# 材料力学期末归纳 by 喵星考拉 2018.6

**胡克定律** $\sigma=E\varepsilon$，$\tau=G\gamma$，$\mu=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$，$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$

**圆杆参数**：$I_P=\frac{\pi D^4}{32}$，$W_t=\frac{\pi D^3}{16}$，$I=\frac{\pi D^4}{64}$，$W=\frac{\pi D^3}{32}$，$i=\frac{D}{4}$

**方梁**：$I_z=\frac{bh^3}{12}$，$W=\frac{bh^2}{6}$，$I_y=I_{yc}+a^2A$（空心圆筒乘$(1-\alpha^4)$）

**构件要求**：强度、刚度、稳定性

**变形固体基本假设**：连续、均匀、各向同性

**外力分类**：表面力/体积力，分布力/集中力，静载荷/动载荷

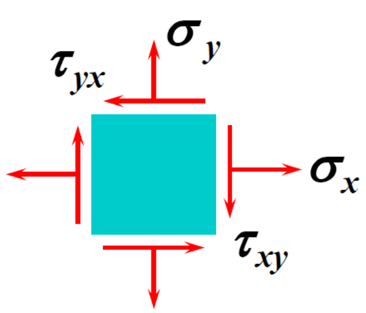
**原始尺寸原理**：由于是小变形，忽略变形带来的受力变化

**圣维南原理**：距外力作用部位略远处，应力分布同外力作用方式无关，只与等效力有关。

**平面假设**：变形前为平面的横截面，变形后仍保持为平面且垂直于轴线

**应力应变分析**

二向应力解析法：

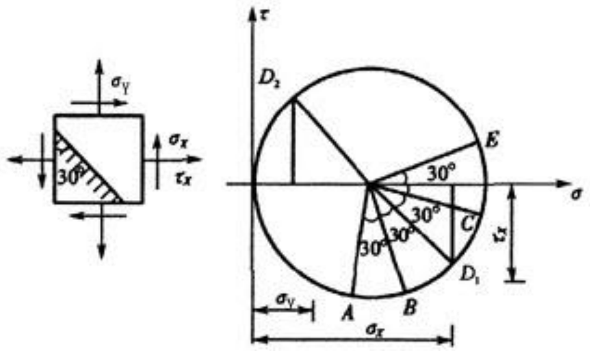



$$\sigma_{max,min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max,min}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

正应力极值点 $\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$，切应力极值点 $\tan 2\alpha_1=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$

**画应力圆的办法**：量取两个方向的正应力和切应力（切应力取矩顺时针为正），分别作于$\sigma-\tau$坐标轴上，以其为直径作应力圆。应力圆上的$2\alpha$角对应图形上的$\alpha$角




**应力迹线**：实线—主拉应力（第一主应力），虚线—主压应力（第三主应力），水泥不抗拉，故钢筋应尽可能沿第一主应力方向分布

**三向应力状态**：各个面的应力状态分布在两个小应力圆和一个大应力圆之间。

**最大切应力**：$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$（注意平面应力状态和三向应力状态下，也就是问空间最大切应力和平面最大切应力，数值不一样）

**广义胡克定律**：小变形下，线应变只取决于线应力，切应变只取决于切应力

$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\right]$，$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$，以此类推

**体应变** $\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{3(1-2\mu)}{E}\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=\frac{\sigma_m}{K}$

$\sigma_m$为应力平均值，K为体积弹性模量，此为体积胡克定律

**复杂应力状态下的应变能密度**：

1 应变能和加力次序无关

2 每一主应力与相应主应变之间仍保持线性关系

应变能密度 $v_\varepsilon=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right]$

体现在两个方面：体积改变能密度$v_v$，畸变能密度$v_d$

体积改变能密度 $v_v=\frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m=\frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2=\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)$

畸变能密度 $v_d=\frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$

**强度理论概述**：复杂应力下的材料失效

塑性材料屈服/三向压应力相近（三四强度理论）

脆性材料断裂/三向拉应力相近（一二强度理论）

$\sigma_{r1}=\sigma_1$（max拉应力），$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$（max伸长线应变）

