第 三 章

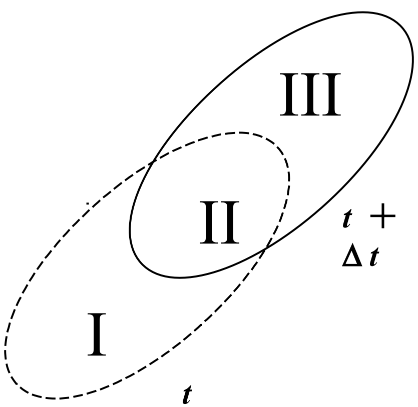
流体动力学基础（3）

——动量方程式

3-7 动量方程式及其应用

一、用欧拉法表示的方程式

关于质点系动量定理： $\sum F = \frac{d(\sum m\boldsymbol{v})}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\sum m\boldsymbol{v})}{\Delta t}$



t 时刻：质点系的动量 $[\mathbf{M}_{sys}]_t$，控制体的动量 $[\mathbf{M}_{cv}]_t$

经Δt 时间，在 t ＋Δt 时刻：

质点系的动量 $[\mathbf{M}_{sys}]_{t+\Delta t}$，控制体的动量 $[\mathbf{M}_{cv}]_{t+\Delta t}$

经Δt 时间，质点系的动量变化：

$$\Delta \mathbf{M}_{sys} = [\mathbf{M}_{sys}]_{t+\Delta t} - [\mathbf{M}_{sys}]_t$$

其中， $[\mathbf{M}_{sys}]_{t+\Delta t} = \mathrm{II+III} = \mathrm{(I+II)-I} + \mathrm{III}$

经Δt 时间流入控制体的流体动量

$= [\mathbf{M}_{cv}]_{t+\Delta t} - [\mathbf{M}_{cv}]_i + [\mathbf{M}_{cv}]_o$

经Δt 时间流出控制体的流体动量

所以， $\Delta \mathbf{M}_{sys} = [\mathbf{M}_{cv}]_{t+\Delta t} - [\mathbf{M}_{cv}]_t - [\mathbf{M}_{cv}]_i + [\mathbf{M}_{cv}]_o$

$$= \Delta \mathbf{M}_{cv} - [\mathbf{M}_{cv}]_i + [\mathbf{M}_{cv}]_o$$

$$\Delta M_{cv}=\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV\right]_{t+\Delta t}-\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV\right]_t$$

$$-\ [M_{cv}]_i + [M_{cv}]_o = \Delta t \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A})$$

$$\sum \boldsymbol{F}=\frac{d(\sum m\boldsymbol{v})}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\sum m\boldsymbol{v})}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV\right]_{t+\Delta t}-\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV\right]_t+\Delta t \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A})\right\}$$

—— **欧拉方法表示的动量方程式**

即 $$\sum \boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV+\oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A})$$

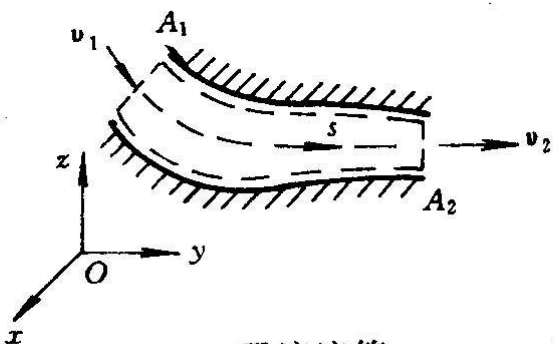
作用在控制体内质点系上的所有外力的矢量和。

是控制体内流体动量对时间的变化率，定常流动时为 0 。

单位时间内控制体流出动量与流入动量之差。

定常、不可压、一元流的情况：

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v dV + \oiint_A \rho v(v \cdot dA)$$



一元流流管

虚线所围的区域为控制体，过流断面上的平均速度为 v_1 ， v_2 ，由动量方程为：

$$\Sigma \boldsymbol{F}_s = \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \int_{A_2} \rho \boldsymbol{v}_2 \, v_2 \mathrm{d}A - \int_{A_1} \rho \boldsymbol{v}_1 \, v_1 \mathrm{d}A$$

$$= \beta\rho q_V(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \approx \rho q_V(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

