3-2 二元不可压缩流场中

$$u_x = 5x^3, \quad u_y = -15x^2 y$$

试求（$x=1$m，$y=2$m）点上的速度和加速度。

［解］ $u_x = 5\text{m/s}, \quad u_y = -30\ \text{m/s}$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 30.4\text{m/s}$$

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y = 15x^2 \times 5x^3 = 75 \quad \text{m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_y = (-15xy)(5x^2) + (-15x^2)(-15x^2 y)$$

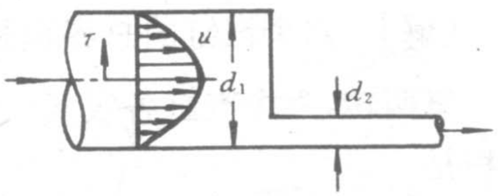
$$= -300 + 450 = 150 \quad \text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 167.7 \quad \text{m/s}^2$$

［答：$u=30.41$ m/s，$a=167.7\text{m/s}^2$］

3-6 大管直径 $d_1=5$m，小管直径 $d_2=1$m，已知大管中过流断面上的速度分布为 $u=6.25-r^2$m/s（式中 r 表示点所在半径，以 m 计）

试求管中流量及小管中的平均速度。



题 3-6 图

［解］ 取微元面积 $2\pi r\text{d}r$，求积分得

$$Q=\int_0^{d_1/2}u\times 2\pi r\mathrm{d}r=\int_0^{2.5}(6.25-r^2)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[6.25\times\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^{2.5}=61.36\ \mathrm{m^3/s}$$

$$v=\frac{4Q}{\pi d_2^2}=\frac{4\times 61.36}{\pi\times 1^2}=78.13\ \mathrm{m/s}$$

[答：$Q=61.36\mathrm{m^3/s}$，$v=78.13\mathrm{m/s}$]

3-11 三元不可压缩流场中，已知

$$u_x=x^2+y^2z^3\qquad u_y=-(xy+yz+zx)$$

且已知 $z=0$ 处 $u_z=0$，试求流场中的 u_z 表达式。

[解] 将 u_x、u_y 代入不可压缩流体的连续方程式

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

中，即得

$$x-z+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

于是

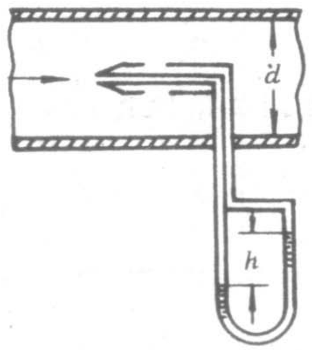
$$u_z=\int\frac{\partial u_z}{\partial z}\mathrm{d}z=\int(z-x)\mathrm{d}z=\frac{z^2}{2}-xz+C$$

在 $z=0$ 处 $u_z=0$；$\therefore C=0$

$$\therefore u_z=-xz+\frac{z^2}{2}$$

[答：$u_z=-xz+\frac{z^2}{2}$]

3-20 皮托静压管与水银差压计相连，借以测定水管中的最大轴向速度 $u_{\max}$ 已知 $h=40\text{mm}$，$d=200\text{mm}$，$u_{\max}=1.2v$，试求管中的流量。



题 3-20 图

［解］ 用 γ 与 γ' 分别代表水和水银的重度。将伯努利方程用于管道轴心和静压管入口，则

$$\frac{u_{\max}^2}{2g}=\frac{p_0-p}{\gamma}$$

从测压管得 $p_0-p=(\gamma'-\gamma)h$

$$\therefore u_{\max}=\sqrt{2g\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma}h}=1.2V$$

