工程数值方法

Numerical Method for Engineering

任 课 教 师：曹 彦 鹏

caoyp@zju. edu. cn

玉泉校区教 1-205

数值方法的设计原则

算法可靠性

- 收敛性：方法的可行性
- 稳定性：初始数据等产生的误差对结果的影响
- 误差控制：运算结果不能产生太大的偏差且能够控制误差

计算复杂度

- 便于编程实现：逻辑复杂度要小
- 计算量要小：运算复杂度要低，运行时间要短
- 存贮量要小：运算过程变量尽量少

数值计算方法实现的基本途径

◆ Dispersing （离散化）

只计算定义域上有限个变量的值，而不是所有函数变量的值

◆ Approach（逼近）

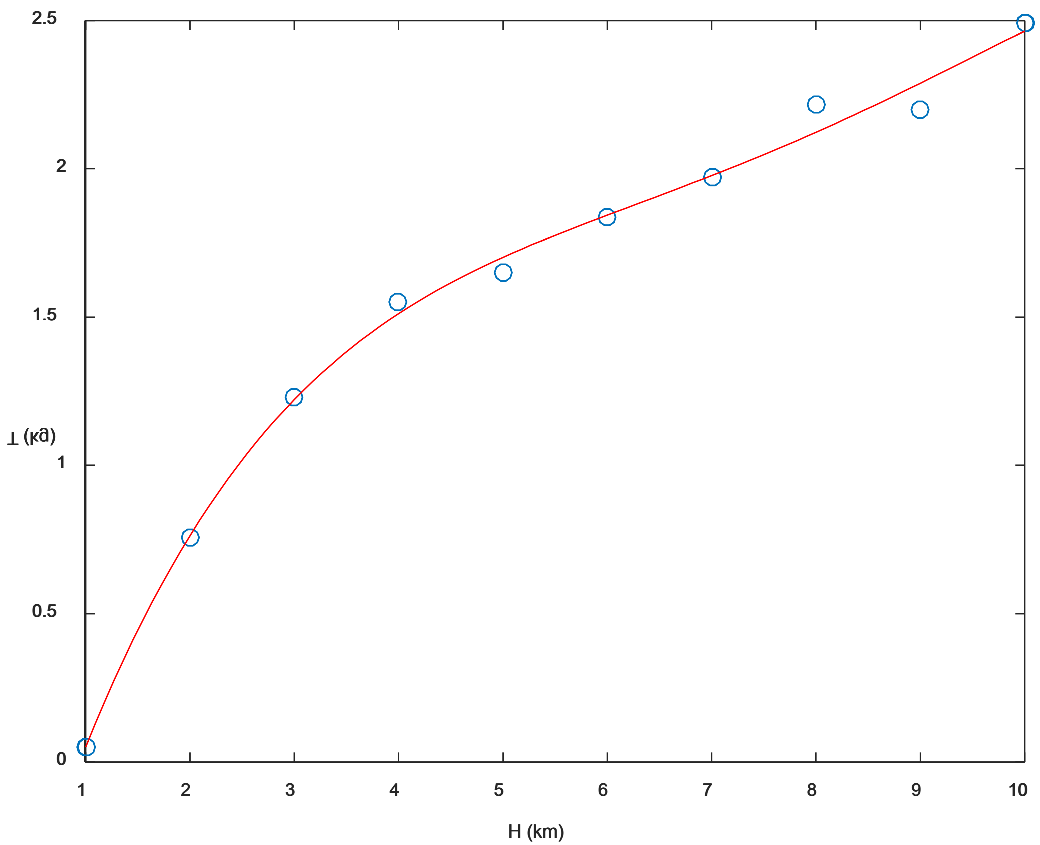
用简单函数 y(x) 近似替代函数 f(x), 但误差 E(x)=f(x)-y(x) 要满足精度要求。

◆ Deduce by degrees（递推）

递推是将一个复杂的计算过程转化为简单过程的多次重复的数学方法。

误差分析（ Error Analysis ）

在任何科学计算中其解的精确性总是相对的，而误差则是绝对的。



如： $\pi = 3.1415926\cdots$

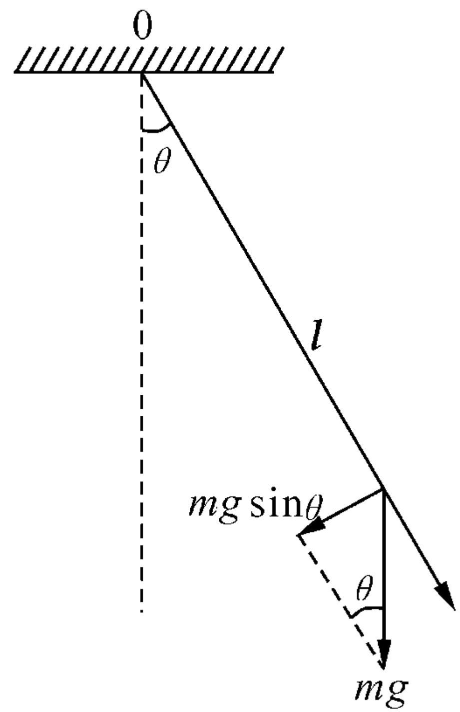
$\pi^* = 3.14 \qquad |e^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

