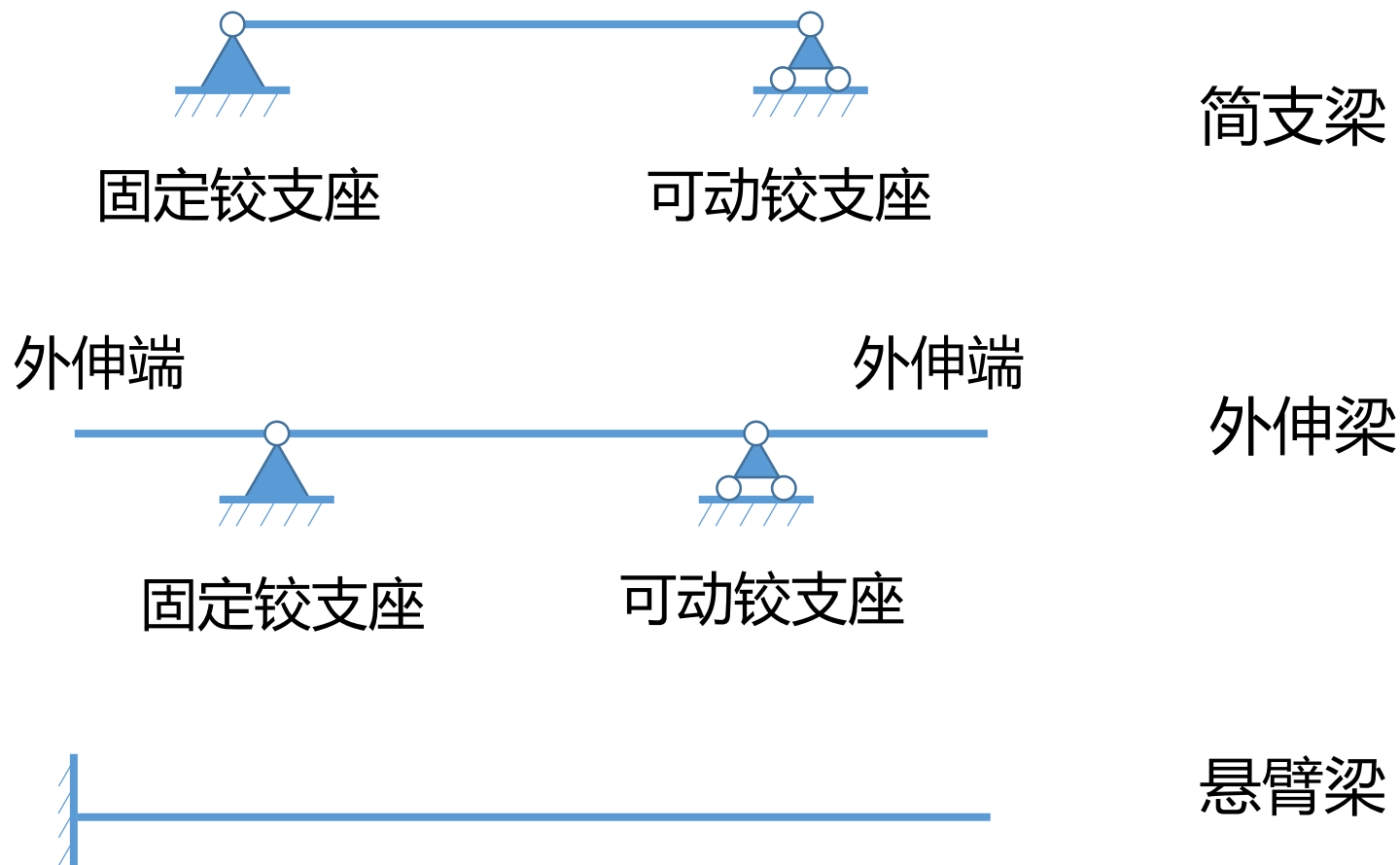


第四章 弯曲内力



重要概念的回顾与强化

受弯杆件的简化

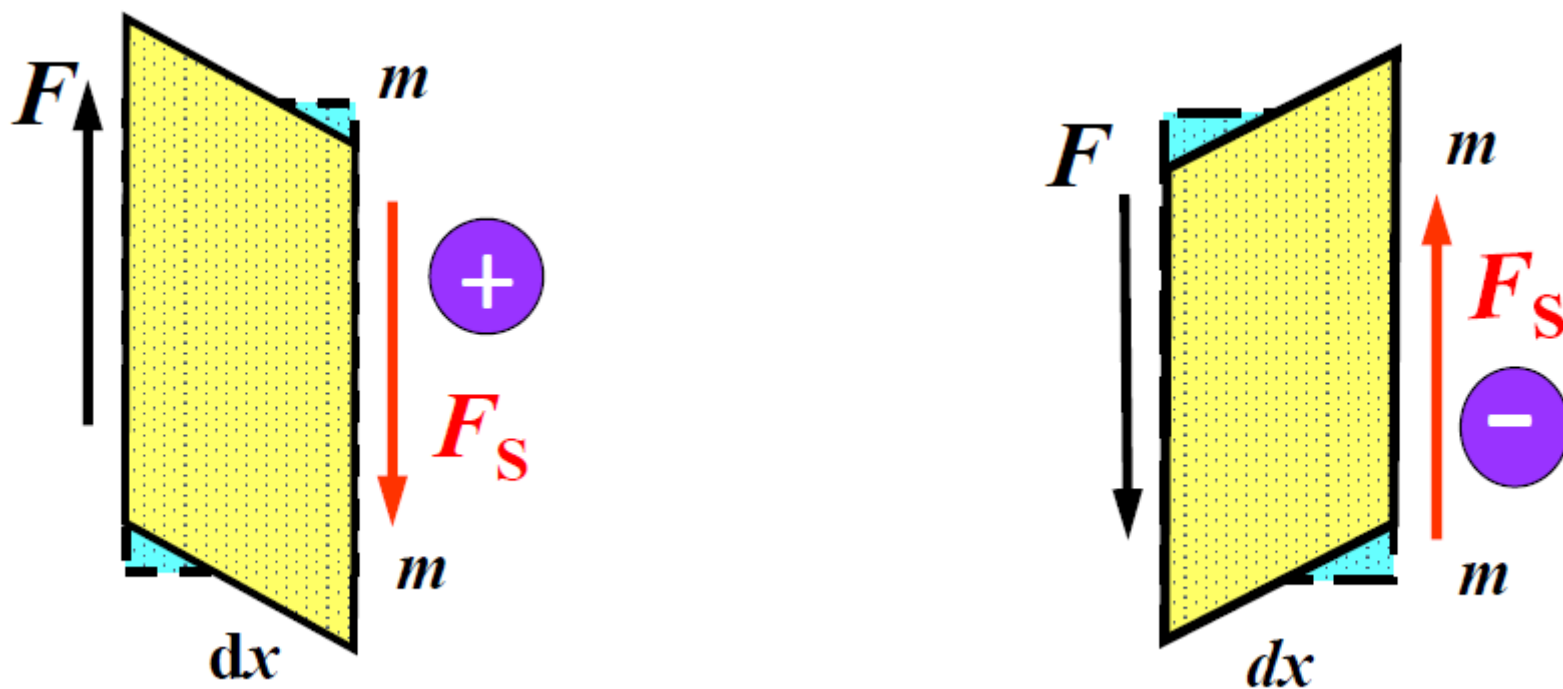


静定梁: 所有支座反力可由平衡方程求出。

重要概念的回顾与强化

剪力 (F_s)：与横截面相切的分布内力系的合力

剪力符号规定：使要分析的对象有左端向上而右端向下的运动趋势，倾向发生顺时针运动

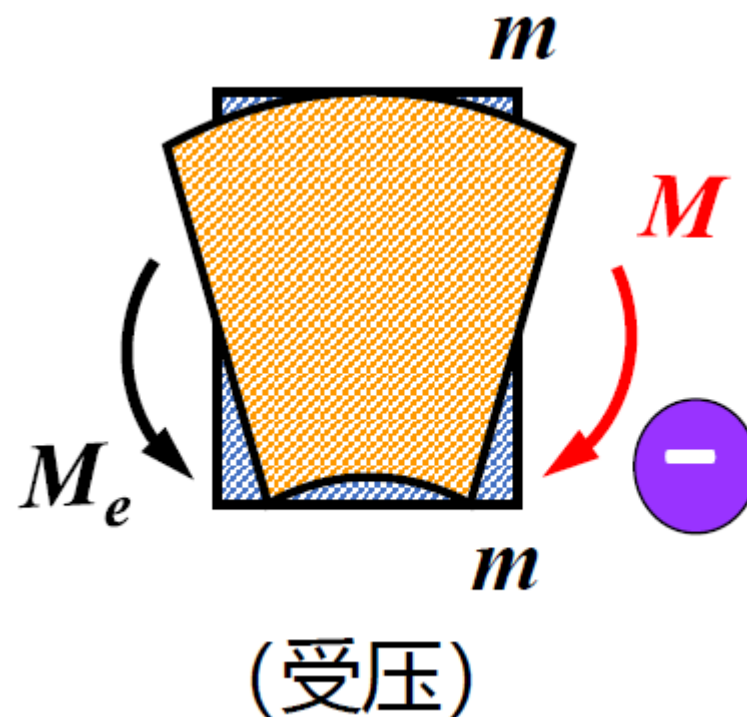
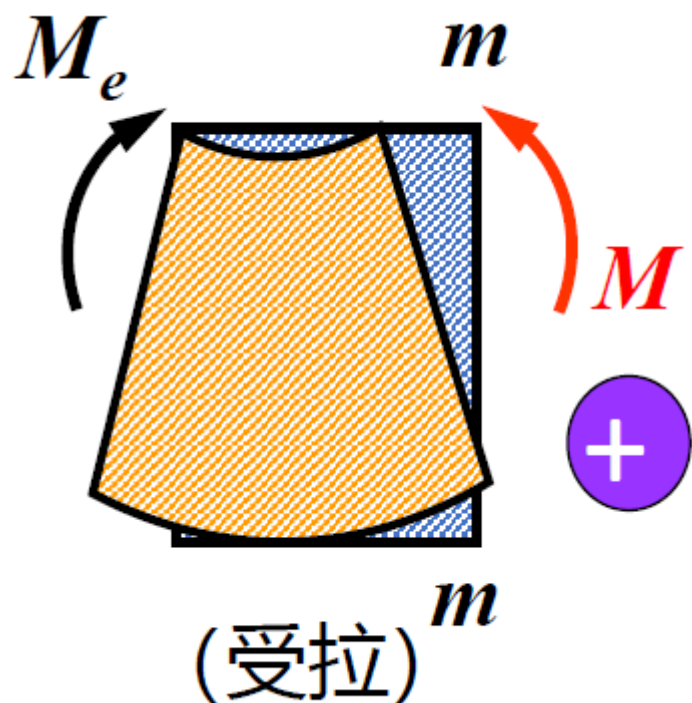


左上右下为正；反之为负

重要概念的回顾与强化

弯矩 (M)：与横截面垂直的分布内力系合成的力矩

弯矩符号规定：当梁变形时，横截面 $m-m$ 处弯曲变形凸向下时，截面 $m-m$ 的弯矩为正



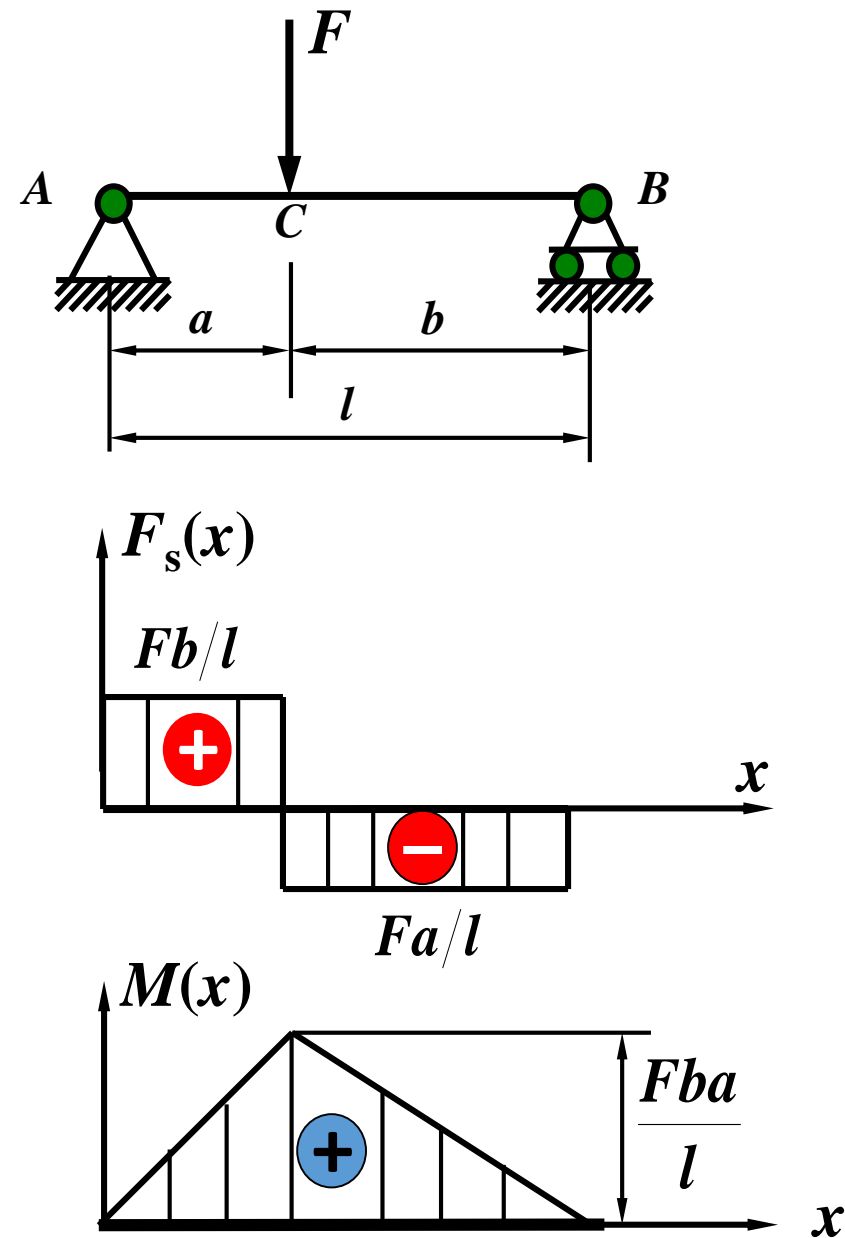
上压下拉(上凹下凸) 为正；反之为负。

重要概念的回顾与强化

