切弹性模量G=80 GPa，φ_{DB}=1º。试求：

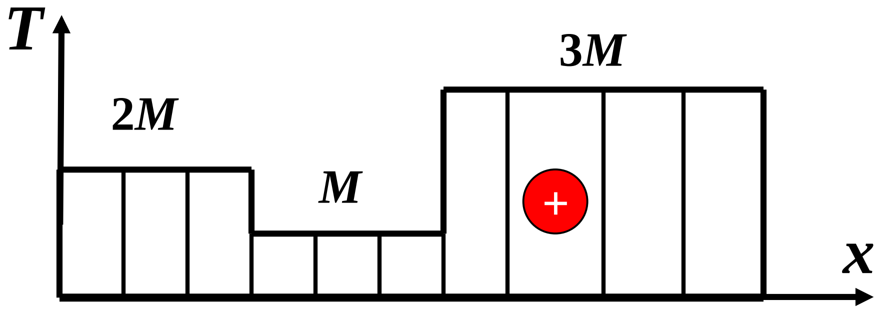
（1） AD杆的最大切应力；

（2）扭转角φ_{CA}。



解：（3）AD杆最大切应力

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_{t}}=69.7\ \text{MPa}$$

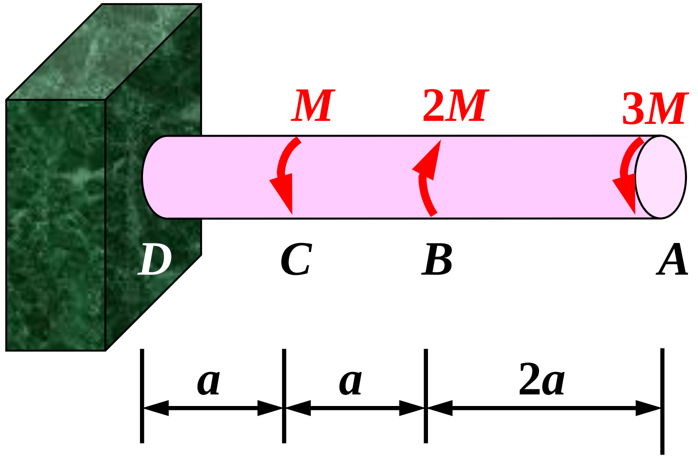


例题3.7

图示等直杆，已知直径d=40 mm，a=400 mm，材料的剪切弹性模量G=80 GPa，φ_{DB}=1°。试求：

（1） AD杆的最大切应力；

（2）扭转角φ_{CA}。



解：（4）扭转角φ_{CA}

$$\phi_{CA} = \phi_{CB} + \phi_{BA}$$

$$= \left(\frac{M \cdot a}{GI_p} + \frac{3M \cdot 2a}{GI_p}\right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2.33^\circ$$

2、扭转的刚度准则

$$\boxed{\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_{\mathrm{p}}} \le [\varphi'] \quad (\mathrm{rad/m})}$$

$$\boxed{\phi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_{\mathrm{p}}} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \le [\phi'] \quad ({}^{\circ}/\mathrm{m})}$$

$[\varphi']$：许用单位（长度）扭转角

$[\varphi']$常取在$0.15 \sim 0.3\ ({}^{\circ}/\mathrm{m})$之间；

§3.5 圆轴扭转时的变形

扭转强度准则

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \le [\tau]$$

$$W_t = \frac{1}{16}\pi D^3$$

- 已知T、D和$[\tau]$，校核强度
- 已知T和$[\tau]$，设计截面
- 已知D和$[\tau]$，确定许可载荷

扭转刚度准则

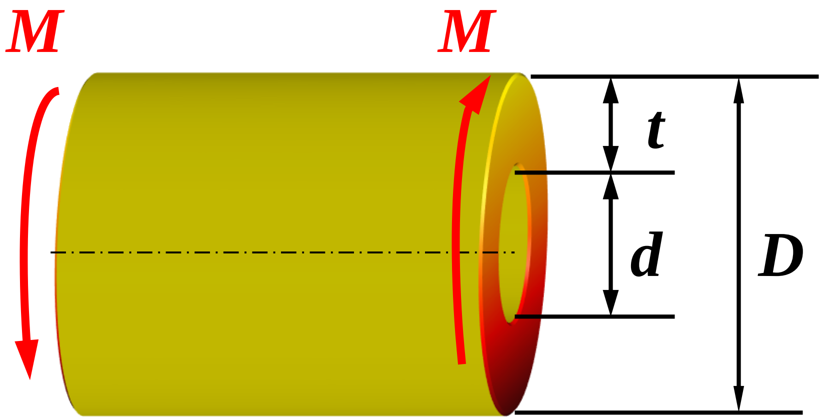
$$\varphi'_{\max} = \frac{T}{GI_p} \le [\varphi']$$