$\pi^* = 3.141592 \qquad |e^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$

从下面这个例子就可以了解误差产生的原因。

高中物理中的单摆周期公式：

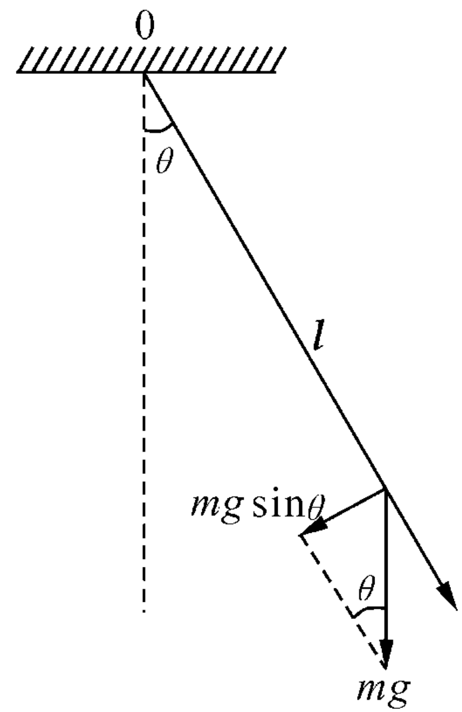
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



其中:l为摆长；g为自由落体加速度；m是质点的质量。

根据牛顿第二运动定律

$$f = mg\sin\theta = ma = -ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



所以 $$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

即 $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

当θ很小时，$\boxed{\sin\theta \approx \theta,}$ 令$\omega^2 = \dfrac{g}{l}$

则有 $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$ 二阶常系数线性齐次微分方程

当 θ很小时，$\boxed{\sin\theta \approx \theta,}$

单摆的非线性的运动被线性地近似为简谐运动

方程的解为 $\theta = A\sin(\omega t + \varphi)$

*A*是最大振幅，**ω**是角速度，**φ**是初相角（由初始位置定）。

因此 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

误差分析（ Error Analysis ）

现在我们来分析单摆周期求解过程的误差情况：

模型误差 $\begin{cases} \text{忽略空气阻力} \\ \text{忽略o点处的摩擦力} \end{cases}$

截断误差： $\theta \approx \sin\theta$

由Taglor 展式：$\sin\theta = \theta + [-\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots] \approx \theta$

观察误差： $g = 9.8\text{米}/\text{秒}^2, l\text{长度}$

舍入误差 .:+,−,*, /, 开方

误差分析（ Error Analysis ）

一、误差的来源与分类 /* Source & Classification */

- 1 、从实际问题中抽象出数学模型
  —— 模型误差 /* Modeling Error */
- 2 、通过观测得到模型中某些参数（或物理量）的值
  —— 观测误差 /* Measurement Error */
- 3 、数学模型与数值算法之间的误差求近似解
  —— 方法误差（截断误差 /* Truncation Error */ ）
- 4 、由于机器字长有限，原始数据和计算过程会产生新的误差
  —— 舍入误差 /* Roundoff Error */

误差分析的基本概念

Def 1.1（绝对误差 /* absolute error */ ）

设 x 为真值（精确值），x^* 为 x 的一个近似值，称

$$e^* = x^* - x$$

为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

注：误差可正可负，常常是无限位的。

绝对误差限 /* accuracy */ —— 绝对值的上界 ε^*

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$$

如：$\pi^* = 3.14159$

$$|\pi^* - \pi| \le \frac{1}{2} \times 10^{-5} \quad (\pi = 3.1415926\cdots)$$

绝对误差能否完全表示近似值的好坏？

误差分析的基本概念

Def 1.2 （相对误差 /* relative error */ ）

近似值 x^* 的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 x^* 的相对误差，记作 $e_r^* = \dfrac{e^*}{x}$

注： 实际计算时，相对误差通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

误差分析的基本概念

- 相对误差限——相对误差的绝对值的上界 ε_r^*

/* relative accuracy */

- 相对误差也可正可负 $\left|\dfrac{e^*}{x^*}\right| = \left|\dfrac{x^* - x}{x^*}\right| \le \varepsilon_r^*$

$Def\,1.3$ （有效数字 /*Significant Digits*/ ）

若近似值 x^* 与准确值的误差绝对值不超过某一位的半个单位，该位到x^* 的第一位非零数字共有 n 位，则称 x^*有n 位有效数字

如：$\pi = 3.1415926\cdots$ $\pi^* = 3.14$ $|e^*| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$ 3位