在三个坐标轴上的投影式为：

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= \beta\rho q_V(v_{2x} - v_{1x}) \approx \rho q_V(v_{2x} - v_{1x}) \\ \Sigma F_y &= \beta\rho q_V(v_{2y} - v_{1y}) \approx \rho q_V(v_{2y} - v_{1y}) \\ \Sigma F_z &= \beta\rho q_V(v_{2z} - v_{1z}) \approx \rho q_V(v_{2z} - v_{1z}) \end{aligned}\right\}$$

注意：方程式的受力对象；外力与速度的方向；控制体流出、流入动量的符号。

二、动量方程式的应用

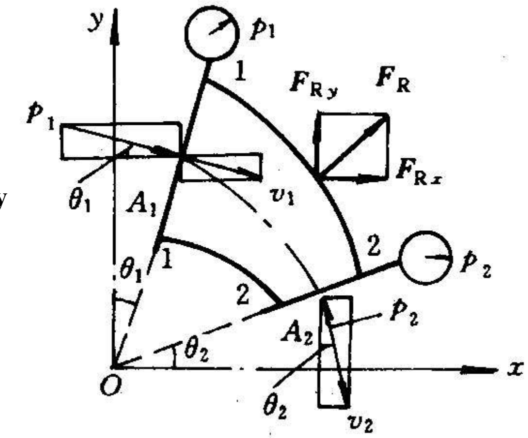
应用动量方程的两个关键步骤：

选好控制体，把要研究的问题尽量集中在控制面上，尽量减少未知数的个数；

正确选择坐标系，尽量减少方程的个数，列标量形式方程时注意外力的作用方向、速度的方向及其他们投影的正负。

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= \beta\rho q_V(v_{2x}-v_{1x})\approx\rho q_V(v_{2x}-v_{1x})\\ \Sigma F_y &= \beta\rho q_V(v_{2y}-v_{1y})\approx\rho q_V(v_{2y}-v_{1y})\\ \Sigma F_z &= \beta\rho q_V(v_{2z}-v_{1z})\approx\rho q_V(v_{2z}-v_{1z})\end{aligned}\right\}$$

1. 流体对管道的作用力



变径弯管

已知θ_1、 θ_2、A_1、 A_2、p_1、 p_2、 v_1、 v_2

求密度为 ρ、流量为 q_v 的流体对弯管的作用力 F_{Rx} 和 F_{Ry}

第一步：取控制体

第二步：分析流体质点系受到的外力，忽略重力

$$-F_{Rx}、-F_{Ry}、\quad p_1A_1、\quad p_2A_2$$

第三步：运用动量方程式

$$\left.\begin{aligned}&p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2-F_{Rx}\\&=\rho q_V[(v_2\sin\theta_2)-(v_1\cos\theta_1)],\\&-p_1A_1\sin\theta_1+p_2A_2\cos\theta_2-F_{Ry}\\&=\rho q_V[(-v_2\cos\theta_2)-(-v_1\sin\theta_1)]\end{aligned}\right\}$$

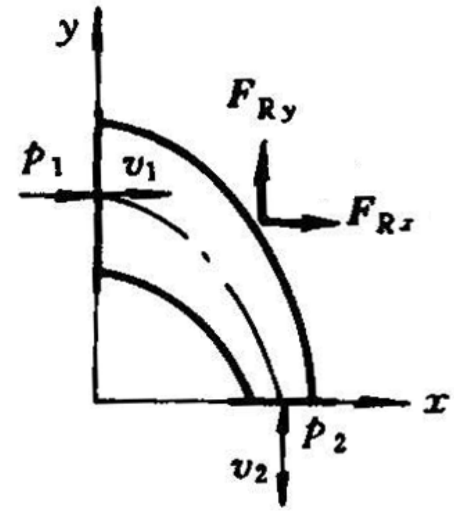
第四步：解出流体对管道的作用力

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2+\rho q_V(v_1\cos\theta_1-v_2\sin\theta_2)\\F_{Ry}&=p_2A_2\cos\theta_2-p_1A_1\sin\theta_1+\rho q_V(v_2\cos\theta_2-v_1\sin\theta_1)\end{aligned}\right\}$$