$$I_p = \frac{1}{32}\pi D^4$$

- 已知T、D和$[\varphi']$，校核刚度
- 已知T和$[\varphi']$，设计截面
- 已知D和$[\varphi']$，确定许可载荷

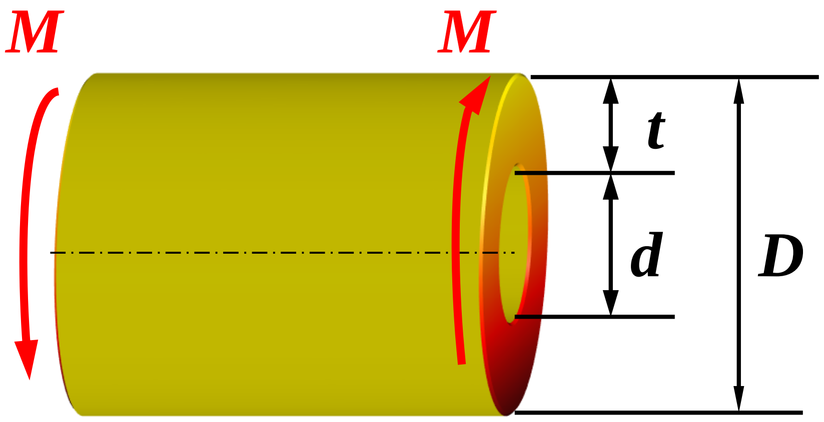
例题3.8

钢管外径D = 100 mm，壁厚 t = 3.3 mm，转矩M = 2 kN·m，许用剪应力[τ] = 100 MPa，剪切弹性模量为 G = 80 GPa，轴的许用单位扭转角[φ'] = 2°/m。试校核轴的强度和刚度。



例题3.8

解：轴的扭矩等于轴传递的转矩



$$T = M = 1.98\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

轴的内、外径之比

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{D-2t}{D} = 0.934$$

$$I_\text{p} = \frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32} = 7.83\times10^5\ \text{mm}^4$$

$$\text{W}_\text{t} = \frac{\text{I}_\text{p}}{\text{D}/2} = 2.06\times10^4\ \text{mm}^3$$

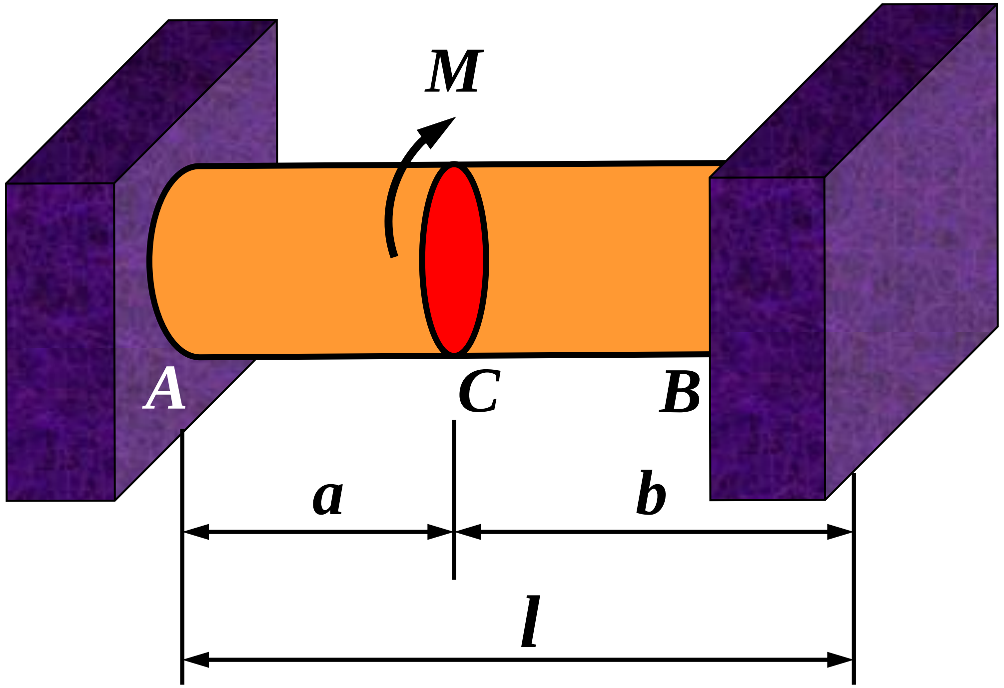
由强度条件 $\tau_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{W_\text{t}} = 96.1\ \text{MPa} < [\tau]$

由刚度条件 $\varphi_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{GI_\text{p}} \times \dfrac{180°}{\pi} = 1.81°/\text{m} < [\varphi']$

轴是安全的！

扭转的超静定问题 (例题3.9)