$\pi^* = 3.141592$ $|e^*| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$ 6位

误差分析的基本概念

相对误差限 有效数字

例 2 ：为使 π^* 的相对误差小于 0.001%，至少应取几位有效数字？

解：假设 π^* 取到 n 位有效数字，则其相对误差上限为

$$e_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

若 $x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \times 10^m$ 有 n 位有效数字时，显然有

$\varepsilon(x) = \left|x - x^*\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$，又因为 $\left|x^*\right| \ge \alpha_1 \times 10^{m-1}$，其相对误差有：

$$\left|\varepsilon_r^*(x)\right| = \left|\frac{\varepsilon(x)}{x^*}\right| \le \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{\alpha_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-n+1}$$

误差分析的基本概念

要保证其相对误差小于 0.001% ，只要保证其上限满足

$$e_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} < 0.001\%$$

已知 $a_1 = 3$ ，则从以上不等式可解得 $n > 6 - \log 6$ ，即 $n \ge 6$ ，应取 $\pi^* = 3.14159$ 。

误差分析的基本概念

近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.747\ldots\ldots$ 将 e^{-x^2} 作 Taylor 展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right) dx$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4} + \underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \cdots}_{R_4}$$

R_4 /* Remainder */

取 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx S_4$ ，

则 $R_4 = \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\times\frac{1}{11} + \cdots$ 为截断误差 /* Truncation Error */

这里 $|R_4| < \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} < 0.005$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 1 - 0.333 + 0.1 - 0.024 = 0.743$$

| 舍入误差 /* Roundoff Error */ | $< 0.0005\times 2 = 0.001$

| 计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 的总体误差 | $< 0.005 + 0.001 = 0.006$

由留下部分 /* included terms */ 引起

由截去部分 /* excluded terms */ 引起

$\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$

$\frac{1}{42} = 0.02380\cdots$

数值方法的运算性能

计算下列多项式的值，其中 $a_0, a_1, \dots a_n, x$ 为已知数据

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

若直接由 x 算出 $x^2, \dots, x^n$，再乘以相应的系数 $a_0, a_1, \dots a_n$ 并相加，则要做 $n(n+1)/2$ 次乘法和 n 次加法，占用 $2n+1$ 个存储单元

秦九韶递推法，也称为 Horner 算法

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots\dots + a_1)x + a_0$$

$$f_1 = a_n x + a_{n-1} \qquad \dots\dots$$

$$f_2 = f_1 x + a_{n-2} \qquad f_n = f_{n-1} x + a_0$$

$$f_3 = f_2 x + a_{n-3}$$

需要我们设计高精度、高稳定性、高运算性能的数值方法

数值方法的稳定性

计算 $I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0,1,2,\ldots\ldots$

公式一：$I_n = \frac{1}{e}[x^n e^x \big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx] = 1 - n\, I_{n-1}$

$I_0 = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056 \overset{\text{记为}}{=\!=} I_0^*$

此公式精确成立

$I_1^* = 1 - 1 \cdot I_0^* = 0.36787944$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$I_{10}^* = 1 - 10 \cdot I_9^* = 0.08812800$

$I_{11}^* = 1 - 11 \cdot I_{10}^* = 0.03059200$

$I_{12}^* = 1 - 12 \cdot I_{11}^* = 0.63289600$ ？

$I_{13}^* = 1 - 13 \cdot I_{12}^* = -7.2276480$ ？？

$I_{14}^* = 1 - 14 \cdot I_{13}^* = 94.959424$ ？！

$I_{15}^* = 1 - 15 \cdot I_{14}^* = -1423.3914$ ！！！

积分结果应该是正数且越来也小！！

分析第 n 步的误差

$$|E_n| = |I_n - I_n^*| = |(1 - nI_{n-1}) - (1 - nI_{n-1}^*)| = n\,|E_{n-1}| = \cdots = n!\,|E_0|$$

初始的小扰动迅速积累，误差呈递增趋势！！

造成这种情况的是不稳定的算法 /* unstable algorithm */

改进方法：先估计一个 I_N，再反推要求的 I_n ($n \ll N$)

$$I_n = 1 - n\,I_{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$$

$$I_{15}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\cdot 16} + \frac{1}{16}\right] \approx 0.042746233$$

