# 参考答案及详细解析

## NO.1　2019－2020　春夏学期

### 一、填空题

1.【答案】0.7　　0.6

【解析】至少取到 2 个红球的概率为$\dfrac{2红1白+3红}{全部组合}=\dfrac{C_3^2C_2^1+C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{3\times2+1}{10}=\dfrac{7}{10}$

第 2 次取到红球的概率为

$P(第一次取到白球)\times P(第二次取到红球\mid第一次取到白球)$

$+P(第一次取到红球)\times P(第二次取到红球\mid第一次取到红球)$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{5}$

2.【答案】0. 6826　　3

【解析】这是一个二元正态分布，可以得到：

$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(1,4)$，相关系数$\rho=0.5$

由此$P(|X-1|<1)=P\left(\dfrac{|X-1|}{1}<1\right)=2\Phi(1)-1=0.6826$

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$$

$$=Var(X)+Var(Y)+2\rho\sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

$$=1+4-2\times0.5\times\sqrt{1\times4}=3$$

3.【答案】(1) $\dfrac{1}{12}$　(2) $\dfrac{1}{6}$

【解析】(1) 由$X$与$Y$独立，则$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\dfrac{1}{4}$

$\therefore P(Y=1)=\dfrac{1}{4}\div\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

(2) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)=-\dfrac{1}{16}$

则$P(Y=1)=\dfrac{5}{12}$.

由$P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)$，得到$P(X=0,Y=1)=\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$

4.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$X$ 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X)=1$，$D(X)=1$，$E(X^2)=E^2(X)+D(X)=2$

$Y$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $E(Y^2)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

$\because$ $X$ 与 $Y$ 独立　$\therefore E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

5.【答案】$\frac{1}{2}$　　$\lambda^2+\frac{\lambda}{2}$　　$\lambda$

【提示】课本 6.3 的例题 1 很重要很重要，请务必熟练掌握

【解析】由 $\bar{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则 $P(X_1=1|\bar{X}=1)=P(X_1=1|X_1+X_2=2)=\frac{P(X_1=1,X_2=1)}{P(X_1+X_2=2)}$

$$=\frac{P(X_1=1)P(X_2=1)}{P(X_1=1)P(X_2=1)+P(X_1=0)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=0)}$$

$$=\frac{P^2(X=1)}{P^2(X=1)+2P(X=0)P(X=2)}$$

$$=\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}\right)^2}{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}\right)^2+2\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}}$$

$$=\frac{e^{-2\lambda}\lambda^2}{e^{-2\lambda}\lambda^2+e^{-2\lambda}\lambda^2}=\frac{1}{2}$$

由 $E(\bar{X})=E(X)=\lambda$，$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{2}$，则 $E(\bar{X}^2)=E^2(X)+D(X)=\lambda^2+\frac{\lambda}{2}$

$E(S^2)=D(X)=\lambda$

6.【答案】4.66　　接受原假设，因为 $\chi^2_{0.05}(3)>6.3$

【解析】列出表格：

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 概率 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 理论频数 | 10 | 20 | 30 | 40 |
| 实际频数 | 16 | 18 | 25 | 41 |

$\therefore$检验统计量 $\chi^2=\frac{(16-10)^2}{10}+\frac{(20-18)^2}{20}+\frac{(30-25)^2}{30}+\frac{(41-40)^2}{40}=4.66$

检验的拒绝域为：$\{\chi^2\geq\chi^2_{0.05}(3)=7.82\}$　$\therefore$接受原假设

二、**【解析】**第一问：若在该地区随机选一人进行检测，结果呈阳性，求他的确患病的概率

设事件：患病 $B_1$，未患病 $B_2$，阳性 $A$

由全概率公式：

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.001\times0.95+0.999\times0.002=2.948\times10^{-3}$$

由贝叶斯公式：$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=0.322$

第二问：两次皆为阳性的概率 $P(A^2)=P(B_1)P^2(A|B_1)+P(B_2)P^2(A|B_2)$

由贝叶斯公式：$P(B_1|A^2)=\dfrac{P(B_1)P^2(A|B_1)}{P(A^2)}=0.996$

三、**【提示】**对于联合密度函数，尤其是“定义域”复杂的，一定要画图！

**【解析】**

（1）$P(\max(X,Y)<1)=P(X<1且Y<1)=\int_{-\infty}^{1}dx\int_{-\infty}^{1}f(x,y)dy$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{2x}\frac{3}{2}ydy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_0^{1}\frac{3}{2}ydy$$

$$=\frac{1}{2}$$

（2）在有非零概率密度部分，$f_X(x)=\int_0^{2x}\frac{3}{2}ydy=3x^2$ $\quad\therefore f_X(x)=\begin{cases}3x^2,0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}y-\frac{3}{4}y^2,0<y<2\\0,\quad 其他\end{cases}$

（3）条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\frac{3}{2}y}{3x^2}=\dfrac{y}{2x^2}$（$0<y<2x<2$）

则 $P\left(Y>\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right)=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2x}\frac{y}{2x^2}dy\right)_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

（4）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\iint_D xyf(x,y)dxdy-\int_0^1 xf_X(x)dx\int_0^1 yf_Y(y)dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2x} xy\frac{3}{2}ydy-\int_0^1 3x^3dx\int_0^1 y\left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{4}y^2\right)dy$$

$$=\frac{1}{20}$$

∴正相关

**四、【解析】**

（1）由于 $f(x)$ 是分段函数，故 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$ 也是分段函数

得到 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{3}x^3, 0<x<1\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}, 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（2）由 $Y=\min\{X,1\}=\begin{cases}X, X\le 1\\ 1, X>1\end{cases}$：

$$F_Y(y)=P\left(\min\{X,1\}<y\right)$$

$$=P\left(\min\{X,1\}<y, X\le 1\right)+P\left(\min\{X,1\}<y, X\ge 1\right)$$

$$=P(X\le y, X\le 1)+P(y\ge 1, X\ge 1)$$

$$=\begin{cases}P(X\le y)+0, y<0\\ P(X\le y)+0, 0\le y<1\\ P(X\le 1)+P(X\ge 1), y\ge 1\end{cases}\qquad \therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ \frac{1}{3}y^3, 0<y<1\\ 1, y\ge 1\end{cases}$$

