浙江大学 20 19 – 20 20 学年 秋冬季 学期

《理论力学（乙）》课程期末考试试卷

课程号：261C0062，开课学院：航空航天学院

考试试卷：A卷、B卷（请在选定项上打 √）

考试形式：闭、开卷（请在选定项上打 √），允许带 教材 入场

考试日期：2020 年 1 月 13 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

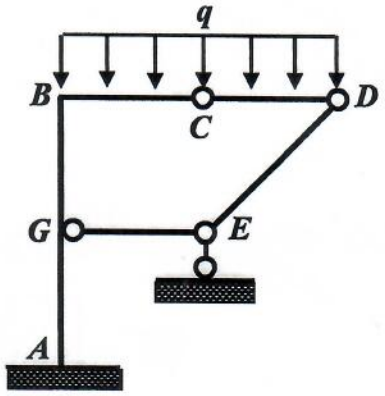
考生姓名：________ 学号：________ 所属院系：________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

计算题（共 6 题）

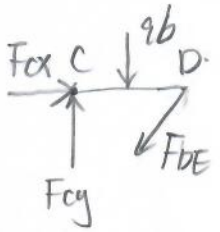
一、图示平面构架，A 处为固定端，C、D 处光滑铰连接，E 处为滑动铰支座，杆 ABC 的 AB 段垂直、BC 段水平，杆 CD 与 EG 水平，杆 DE 与 EG 于 E 处铰接，G 端铰接于 AB 的 G 处，长度 $AG=BG=BC=CD=EG=b$。杆 BC 与 CD 受垂直均匀分布力作用，集度为 q，各杆重不计。

求：（1）铰 C 的约束力；（2）杆 DE 的内力；（3）支座 A 的约束力偶。（15 分）



(1) and (2)

DE为二力杆



$\Sigma M_C=0 \Rightarrow -qb\cdot\frac{b}{2}-F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=0$

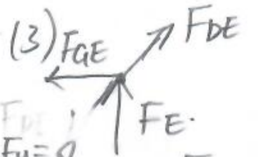
$\Rightarrow \boxed{F_{DE}=-\frac{\sqrt{2}}{2}qb}$ 压

$\Sigma M_D=0 \Rightarrow F_{cy}\cdot b-qb\cdot\frac{b}{2}=0$

$\Rightarrow \boxed{F_{cy}=\frac{qb}{2}}$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{cx}-F_{DE}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow \boxed{F_{cx}=-\frac{1}{2}qb}$

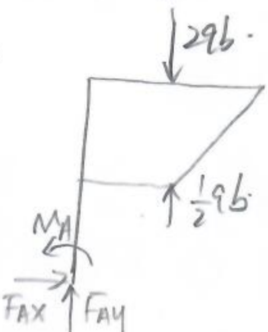
(3)



$\Sigma F_y=0$

$\Rightarrow F_E+F_{DE}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$\Rightarrow F_E=\frac{1}{2}qb$.



$\Rightarrow \Sigma M_A=0 \Rightarrow M_A-\frac{3}{2}qb\cdot b=0$

$\Rightarrow \boxed{M_A=\frac{3}{2}qb^2}$

二、图示平面桁架，A 处为滑动铰支座，H 处为固定铰支座，$ABCDEGH$、$IJLN$、$OPQR$ 水平，BO、CIP、DJQ、ELR、GN 垂直，除杆 BO 外，各水平与垂直杆的长度均为 b。节点 Q 受垂直力 F 作用，各杆重不计。