$\sigma_{r_3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$（max切应力）

$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$（max畸变能密度）

莫尔强度理论：以拉伸失效和压缩失效的两个应力圆作外公切线，如果应力状态落在外公切线外侧，则认为材料失效。

**拉伸** 直杆轴向拉压斜截面应力：垂直方向正应力最大，45度方向剪应力最大：$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha$ $\tau_\alpha=\sigma\cos\alpha\sin\alpha$

低碳钢拉伸的力学性能：弹性-屈服-强化-局部变形

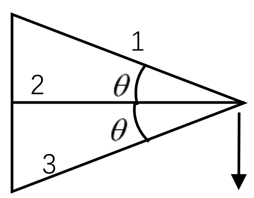
四个极限 比例p,弹性e,屈服s,强度b

★无明显屈服极限的塑性材料，将产生0.2%**塑性应变**的应力作为屈服指标$\sigma_{p0.2}$

伸长率大于5%的材料为塑性材料

拉压变形$\Delta l=\frac{Fl}{EA}$，应变能密度$v_\varepsilon=\frac{\sigma^2}{2E}$，$W=\frac{F^2l}{2EA}$

右图三杆超静定：$\delta_3-\delta_1=2\delta_2\cos\theta$



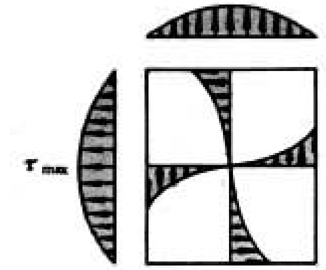

**扭转**：切应力互等定理：相互垂直的两个面上切应力成对存在，大小相等，方向垂直于两平面的交线并共同指向或背离交线。

薄壁圆筒 $\tau=\frac{M_e}{2\pi r^2\delta}$，$v_\varepsilon=\frac{\tau^2}{2G}$，$\tau=\frac{T\rho}{I_P}$ $\tau_{max}=\frac{TR}{I_p}=\frac{T}{W_t}$

角应变 $\gamma=\frac{r\varphi}{l}$，端面转角 $\varphi=\frac{Tl}{GI_P}$，最大扭转角度

$\varphi'=\frac{\varphi}{l}=\frac{T}{GI_P}\leq[\varphi']$（算出来是弧度记得转成角度）

**非圆截面杆扭转**，平面假设不再成立，横截面上边缘各点切应力都和截面相切，截面角上无应力。




**弯曲内力**：剪力对型心取矩决定正负，弯矩让梁凹下/曲率增加为正（画内侧）

弯矩是剪力的积分，剪力是载荷集度的积分，集中力导致剪力的突变，力偶导致弯矩的突变

弯曲正应力 $\sigma=\frac{My}{I_z}$，$\sigma_{max}=\frac{M}{W}$

剪力：假设各点切应力平行于剪力，切应力沿截面宽度均匀分布

矩形截面 $\tau=\frac{F_s}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$，$\tau_{max}=\frac{F_sh^2}{8I_z}$，工字钢腹板承受近均匀切应力

**挠曲线微分方程**：$\theta\approx\tan\theta=\frac{dw}{dx}$，$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M}{EI}$（忽略剪力小变形）

简支梁只要挠曲线上没有拐点，总可以用跨度中点挠度代替最大挠度

**梁在简单载荷下的变形：（注意挠度正负）**

**悬臂梁**，左A固定右B悬空，x以左为原点右为正：

右端力偶 $w=\frac{M_ex^2}{2EI}$，$\theta_B=\frac{M_el}{EI}$，$w_B=\frac{M_el^2}{2EI}$

右端集中力 $w=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$，$\theta_B=\frac{Fl^2}{2EI}$，$w_B=\frac{Fl^3}{3EI}$