两端固定的圆截面杆AB，在截面C处受一个扭转力偶矩M 的作用，如图所示。已知杆的抗扭刚度GI_p，试求杆两端的支反力偶矩。



§3.5 圆轴扭转时的变形

求解超静定问题的步骤

(1) 列静力平衡方程，确定超静定度数n；

(2) 根据变形约束的条件，列变形协调方程;

(3) 利用物理方程（胡克定律），建立力与变形的关系；

(4) 联立补充方程和静力平衡方程，求解未知力。

例题3.9

解：去掉约束，代之以支反力偶矩

$$\sum M_x = 0$$

$$M_A + M_B - M = 0$$

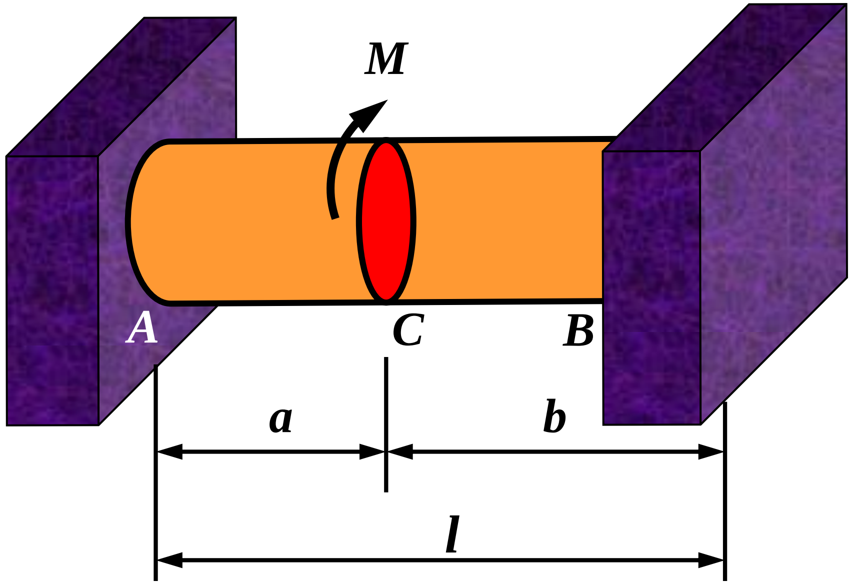
这是一次超静定问题，

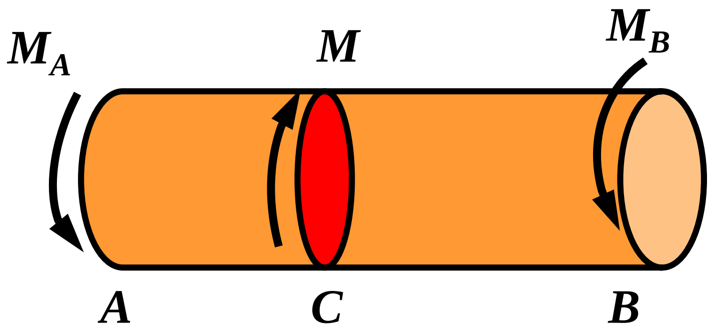
须建立一个补充方程。

杆的变形协调条件是：

C截面相对于两固定端A和B

的相对扭转角相等。





例题3.9

解： （1）变形几何方程

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC}$$

（2）推导补充方程

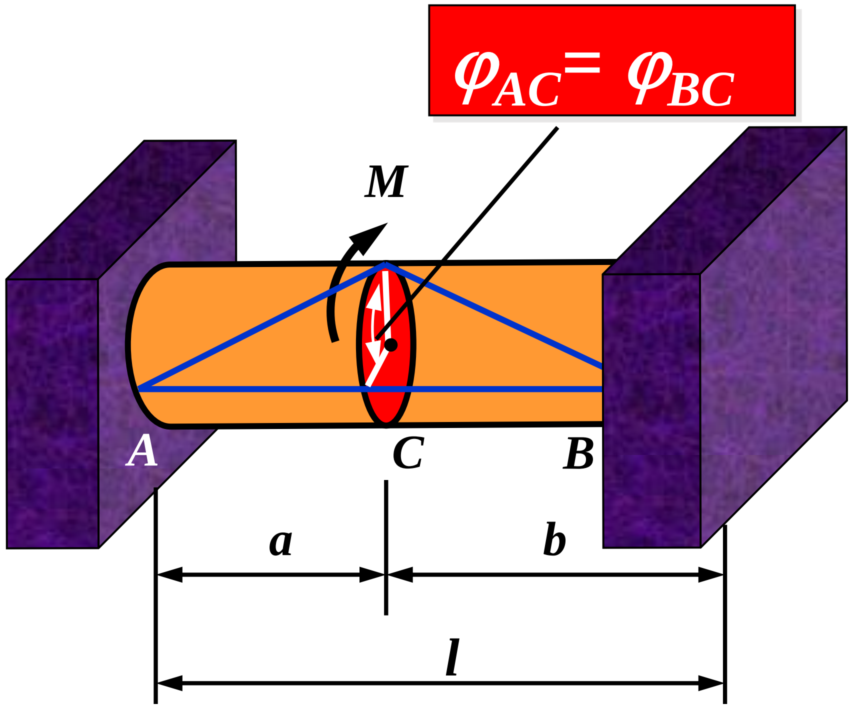
$$\varphi_{AC} = \frac{T_1 a}{GI_p} = \frac{M_A a}{GI_p}$$