（3）由辛钦大数定律：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E(X)=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

（4）此时 $n$ 数值极大，可用中心极限定理

$\because P(X<1)=F(1)=\frac{1}{3}$，$Z$ 服从二项分布

$\therefore E(Z)=np=450\times\frac{1}{3}=150$

$D(Z)=np(1-p)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

$\therefore Z\sim N(150,100)$，即 $\mu=150$，$\sigma=10$

$$\therefore P(Z>160)=P\left(\frac{Z-150}{10}>\frac{160-150}{10}\right)=1-\Phi(1)=0.1587$$

五、【解析】

（1）本题可先使用拒绝域，或者直接用 $P_{-}$ 值检验

题给信息有：$n=64$，$\bar{x}=1120$，$s^2=108900$

由于 $\mu,\sigma^2$ 未知，取检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

$$\therefore t=\frac{1120-1000}{330/8}=2.909$$

原假设 $H_0:\mu\le 1000$，为左侧检验

$\therefore$ 拒绝域 $W=\{T>t_{0.05}(63)\}=\{T>1.669\}$　　$\therefore t$ 落在拒绝域内，故拒绝原假设

$P_{-}=P(t(63)>2.909)=0.0025$，同样可以拒绝原假设

（2）取枢轴量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

则 $P\left(\chi^2_{0.95}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{0.05}(n-1)\right)=0.9$

$\therefore$ 置信区间 $\sqrt{\dfrac{63}{\chi^2_{0.05}(63)}}S<\sigma<\sqrt{\dfrac{63}{\chi^2_{0.95}(63)}}S$，即 $(288.4,387.5)$

六、【解析】

（1）$E(X)=0\times(1-p)+1\times\dfrac{p}{2}+2\times\dfrac{p}{3}+3\times\dfrac{p}{6}=\dfrac{5}{3}p$

$$\therefore \hat{p}_1=\frac{3}{5}\bar{X}=\frac{3}{5}\frac{n_1+2n_2+3n_3}{n_0+n_1+n_2+n_3}$$

$\because E(\hat{p}_1)=E\left(\dfrac{3}{5}\bar{X}\right)=\dfrac{3}{5}E(X)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{3}p=p$　　$\therefore$ 是无偏估计

（2）$L(p)=(1-p)^{n_0}\left(\dfrac{p}{2}\right)^{n_1}\left(\dfrac{p}{3}\right)^{n_2}\left(\dfrac{p}{6}\right)^{n_3}$

取对数：$\ln L(p)=n_0\ln(1-p)+(n_1+n_2+n_3)\ln p+C$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n_0}{p-1}+\frac{n_1+n_2+n_3}{p}=0$$

$\therefore \hat{p}_2=\dfrac{n-n_0}{n}$

$\because n_0,n_1,n_2,n_3$ 均服从二项分布　$\therefore E(n_0)=np(X=0)=n-np$

$\therefore E(\hat{p}_2)=\dfrac{n-E(n_0)}{n}=\dfrac{n-n+np}{n}=p$　　$\therefore$是无偏估计

（3）$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{p}{2}+\dfrac{4}{3}p+\dfrac{9}{6}p-\dfrac{25}{9}p^2=\dfrac{30p-25p^2}{9}$

$D(\hat{p}_1)=\dfrac{9}{25}D(\bar{X})=\dfrac{9}{25}\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{6p-5p^2}{5n}$

$D(\hat{p}_2)=\dfrac{1}{n^2}D(n_0)=\dfrac{1}{n^2}np(1-p)=\dfrac{p-p^2}{n}$

$\because D(\hat{p}_1)=\dfrac{6p-5p^2}{5n}>\dfrac{5p-5p^2}{5n}=\dfrac{p-p^2}{n}=D(\hat{p}_2)$

$\therefore \hat{p}_2$ 的方差更小

## NO.2　2019－2020　秋冬学期

**一、填空题（每空 3 分，共 36 分）**

1.【答案】不独立　　0.25

【解析】由事件独立的定义，若 $A$ 与 $B$ 相互独立，$P(A|B)$应等于 $P(A)$

$\therefore$ 不独立

$\because$ $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.6$，$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=0.6$

$\therefore$ 联立：$\dfrac{0.55-0.4P(B)}{1-P(B)}=0.6$　解得 $P(B)=0.25$

2.【答案】1.5　　0.375

【解析】$Var(X)=1\times0.5\times0.5=0.25$，$Var(Y)=2\times0.5\times0.5=0.5$

$Var(2X-Y)=4Var(X)+Var(Y)=1.5$

$P(\min(X,Y)=0)=P(X=0\text{或}Y=0)=0.5+0.5^2-0.5\times0.5^2=0.625$

$P(\min(X,Y)=1)=P(X=1,Y\geq1)=0.5(1-0.5^2)=0.375$

$\therefore$ $E[\min(X,Y)]=0.375$

3.【答案】（1）$1-\frac{99}{8}e^{-3}$　　0.75

【解析】（1）$P\left(\left|X-3\right|\geq 2\right)=P\left(X\geq 5\right)+P\left(X\leq 1\right)=1-P\left(X=2\right)-P\left(X=3\right)-P\left(X=4\right)$

$$=1-\frac{e^{-3}3^2}{2!}-\frac{e^{-3}3^3}{3!}-\frac{e^{-3}3^4}{4!}$$

$$=1-\frac{e^{-3}3^2}{2}-\frac{e^{-3}3^2}{2}-\frac{e^{-3}3^3}{8}=1-\frac{99}{8}e^{-3}$$

（2）由切比雪夫不等式，$P\left(\left|Y-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

则 $P\left(\left|Y-3\right|\geq 2\right)\leq\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$

4.【答案】$\frac{2}{\pi}$

【解析】由均匀分布，$f\left(x,y\right)=\frac{1}{S_D}=\frac{2}{\pi}$

5.【答案】0.9544　　$\chi^2\left(1\right)$　　28

【解析】$\because \overline{Y_1}\sim N\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$　　$\therefore P\left(\left|\overline{Y_1}-\mu\right|<1\right)=P\left(\frac{\left|\overline{Y_1}-\mu\right|}{\frac{1}{2}}<2\right)=2\Phi\left(2\right)-1=0.9544$