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2},\alpha=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

一般式：
$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2+\rho q_V(v_1\cos\theta_1-v_2\sin\theta_2)\\F_{Ry}&=p_2A_2\cos\theta_2-p_1A_1\sin\theta_1+\rho q_V(v_2\cos\theta_2-v_1\sin\theta_1)\end{aligned}\right\}$$

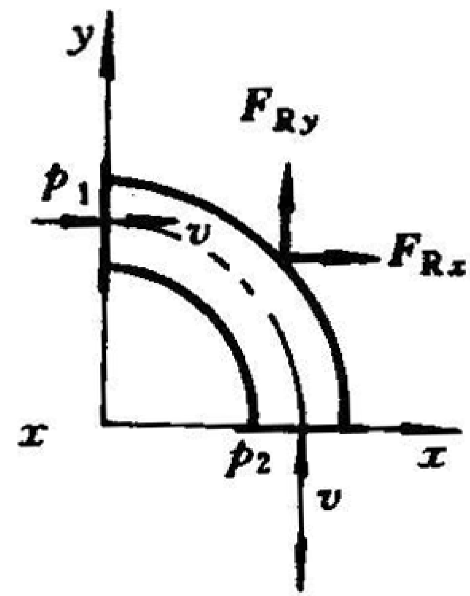
【特例 1 】直角变径弯管



$\theta_1=\theta_2=0$， $q_v=v_1A_1=v_2A_2$

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+\rho v_1^2)A_1\\F_{Ry}&=(p_2+\rho v_2^2)A_2\end{aligned}\right\}$$

【特例 2 】直角等径弯管



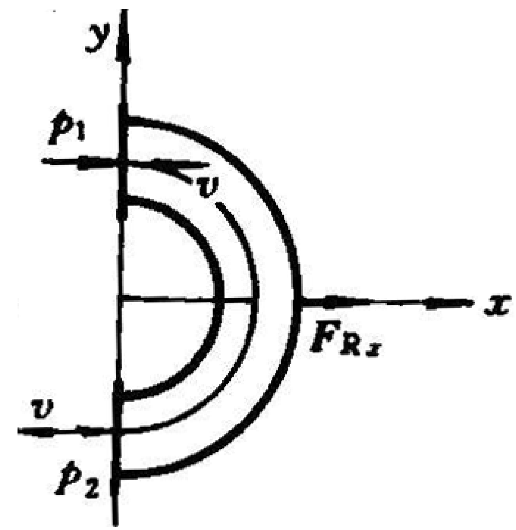
$\theta_1=\theta_2=0$， $A_1=A_2=A$， $q_v=vA$

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+\rho v^2)A\\F_{Ry}&=(p_2+\rho v^2)A\end{aligned}\right\}$$

一般式：

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2+\rho q_V(v_1\cos\theta_1-v_2\sin\theta_2)\\F_{Ry}&=p_2A_2\cos\theta_2-p_1A_1\sin\theta_1+\rho q_V(v_2\cos\theta_2-v_1\sin\theta_1)\end{aligned}\right\}$$

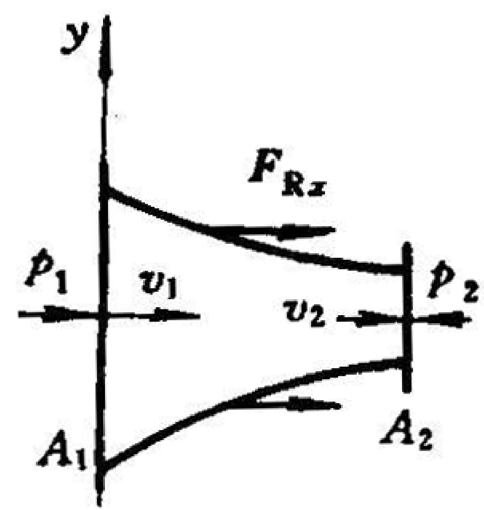
【特例 3 】反向等径弯管



$\theta_1=0$， $\theta_2=-90^0$， $A_1=A_2=A$， $v_1=v_2$， $q_v=vA$

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+p_2+2\rho v^2)A\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}$$