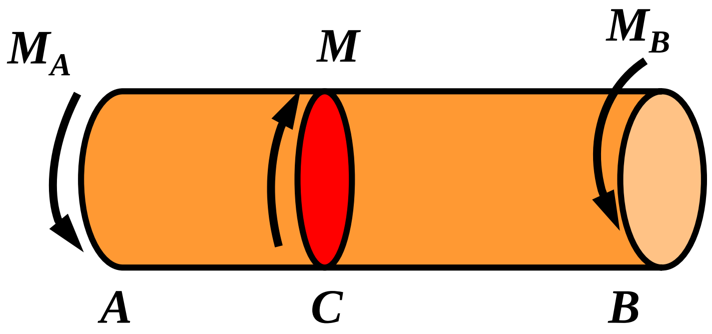
$$\varphi_{BC} = \frac{T_2 b}{GI_p} = \frac{M_B b}{GI_p}$$

$$M_B = \frac{M_A a}{b}$$

$$M_A + M_B - M = 0$$

$$M_A = Mb/l，\quad M_B = Ma/l$$





§3.7 非圆截面杆扭转的概念

圆截面杆扭转时的应力和变形公式，均建立在平面假设的基础上。

平面假设

圆轴扭转横截面刚性转动，形状和大小不变，相邻截面间距不变

变形协调方程

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

物理方程

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

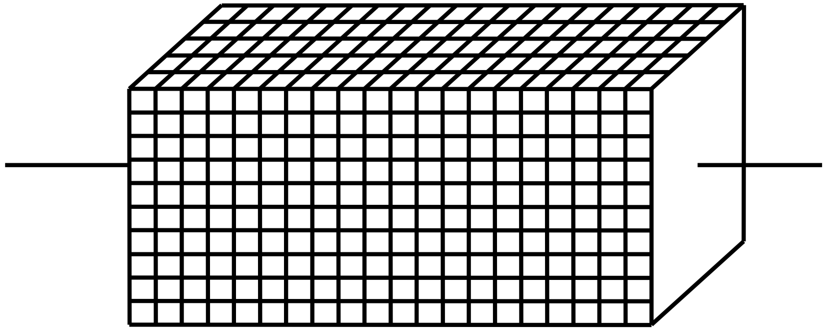
静力关系

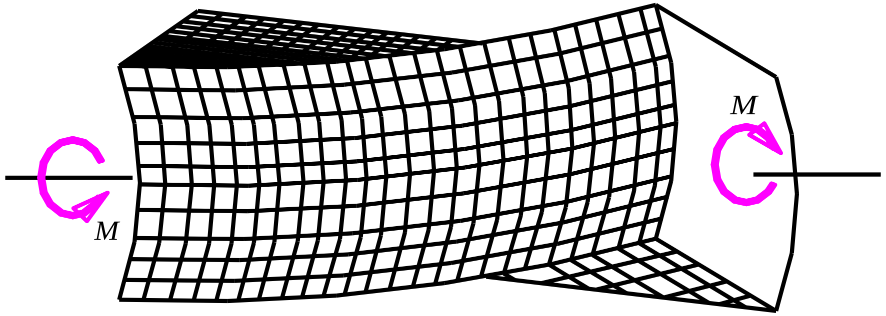
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_\mathrm{p}}$$

$$\boxed{\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_\mathrm{p}} \qquad \varphi = \frac{Tl}{GI_\mathrm{p}}}$$