均布载荷 $w=\frac{qx^2}{24EI}(x^2-4lx+6l^2)$，$\theta_B=\frac{ql^3}{6EI}$，$w_B=\frac{ql^4}{8EI}$

**简支梁**，左A右B，x以左为原点右为正：

左端力偶

$w=\frac{M_ex}{6EIl}(l-x)(2l-x)$，$\theta_A=\frac{M_el}{3EI}$，$\theta_B=\frac{M_el}{6EI}$

$x=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)l$ 处 $w_{max}=\frac{M_el^2}{9\sqrt{3}EI}$，中点 $w_{\frac{l}{2}}=\frac{M_el^2}{16EI}$

中间力

$w=\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)\left(0\leq x\leq\frac{l}{2}\right)$，$\theta_A=\theta_B=\frac{Fl^2}{16EI}$，$w_{max}=\frac{Fl^3}{48EI}$

均布载荷 $w=\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$，$\theta_A=\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}$，$w_{max}=\frac{5ql^4}{384EI}$

**组合变形——偏心压缩**

假设压力作用点坐标$(y_F,z_F)$，造成弯矩$M_z=Fy_F$，$M_y=Fz_F$

组合应力 $\sigma=-\frac{F}{A}\left(1+\frac{y_Fy}{i_z^2}+\frac{z_Fz}{i_y^2}\right)$，中性轴 $\frac{y_Fy_0}{i_z^2}+\frac{z_Fz_0}{i_y^2}=-1$

截距 $a_y=-\frac{i_z^2}{y_F}$，$a_z=-\frac{i_y^2}{z_F}$，离中性轴最远的点取到应力极值。

过截面型心的斜向弯曲力和yoz平面的y轴夹角：$\tan\theta=\frac{I_yM_z}{I_zM_y}$

**压杆稳定性问题**

小变形下的挠曲线微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M}{EI}=-\frac{F}{EI}w$

解微分方程得临界压力：$F=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}$ （欧拉公式），其中I为最小惯性矩，$\mu l$ 为相当长度。长度因数$\mu$：两端铰支$\mu=1$，一段固定一端自由$\mu=2$，两端固定$\mu=\frac{1}{2}$，一端固定另一端铰支$\mu=0.7$。

临界压应力$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}$，其中$\lambda=\frac{\mu l}{i}$称为柔度或细长比。（线弹性小变形）大柔度杆才可以使用欧拉公式，条件要求$\sigma_{cr}<\sigma_p$，即$\lambda\ge\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}=\lambda_p$

如果$\lambda<\lambda_p$，欧拉公式不再适用，一般使用经验公式$\sigma_{cr}=a-b\lambda$

**动载荷**

动静法：使用达朗贝尔原理进行分析。

杆件受弯曲时的变形：首先，所有承受变形的杆件都可以视为弹簧

$\Delta l=\frac{Fl}{EA}$，$k_1=\frac{EA}{l}$，　$w=\frac{Fl^3}{48EI}$，$k_2=\frac{48EI}{l^3}$，　$\varphi=\frac{M_el}{GI_p}$，$k_3=\frac{GI_p}{l}$

假设静载变形$\Delta_{st}$，静载载荷$P$，冲击到静止动能$T$

则有冲击动荷因数$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}$

从而$\Delta_d=k_d\Delta_{st}$，$F_d=k_dP$ ，$\sigma_d=k_d\sigma_{st}$

若冲击是由物体从高度h下落导致的，则有$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$

系统受到横向重为P的物体冲击力时，$k_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$ ，静载重力P

由于忽略了其他能量的转换，上述算出来的结果都偏大。

**交变应力**

低于屈服极限，长期反复作用下，没有明显塑性变形突然断裂

微观裂纹逐渐扩展为宏观裂纹，削弱至一定极限时突然断裂，构件断面分为光滑区和粗糙区，光滑区是由循环的压紧-松开造成的

循环特征/应力比：$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$，$r=0$称为正脉动循环

平均应力$\sigma_m=\frac{1}{2}(\sigma_{\min}+\sigma_{max})$ 应力幅$\sigma_a=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{\min})$