【特例 4 】逐渐收缩管



$\theta_1=0$， $\theta_2=90^0$， $q_v=v_1A_1=v_2A_2$

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+\rho v_1^2)A_1-(p_2+\rho v_2^2)A_2\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}$$

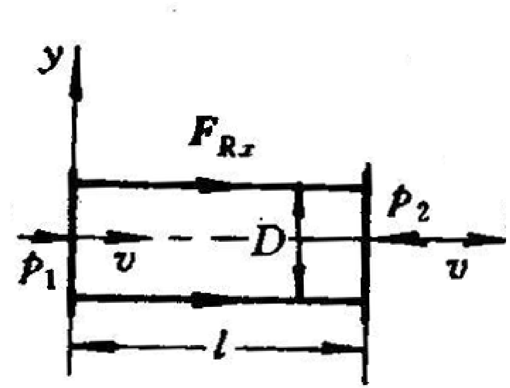
一般式：

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx} &= p_1A_1\cos\theta_1 - p_2A_2\sin\theta_2 + \rho q_V(v_1\cos\theta_1 - v_2\sin\theta_2)\\ F_{Ry} &= p_2A_2\cos\theta_2 - p_1A_1\sin\theta_1 + \rho q_V(v_2\cos\theta_2 - v_1\sin\theta_1)\end{aligned}\right\}$$

【特例 5 】等径直管

$\theta_1 = 0$， $\theta_2 = 90^0$， $A_1 = A_2 =$ A，

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx} &= (p_1 - p_2)A\\ F_{Ry} &= 0\end{aligned}\right\}$$



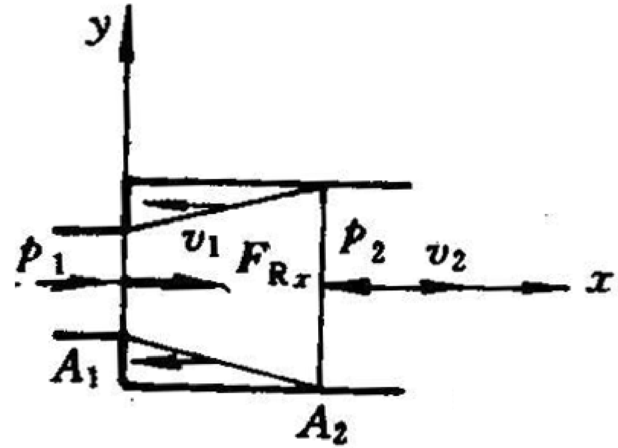
等径直管中流体对管道的作用力实质上就是作用在管壁上的摩擦力，将 F_{Rx} 除以管壁的摩擦面积 $2\pi Rl$，即可得管壁上的切应力为

$$\tau_0 = \frac{F_{Rx}}{2\pi Rl} = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^2}{2\pi Rl} = \frac{(p_1 - p_2)R}{2l} = \frac{\Delta pR}{2l} = \frac{\Delta pd}{4l}$$

如果对 1， 2 断面列伯努利方程，可得： $h_f = \dfrac{p_1 - p_2}{\rho g} = \dfrac{4\tau_0 l}{\rho gd}$

【特例 6 】突然扩大管

$\theta_1 = 0$， $\theta_2 = 90^0$，则



$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= (p_1 + \rho v_1^2)A_1 - (p_2 + \rho v_2^2)A_2 \\ F_{Ry} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

流体对突然扩大管上的作用力为作用在台肩圆环断面上，略去流体与壁面的摩擦力，则

$$F_{Rx} = -p_1(A_2 - A_1)$$

由上两式子可得

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{g}(v_2^2 - v_1 v_2)$$

列 1， 2 断面的伯努利方程

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + h_f$$

h_f 为

$$h_f = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

$$h_f = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}$$

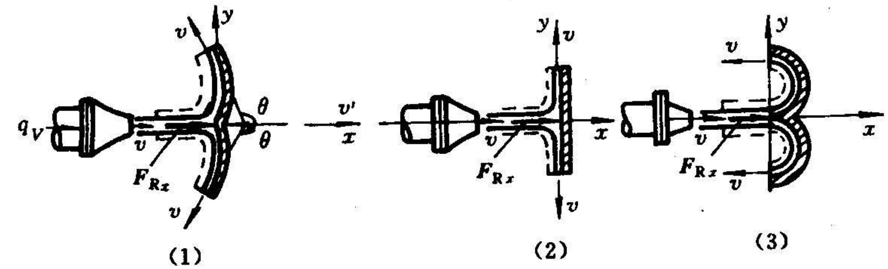
或

$$h_f = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ \zeta_2 &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