§3.7 非圆截面杆扭转的概念

对于非圆截面杆，平面假设不成立



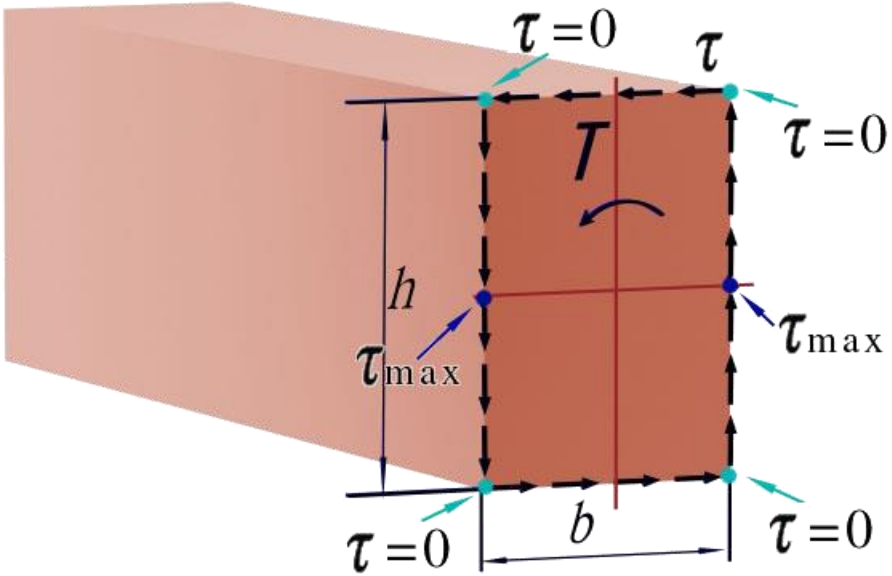


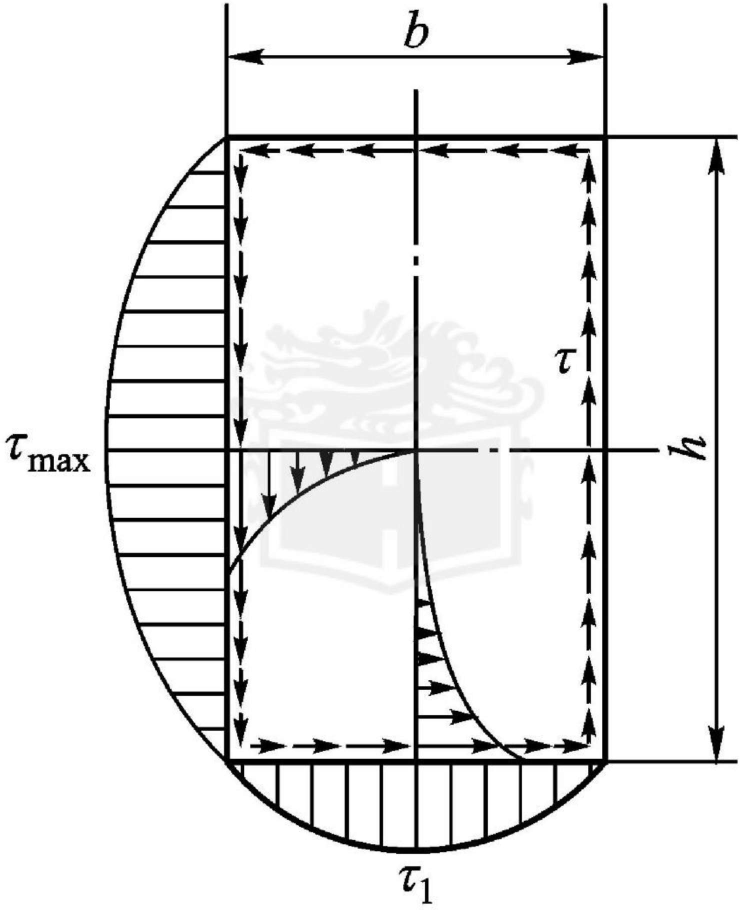
受扭时横截面不再保持为平面，杆的横截面已由原来的平面变成了曲面，这一现象称为截面翘曲。