剪力图和弯矩图：以平行于梁轴的横坐标 x 表示横截面的位置，以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩，这种图线分别称为剪力图和弯矩图。

讨论：

- 在集中载荷作用处的左、右两侧截面上剪力有突变。突变值等于集中荷载 F 。
- 集中载荷作用处弯矩形成尖角，弯矩值最大。



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.5 图示的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试作此梁的的剪力图和弯矩图。

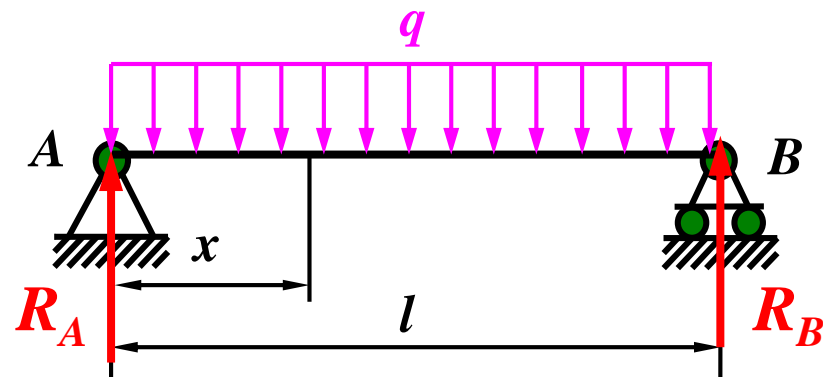
解：(1) 求支反力

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M(x) = R_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.5 图示的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试作此梁的的剪力图和弯矩图。