2. 自由射流的冲击力

自由射流的概念



自由射流的冲击力

按动量方程得曲面作用在流体上的力为：

$$F_x = \rho\left[2\frac{q_V}{2}v\cos\theta - q_V v\right] = \rho q_V v(\cos\theta - 1)$$

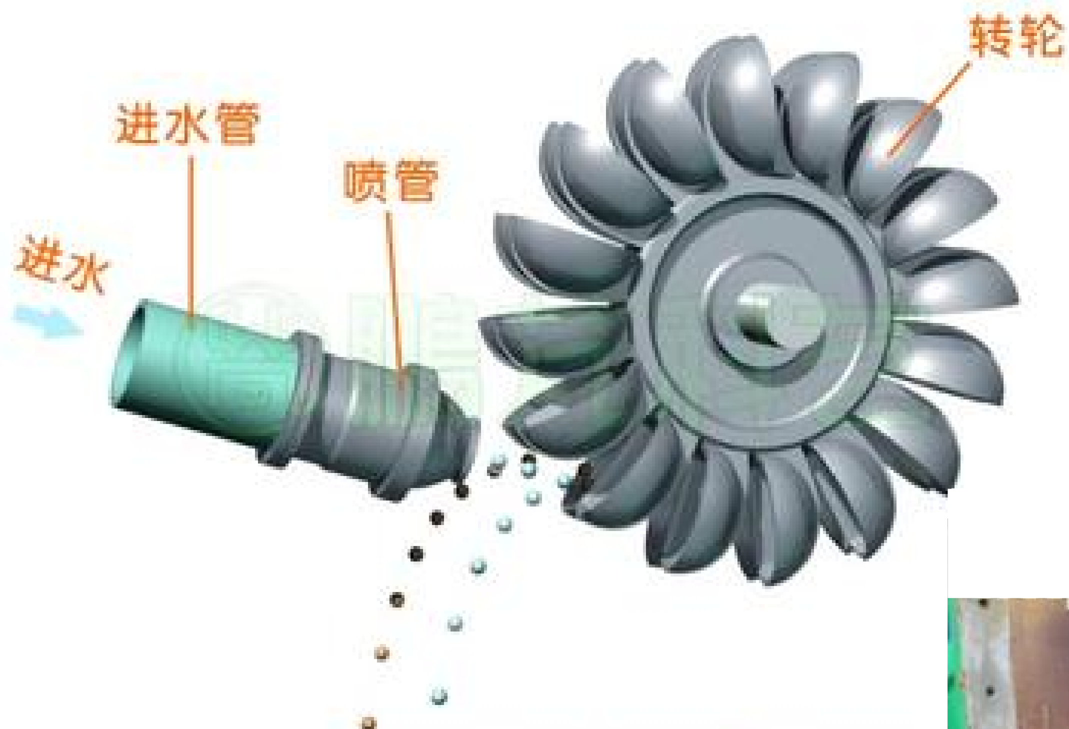
于是射流对曲面的冲击力为：

$$F_{Rx} = -F_x = \rho q_V v(1 - \cos\theta)$$

【特例 1 】θ＝ 90^0 $\quad F_{Rx} = \rho q_V v$

$$F_{Rx} = 2\rho q_V v$$

【特例 2 】θ＝ 180^0

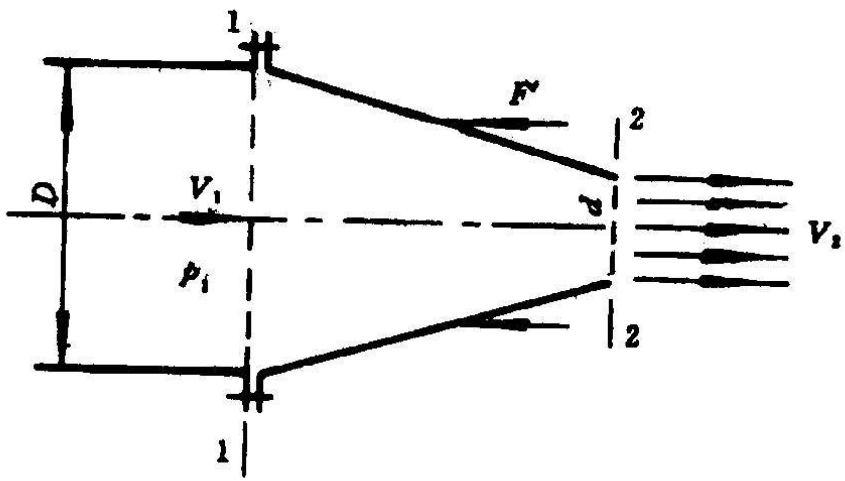


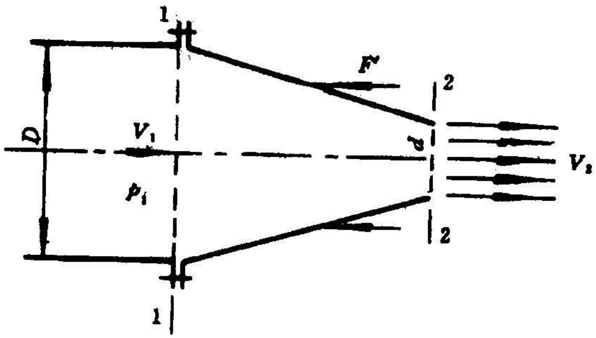
冲击式水轮机

叶轮

小型冲击式水轮发电机

例　　图示为一水平放置的喷嘴，水自喷嘴喷出流入大气。已知水的密度 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$，喷嘴尺寸 $D = 8\text{cm}$，$d = 2\text{cm}$，并测得出口速度 $V_2 = 15\text{m/s}$。不计流动损失，求联接喷嘴的螺栓组 A 所受作用力。





$$V_1 \frac{\pi}{4}D^2 = V_2 \frac{\pi}{4}d^2 = q_V \quad ①$$

$$V_1 = (\frac{d}{D})^2 V_2 \quad ②$$