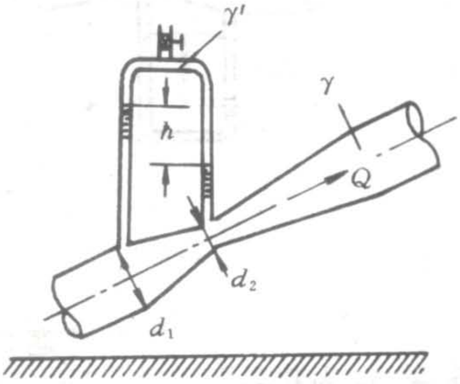
$$\therefore \text{流量}\ Q=\frac{\pi}{4}d^2v=\frac{\pi}{4}d^2\frac{1}{1.2}\sqrt{2gh\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\times 0.2^2\times\frac{1}{1.2}\sqrt{2\times 9.81\times 0.4\times\frac{13.6-1}{1}}$$

$$=0.261\ \text{m}^3/\text{s}=261\ \text{L/s}$$

［答：$Q=261\text{l/s}$］

3-26 倾斜水管上的文德利流量计 $d_1=30\text{cm}$，$d_2=15\text{cm}$，倒U形差压计中装有比重为0.6的轻质不混于水的液体，其读数为 $h=30\text{cm}$，收缩管中的水头损失为 d_1 管中速度水头的20%，试求喉部速度 v_2 与管中流量 Q。



题 3-26 图

［解］ 设图示两断面中心到基准面的距离（即位置水头）分别为 z_1 和 z_2。两断面中心到右边测压管液体交界面的垂直高度分别为 a 和 b。则压强关系可由左边断面的 p_1 逐段加减推算到右边断面的 p_2，即

$$p_1-\gamma(a+h)+\gamma' h+\gamma b=P_2$$

$$\therefore \frac{p_1-p_2}{\gamma}=h(1-\frac{\gamma'}{\gamma})+(a-b)$$

$$=h(1-\frac{\gamma'}{\gamma})+(z_1-z_2) \qquad (a)$$

又由连续方程可得

$$v_1=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2,\quad v_1^2=v_2^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \qquad (b)$$

列两断面的伯努利方程式，考虑水头损失，则

$$z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z^2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+0.2\,\frac{v_1^2}{2g}$$

解出
$$\frac{v_1^2-0.8v_1^2}{2g}=z_1-z_2+\frac{p_1-p_2}{\gamma} \qquad (c)$$

将 (a)、(b) 式代入 (c) 式可得

$$\frac{v_2^2}{2g}\left[1-0.8\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]=h\left(1-\frac{\gamma'}{\gamma}\right)$$

$$\therefore v_2=\sqrt{\frac{2gh\left(1-\dfrac{\gamma'}{\gamma}\right)}{1-0.8\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

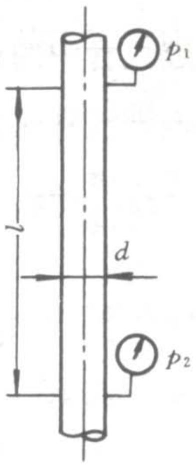
$$\because \frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{0.6\times9810}{9810}=0.6$$

$$\therefore v_2=\sqrt{\frac{2\times9.81\times0.3\times(1-0.6)}{1-0.8\times\left(\dfrac{0.15}{0.3}\right)^4}}=1.574\text{m/s}$$

$$Q=\frac{\pi}{4}d_2^2v_2=\frac{\pi}{4}\times0.15^2\times1.574=0.0278\ \text{m}^3/\text{s}$$

[答：$v_2=1.574\text{m/s}$，$Q=0.0278\text{m}^3/\text{s}$]

3-27 在铅直管道中有密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$ 的原油流动，管道直径 $d=20\text{cm}$，在 $l=20\text{m}$ 的两处读得 $p_1=1.9621\text{bar}$，$p_2=5.886\text{bar}$，试问流动方向如何？损失水头多少？