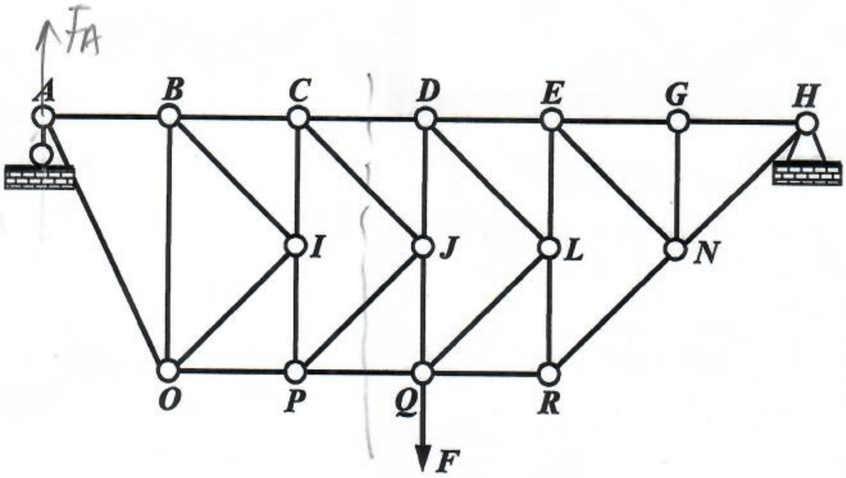
求：杆 CD、CJ、JP 的内力。

（15 分）

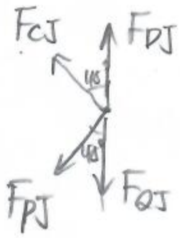
对整体，$\sum M_H = 0$

$\Rightarrow F_A \cdot 6b - F \cdot 3b = 0$

$\Rightarrow \boxed{F_A = \frac{1}{2}F}$



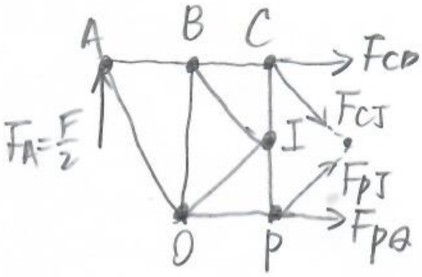
J点：



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CJ}\sin45^\circ + F_{PJ}\sin45^\circ = 0$

$\Rightarrow F_{CJ} = -F_{PJ}$ ①

取左半部分（切断CD，CJ，PJ，PQ杆）



$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} + F_{PJ}\sin45^\circ - F_{CJ}\sin45^\circ = 0$

$\Rightarrow \boxed{F_{CJ} = \frac{F}{2\sqrt{2}}}$ 拉

$\boxed{F_{PJ} = -\frac{F}{2\sqrt{2}}}$ 压

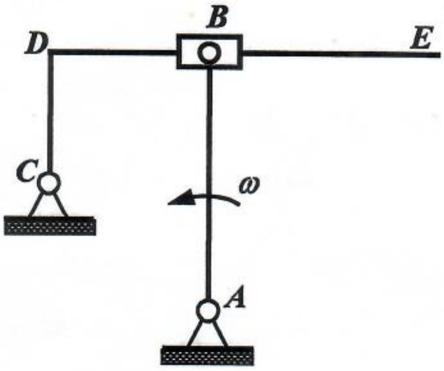
$\sum M_P = 0 \Rightarrow -\frac{F}{2}\cdot 2b - F_{CD}\cdot 2b - F_{CJ}\cdot\cos45^\circ\cdot 2b = 0$

$\Rightarrow F_{CD} = \frac{-Fb - \frac{1}{2}Fb}{2b} \Rightarrow \boxed{F_{CD} = -\frac{3}{4}F}$ 压

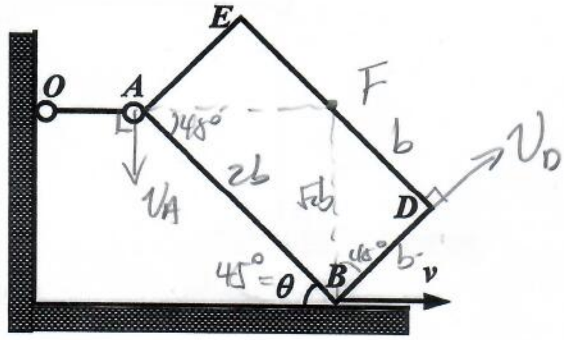
三、(a) 图示机构，杆 CDE 的 CD 段垂直于 DE 段，绕 C 轴转动，杆 AB 绕 A 轴转动，B 处为套筒联接。图示瞬时，AB、CD 垂直，$CD=DB=b$，$AB=2b$，杆 AB 的角速度为 ω，角加速度为零。求：此时杆 CDE 的角速度与角加速度。

(b) 图示矩形板，边长 $AB=2b$，$BD=b$，A 端与杆 OA 铰接，杆 O 端铰接于垂直墙面。图示瞬时，AB 与水平地面的夹角 $\theta=45°$，点 B 沿地面向右滑动的速度为 v。求：此时矩形板的角速度、点 D 的速度。

(20 分)