取缓变过流断面1-1、2-2列伯努里方程，并注意到喷嘴水平放置，故$z_1 = z_2$，p_2为大气压力，以相对压力计算有$p_2 = 0$，取动能修正系数$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$，不计流动损失，于是可得

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

将②式代入，得

$$p_1 = \frac{\rho}{2}[1 - (\frac{d}{D})^4]V_2^2 \quad ③$$

取1122为控制体，断面1-1上的压力为p_1。设喷嘴对控制体沿轴向作用力为F'，方向向左(参见本题图示)。对控制体列轴向动量方程，取动量修正系数$\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$，可得

$$\Sigma F = \frac{\pi}{4}D^2 p_1 - F' = \rho q_V(V_2 - V_1)$$

$$F' = p_1 \frac{\pi}{4}D^2 - \rho q_V(V_2 - V_1)$$

将式①、②、③代入上式，并依已知数据可得

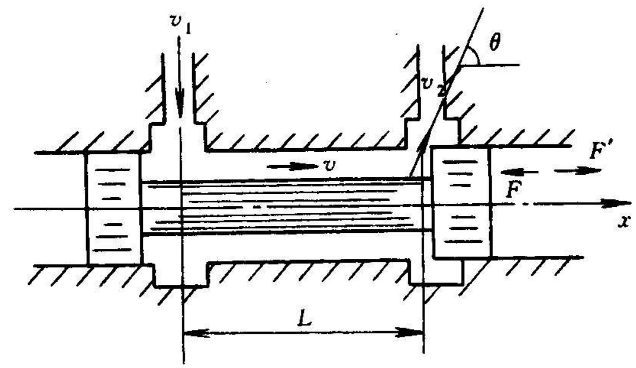
$$F' = \frac{\pi}{4}D^2 \frac{\rho}{2}[1 - (\frac{d}{D})^4]V_2^2 - \rho \frac{\pi}{4}d^2 V_2[V_2 - (\frac{d}{D})^2 V_2] = \frac{\pi\rho V_2^2 D^2}{8}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$$