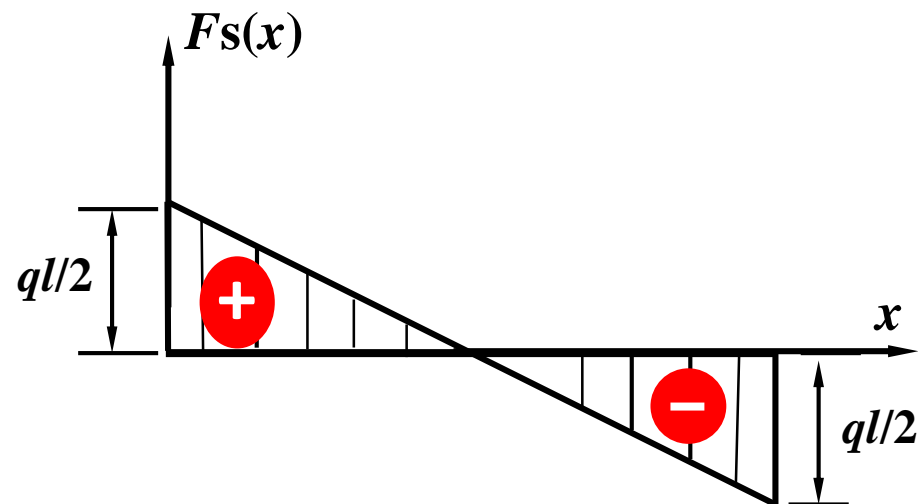
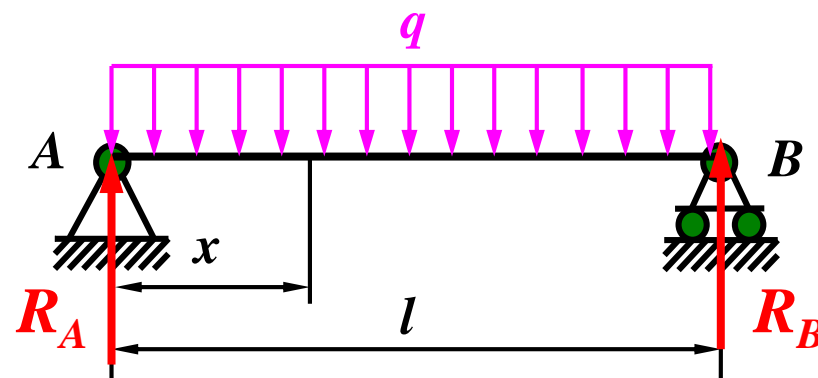
解：(3) 剪力图

$$F_S(x) = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

剪力图为一直线

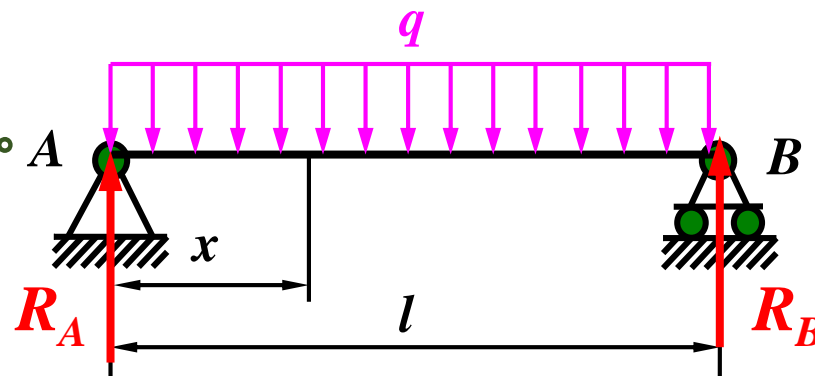
$$x=0 \text{ 处, } F_S = \frac{ql}{2}$$

$$x=l \text{ 处, } F_S = -\frac{ql}{2}$$



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.5 图示的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试作此梁的的剪力图和弯矩图。



解：(4) 弯矩图

$$M(x) = R_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$

弯矩图为一二次抛物线

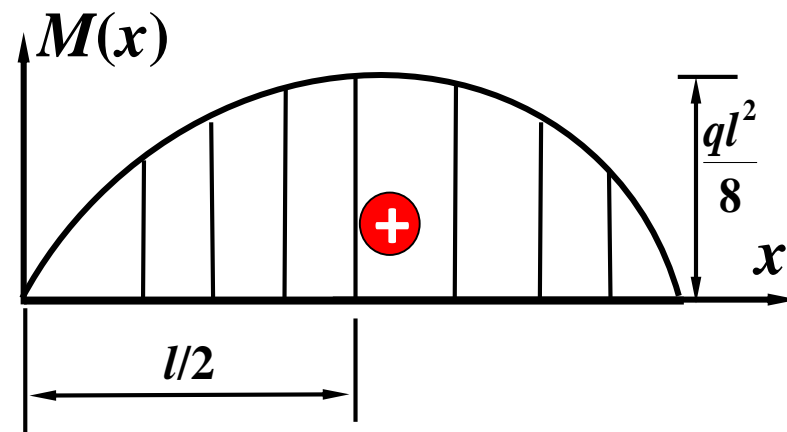
$$x = 0, \quad M = 0$$

$$x = l, \quad M = 0$$

$$\text{令 } \frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{l}{2}$$

弯矩的极值 $M_{\max} = M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^2}{8}$

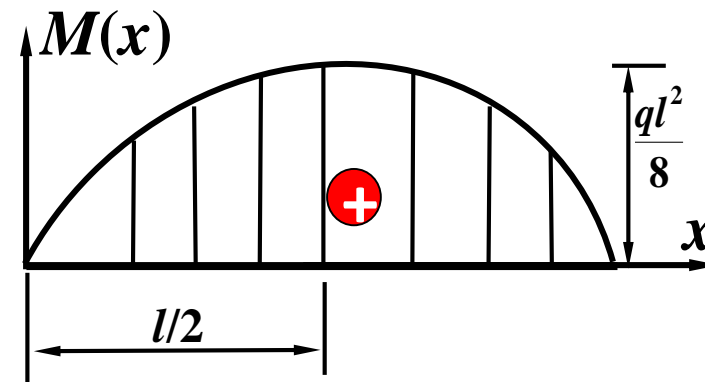
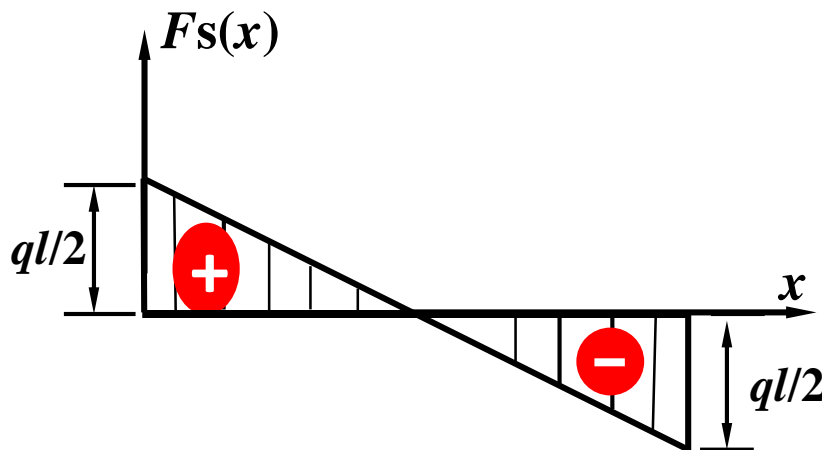
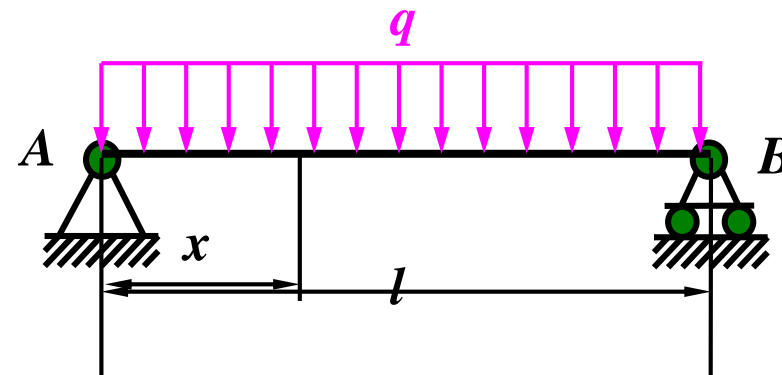
绘出弯矩图:



§4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题4.5 图示的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试作此梁的的剪力图和弯矩图。

解：(5) 讨论



梁在跨中点截面上的弯矩值为最大

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

但此截面上剪力 $F_S = 0$

两支座处梁横截面上剪力绝对值为最大 $F_{S,\max} = \frac{ql}{2}$

小结：五个熟练

- 1、**熟练** 求解梁的支座反力；
- 2、**熟练** 掌握剪力和弯矩正负号的判定；
- 3、**熟练** 计算任意截面的剪力和弯矩；
- 4、**熟练** 建立剪力方程和弯矩方程；
- 5、**熟练** 绘制剪力图和弯矩图。