$$\Rightarrow I_{14}^* = \frac{1}{15}(1 - I_{15}^*) \approx 0.063816918$$

$$I_{13}^* = \frac{1}{14}(1 - I_{14}^*) \approx 0.066870220$$

$$\vdots$$

计算结果靠谱！

$$I_1^* = \frac{1}{2}(1 - I_2^*) \approx 0.36787944$$

$$I_0^* = \frac{1}{1}(1 - I_1^*) \approx 0.63212056$$

分析反推计算的误差：

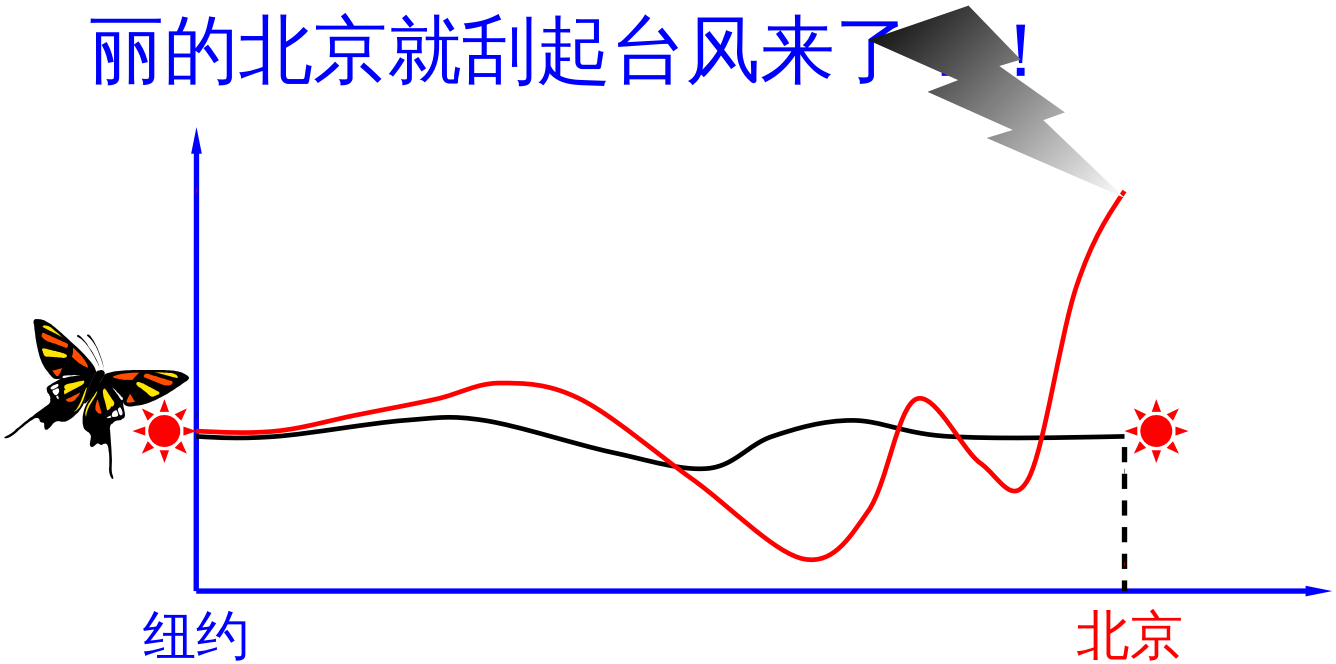
$$|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\ldots(n+1)}\,|E_N|$$

注意此公式与公式一
在理论上等价！

改进后算法误差递减，为稳定的算法 /* stable algorithm */

例 6 ：蝴蝶效应 —— 纽约的一只蝴蝶翅膀一拍，风和日

丽的北京就刮起台风来了！



这是一个病态问题

关于蝴蝶效应

关于本身是病态的问题，还是留给数学家去头痛吧！

数值方法的稳定性

蝴蝶效应是气象学家洛伦兹 1963 年提出来的。其大意为：一只南美洲亚马孙河流域热带雨林中的蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国德克萨斯引 起一场龙卷风。

蝴蝶效应在社会学界用来说明：一个坏的微小的机制，如果不加以及时地引导、调节，会给社会带来非常大的危害，戏称为“龙卷风”或“风暴”；一个好的微小的机制，只要正确指引，经过一段时间的努力，将会产生轰动效应，称为“革命”。

误差传播分析的方法和原则

一、误差分析的方法

(1)两个近似数 x_1^*, x_2^* ，四则运算得到的误差限分别为

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* \cdot x_2^*) \approx \left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{\left|x_1^*\right| \varepsilon(x_2^*) + \left|x_2^*\right| \varepsilon(x_1^*)}{\left|x_2^*\right|^2}$$

误差传播分析的方法和原则

（2）对于函数 $y=f(x)$，若用 x^* 取代 x，将对 y 产生什么影响？

分析：$e^*(y)=f(x^*)-f(x)$ Mean Value Theorem $e^*(x)=x^*-x$

$$=f'(\xi)(x^*-x)$$

x^* 与 x 非常接近时，可认为 $f'(\xi)\approx f'(x^*)$，则有：

绝对误差 $|e^*(y)|\approx|f'(x^*)|\cdot|e^*(x)|$

即：x^*产生的误差经过 f 作用后被放大／缩小了 $|f'(x^*)|$ 倍。故称 $|f'(x^*)|$ 为放大／缩小因子 /* amplification factor */ 或 绝对条件数 /* absolute condition number */.