$\because \overline{Y_2}\sim N\left(\mu,\frac{1}{12}\right)$　　$\therefore \overline{Y_1}-\overline{Y_2}\sim N\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　$\therefore \sqrt{3}\left(\overline{Y_1}-\overline{Y_2}\right)\sim N\left(0,1\right)$

$\therefore 3\left(\overline{Y_1}-\overline{Y_2}\right)^2\sim\chi^2\left(1\right)$

由 $\sum_{i=1}^{4}\left(X_i-\overline{Y_1}\right)^2=3S_1^2$　　$\sum_{i=5}^{16}\left(X_i-\overline{Y_2}\right)^2=11S_2^2$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{4}\left(X_i-\overline{Y_1}\right)^2+\sum_{i=5}^{16}\left(X_i-\overline{Y_2}\right)^2\right]=9Var\left(S_1^2\right)+121Var\left(S_2^2\right)=9\frac{2\sigma^4}{3}+121\frac{2\sigma^4}{11}=28$$

6.【答案】3.21　　否，$\chi^2_{0.05}\left(4\right)=9.49>\chi^2$

【解析】检验表如下：

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 |
| 理论频数 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 实际频数 | 5 | 17 | 19 | 28 | 31 |

则 $\chi^2=\frac{5^2}{10}+\frac{2^2}{15}+\frac{1^2}{20}+\frac{3^2}{25}+\frac{1^2}{30}=3.21$

二、【提示】如果做错了，请务必检查下概率密度函数的图形是否画对了

【解析】

（1）在概率密度不为 0 的区间内，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}0.75dy=1.5\sqrt{x}$

$f_Y(y)=\int_{y^2}^{1}0.75dx=0.75\left(1-y^2\right)$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}1.5\sqrt{x},0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}0.75\left(1-y^2\right),-1<y<1\\0,\quad 其他\end{cases}$

（2）$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}},-\sqrt{x}<y<\sqrt{x}\\0,\ 其他\end{cases}$

$\therefore P\left(Y>0.1\middle|X=0.25\right)=\int_{0.1}^{0.5}f_{Y|X}(y|0.25)dy=\int_{0.1}^{0.5}dy=0.4$

（3）$\because E(Y)=\int_{-1}^{1}0.75y\left(1-y^2\right)dy=0$

$E(XY)=\int_0^1 xdx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}0.75ydy=0$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$\therefore X$ 与 $Y$ 不相关

（4）通过图象得到 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\\dfrac{1}{2},0\le z<1\\1,z\ge 1\end{cases}$

$\because\ f_X(x)=\begin{cases}1.5\sqrt{x},0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\x^{1.5},0<x<1\\1,x\ge 1\end{cases}$

$F(x,z)=F_X(x)F_Z(z)\qquad\therefore X$ 与 $Z$ 独立

（其实观察可以发现 $Z$ 的取值只取决于 $Y$，所以 $X$ 与 $Z$ 独立）

三、【解析】

（1）$\because X$ 与 $Y$ 独立

$\therefore P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$

$\therefore$联合分布律如下：

| $P$ | $Y$ | | $P(X=i)$ |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | $(1-p)^2$ | $p(1-p)$ | $1-p$ |
| | 1 | $p(1-p)$ | $p^2$ | $p$ |
| $P(Y=j)$ | | $1-p$ | $p$ | |

（2）若 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为 $0.5$，求 $(X,Y)$ 的联合分布律.

$\because$ $X$ 与 $Y$ 服从相同分布

$\therefore E(X)=E(Y)=p \qquad D(X)=D(Y)=p(1-p)$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{p(1-p)}=0.5$$

解得 $E(XY)=\frac{1}{2}p(1+p)$

$\because$ $XY$ 的取值仅有 0 和 1，且只有 $X=1,Y=1$ 时，$XY=1$

$\therefore E(XY)=1\times P(X=1,Y=1)\Rightarrow P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}p(1+p)$

$\therefore$得到联合分布律

| $P$ | | $Y$ | | $P(X=i)$ |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| $X$ | 0 | $\left(1-\frac{1}{2}p\right)(1-p)$ | $\frac{1}{2}p(1-p)$ | $1-p$ |
| | 1 | $\frac{1}{2}p(1-p)$ | $\frac{1}{2}p(1+p)$ | $p$ |
| $P(Y=j)$ | | $1-p$ | $p$ | |

**四、【解析】**

（1）$0<x<3$ 时，$F(x)=\int_0^x \frac{x^2}{9}dx=\frac{x^3}{27}$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^3}{27}, & 0<x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

（2） $F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=P(X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})=\begin{cases}0, & \sqrt{y}\le 0\\ \dfrac{\sqrt{y}^3}{27}, & 0<\sqrt{y}<3\\ 1, & \sqrt{y}\ge 3\end{cases}$

整理得到 $F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y^{1.5}}{27}, & 0<y<9\\ 1, & y\ge 9\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}}{18}, & 0<y<9\\ 0, & 其他\end{cases}$

（3）由大数定律的推论，当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}e^{-X_i}\xrightarrow{P}E\left(X^{-2}e^{-X}\right)$

$\because E\left(X^{-2}e^{-X}\right)=\int_0^3 x^{-2}e^{-x}\dfrac{x^2}{9}dx=\dfrac{1}{9}\int_0^3 e^{-x}dx=-\dfrac{1}{9}e^{-x}\Big|_0^3=\dfrac{1}{9}\left(1-e^{-3}\right)$

$\therefore$ 当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}e^{-X_i}\xrightarrow{P}\dfrac{1}{9}\left(1-e^{-3}\right)$

（4）$\because E\left(X^3\right)=\int_0^3 x^3\dfrac{x^2}{9}dx=\dfrac{27}{2}\qquad E\left(X^6\right)=\int_0^3 x^6\dfrac{x^2}{9}dx=243$

$\therefore D\left(X^3\right)=E\left(X^6\right)-E^2\left(X^3\right)=\dfrac{243}{4}$

$\therefore$ 由中心极限定理，$\dfrac{1}{81}\sum_{i=1}^{81}X_i^3\sim N\left(\dfrac{27}{2},\dfrac{243}{4}\times\dfrac{1}{81}\right)$，即 $\dfrac{1}{81}\sum_{i=1}^{81}X_i^3\sim N\left(\dfrac{27}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