§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

$q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系

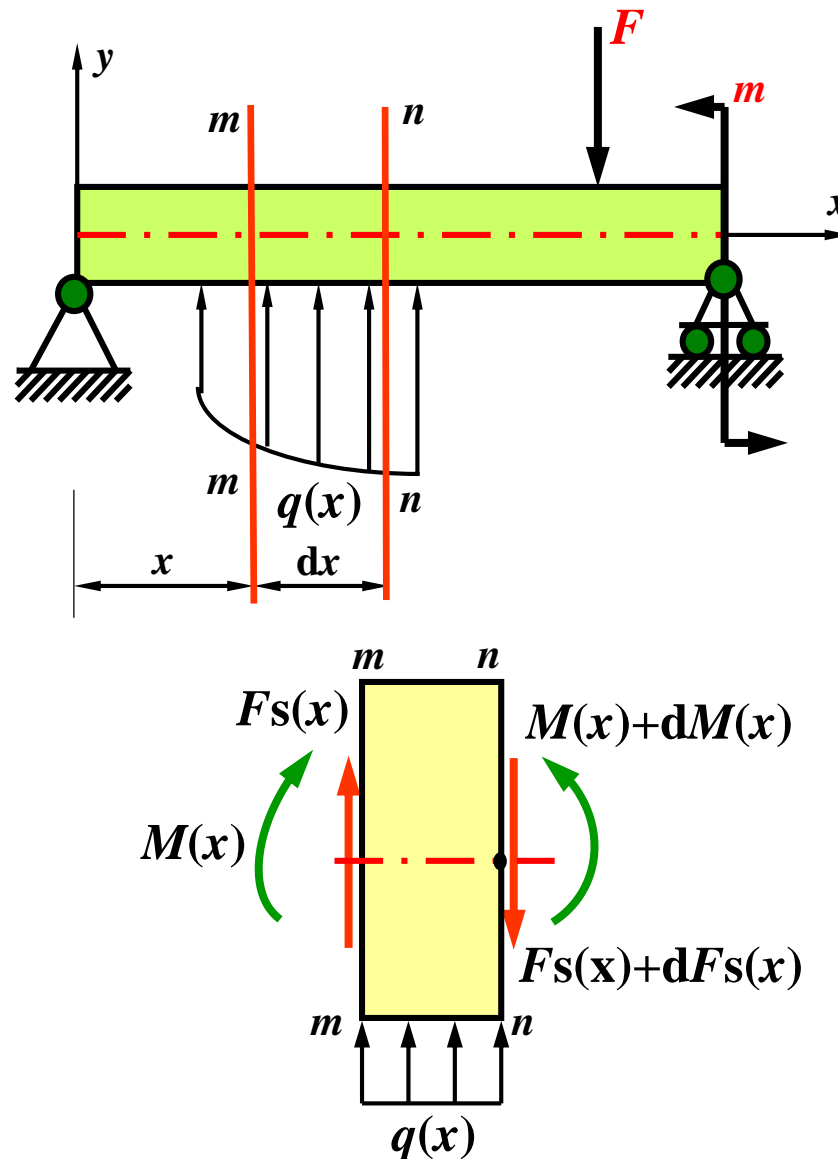
假想地用坐标为 x 和 $x+dx$ 的两横截面
 $m-m$ 和 $n-n$ 从梁中取出 dx 一段。

$m-m$ 截面上内力为：

$$F_S(x), M(x)$$

$n-n$ 截面上内力为则分别为

$$F_S(x)+dF_S(x), M(x)+dM(x)$$



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

$q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系

写出平衡方程

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] + q(x)dx = 0$$

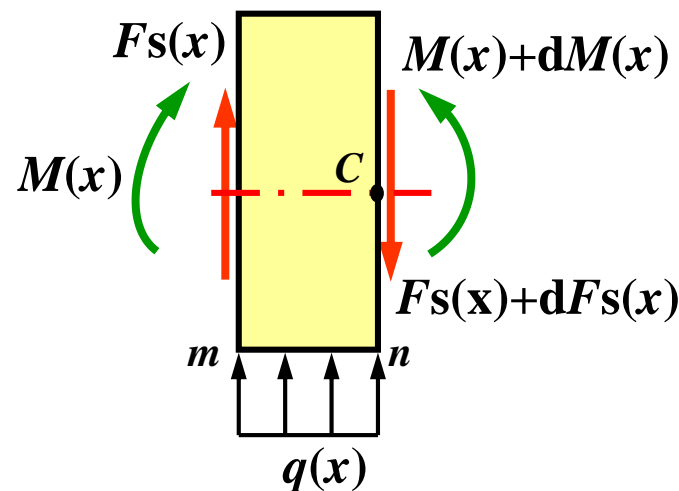
$$\sum M_C = 0 \rightarrow [M(x) + dM(x)] - M(x) - F_S(x)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

略去二阶无穷小量即得

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$



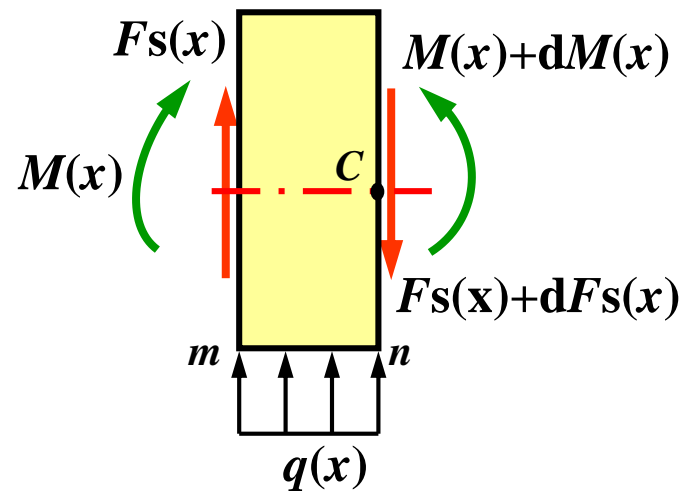
§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

$q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$



公式的几何意义：

- (1) 剪力图上某点处的切线斜率等于该点处载荷集度的大小；**
- (2) 弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小。**

§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

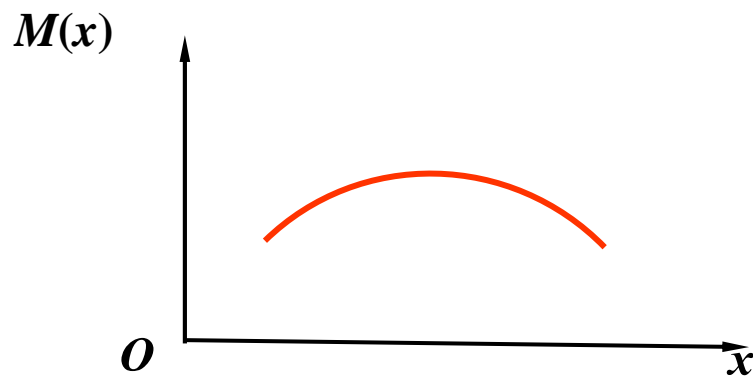
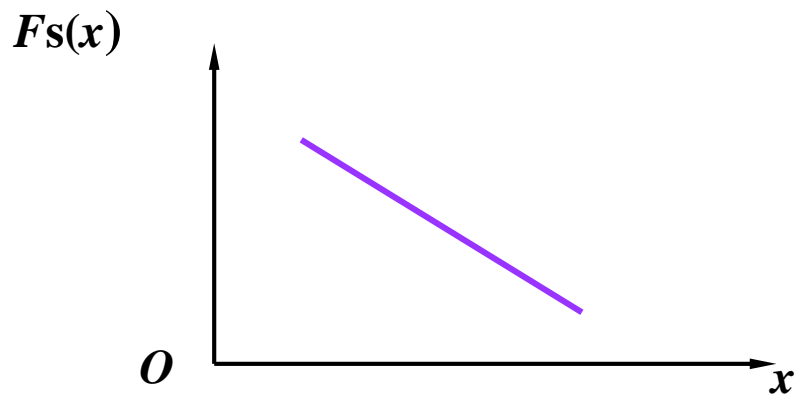
快速分析剪力图和弯矩图