题 3-27 图

[解] 比较上、下两断面上的单位重量流体的能量大小即可判断流动方向。两断面上的动能相同，，可不必计较。

下端断面：位能定为 0，只有压能

$$\frac{p_2}{\gamma}=\frac{5.886\times10^5}{900\times9.81}=66.6\text{moil}；$$

上端断面：位能为 l，压能为 $\frac{p_1}{\gamma}$。

$$l+\frac{p_1}{\gamma}=20+\frac{1.96\times10^5}{900\times9.81}=42.2\text{moil}$$

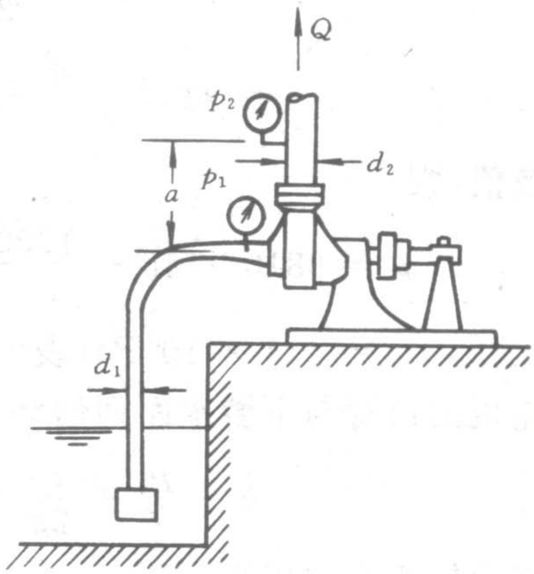
可见下端断面能量大于上端断面能量，流动方向是由下而上。

单位重量流体的能量损失为

$$h_f = \frac{p_2}{\gamma} - \left(l + \frac{p_1}{\gamma}\right) = 66.6 - 42.2 = 24.4\text{moil}$$

[答：向上，$h_f = 24.4$moil]

3-35 在离心水泵的实验装置上测得吸水管上的表压强 $p_1 = -0.4g \times 10^4$Pa，压水管上的表压强 $p_2 = 2.8g \times 10^4$Pa，(g 为重力加速度) $d_1 = 30$cm，$d_2 = 25$cm，$a = 1.5$m，$Q = 0.1$ m^3/s。试求水泵的输出功率。



题 3-35 图

［解］ 水泵出口和入口断面上的单位重量流体的能量之差称为扬程 H

$$H = a + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{p_1}{\gamma} - \frac{v_1^2}{2g}$$

$$= a + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{16Q^2}{2g\pi^2}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right)$$

水泵输出功率 $N = \gamma QH$

$$N = \gamma Qa + Q(p_2 - p_1) + \frac{16\rho Q^3}{2\pi^2}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right)$$

$$= 9810 \times 0.1 + (2.8 + 0.4) \times 9.81 \times 0.1 \times 10^4$$

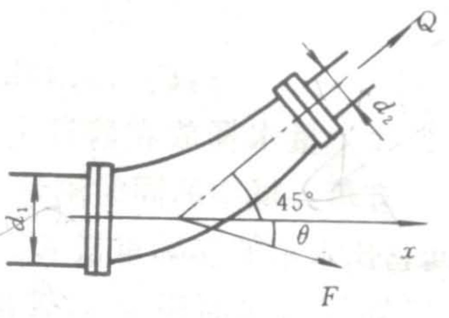
$$+ \frac{16 \times 1000 \times 0.1^3}{2\pi^2}\left(\frac{1}{0.25^2} - \frac{1}{0.3^2}\right)$$

$$= \cancel{32.96 \times 10^3}\text{W} = \cancel{32.96\ \text{k}}\text{W}$$

$= 32.83\text{kW}$

[答：$N = 32.96$kW]

3-39 在水平平面上的 45°弯管，入口直径 $d_1=600\text{mm}$，出口直径 $d_2=300\text{mm}$，入口压强 $p_1=1.4\text{bar}$，流量 $Q=0.425\text{m}^3/\text{s}$，忽略摩擦，试求水对弯管的作用力。



题 3-39 图

［解］ 设水流对弯管的作用力为 R，其 x、y 轴上的分力为 R_x、R_y，则弯管对管中水流的作用力 F 必相等、相反，而为 $F_x=-R_x$，$F_y=-R_y$。