因此，圆轴扭转时的应力、变形公式对非圆截面杆均不适用。

弹性力学会给出答案

矩形截面杆扭转 - 切应力分布





矩形截面扭转时，角点切应力为零

边缘各点的切应力形成与边界相切的顺流

§3.7 非圆截面杆扭转的概念

整个横截面上的最大切应力发生在长边的中点。

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_{t}}$$

$$W_{t}=\alpha hb^{2}$$

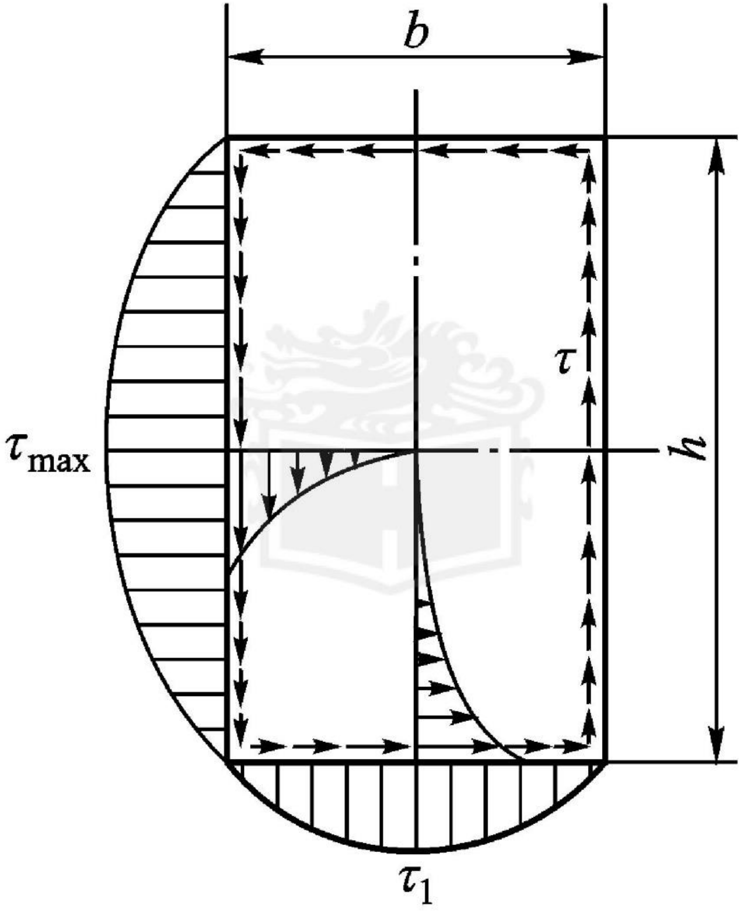
W_{t}：抗扭截面系数

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_{t}}$$

$$I_{t}=\beta hb^{3}$$

I_{t}： 极惯性矩

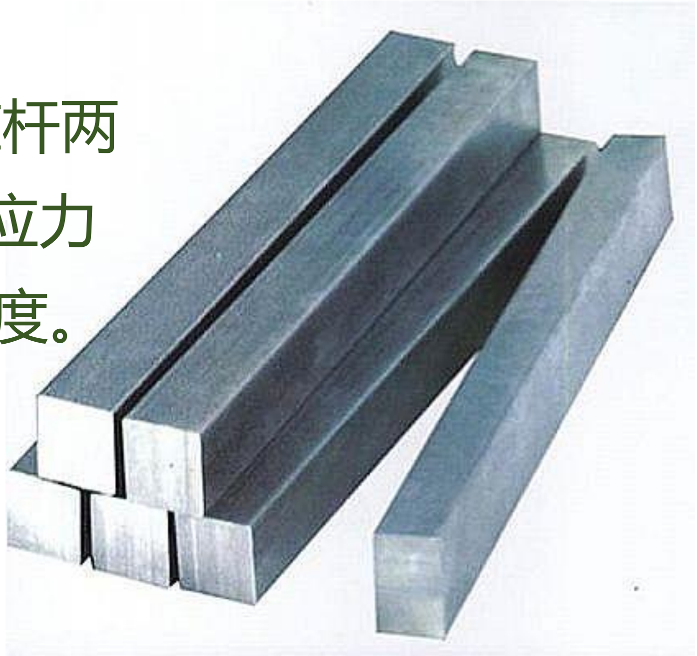
GI_{t}：抗扭刚度



$$\tau_{1}=\nu\tau_{\max}$$

例题3.11

矩形截面的等直钢杆, 横截面尺寸h =100 mm, b =50 mm, 长度l =2 m，在杆两端作用一对M = 4 kN m的扭转力偶。钢的剪切模量G =80 GPa，许用切应力[τ] =100 Mpa，许可单位长度扭转角[φ'] =1°/m。试校核该杆的强度和刚度。



解：横截面上的扭矩 $T = M = 4\ \ \mathrm{kN\cdot m}$

$$\frac{h}{b} = 2$$ 由表3.2查得 $\alpha = 0.246 \quad \beta = 0.229$

$$I_t = \beta h b^3 = 0.229\times 0.1\times 0.05^3 = 286\times 10^{-8}\ \ \mathrm{m}^4$$

$$W_t = \alpha h b^2 = 0.246\times 0.1\times 0.05^2 = 61.6\times 10^{-6}\ \ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{4000}{61.6\times 10^{-6}} = 65\ \ \mathrm{MPa} < [\tau]$$

$$\phi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{4000}{80\times 10^9\times 286\times 10^{-8}} = 0.01745\ \ \mathrm{rad/m} = 1^\circ/\mathrm{m} \le [\phi']$$

杆是安全的!