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

(1) 梁上有向下的均布载荷, 即 $q(x) < 0$

$F_s(x)$ 图为一向右下方倾斜的直线。

$M(x)$ 图为一开口向下 (上凸) 的二次抛物线。



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

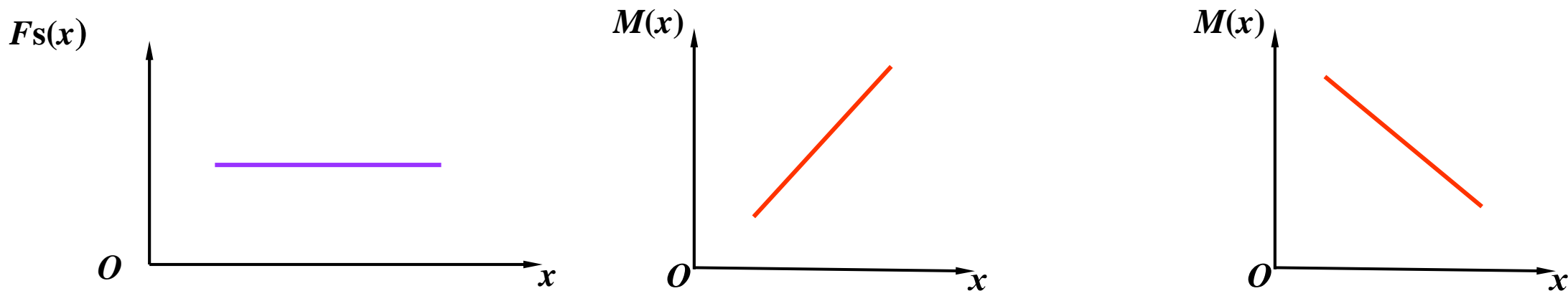
快速分析剪力图和弯矩图

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

(2) 梁上无载荷区域, 即 $q(x) = 0$

$F_s(x)$ 图为一水平直线。

$M(x)$ 图为斜直线。 当 $F_s(x) > 0$ 时, 向右上方倾斜。



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

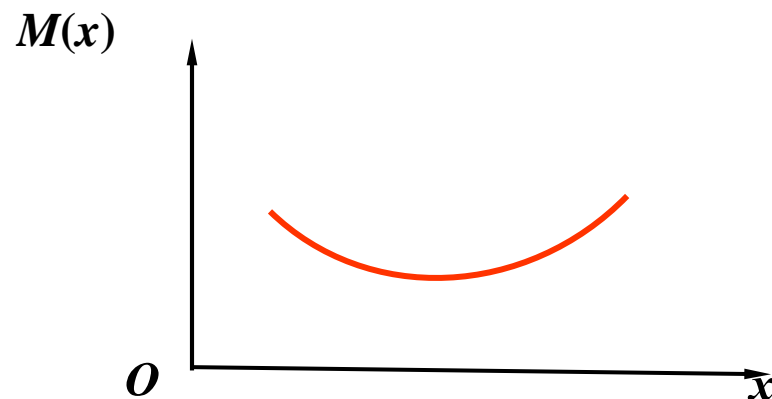
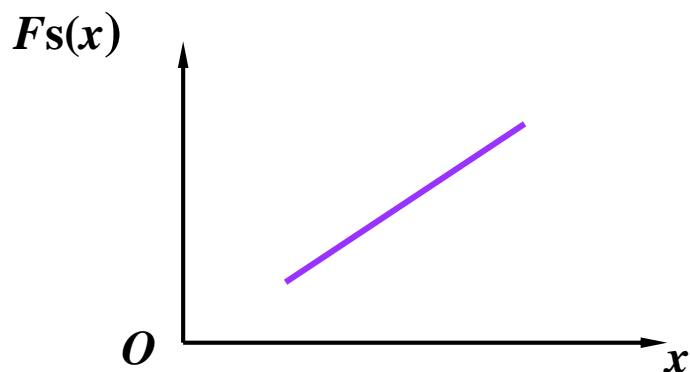
快速分析剪力图和弯矩图

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

(3) 梁上有向上的均布载荷, 即 $q(x) > 0$

$F_s(x)$ 图为一向右上倾斜的直线。

$M(x)$ 图为一开口向上 (下凸) 的二次抛物线。



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

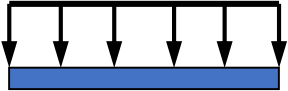

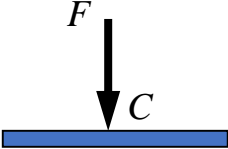
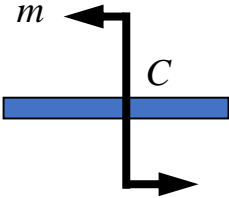






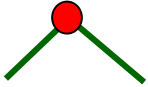

$q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_S(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

- 梁上最大弯矩 M_{\max} 可能发生在 **$F_S(x) = 0$ 的截面上**、或发生在**集中力所在的截面上**、或**集中力偶作用处**；
- 最大剪力可能发生在**集中力所在的截面上**、或**分布载荷发生变化的区段上**；
- 在集中力作用处剪力图有突变，其**突变值等于集中力的值**。弯矩图有转折；
- 在集中力偶作用处弯矩图有突变，其**突变值等于集中力偶的值**，但剪力图无变化。

§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

几种载荷下剪力图和弯矩图的特征

梁上外力情况	均布载荷 $q < 0$ 	无载荷 	集中力 	集中力偶 
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线 	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	开口向下抛物线 	一般直线 	在C处有转折 	在C处有突变 
M_{\max} 所在的可能面	在 $F_s = 0$ 的截面或起始点	全梁或梁的边界截面	在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

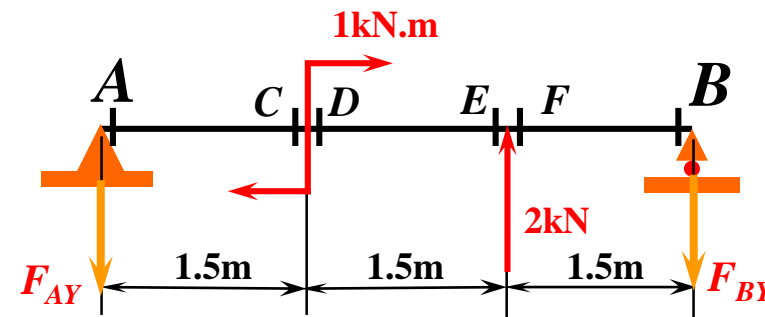
§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

微分关系绘制剪力图和弯矩图的方法

- 根据载荷及约束反力的位置，确定控制面；（在集中力和集中力偶作用处的两侧截面、均布载荷两侧截面、以及支座反力内侧截面均为控制面）
- 确定控制面上的剪力和弯矩的数值；
- 建立剪力图和弯矩图的坐标系，将控制面上的剪力和弯矩值标在相应的坐标系中。
- 应用微分关系确定各段控制面之间的剪力图和弯矩图的形状，进而画出剪力图与弯矩图。