$$= \frac{3.14 \times 1000 \times 15^2 \times 0.08^2}{8}[1 - (\frac{2}{8})^2]^2$$

$$\approx 497\text{N}$$

水流对喷嘴的作用力$F = -F'$，方向向右，此力由联接螺栓组A承受，即螺栓组所受拉力为$F = 497$N。

例：有一圆柱滑阀，进出口流速分别为 v_1 和 v_2 ，阀腔内平均流速 v ，出口断面上的压强可忽略，不计阻力，求液流对阀芯的轴向作用力。



取阀芯表面、阀套表面以及滑阀进出口表面所包围的流体为控制体。设液流对阀芯的轴向作用力 F 与 x 轴负向一致，则阀芯给液流的作用力 F' 与 F 相反。假设流体不可压缩，ρ 为常数，在 x 方向列写非定常流动的动量方程式

$$F' = \frac{\partial(mv)}{\partial t} + \rho q_v(v_2\cos\theta - v_1\cos 90^\circ) = \rho LA\frac{\partial v}{\partial t} + \rho q_v v_2\cos\theta$$

式中　L——阀腔长度；

A——阀腔的面积。

所以阀芯受到的轴向力为

$$F = -F' = -\rho LA\frac{\partial v}{\partial t} - \rho q_v v_2\cos\theta$$

上式等号右端第一项是因阀口开度改变而引起阀腔内的动量变化率，与此相对应的力称为瞬态力，其方向与 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 相反。而右端第二项是阀口开度一定时，流进、流出阀腔流体动量的变化量，与此相对应的力称为稳态力，其方向与 $v_2\cos\theta$ 的方向相反，也就是与阀口关闭的方向一致。