疲劳极限：应力-寿命曲线（S-N曲线）

随着应力水平的降低，循环次数迅速增加；应力水平降低到某个值时，可以循环无穷多次，这一极限称为疲劳极限。

对称循环的疲劳极限记为$\sigma_{-1}$

钢式样如果循环$10^7$次之后仍然不会破坏，就不会再破坏，所以把循环$10^7$下仍未疲劳的最大应力规定为钢材疲劳极限，有色金属没有明显直线部分，一般定义$10^8$为条件疲劳极限。

影响疲劳极限的因素：

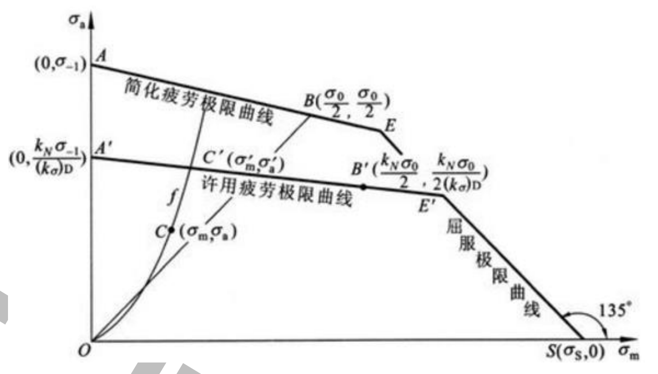
1、构件外形（带来应力集中），系数$K_\sigma$ 或 $K_\tau$ （大于1）

2、构件尺寸（大试样处于高应力的晶粒更多更容易破坏）

尺寸因数$\varepsilon_\sigma$或$\varepsilon_\tau$（小于1）（大试样疲劳极限除以小试样）

3、表面质量（粗糙的容易破坏）表面质量因数$\beta$（粗糙小于1，热处理大于1）

综合以上因数得对称循环疲劳极限$\sigma_{-1}^0=\frac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}$




选取平均应力$\sigma_m$为横轴，应力幅$\sigma_a$为纵轴的坐标系。每个应力循环对应一个点，xy坐标值相加代表该循环最大应力，斜率代表$\tan\theta=\frac{1-r}{1+r}$，静载在横轴上，脉动循环在y=x上，对称循环在纵轴上。三点连线，范围内为不疲劳区域。

**能量方法**：应变能的计算

轴向拉压$V_\varepsilon=\frac{F^2l}{2EA}$，$V_\varepsilon=\int_l\frac{F_N^2(x)}{2EA}\mathrm{d}x$

扭转$V_\varepsilon=\frac{M_e^2l}{2GI_p}$，$V_\varepsilon=\int_l\frac{T^2(x)}{2GI_P}\mathrm{d}x$

弯曲（忽略剪力）$V_\varepsilon=\int_l\frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

当三者相互独立时，组合变形的应变能为三者的叠加。

应变能普遍形式：$V_\varepsilon=W=\frac{1}{2}F_1\delta_1+\frac{1}{2}F_2\delta_2+\cdots+\frac{1}{2}F_n\delta_n$ ，其中每个$\delta_i$均为全部里加上去之后形成的位移最终值（克拉贝依隆原理）（线弹性，小变形）

注意功叠加时变力做功恒力做功的区别，线弹性下变力做功乘1/2

功的互等定理：$F_1\delta_1'+F_2\delta_2'=F_3\delta_3'+F_4\delta_4'$

位移的互等定理：只有$F_1$和$F_3$且相等时，$\delta_1'=\delta_3'$

上述互等定理的力和位移都是广义的，可以换成力矩和角位移。

卡氏定理

$\delta_i=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$ 应变能对载荷的偏导数等于载荷作用点沿载荷方向的位移