§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

例题4.6：简支梁受力的大小和方向如图示。试画出其剪力图和弯矩图。



解：(1) 确定约束力

根据力矩平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$

求得A、B二处的约束力

$$F_{Ay} = 0.89 \text{ kN}, \quad F_{By} = 1.11 \text{ kN}$$

(2) 确定控制面

在集中力和集中力偶作用处的两侧截面以及支座反力处的截面均为控制面。

即A、C、D、E、F、B截面。

§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

例题4.6 简支梁受力的大小和方向如图示。
试画出其剪力图和弯矩图。

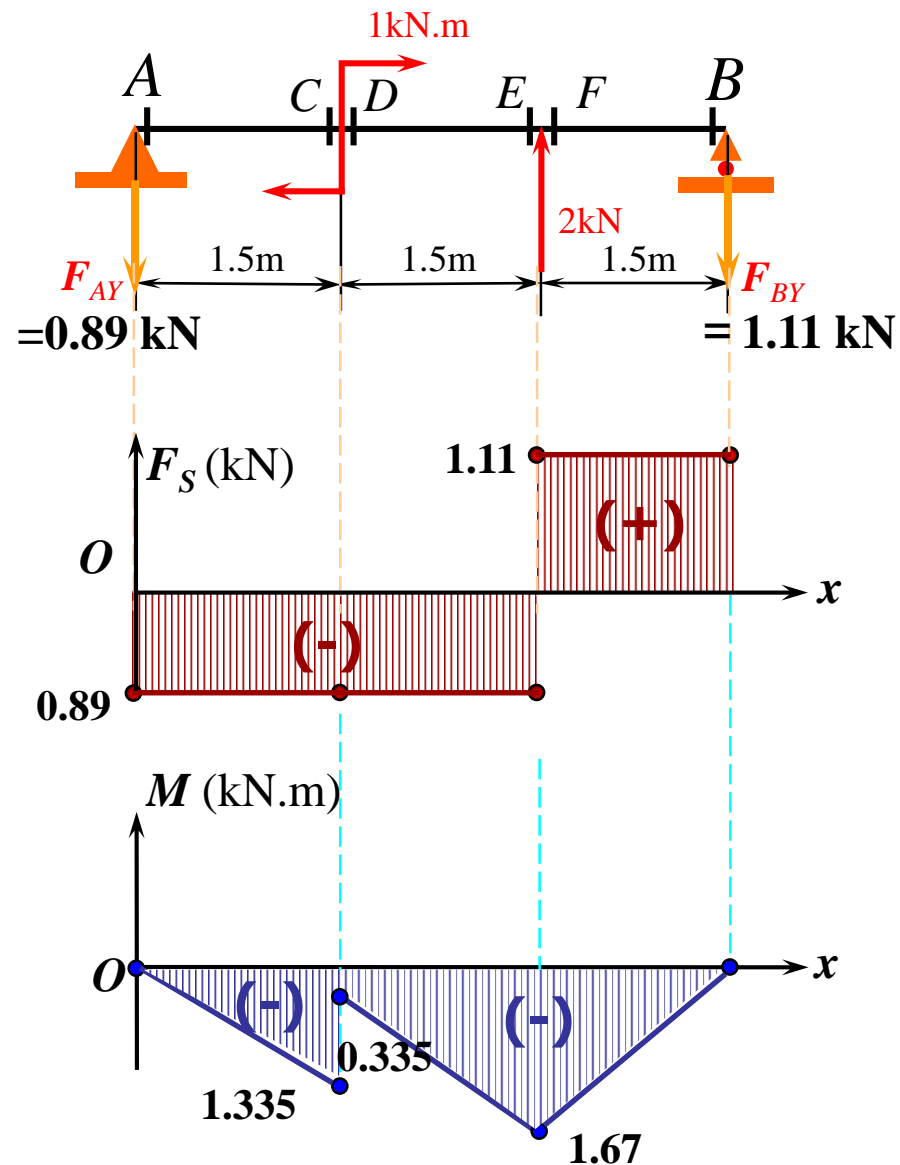
解：(3) 建立坐标系

建立 F_S - x 和 M - x 坐标系

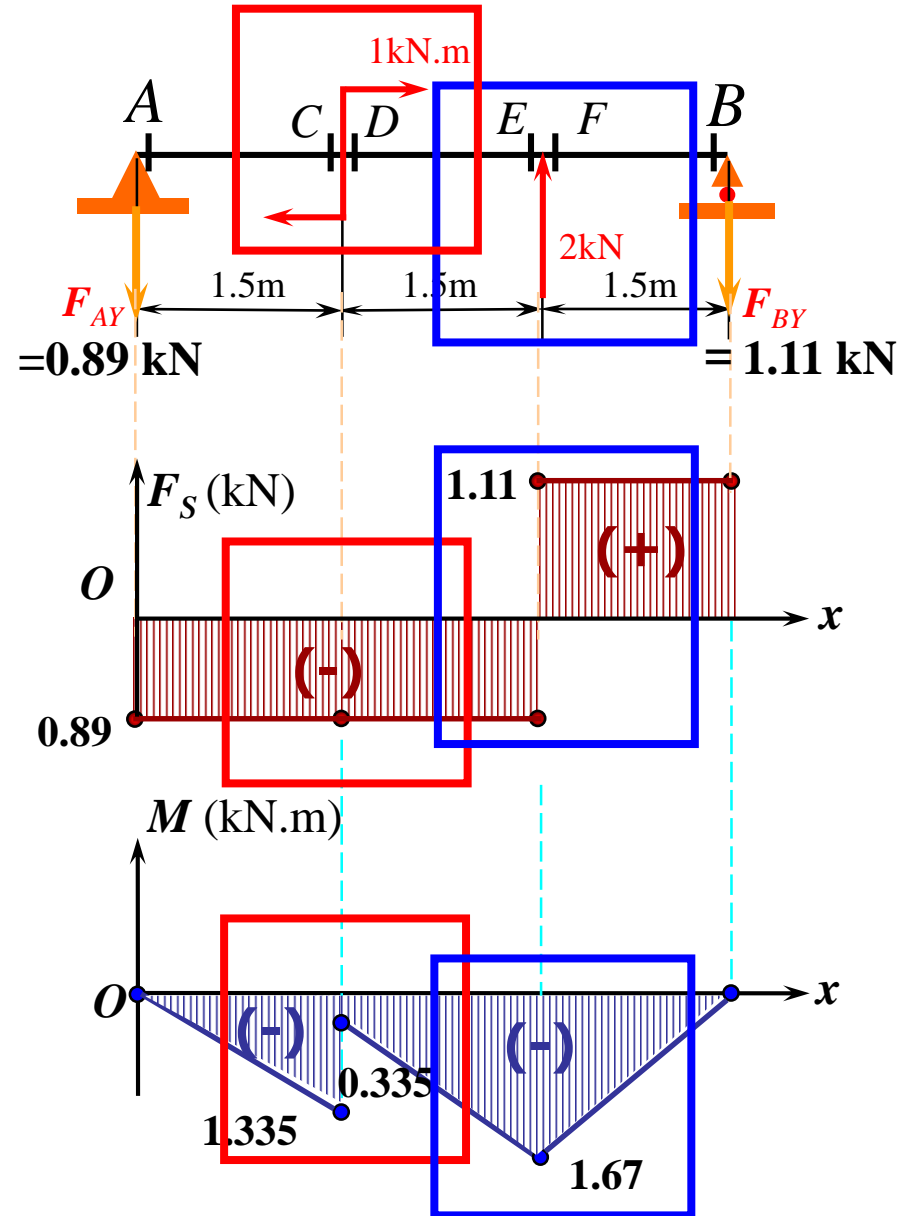
(4) 应用截面法

确定控制面上的剪力和弯矩值，并
将其标在 F_S - x 和 M - x 坐标系中。

(5) 根据微分关系连图线



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

例题4.7 一根外伸梁，在其中两个支座中间的部分作用有均布载荷 q ，在外伸梁末端D处作用有集中载荷 qa ，试画出梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 确定约束力

根据梁的整体平衡，由

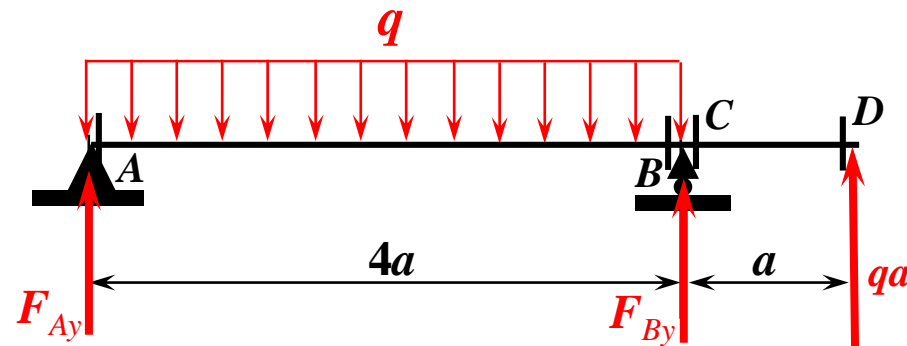
$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$