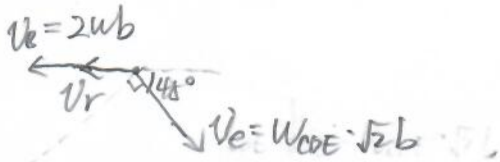


题(a)图



题(b)图

(a) 速度分析

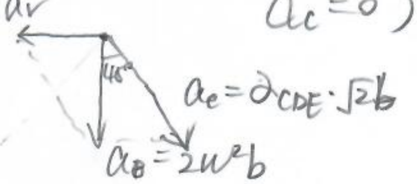


$\vec{v}_B = \vec{v}_r + \vec{v}_{CDE}$

$\Rightarrow v_e\cdot\sin45° = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega_{CDE}=0}$

加速度分析（注意 $a_B^\tau=0$，$a_e^n=0$，$a_C=0$）



$\Rightarrow \alpha_{CDE}\cdot\sqrt{2}b = \frac{2\omega^2 b}{\cos45°}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{CDE} = 2\omega^2}$ (↻)

(b) 速度瞬心为F点，

$\omega = \frac{v}{BF} = \frac{v}{2b\sin45°} = \frac{v}{\sqrt{2}b}$.

$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v}{\sqrt{2}b}}$

F位于DE中点，，

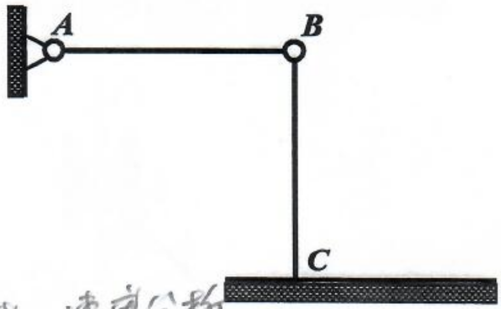
$v_D = \frac{v}{\sqrt{2}b}\cdot b = \frac{\sqrt{2}}{2}v$

$\boxed{v_D = \frac{\sqrt{2}}{2}v}$

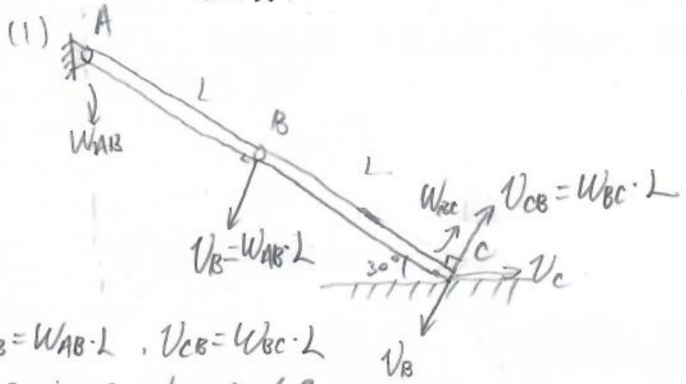
速度方向沿着BD方向

四、图示均质直杆 AB 与 BC 铰接于 B，两杆长度均为 L，质量均为 m，A 处为固定铰支座，C 端搁在光滑水平面上。初始时，杆 AB 水平，杆 BC 垂直，两者静止。然后，杆 AB 无初速顺时针落下，推动杆 BC 的 C 端向右滑动，设 C 端未脱离平面，当两杆处于同一斜直线时。

求：此时，(1) 杆 AB 与 BC 的角速度；(2) 杆 BC 受到的 C 端与 B 端约束力。(20 分)



(1)



$v_B=\omega_{AB}\cdot L$, $v_{CB}=\omega_{BC}\cdot L$

$\Rightarrow v_B\cdot\sin 60^\circ - v_{CB}\cdot\sin 60^\circ=0$

$\Rightarrow \omega_{AB}=\omega_{BC}$

动能定理：(C点为速度瞬心)

$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega_{AB}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega_{BC}^2$