取管中水流为控制体，分析作用在水流控制体上的外力及进出于控制体的动量变化。在 x 方向(坐标轴向右为正)，根据

$$\Sigma F_x=\rho Q(v_{2x}-v_{1x})$$

可得

$$-R_x+p_1\frac{\pi}{4}d_1^2=\rho Q\left[\frac{4Q}{\pi d_2^2}\cos45°-\frac{4Q}{\pi d_1^2}\right]$$

$$\therefore Rx=p_1\frac{\pi}{4}d_1^2-\frac{4\rho Q^2}{\pi}\left[\frac{\cos45°}{d_2^2}-\frac{1}{d_1^2}\right]$$

$$=1.4\times10^5\times\frac{\pi}{4}\times0.6^2-\frac{4\times1000\times0.425^2}{\pi}\times\left(\frac{0.707}{0.3^2}-\frac{1}{0.6^2}\right)$$

$$=38416\text{ N}$$

在 y 方向(坐标轴向上为正)，根据

$$\Sigma F_y=\rho Q(v_{2y}-v_{1y})$$

可得

$$R_y=\rho Q\left[\frac{4Q}{\pi d_2^2}\sin45°-0\right]=\frac{4\rho Q^2\sin45°}{\pi d_2^2}$$

$$=\frac{4\times1000\times0.425^2\times0.707}{\pi\times0.3^2}=1806.88\text{N}$$

所以水流对弯管的作用力的大小是

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=38460\text{N}=38.46\text{ kN}$$

方向是与 x 轴成 θ 角

$$\theta = \arcsin \frac{R_y}{R_x} = \arcsin \frac{1806.88}{38416} = 2°42'$$

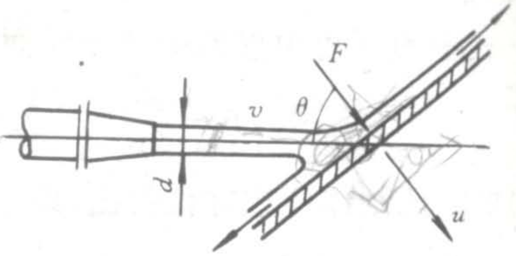
［答：$F=38.46$kN，力的方向与 x 轴夹角 $\theta=2°42'$］

3-41 水射流直径 $d=4$cm，速度 $v=20$m/s，平板法线与射流方向的夹角 $\theta=30°$，平板沿其法线方向运动速度 $u=8$m/s。

试求作用在平板法线方向上的力 F。

［解］ 假定射流到平板上不飞溅，取左面直径为 d 的流束在平板上所投影的一个倾斜面积 A 作为控制面，这控制面与 u 的方向，亦即与平板法线方向成垂直，大小为 $A=\frac{\pi}{4}d^2/\cos\theta$，沿控制面

的周界并垂直于平板和紧贴于平板划出一个流体控制体。平板对流体控制体的作用力是 $-F$，流入控制面 $\frac{\pi}{4}d^2\frac{1}{\cos\theta}$ 的流量应当用面积 A 乘以与 A 互相垂直的、沿 u 方向上的相对速度 $v\cos\theta-u$ 来表达，即



题 3-41 图

$$Q=(v\cos\theta-u)\frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\cos\theta}$$

流体流入控制的速度是 $v\cos\theta$，离开控制体的速度是 u。于是按 u 方向上的动量定理

$$\Sigma F_u=\rho Q(u_2-u_1)$$

可得

$$-F=\rho Q(u-v\cos\theta)$$

将 $Q=(v\cos\theta-u)\frac{\pi}{4}d^2/\cos\theta$ 代入，则

$$-F=\rho(v\cos\theta-u)\frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\cos\theta}(u-v\cos\theta)$$

∴流体作用在平板法线方向上的力是

$$F=\rho\frac{\pi}{4}d^2\frac{(v\cos\theta-u)^2}{\cos\theta}$$

代入数值，则

$$F=1000\times\frac{\pi}{4}\times0.04^2\times\frac{(20\times0.866-8)^2}{0.866}=126\mathrm{N}$$

答：$[F=\rho\frac{\pi}{4}d^2\frac{(v\cos\theta-u)^2}{\cos\theta}=126\mathrm{N}]$