$g(z)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}e^{-\frac{2}{3}\left(z-\frac{27}{2}\right)^2}$，$-\infty<z<+\infty$

**五、【解析】**

（1）在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$，并计算相应的 $P_-$ 值；

取检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$　计算得 $f_0=1.30$

拒绝域 $\left\{F\ge F_{0.025}(99,99)=1.49\right\}$　$\therefore$ 接受原假设

$P_-=2P\left(F(99,99)\ge 1.30\right)=0.2$

（2）由题意，置信区间为 $\left(\bar{X}-\bar{Y}-S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{0.05}\left(n_1+n_2-2\right),\bar{X}-\bar{Y}+S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{0.05}\left(n_1+n_2-2\right)\right)$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

代入数据，得置信区间 $(-100.9,388.9)$

六、【解析】

（1）此时 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2},0<x\le\theta\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$

则 $E(X)=\int_0^\theta\dfrac{2(\theta-x)x}{\theta^2}dx=\dfrac{\theta}{3}$

由矩估计法，$\hat{\theta}=3\bar{X}$　$\because E(\hat{\theta})=3E(\bar{X})=3E(X)=\theta$　$\therefore\theta$ 是 $\theta$ 的无偏估计

（2）此时 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(2-x)^{\lambda-1}}{2^\lambda},0<x\le 2\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$

似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda(2-X_i)^{\lambda-1}}{2^\lambda}$

取对数：$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-n\lambda\ln2+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(2-X_i)$

$\therefore\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-n\ln2+\sum_{i=1}^{n}\ln(2-X_i)=0$

解得 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{n\ln2-\sum_{i=1}^{n}\ln(2-X_i)}$

由大数定律，$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{n\ln2-\sum_{i=1}^{n}\ln(2-X_i)}=\dfrac{1}{\ln2-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(2-X_i)}\xrightarrow{P}\dfrac{1}{\ln2-E[\ln(2-X)]}$

$\because E[\ln(2-X)]=\int_0^2\dfrac{\lambda(2-x)^{\lambda-1}}{2^\lambda}\ln(2-x)dx=\ln2-\dfrac{1}{\lambda}$

$\therefore\hat{\lambda}\xrightarrow{P}\dfrac{1}{\ln2-\left(\ln2-\dfrac{1}{\lambda}\right)}=\lambda$　是相合估计量

## NO.3　2018 – 2019　春夏学期

一、填空题

1.【答案】0.8　0.7

【解析】由条件概率定义 $P(C|A)=\dfrac{P(AC)}{P(A)}=\dfrac{P(C)P(A|C)}{P(A)}=\dfrac{0.6\times0.4}{0.3}=0.8$

由 $A$ 发生时 $B$ 必定发生，得 $A\subset B$，从而 $A\cup B=B$

$\therefore P(A\cup B\cup C)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)$

$$=P(B)+P(C)-P(C)P(B|C)=0.4+0.6-0.6\times0.5=0.7$$

2.【答案】（1）2　（2）1

【解析】（1）由泊松分布表达式，$P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}+\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}=(\lambda+1)e^{-\lambda}$

比较得到 $\lambda=2$

（2）泊松分布的期望 $E(X)=\lambda$，方差 $Var(X)=\lambda$

则 $E(X^2)=E^2(X)+Var(X)=\lambda^2+\lambda$

$\therefore E(X^2)=2Var(X)\Rightarrow\lambda^2+\lambda=2\lambda$　　由 $\lambda>0$，解得 $\lambda=1$

3.【答案】$1-e^{-4}$　0.5

【解析】由指数分布的“遗忘”性质，$P(X\le3|X>1)=P(X\le2)=\int_0^2 2e^{-2x}dx=1-e^{-4}$

指数分布的期望 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$

由辛钦大数定律，当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E(X)=\dfrac{1}{2}$

4.【答案】$B(10000,0.1)$　0.8413

【解析】由题意，这是 10000 次独立重复试验，符合二项分布　$\therefore X\sim B(10000,0.1)$

$E(X)=np=1000$　$D(X)=np(1-p)=900$

由中心极限定理，$X\sim N(1000,30^2)$

$\therefore P(X>970)\approx1-\Phi\left(\dfrac{970-1000}{30}\right)=\Phi(1)=0.8413$

5.【答案】3　0.9544　$2\sigma^4$

【解析】$c\dfrac{\left[\left(X_1-\overline{Y}_1\right)^2+\left(X_2-\overline{Y}_1\right)^2\right]}{\left[\left(X_3-\overline{Y}_2\right)^2+\cdots+\left(X_6-\overline{Y}_2\right)^2\right]}=\dfrac{c}{3}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

$\because\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2}\sim F(1,3)\qquad \therefore \dfrac{c}{3}=1\Rightarrow c=3$

$\because \overline{Y}_1\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\qquad \overline{Y}_2\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{4}\right)$ 且相互独立

$\therefore \overline{Y}_1-\overline{Y}_2\sim N\left(0,\dfrac{3\sigma^2}{4}\right)$

$\therefore P\left(\left|\overline{Y}_1-\overline{Y}_2\right|<\sqrt{3}\sigma\right)=2\Phi(2)-1=0.9544$

由正态分布的性质，$Var\left[\left(X_1-\overline{Y}_1\right)^2+\left(X_2-\overline{Y}_1\right)^2\right]=Var\left(S^2\right)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}=2\sigma^4$

二、(1) $P(1.5\le X\le 2.5)=\int_{1.5}^{2.5}f(x)dx=\int_{1.5}^{2}0.3dx+\int_{2}^{2.5}0.5dx=0.4$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0,x<1\\0.3(x-1),1\le x\le 2\\0.5(x-2)+0.3,2<x\le 3\\0.8+0.4(x-3),3<x\le 3.5\\1,\quad x>3.5\end{cases}=\begin{cases}0,x<1\\0.3x-0.3,1\le x<2\\0.5x-0.7,2\le x<3\\0.4x-0.4,3\le x<3.5\\1,\quad x\ge 3.5\end{cases}$