误差传播分析的方法和原则

相对误差

$$|e_r^*(y)| = \left|\frac{e^*(y)}{f(x^*)}\right| \qquad |e_r^*(x)| = \left|\frac{e^*(x)}{x^*}\right|$$

$$|e_r^*(y)| = \left|\frac{f(x^*)-f(x)}{x^*-x}\cdot\frac{x^*}{f(x^*)}\cdot\frac{x^*-x}{x^*}\right|$$

$$\approx \left|\frac{x^*\cdot f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\cdot\left|e_r^*(x)\right| = \left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\cdot\left|e^*(x)\right|$$

相对误差条件数 /* relative condition number*/

f 的条件数在某一点是小 \ 大，则称 f 在该点是好条件的 /* well-conditioned */ \ 坏条件的 /* ill-conditioned */。

注：关于多元函数 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可类似讨论，理论工具：Taylor 公式

误差传播分析的方法和原则

例 7 设 $x=10\pm5\%$，试求函数 $f(x)=\sqrt[n]{x}$ 的相对误差限 .

解：由题设知:近似值为 $x^*=10$，绝对误差限为 $e(x^*)=5\%$

$$f'(x^*)=\frac{1}{n}(x^*)^{\frac{1}{n}-1}=\sqrt[n]{x^*}\cdot\frac{1}{nx^*}$$

$$e_r(f^*)=\frac{e(f^*)}{f(x^*)}\approx\frac{f'(x^*)e(x^*)}{f(x^*)}=\frac{e(x^*)}{nx^*}=\frac{0.005}{n}$$

二、几点注意事项 /* Remarks */

1、 避免相近二数相减

例： $a_1 = 0.12345$ ， $a_2 = 0.12346$ ，各有 5 位有效数字。 而 $a_2 - a_1 = 0.00001$ ，只剩下 1 位有效数字。

 几种经验性避免方法：

$$\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}}; \quad \ln(x+\varepsilon) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right);$$

当 $|x| << 1$ 时： $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$;

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \ldots\right)$$

误差传播分析的方法和原则

2、 避免小分母 ： 分母小会造成浮点溢出 /* over flow */

3 、避免大数吃小数

例：用单精度计算 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根

。 精确解为 $x_1=10^9,\ x_2=1$

- 算法 1 ：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内， 10^9 存为 0.1×10^{10} ， 1 存为 0.1×10^1 。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。即 1 的指数部分须变为 10^{10} ，则： $1=0.0000000001\times10^{10}$ ，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.000\cdots00\times10^{10}=0.10000000\times10^{10}$

大数吃小数

$$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

误差传播分析的方法和原则

✍算法 2 ：先解出 $$x_1 = \frac{-b - sign(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 10^9$$

再利用 $$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a\cdot x_1} = \frac{10^9}{10^9} = 1$$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

例：按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 40 + 10^9$$

4 、 先化简再计算，减少步骤，避免误差积累。

一般来说，计算机处理下列运算的速度为 $(+\,,-) > (\times\,,\div) > (\exp)$

5 、选用稳定的算法

课程学习方法

- 在学习过程中，既要重视与方法有关的理论，又要重视方法的实际应用，必须注意理解设计原理及处理问题的技巧，重视有关的基本概念，误差分析、收敛分析、稳定性分析等。
- 做一定量的习题，能实际动手编程！！
- 复习《高等数学》、《线性代数》、《程序设计》等