求得A、B二处的约束力

$$F_{Ay} = \frac{9}{4}qa, \quad F_{By} = \frac{3}{4}qa$$

(2) 确定控制面

由于AB段上作用有连续分布载荷，故A、B两个截面为控制面，约束力 F_{By} 右侧的截面，以及集中力 qa 左侧的截面，也都是控制面。



§4.5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

例题4.7 一根外伸梁，在其中两个支座中间的部分作用有均布载荷 q ，试画出梁的剪力图和弯矩图。

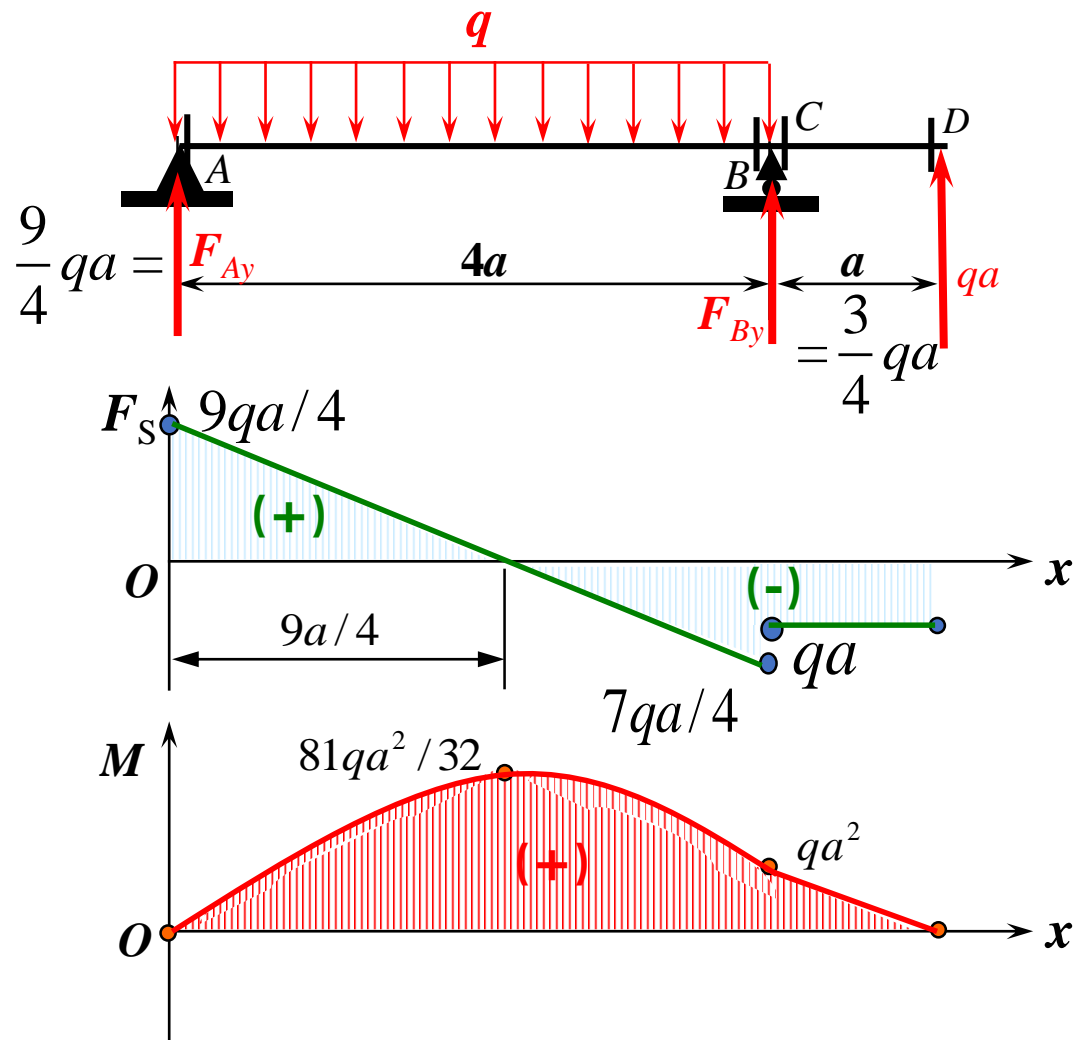
解：(3) 建立坐标系

建立 F_S - x 和 M - x 坐标系

(4) 确定控制面上的剪力值，
并将其标在 F_S - x 中。

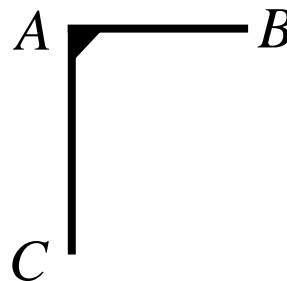
(5) 确定控制面上的弯矩值，
并将其标在 M - x 中。

(6) 根据微分关系连图线



§4.6 平面刚架的弯曲内力

平面刚架是由在同一平面内，不同取向的**杆件**，通过杆端相互**刚性连结**而组成的结构。



内力包括：剪力；弯矩；轴力。

轴力 正负号

拉伸为正

剪力 正负号

左上右下为正

弯矩 正负号

上压下拉(上凹下凸) 为正

§4.6 平面刚架的弯曲内力

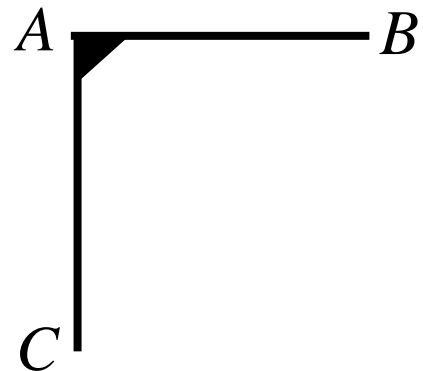
平面刚架是由在同一平面内，不同取向的**杆件**，通过杆端相互**刚性连结**而组成的结构。

内力包括：剪力；弯矩；轴力。

钢架内力图的绘制：

弯矩图：画在各杆的**受压**侧（不注明正负号）。

剪力图及轴力图：可画在刚架轴线的**任一侧**（注明正负号）。



§4.6 平面刚架的弯曲内力

例题4.8 已知平面刚架上的均布载荷集度 q ，长度 l 。试画出刚架的内力图。

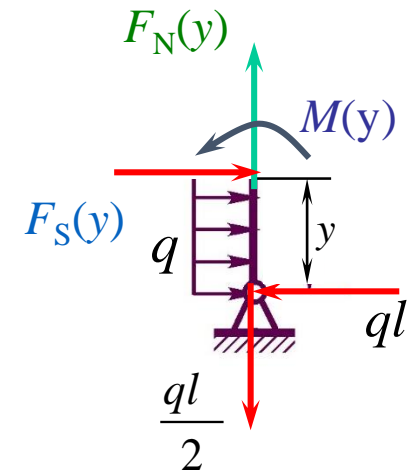
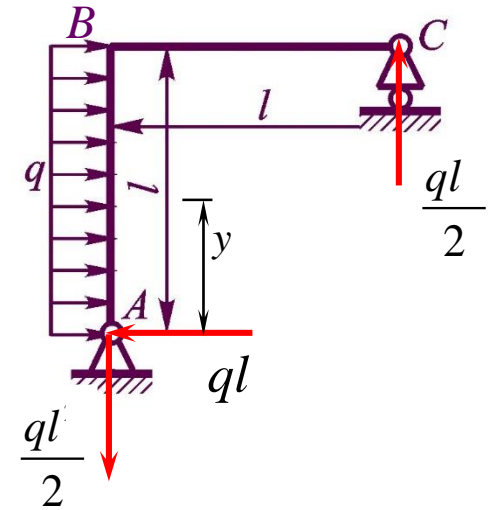
解：(1) 确定约束力
(2) 写出各段的内力方程

竖杆AB：A点向上为 y

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M(y) = 0$$



§4.6 平面刚架的弯曲内力

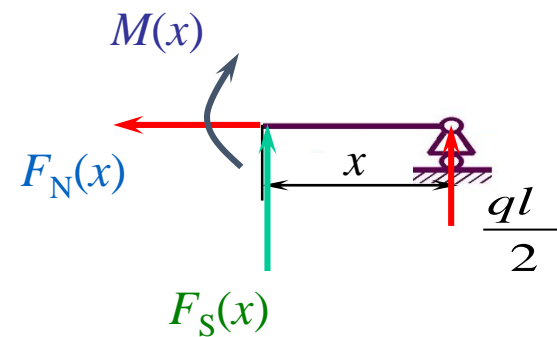
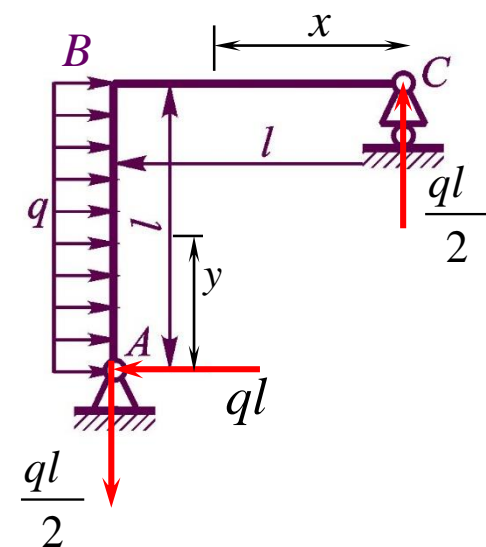
例题4.8 已知平面刚架上的均布载荷集度 q ，长度 l 。试画出刚架的内力图。

解： 横杆CB：C点向左为 x

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M(x) = 0$$



§4.6 平面刚架的弯曲内力

例题4.8 已知平面刚架上的均布载荷集度 q ，长度 l 。试画出刚架的内力图。

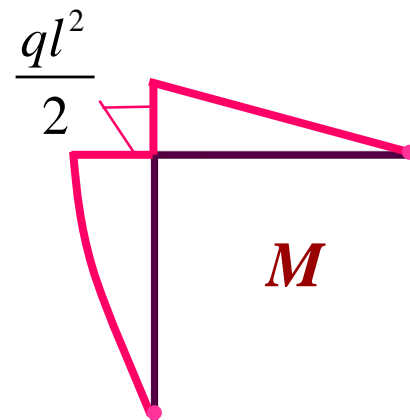
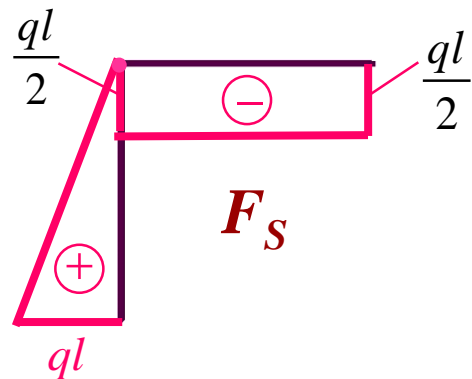
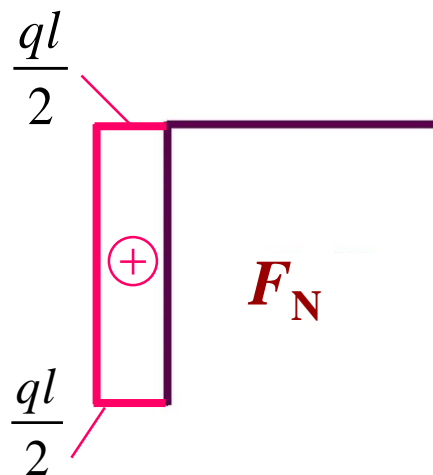
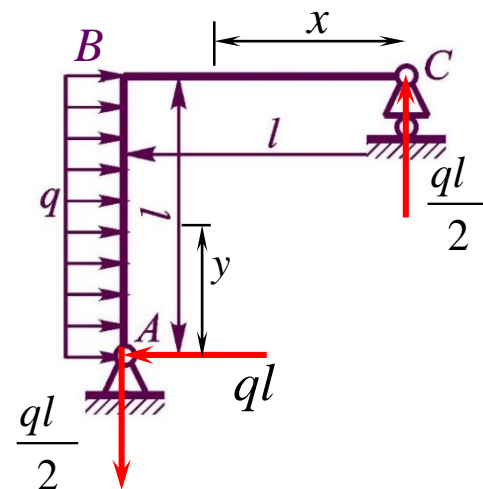
解：(3) 根据各段内力方程画内力图