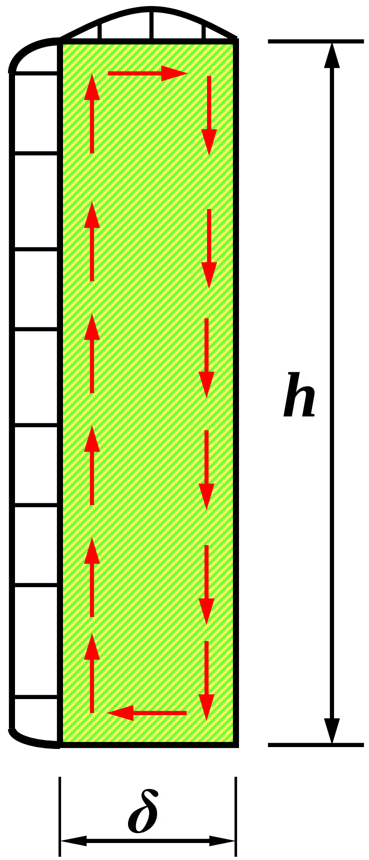
§3.7 非圆截面杆扭转的概念

狭长矩形截面（h>>b）

沿长边各点，除靠近顶点处，切应力数值均相等

狭长矩形截面的I_t和W_t

$$I_t = \frac{1}{3}h\delta^3 \qquad W_t = \frac{1}{3}h\delta^2$$

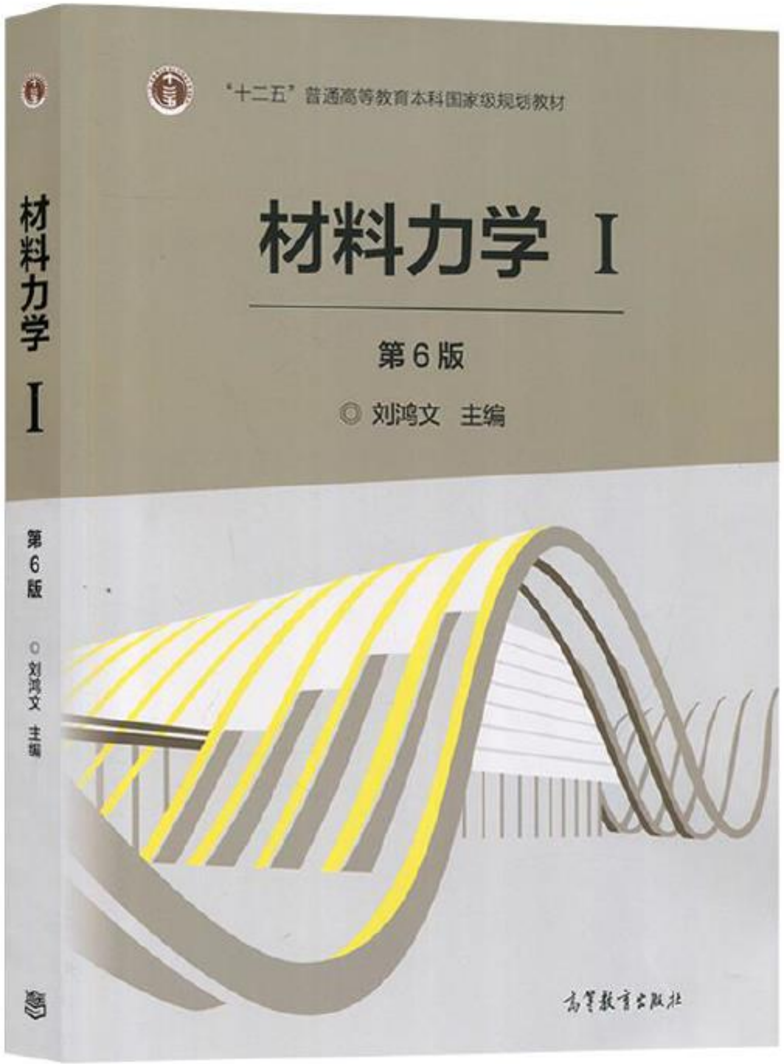


思考：纸张卷成圆筒，抗扭能力如何变化?