(3) 小王购买该产品的概率为

$$P(A)=P(A|1\le X<1.5)P(1\le X<1.5)+\cdots+P(A|3\le X<3.5)P(3\le X<3.5)$$

$$=0.3\times0.15+0.5\times0.15+0.6\times0.25+0.4\times0.25+0.2\times0.2=0.41$$

$\therefore P(1.5\le X\le 2.5|A)=\dfrac{0.5\times0.15+0.6\times0.25}{0.41}=0.549$

三、(1) $F(0.5,0.5)=\int_0^{0.5}dx\int_x^{0.5}8xydy=\dfrac{1}{16}$

(2) $f_Y(y)=\int_0^y 8xydx=4y^3\qquad \therefore f_Y(y)\begin{cases}4y^3,0<y<1\\0,\quad 其他\end{cases}$

(3) $P(X<0.4|Y=0.8)=\int_0^{0.4}f_{X|Y}(x|0.8)dx=\int_0^{0.4}\dfrac{2x}{0.64}dx=0.25$

(4) 先利用图象，分类讨论求分布函数$F_Z(z)$.

$F_Z(z)=P(Y<Z-X)$

① $z\le 0\quad F_Z(z)=0$

② $z>2\quad F_Z(z)=1$

③ $0<z<1 \quad F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_x^{z-x}8xydy=\frac{z^4}{6}$

④ $1<z<2 \quad F_Z(z)=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dy\int_{2-y}^{y}8xydy=1-\frac{8}{3}z+2z^2-\frac{z^4}{6}$

$$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z^3, 0<z<1\\ 4z-\frac{2}{3}z^3-\frac{8}{3}, 1<z<2\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

四、（1）$E(X)=0\times a+0.6-a+0.8=1.4-a$

$E(Y)=0.16+b$（打个表格就能算出来）

$E(XY)=b+0.16$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=(a-0.4)(b+0.16)=0$

$\because b\geq 0 \quad \therefore \quad a=0.4$

同时要求不独立，由表格得到$0\leq b\leq 0.2, b\neq 0.04$

（2）$\hat{a}=1.4-\bar{X} \quad E(\hat{a})=1.4-E(\bar{X})=a \quad \therefore$是无偏估计

五、（1）取$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=2.95 \quad P_-=P(t(15)>2.95)=0.005<\alpha \quad \therefore$拒绝

（2）取$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu-\mu_Y)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，其中$S_w^2=\frac{15\times 1.6^2+10\times 0.9^2}{25}=1.86$

置信区间为$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{11}}t_{0.025}(25)\right)\Rightarrow(0.06,2.26)$

六、（1） $L(a,b)=a^{60}b^{100}(a+b)^{140}\left[1-2(a+b)\right]^{100}$

$$\ln L(a,b)=60\ln a+100\ln b+140\ln(a+b)+100\ln(1-2a-2b)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial a}=\dfrac{60}{a}+\dfrac{140}{a+b}-\dfrac{200}{1-2a-2b}=0\\ \dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b}=\dfrac{100}{b}+\dfrac{140}{a+b}-\dfrac{200}{1-2a-2b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{a}=\dfrac{9}{64}\\ \hat{b}=\dfrac{15}{64}\end{cases}$$

（2）

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0.15 | 0.25 | 0.4 | 0.2 |
| $np$ | 60 | 100 | 160 | 80 |
| 实际 | 60 | 100 | 140 | 100 |

∴ $\chi^2=7.5<\chi^2_{0.05}(3)$　接受原假设

## NO.4　2018－2019　秋冬学期

**一、填空题（每空 3 分，共 33 分）**

1.**【答案】** $\dfrac{b}{a}$　　$\dfrac{C_b^1C_{a-b}^2}{C_a^3}$

**【解析】** 由抽签的知识，不管第几个抽，抽中的概率都是一样的　∴概率为 $\dfrac{b}{a}$

由排列组合得到第 2 空答案

2.**【答案】** $5e^{-2}$　　$\dfrac{1}{e^2+1}$　　0.8413

**【解析】** 泊松分布的 $E(X)=\lambda=2$，∴ $P(X\le 2)=5e^{-2}$

$$P(X_1=0\,|\,X_1+X_2\ge 1)=\frac{P(X_1=0,X_1+X_2\ge 1)}{P(X_1+X_2\ge 1)}=\frac{P(X_2\ge 1)}{1-P(X_1=0)P(X_2=0)}$$

$$=\frac{P(X\ge 1)}{1-P^2(X=0)}=\frac{1}{e^2+1}$$

$$\sum_{i=1}^{200}X_i\sim N(400,20^2)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i>380\right)\approx\Phi(1)=0.8413$$

3.【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$P\left(X^2+Y^2\le 1\right)=\frac{S\left(X^2+Y^2<1\right)}{S_D}=\frac{\pi}{4}$

4.【答案】14.4　-0.25

【解析】$Var\left(X-2Y-1\right)=Var\left(X\right)+4Var\left(Y\right)-4Cov\left(X,Y\right)=4+4+3.2\times\sqrt{4}=14.4$

$X,Y$ 都是正态分布，则只要 $Cov\left(X+Y,aX-Y\right)=aD\left(X\right)+\left(a-1\right)Cov\left(X,Y\right)-D\left(Y\right)=0$

解得 $a=-0.25$

5.【答案】$\frac{4-5\theta}{3}$　$\frac{4-3\bar{X}}{5}$　$\frac{25}{9}\theta^2$

【解析】$E\left(X\right)=-\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\theta\right)+\frac{2}{3}\left(1-\theta\right)=\frac{4-5\theta}{3}$　$\therefore\hat{\theta}=\frac{4-3\bar{X}}{5}$

由大数定律，$\left(\bar{X}-\frac{4}{3}\right)^2=\bar{X}^2-\frac{8}{3}\bar{X}+\frac{16}{9}\xrightarrow{P}E\left(X^2\right)-\frac{8}{3}E\left(X\right)+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}\theta^2$

二、（1）$P\left(X=0\right)=\frac{1}{4}$，$P\left(X=1\right)=\frac{1}{2}$，$P\left(X=2\right)=\frac{1}{4}$　$\therefore X$ 的分布函数 $F_X\left(x\right)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<1\\ \frac{3}{4},1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$