竖杆AB：

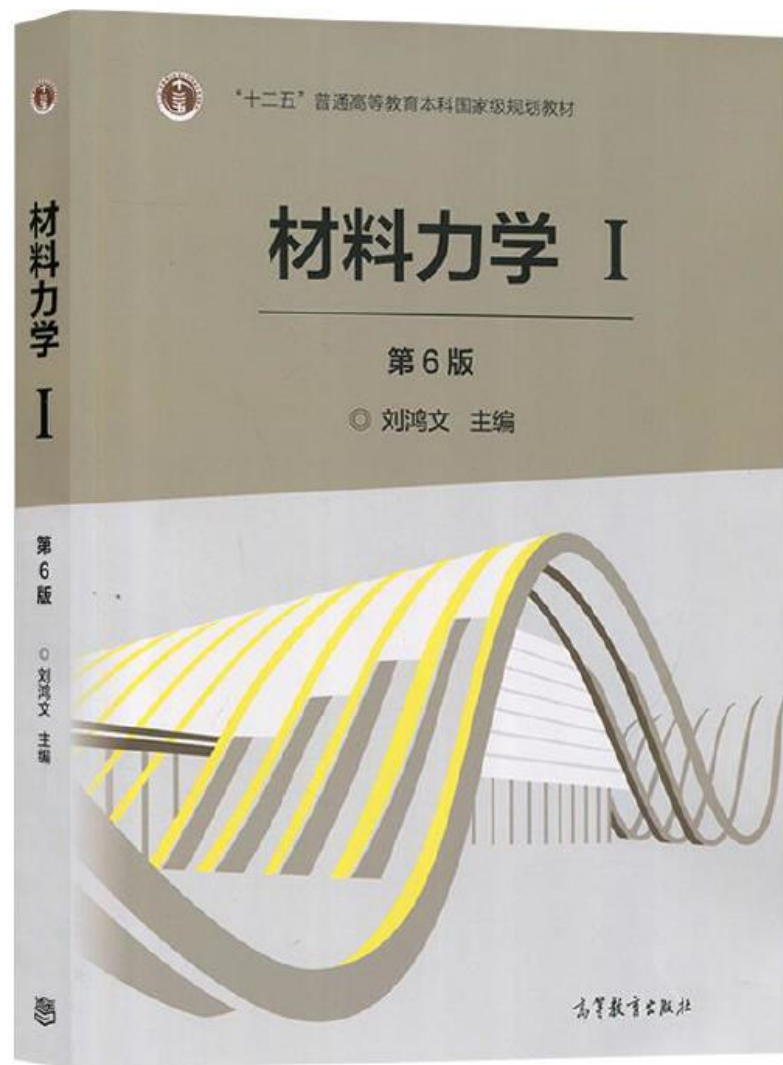
$$F_N(y) = ql/2 \quad F_S(y) = ql - qy \quad M(y) = qly - qy^2/2$$

横杆CB：

$$F_N(x) = 0 \quad F_S(x) = -ql/2 \quad M(x) = qlx/2$$



作业



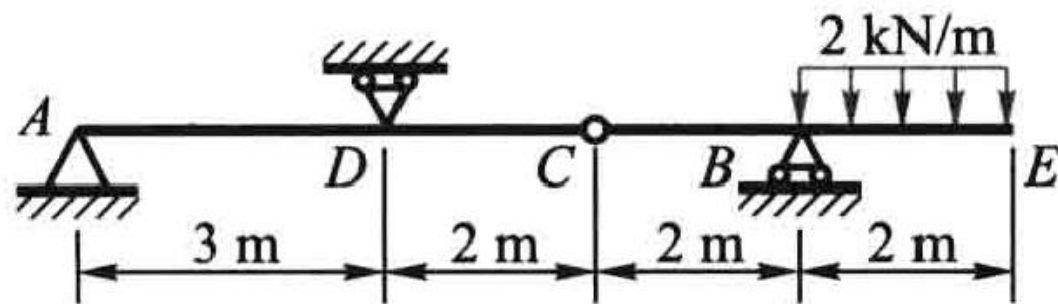
4.6 (剪力图 & 弯矩图)

4.16 a-b (载荷集度、剪力&弯矩关系)

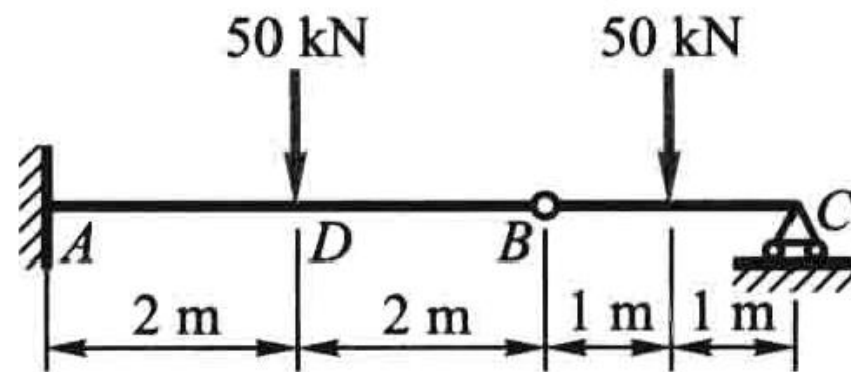
4.9日(下周二) 之前交

作业

4.6 作图示各梁的剪力图和弯矩图。

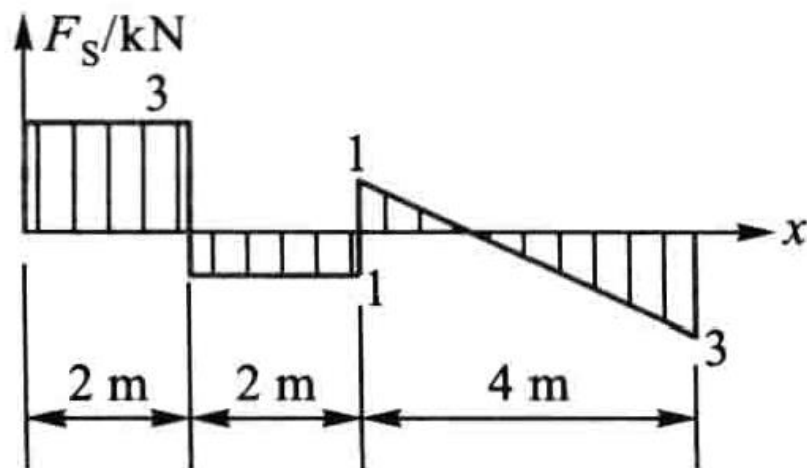


(a)

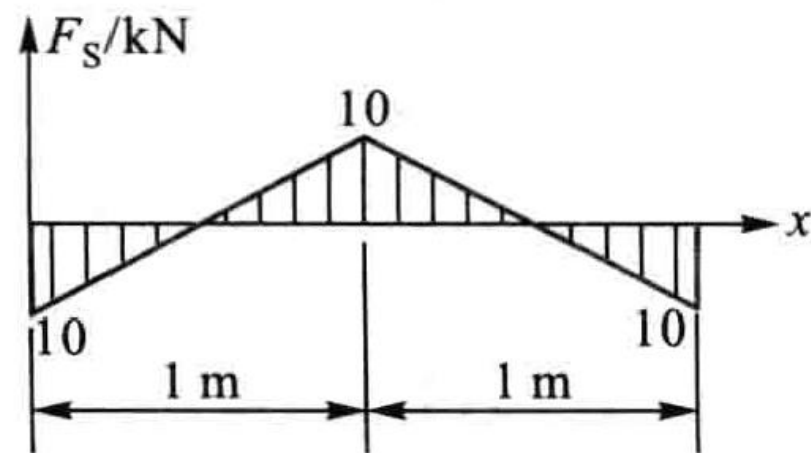


(b)

4.16 设梁的剪力图如图所示,试作弯矩图及载荷图。已知梁上没有作用集中力偶。



(a)



(b)