薄壁圆筒 $$\tau = \frac{T}{2\pi R^2\delta}$$

$$I_p = 2\pi R^3\delta \qquad W_t = 2\pi R^2\delta$$

作业



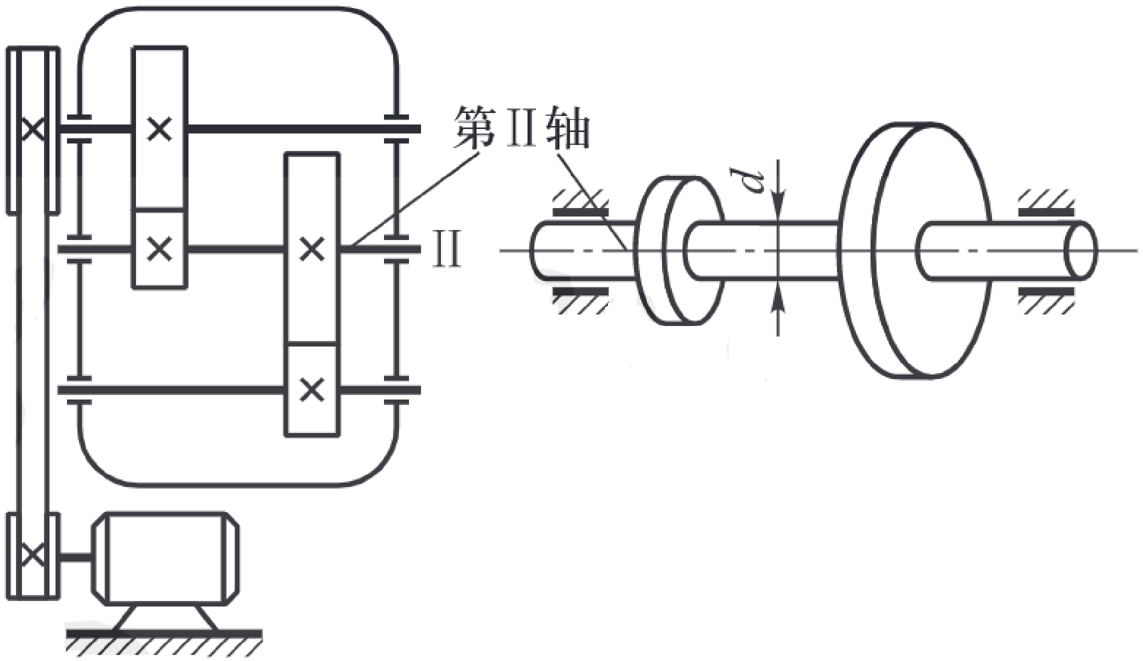
3.10 （强度准则）

3.24 （超静定问题）

4.2日(下周二）之前交

作业

3.10 机床变速箱第II轴如图所示，轴所传递的功率为P = 5.5 kW，转速n = 200 r/min,材料为45钢，[τ] = 40 MPa。若该轴为实心圆轴，试按强度条件初步设计轴的直径。



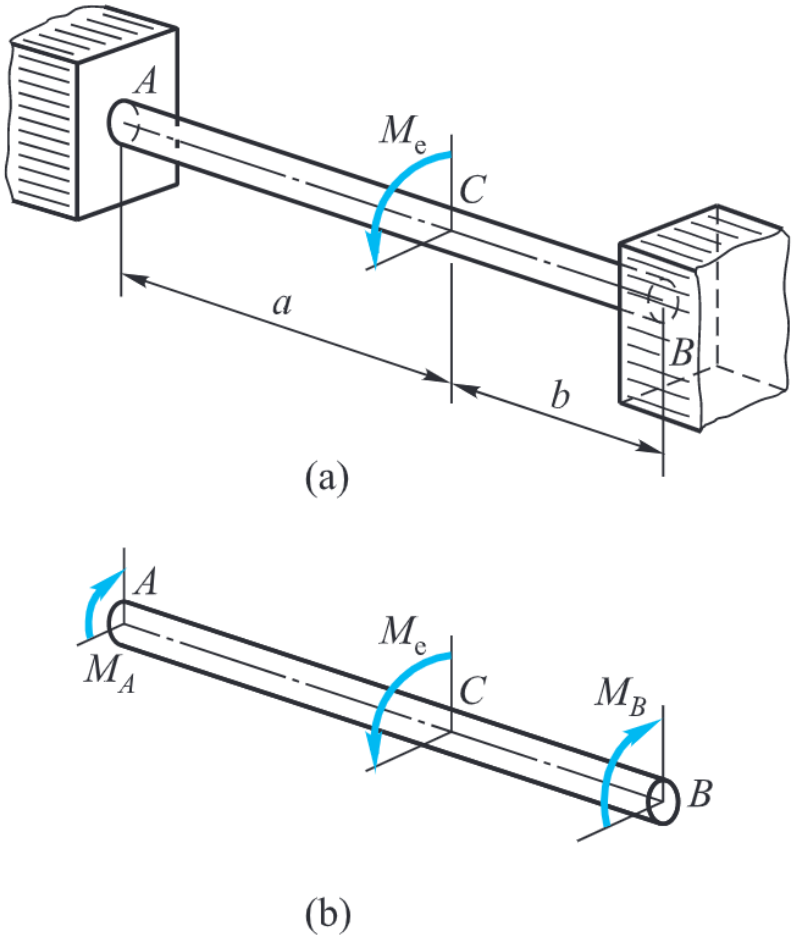
题 3.10 图

作业

3.24 两端固定的圆轴AB，在截面C处受扭转力偶矩M_e作用。试求两固定段的反作用力偶矩M_A和M_B。

提示：轴的受力图如图b所示。若以φ_{AC}表示截面C对A端的转角，φ_{CB}表示截面B对C的转角，则B对A的转角应是φ_{AC}和φ_{CB}的代数和。但因B，A两端皆是固定端，故φ_{AB}应等于0。于是得变形协调方程

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0$$



题 3.24 图

谢谢大家！

下次内容

第四章 弯曲内力