（2）$Y$ 的分布函数　$F_Y\left(y\right)=\begin{cases}0, y<0\\ \frac{y}{2},0\le y<2\\ 1, y\ge 2\end{cases}$

（3）$M$ 的分布函数 $F_M\left(m\right)=P\left(\max\left(X,Y\right)\le m\right)=F_Y\left(m\right)F_X\left(m\right)=\begin{cases}0, m<0\\ \frac{m}{8},0\le m<1\\ \frac{3m}{8},1\le m<2\\ 1, m\ge 2\end{cases}$

（4）$Z$ 的分布函数 $F_Z\left(z\right)=P\left(X+Y\le z\right)=\sum_{k=0}^{2}P\left(X=k\right)P\left(Y\le z-k\right)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{z}{8},0\le z<1\\ \frac{3z-2}{8},1\le z<3\\ \frac{z+4}{8},3\le z<4\\ 1,\quad z\ge 4\end{cases}$

三、（15 分）设$(X,Y)$的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & |y|<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

（1）$P(X+Y\le 1)=1-\int_{0.5}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{3x}{2}dy=\frac{11}{16}$

（2）$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, |y|<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$P(X>0.5\mid Y=0)=\int_{0.5}^{1}2xdx=0.75$

（3）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$　∴不相关

四、（1）取$T=\dfrac{\bar{X}-15}{S/\sqrt{n}}=-2.60$，则$P_-=P\left(t(15)<-2.60\right)=0.01$

$\alpha>0.01$　∴拒绝原假设

（2）置信区间$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm\sqrt{\dfrac{15S^2+10S_Y^2}{25}}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n_Y}}t_{0.025}(n+n_Y-2)\right)$

代入数据$(-1.79,0.29)$

五、（1）由题意，$E(X)=\theta$，$D(X)=\theta$

$E(\bar{X})=E(X)=\theta$，$E(S^2)=D(X)=\theta$

$D(\bar{X})=\dfrac{\theta}{n}$，$D(S^2)=\dfrac{2\theta^2}{n-1}$

$E(T_k)=kE(\bar{X})+(1-k)E(S^2)=k\theta+(1-k)\theta=\theta$　　是无偏估计量

（2）$Var(T_k)=k^2D(\bar{X})+(1-k)^2D(S^2)=k^2\dfrac{\theta}{n}+(1-k)^2\dfrac{2\theta^2}{n-1}$

$\therefore Var(T_0)=\dfrac{2\theta^2}{n-1}$　　$Var(T_1)=\dfrac{\theta}{n}$

$Var(T_0)-Var(T_1)=\dfrac{2\theta^2}{n-1}-\dfrac{\theta}{n}=\dfrac{\theta}{n(n-1)}(2n\theta-n-1)<-\dfrac{\theta}{n(n-1)}\left(\dfrac{n}{2}+1\right)<0$

∴ $T_0$更有效

六、$L(\theta)=2^{400}\theta^{-800}\prod_{i=1}^{400}X_i$　取对数：$\ln L(\theta)=400\ln 2-800\ln\theta+\sum_{i=1}^{400}\ln X_i$

∴ $L(\theta)$在区间内单调递减　$\theta$应越小越好

$\therefore \hat{\theta} = \max\{X_i\} = 3.92$

计算得理论频数如下表：

| $X$ 取值 | $(0,0.98]$ | $(0.98,1.96]$ | $(1.96,2.45]$ | $(2.45,2.94]$ | $(2.94,3.43]$ | $\{x>3.43\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 30 | 62 | 48 | 77 | 85 | 98 |
| 理论 | 25 | 75 | 56.25 | 68.75 | 81.25 | 93.75 |

$\chi^2 = 5.82 < \chi^2_{0.05}(4) = 9.49$　　接受原假设

## NO.5　2017 – 2018　春夏学期

**（找不到答案，以下答案是我自己做的）**

### 一、填空题

1.【答案】$\frac{4}{7}$　12

【解析】一年级学生中选中男生的概率为 $\frac{8}{6+8} = \frac{4}{7}$

由独立定义，选中一年级女生的概率为 $\frac{6}{23+a} = \frac{14}{23+a}\frac{15}{23+a} \Rightarrow a = 12$

2.【答案】3　$\frac{1}{3}$

【解析】$E(X) = \frac{c+1}{2} = 2 \Rightarrow c = 3$　　$Var(X) = \int_1^3 \frac{1}{2}(x-2)^2 dx = \frac{1}{3}$

3.【答案】0.5　-0.75

【解析】$\because E(X-Y) = 1$　且 $X-Y$ 符合正态分布　$\therefore P(X > Y+1) = P(X-Y>1) = \frac{1}{2}$

$\because Cov(X+Y, X-Y) = D(X) - D(Y) = -3$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y) = 1 + 4 + 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = 8$$

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X,Y) = 1 + 4 - 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = 2$$

$$\therefore \rho = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}} = -0.75$$

4.【答案】$1-e^{-1}$　$\frac{1}{5}$　0.98

【解析】$P(\min(X_1, X_2) \le 1) = P(X_1 \le 1 \cup X_2 \le 1) = 1 - P(X_1 > 1)P(X_2 > 1) = 1 - P^2(X > 1)$

$$= 1 - \left(\int_1^{+\infty} 0.5e^{-0.5x} dx\right)^2 = 1 - e^{-1}$$

由辛钦大数定律推论，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{-2X_i}\xrightarrow{P}E\left(e^{-2X}\right)=\int_0^{+\infty}0.5e^{-0.5x}e^{-2x}dx=\frac{1}{5}$

同理可得 $E\left(e^{-X}\right)=\frac{1}{3}\qquad D\left(e^{-X}\right)=E\left(e^{-2X}\right)-E^2\left(e^{-X}\right)=\frac{4}{45}$

由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{180}e^{-X_i}\sim N\left(60,4^2\right)$

$$\therefore\ P\left(\sum_{i=1}^{180}e^{-X_i}>52\right)\approx P\left(\frac{\sum_{i=1}^{180}e^{-X_i}-60}{4}>\frac{-8}{4}\right)=1-\Phi(-2)=\Phi(2)=0.98$$