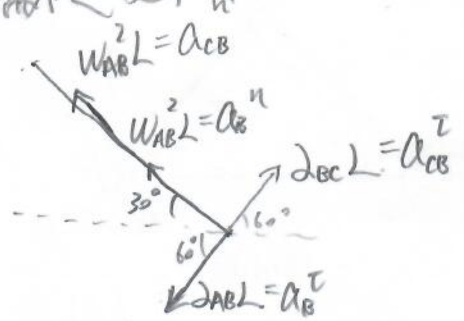
$=\frac{1}{3}mL^2\omega_{AB}^2$

$W=mg\frac{L}{2}\sin 30^\circ+mg\frac{L}{2}(1-\sin 30^\circ)$

$=\frac{1}{2}mgL$ 由动能定理 $T=W$

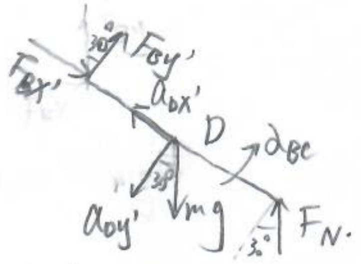
$$\Rightarrow \boxed{\omega_{AB}=\sqrt{\frac{3g}{2L}}\ (\downarrow) \qquad \omega_{BC}=\sqrt{\frac{3g}{2L}}\ (\uparrow)}$$

C端加速度分析



$\Rightarrow 2\omega_{AB}^2L\cdot\sin 30^\circ+\alpha_{BC}L\cdot\sin 60^\circ=\alpha_{AB}L\cdot\sin 60^\circ$

$\Rightarrow \alpha_{BC}=\alpha_{AB}-\frac{2}{\sqrt{3}}\omega_{AB}^2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{BC}=\alpha_{AB}-\frac{\sqrt{3}g}{L}}$



质心加速度

$a_{Dx}'=\omega_{AB}^2L+\omega_{BC}^2\frac{L}{2}$

$=\frac{3g}{2L}\cdot\frac{3}{2}L=\frac{9g}{4}$

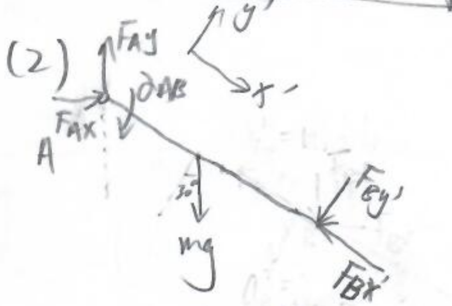
$a_{Dy}'=\alpha_{AB}L-\alpha_{BC}\frac{L}{2}$

$=\alpha_{AB}L-\alpha_{AB}\frac{L}{2}+\frac{\sqrt{3}g}{2}$

$=\frac{1}{2}\alpha_{AB}L+\frac{\sqrt{3}}{2}g$

$$\begin{cases} F_N\sin 30^\circ-F_{Bx}'-\frac{1}{2}mg=ma_{Dx}' & (2)\\ F_{By}'+F_N\cos 30^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}mg=-ma_{Dy}' & (3)\\ (F_N\cos 30^\circ-F_{By}')\frac{L}{2}=\frac{1}{12}mL^2\cdot\alpha_{BC} & (4)\end{cases}$$

(2)



对固定点,用动量矩定理

$\sum M_A(F)=0 \Rightarrow F_{By}'\cdot L+mg\cos 30^\circ\cdot\frac{L}{2}$

$=\frac{1}{3}mL^2\cdot\alpha_{AB}$ (1)

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{L} \\ \boxed{F_{By}'=-\frac{\sqrt{3}}{12}mg \quad F_{Bx}'=-\frac{3?}{12}mg \quad F_N=-\frac{1}{3}mg}\end{cases}$$

(1) $\Rightarrow F_{By}'=\frac{1}{3}mL\alpha_{AB}-\frac{\sqrt{3}}{4}mg$

(3),(4) $\Rightarrow F_N=-\frac{mg}{6}-\frac{1}{3\sqrt{3}}mL\alpha_{AB}$

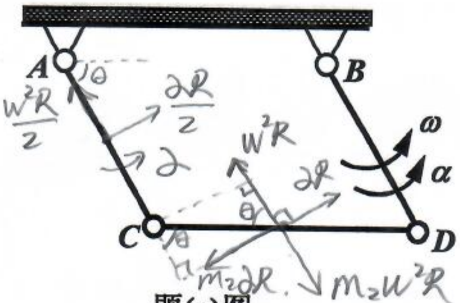
以x, y为坐标轴

$$\boxed{F_{Bx}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}mg \quad F_{By}=\frac{4}{3}mg \quad F_N=-\frac{1}{3}mg}$$