通过该课程学习，学生应该掌握以下几个基本知识点与技能：

1）了解数值分析方法的基本概念和原理

2） 掌握通过计算机进行数值计算和仿真的方法

3）可进行机械系统、机电系统的建模分析

4）能对结果进行分析、评价

课程学习目标

算法设计： 设计求解实际问题的高效可靠的数值方法

- **有效性**：易于在计算机上实现
- **可靠性**：收敛性稳定性等有数学理论保证
- **数值实验**：要通过数值试验来证明算法是行之有效的

算法分析： 对求得的数值解进行精度评估

算法优化： 实现算法的高效运行

算法编程： 熟悉一门计算机编程语言，如 C 语言；掌握一种科学计算软件，如 Matlab

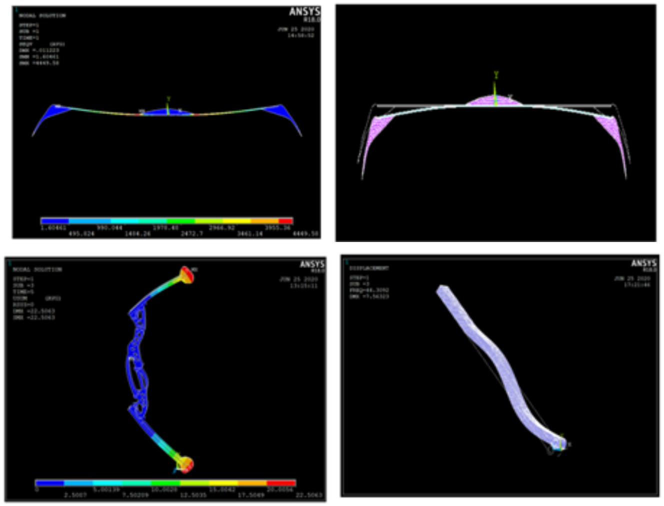
课程考核方法

1.期末考试占比 30%

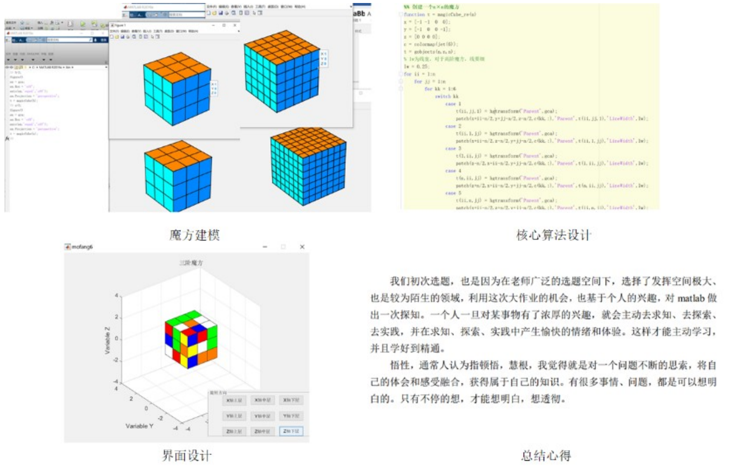
2.8 次平时课程作业、出勤及课题讨论表现占比 40%（一次点名不到扣 5 分，有不到纪录的同学会再次点名）。

3.大作业占比 30%（小组 3 人 - 有标准，实践限制，有明确方程，数值求解与理论求解对比，按照科研报告格式）。引导鼓励学生结合国防军工、航天登月、大国重器等国家重大科研项目的需求制定自己大作业研究题目，根据与国家战略需求的契合度情况给予成绩调整。