5.【答案】（1）$2\sigma^4\quad \frac{1}{5}$　　（2）$(5.456,6.144)$　　0.025　　拒绝原假设

【解析】（1）$\because \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\quad \mu=0$ 时 $\bar{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\therefore \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}\sim N(0,1)\qquad \therefore \frac{n}{\sigma^2}\bar{X}^2\sim\chi^2(1)$$

$$\therefore E\left(\frac{n}{\sigma^2}\bar{X}^2\right)=\frac{n}{\sigma^2}E\left(\bar{X}^2\right)=1\Rightarrow E\left(\bar{X}^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$D\left(\frac{n}{\sigma^2}\bar{X}^2\right)=\frac{n^2}{\sigma^4}D\left(\bar{X}^2\right)=2\Rightarrow D\left(\bar{X}^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n^2}$$

$$\therefore Mse(T)=D(T)+\left[E(T)-\sigma^2\right]^2=256D\left(\bar{X}\right)+\left[16E\left(\bar{X}^2\right)-\sigma^2\right]^2$$

$$=256\frac{2\sigma^2}{256}+\left[16\frac{\sigma^2}{16}-\sigma^2\right]^2=2\sigma^4$$

（2）$s^2=\frac{6.26}{15}$　置信区间 $\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15)\right)$　即 $(5.456,6.144)$

第二问是 $\sigma^2\geq\sigma_0^2$ 的情形，其中 $\sigma_0^2=1$，取检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{6.26}{1}=6.26$

则 $P_-$ 值为 $P\left(\chi^2(n-1)\leq\chi^2\right)=P\left(\chi^2(n-1)\leq 6.26\right)=0.025$

$\because\ P_-<0.05\qquad \therefore$ 拒绝原假设

二、（1）小王胜的概率 = Σ遇到对应等级对手的概率×遇到的前提下胜的概率

由全概率公式　$P(A)=0.4\times0.3+0.2\times0.4+0.4\times0.5=0.4$

（2）若已知小王胜了一局，求此局对手是等级分高的玩家的概率；

由贝叶斯公式，$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.12}{0.4}=0.3$

（3）设小王胜的局数为 $X$，则 $P(X=2)=C_5^2 0.4^2 0.6^3=0.3456$

第 5 局是第二次胜的概率为 $C_4^1 0.4\times0.6^3\times0.4=0.1382$

三、（1）$\because X$ 与 $Y$ 不相关　　$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-a_4+a_6=0$

$\because\ a_6=0.1$　　　$\therefore\ a_4=0.1$

由 $E(X)=a_4+a_5+a_6=0.6$，得 $a_5=0.4$

由 $E(Y)=-0.1-a_4+a_3+a_6=0$，得 $a_3=0.1$　　于是 $a_2=0.2$，联合分布律如下：

| $X\backslash Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1 | 0.1 | 0.4 | 0.1 |

（2）$\because X$ 与 $Y$ 相互独立　　$\therefore a_1=P(X=0)P(Y=-1)=0.1$

$\because E(X)=P(X=1)=0.6$　　$\therefore P(X=0)=0.4$

$\therefore P(Y=-1)=0.25$

$\because E(Y)=P(Y=1)-P(Y=-1)=0$　　$\therefore P(Y=1)=0.25$，$P(Y=0)=0.5$

由此可得到联合分布律：

| $X\backslash Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1 | 0.1 | 0.4 | 0.1 |

四、（1）$F(0.5,0.5)=\int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_0^{0.25}4x\mathrm{d}y=\int_0^{0.5}4x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{16}$

（2）$f_X(x)=\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}4x^3,0<y<1\\0\quad,\text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{\sqrt{y}}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}2(1-y),0<y<1\\0\quad,\quad\text{其他}\end{cases}$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，$\therefore X$ 与 $Y$ 不独立

（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}4x^2y\mathrm{d}y-\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x\int_0^1 2y(1-y)\mathrm{d}y$

$=\dfrac{2}{7}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{105}$

$\therefore X$ 与 $Y$ 正相关

五、在区间 $(a,b)$，$0<a<b<1$ 内，$P(a<x<b)=\int_a^b 2x\mathrm{d}x=b^2-a^2$

如下表：

| $X$ 的取值 | $(0,0.25]$ | $(0.25,0.5]$ | $(0.5,0.625]$ | $(0.625,0.75]$ | $(0.75,0.875]$ | $(0.875,1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{11}{64}$ | $\frac{13}{64}$ | $\frac{15}{64}$ |
| 理论频数 | 8 | 24 | 18 | 22 | 26 | 30 |
| 频数 | 6 | 28 | 20 | 26 | 24 | 24 |

$\chi^2=\frac{4}{8}+\frac{4}{24}+\frac{4}{18}+\frac{16}{22}+\frac{4}{26}+\frac{36}{30}=2.97<\chi^2_{0.05}(6-1)=11.07$ $\quad\therefore$接受原假设

六、（16 分）设总体 $X$ 的概率密度函数 $f(x;\lambda,\theta)=\begin{cases}\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{\theta^\lambda},0<x<\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，未知参数 $\lambda>1$，$\theta>0$，$X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X$ 的简单随机样本.

（1）当 $\lambda=2$ 时，$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2},0<x<\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

则 $E(X)=\int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\theta$ $\qquad$ 于是 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}$

$\because E(\hat{\theta})=\frac{3}{2}E(\bar{X})=\frac{3}{2}E(X)=\theta$ $\qquad\therefore$是无偏估计

（2）若 $\theta=2$，求 $\lambda$ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$，并判断 $\hat{\lambda}$ 是否为 $\lambda$ 的相合估计量，说明理由.