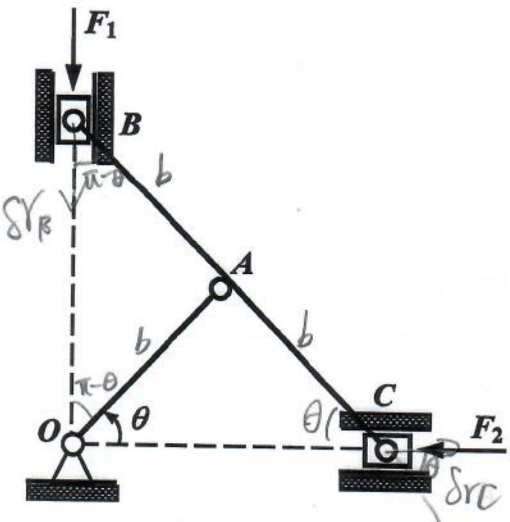
五、(a) 图示平面机构，$ABCD$ 为平行四边形，均质杆 AC 与 BD 的质量均为 m_1，长度为 R，均质杆 CD 的质量为 m_2，长度为 L。图示瞬时，杆 BD 的角速度为ω，角加速度为α。求：此时杆 AC 与 CD 的惯性力系点 A 简化的结果。

(b) 图示平面机构，杆 OA 铰接于杆 BC 的 A 处，滑块 B 可沿 OB 槽滑动，滑块 C 可沿 OC 槽滑动，OB 垂直于 OC，长度 $OA=AB=AC=b$。图示瞬时，杆 OA 与 OC 的夹角为θ，滑块 B 受 BO 方向力 F_1 作用，滑块 C 受 CO 方向力 F_2 作用，各物体重不计。机构具有一个自由度。平衡时，求：用虚位移原理计算力 F_1 与 F_2 的关系。

(15 分)



题(a)图



题(b)图

(a)

AC向A简化

$M_{IAC}=\frac{1}{3}m_1R^2\alpha$

$F_{IAC}^{\tau}=\frac{m_1\alpha R}{2}$ $\quad F_{IAC}^{n}=\frac{m_1\omega^2R}{2}$

CD向A简化

$M_{ICD}=m_2\alpha R\left(R+\frac{L}{2}\cos\theta\right)+m_2\omega^2R\frac{L}{2}\sin\theta$

$m_2\omega^2R=F_{ICD}^{n}$

$F_{ICD}^{\tau}=m_2\alpha R$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}F_I^{\tau}&=\frac{m_1\alpha R}{2}+m_2\alpha R\\ F_I^{n}&=\frac{m_1\omega^2R}{2}+m_2\omega^2R\\ M_I&=\frac{1}{3}m_1R^2\alpha+m_2\alpha R\left(R+\frac{L}{2}\cos\theta\right)+m_2\omega^2R\frac{L}{2}\sin\theta\end{aligned}}$$

(b)

$\delta r_B\cos(\pi-\theta)=\delta r_C\cos\theta$

$\Rightarrow \delta r_B\sin\theta=\delta r_C\cos\theta$

$F_1\delta r_B-F_2\delta r_C=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_1}{F_2}=\frac{\delta r_C}{\delta r_B}=\tan\theta}$$

六、设某单自由度系统的广义坐标为 q，动能 T、势能 V、非保守广义力 $\tilde{Q}$ 分别为（其中 m, a, b, w, f, c 为常数，t 为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(a+q^2)\dot{q}^2,\quad V=w(b-q^2+\sin q),\quad \tilde{Q}=f\cos t-c\dot{q}$$

求：（1）系统的拉格朗日方程；（2）系统的哈密顿方程。（15 分）

(1) $L=\frac{1}{2}m(a+q^2)\dot{q}^2-w(b-q^2+\sin q)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m(a+q^2)\dot{q} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=2mq\dot{q}^2+m(a+q^2)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}=mq\dot{q}^2-w(\cos q-2q)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\tilde{Q} \Rightarrow \boxed{m(a+q^2)\ddot{q}+mq\dot{q}^2+w(\cos q-2q)=f\cos t-c\dot{q}}$$

(2)

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m(a+q^2)\dot{q} \Rightarrow \dot{q}=\frac{p}{m(a+q^2)}$$

$$H=p\dot{q}-\frac{p^2}{2m(a+q^2)}+w(b-q^2+\sin q)$$

$$\Rightarrow H=\frac{p^2}{2m(a+q^2)}+w(b-q^2+\sin q)$$

哈密顿方程为

$$\boxed{\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m(a+q^2)}\\[2ex] \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}+\tilde{Q}=\dfrac{p^2 q}{m(a+q^2)^2}-w(\cos q-2q)+f\cos t-\dfrac{cp}{m(a+q^2)}\end{cases}}$$