课程考核方法

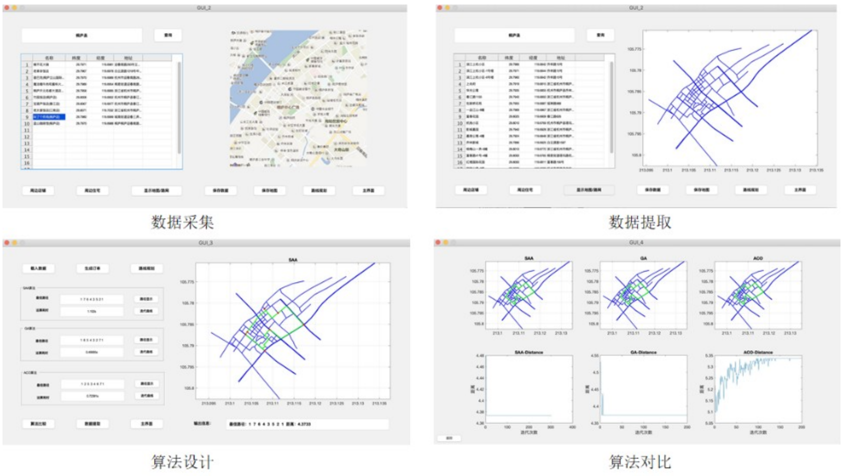


复杂机械部件应力分布分析



通过 Matlab 进行魔方的建模与还原

紫金港校园导航

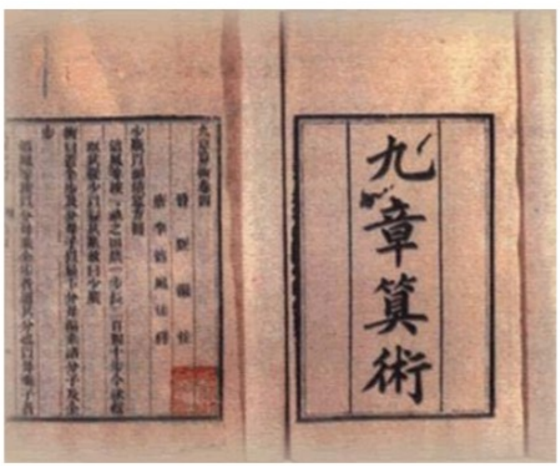


物流配送系统设计

例：一个古老的数学问题

今有 上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。
问上、中、下禾实一秉各几何？

——《九章算术》



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Ax = b}$$

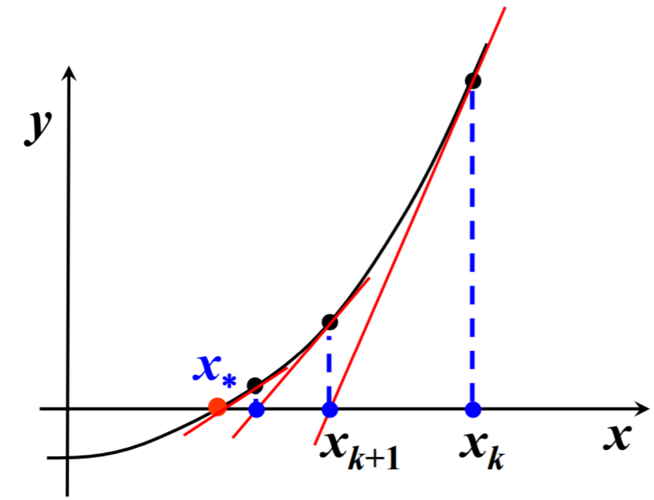
第二课—线性方程组数值求解

数值方法的应用实例

例：怎样计算平方根？如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{21}$，$\sqrt{201}$，$\sqrt{n}$

求解方程： $f(x)=x^2-2$

Newton迭代法： $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{2}{x_k}\right)$



$x_0=1$，$x_1=1.500000$，$x_2=1.416667$，

$x_3=1.414216$，$x_4=1.414214$

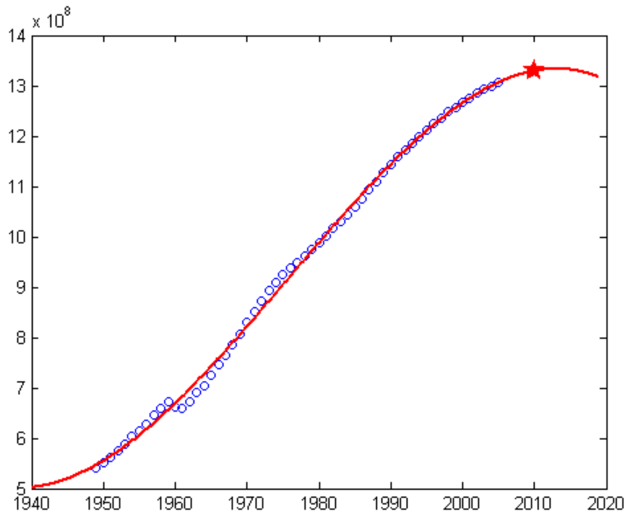
第三课—非线性方程数值求解

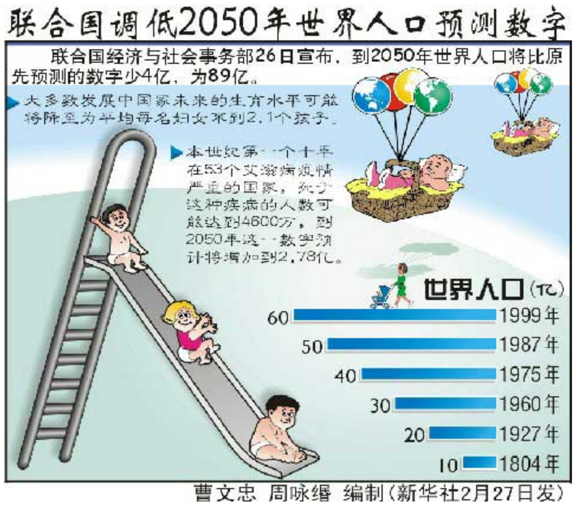
数值方法的应用实例

例：人口预测

年份	人口（万）
1950	55196
1955	61465
1960	66207
1965	72538
1970	82992
1975	92420
1980	98705
1985	105851
1990	11433
1995	121121
2000	126743
2005	130756

表格中是我国 1950 年到 2005 年的人口数（见中国统计年鉴），试预测未来的人口数

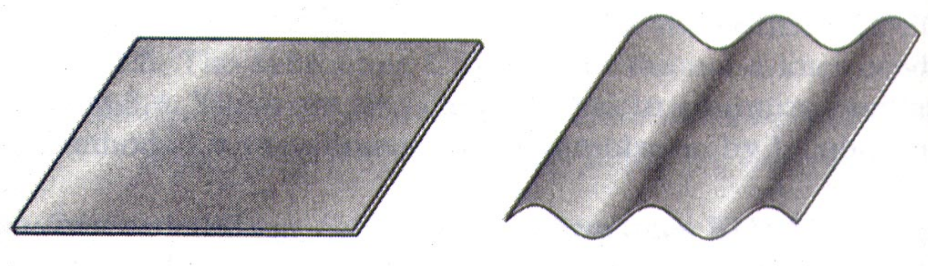




第四课—最小二乘与曲线拟合

数值方法的应用实例

例：铝制波纹瓦的长度



假设要求波纹瓦长 48 英寸，每个波纹的高度(从中心线)为 1 英寸，且波纹是以近似 2π 英寸为一个周期的正弦函数
$f(x)=\sin x$，求制做一块波纹瓦所需铝板的长度 L 。

$$L=\int_0^{48}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{48}\sqrt{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$$