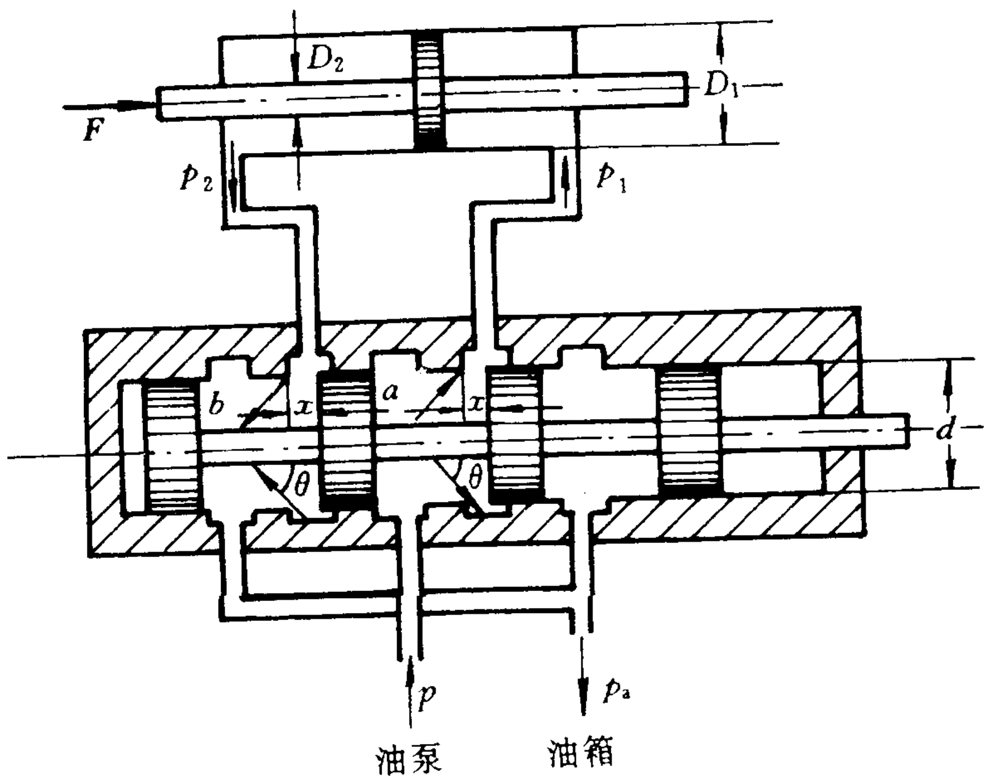


图 3－35　换向阀

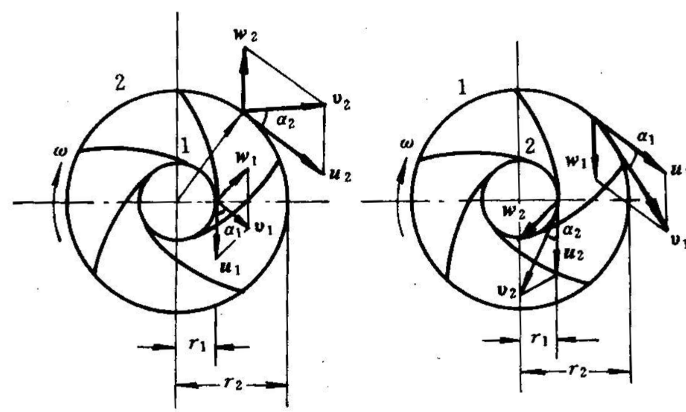
§3-8 动量矩方程式 *

$$\boldsymbol{r}\times\Sigma\boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}V+\oiint_A\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})v\mathrm{d}A$$

定转速叶轮机中，取叶轮出、入口的圆柱面与叶轮侧壁之间的流动区域为控制体

$$\boldsymbol{M}=\oiint_A\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})v\mathrm{d}A=\iint_{A_2}\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})v\mathrm{d}A-\iint_{A_1}\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})v\mathrm{d}A$$

$$M=\rho q_V(r_2v_2\cos\alpha_2-r_1v_1\cos\alpha_1)$$



(1)泵轮　(2)涡轮

叶轮机中角速度为　$\omega=\dfrac{u}{r}=\dfrac{u_1}{r_1}=\dfrac{u_2}{r_2}$

叶轮机中功率为

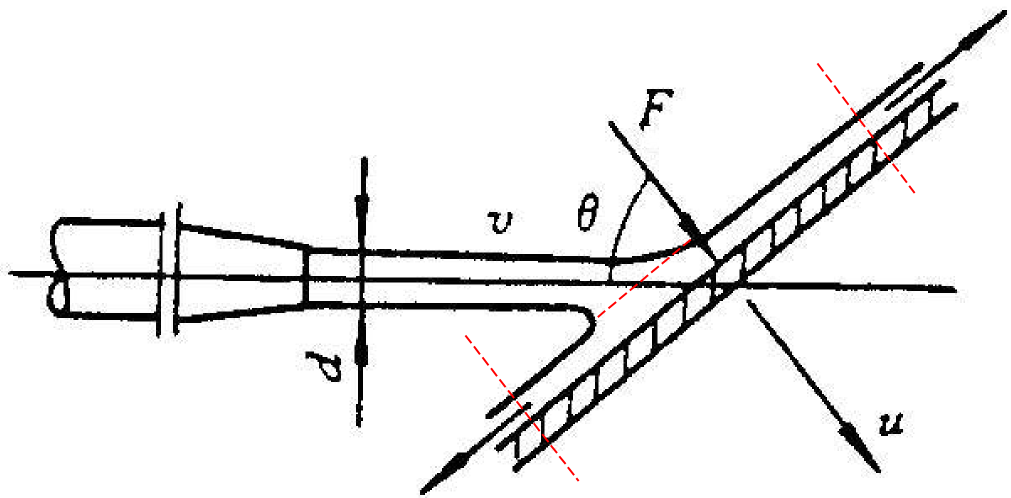
$$P=M\omega=\rho q_V(v_2u_2\cos\alpha_2-v_1u_1\cos\alpha_1)$$

或

$$\frac{P}{\rho g q_V}=\frac{1}{g}(v_2u_2\cos\alpha_2-v_1u_1\cos\alpha_1)=H$$

3-36：水射流直径 d ＝ 4cm ，速度 v=20m/s ，平板法线与射流方向的夹角θ＝ 30^0

平板沿法线方向运动速度 u ＝ 8m/s 时，求作用在平板法线方向的作用力 F 。



作业

3-34， 3-36