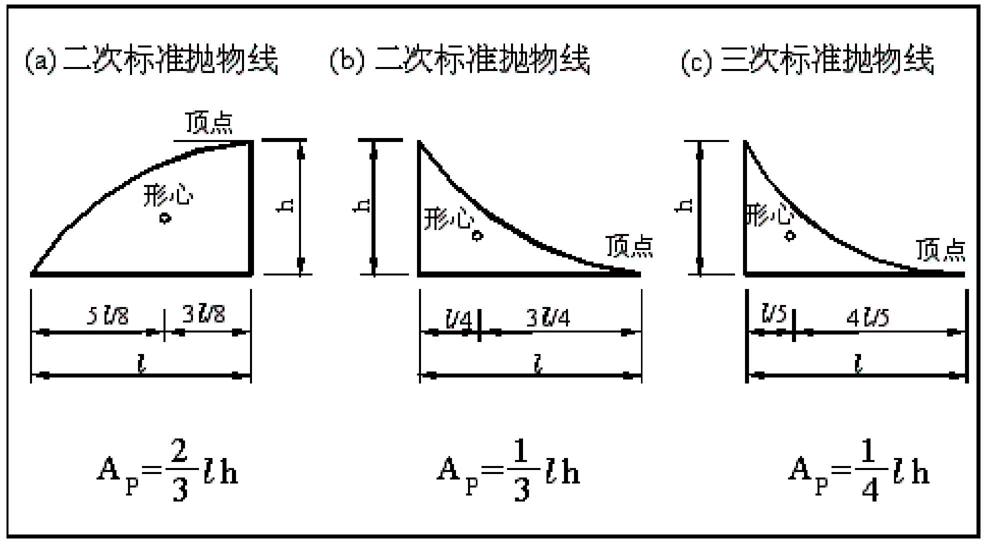
如果想求位移没有力，就先加上力再让它等于0。

单位载荷法：$\Delta=\int_l\frac{F_N(x)\overline{F_N}(x)}{EA}\mathrm{d}x+\int_l\frac{T(x)\bar{T}(x)}{GI_P}\mathrm{d}x+\int_l\frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$

求杆弯曲的图乘法：$\Delta=\frac{1}{EI}\int M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x=\frac{\omega\cdot\bar{M}_c}{EI}$

其中$\omega$为原弯矩图的面积（过顶点的抛物线是2/3、1/3）

$\bar{M}_c$为原弯矩图型心的x坐标对应于单位载荷时的弯矩




注意用单位载荷法时，需要先求出所有支座反力才能求出正确弯矩

**超静定问题**

判断超静定次数（一个平面封闭刚架为三次超静定）

概念：基本静定系，相当系统

分析方法：力法（基于卡氏定理，不需要找几何关系分析）

先解除多余约束换成力，然后求出应变能，应变能对力求导为0（位置约束），从而得到变形协调方程

力法的正则方程：$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$

N次超静定基本形式：$\delta_{i1}X_1+\delta_{i2}X_2+\ldots+\delta_{in}X_n+\Delta_{iF}=0$

$X_j$—多余未知力 $\delta_{ij}$—基本静定系上$X_j=1$单独作用时在$X_i$作用点沿$X_i$方向的位移 $\Delta_{iF}$—基本静定系上只有原载荷引起的$X_i$作用点沿其方向的位移

解题思路：先用单位载荷法算出所有 $\delta_{ij}$，然后代入求解

**对称性应用**：对称结构，对称性截面上只有轴力和弯矩，反对称结构只有剪力

**三弯矩方程**：将梁拆成一段段用铰支连起来的梁，弯矩作为未知力，对每一段应用三弯矩方程。

$$\delta_{n(n-1)}X_{n-1}+\delta_{nn}X_n+\delta_{n(n+1)}X_{n+1}+\Delta_{nF}=0$$

适配课程：浙江大学《材料力学（乙）》

适配教材：《材料力学》，刘鸿文

原创：喵星考拉 修订：张博伦

欢迎扫描二维码关注公众号获取更多资讯

祝各位同学取得好成绩