上述积分为第二类椭圆积分，无法通过解析方法计算

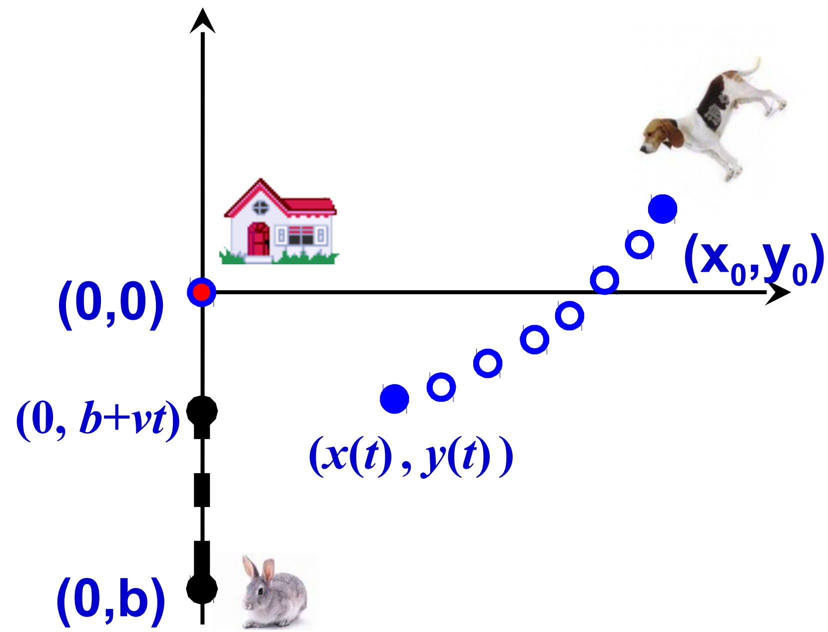
第六课—积分问题的数值计算

数值方法的应用实例

例：猎狗追兔问题

在旷野上有一只野兔和一条猎狗，猎狗发现野兔并开始追踪，同时野兔也发现猎狗，开始跑向兔穴。假定猎狗的追踪方向始终对着野兔，猎狗和野兔的奔跑速度分别为 u 和 v。

问：猎狗能否在野兔进洞前抓住野兔？



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(b+vt)}{x}$$

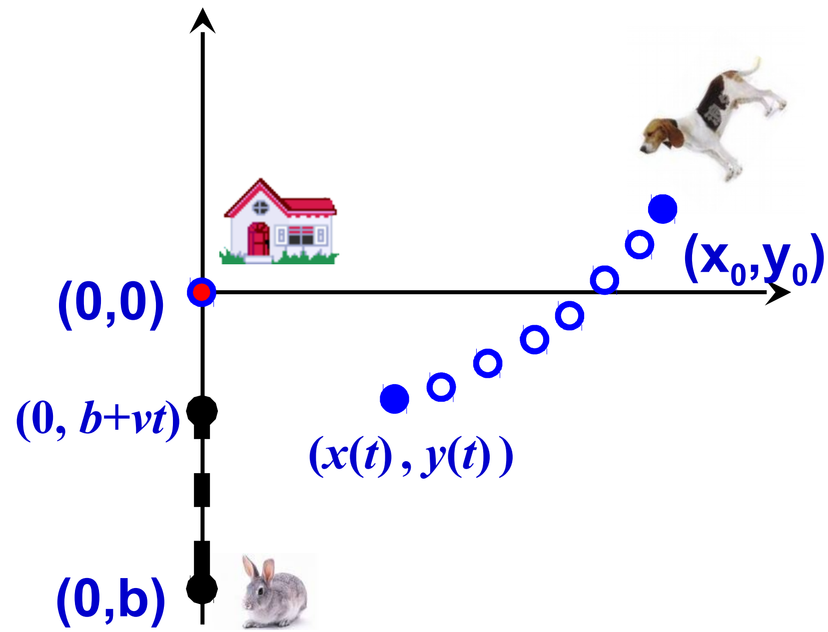
第八课—常微分方程数值求解

数值方法的应用实例

例：猎狗追兔问题

在旷野上有一只野兔和一条猎狗，猎狗发现野兔并开始追踪，同时野兔也发现猎狗，开始跑向兔穴。**假定猎狗的追踪方向始终对着野兔**，猎狗和野兔的奔跑速度分别为 u 和 v。

问：猎狗能否在野兔进洞前抓住野兔？



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(b+vt)}{x}$$

第八课—常微分方程数值求解