当 $\theta=2$ 时，$f(x;\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{2^\lambda},0<x<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n \frac{\lambda x_i^{\lambda-1}}{2^\lambda}=\frac{\lambda^n}{2^{n\lambda}}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\lambda-1}$$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-n\lambda\ln 2+(\lambda-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-n\ln 2+\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$，解得 $\hat{\lambda}=\frac{n}{n\ln 2-\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

由辛钦大数定律，$\hat{\lambda}=\frac{n}{n\ln 2-\sum_{i=1}^n \ln x_i}=\frac{1}{\ln 2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i}\xrightarrow{P}\frac{1}{\ln 2-E(\ln X)}$

而 $E(\ln X)=\int_0^2 \frac{\lambda x^{\lambda-1}}{2^\lambda}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^\lambda}\int_0^2 \lambda x^{\lambda-1}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^\lambda}\int_0^2 \ln x\mathrm{d}x^\lambda=\frac{1}{2^\lambda}\left[x^\lambda\ln x\Big|_0^2-\int_0^2 x^\lambda\mathrm{d}\ln x\right]$

$$=\frac{1}{2^\lambda}\left[2^\lambda\ln 2-\int_0^2 x^{\lambda-1}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2^\lambda}\left[2^\lambda\ln 2-\frac{1}{\lambda}x^\lambda\Big|_0^2\right]=\frac{1}{2^\lambda}\left[2^\lambda\ln 2-\frac{1}{\lambda}2^\lambda\right]=\ln 2-\frac{1}{\lambda}$$

$\therefore$ $n\to+\infty$ $\quad \hat{\lambda}\xrightarrow{P}\dfrac{1}{\ln 2-\ln 2+\frac{1}{\lambda}}=\lambda$ $\quad\therefore$ 是相合估计量

## NO.6 2017 - 2018 秋冬学期

**一、填空题**

1. $\frac{1}{4}$ $\quad\frac{3}{4}$ $\quad\frac{1}{2}\sqrt{y}$

2. $e^{-1}$

3. $1+x$

4. $\frac{13}{8}e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 2$ $\quad\frac{13}{8}e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 0.84$

5. $F(1,15)$ $\quad(1.04,2.56)$ $\quad 0.01$ 拒绝原假设

二、分布律：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.46 | 0.28 | 0.26 |

$P(A|X\geq 1)=\frac{0.4\times 0.9}{0.26+0.28}=\frac{2}{3}$

三、（1） $E(XY)=2c_1+3b+4c_2=1.3$ $\quad\begin{cases}b_1+b_2=0.4\\ b_1=b_2\end{cases}\Rightarrow b_1=b_2=0.2$ $\quad c_1+c_2=0.2$

由以上推断得到分布律

| $X\backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $P(X=i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.25 | 0.2 | 0.05 | 0.5 |
| 2 | 0.15 | 0.2 | 0.15 | 0.5 |
| $P(Y=j)$ | 0.4 | 0.4 | 0.2 | |

（2）判断 $X$ 和 $Y$ 是正相关，负相关，还是不相关，说明理由；

$E(X)=1.5$ $\quad E(Y)=0.8$ $\quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1$ $\quad\therefore$正相关

（3）$\because a_1\neq 0.4\times 0.5$ $\quad\therefore$不独立

四、（1） $P(2.2<X<3.8)=2\Phi(1)-1=0.68$

（2） $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=5$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho\sqrt{D(X)D(Y)}=1.48$

$\therefore X+Y\sim N(5,1.48)$ $\therefore P(X+Y>5.5)=0.34$

（3）同（2），$X-2Y\sim N(-1,1.12)$

$\therefore P(X>2Y)=P(X-2Y>0)=0.17$

五、$E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}$ $\therefore \hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$

由辛钦大数定律推论，$\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}\xrightarrow{P}\frac{2}{E(X)}=\lambda$，$n\to+\infty$ ∴是相合估计量

六、（1）$L(p)=(0.25p)^{26}\left[0.5p(1-p)\right]^{37}(1-p)^{42}(0.5p)^{16}$

$\ln L(p)=79\ln p+79\ln(1-p)+C$

$\frac{d\ln L(p)}{dp}=79\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)=0\Rightarrow\hat{p}=\frac{1}{2}$

（2）如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 理论 | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 25 | 25 | 12.5 |
| 实际 | 11 | 18 | 19 | 21 | 16 | 15 |

$\chi^2=10.36>\chi^2_{0.05}(4)=9.49$ ∴拒绝原假设

## NO.7 2016 - 2017 春夏学期

**一、填空题**

1. 0.4 0

2. $0.8a+0.2b$

3. $e^{-1}$ $1-e^{-2}$ 3

4. $\frac{3}{4}$ 不相关，因为$Cov(Z_1,Z_2)=0$

5. 0.07 16 1.065 0.01 拒绝

二、（1）$\int_0^2 cxdx=1\Rightarrow c=0.5$

$E(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\frac{4}{3}$

$D(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x^3dx-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$

（2）见下表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$P$</td><td colspan="2">$Y_2$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Y_1$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{7}{16}$</td><td>$\frac{5}{16}$</td></tr>
</table>

（3）$\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i \sim N\left(\frac{4}{3},\frac{1}{18^2}\right)$ $\therefore P\left(\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{72}X_i > \frac{25}{18}\right) \approx 1-\Phi(1)=0.16$

三、（1）求 $F(1.5,0.5)=\int_0^1 dx\int_0^{0.5} ydy=\frac{1}{8}$

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<2\\0, \text{其他}\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}y,0<y<1\\\frac{1}{2},1<y<2\end{cases}$ 显然不独立

（3）求 $P(Y>0.5\,|\,X=0.3)=\frac{\int_{0.5}^1 ydy}{\int_0^1 ydy}=\frac{3}{4}$

四、（1）$E(X)=\sigma \Rightarrow \hat{\sigma}=\bar{X}$

由辛钦大数定律 $\bar{X}\xrightarrow{P}E(X)=\sigma, n\to+\infty$ 是相合估计量

（2）$L(\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\prod_{i=1}^n e^{-\frac{(X_i-\sigma)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln L(\sigma)=-n\ln\sqrt{2\pi}-n\ln\sigma-\sum_{i=1}^n\frac{(X_i-\sigma)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{nA_2}{\sigma^3}-\frac{n\bar{X}}{\sigma^2}=0\Rightarrow\sigma=\frac{-\bar{X}+\sqrt{\bar{X}^2+4A_2}}{2}$

五、（1）如下

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

（2）如下

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 理论 | 30 | 90 | 54 | 6 |
| 实际 | 26 | 93 | 52 | 9 |

$\therefore \chi^2=2.21<\chi^2_{0.05}(3)=7.82$ ∴接受原假设

六、（1） $E(X)=\int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$ $E(T)=(a+b+c)E(X)=\theta \Leftrightarrow a+b+c=\frac{3}{2}$

（2） $D(T)=(a^2+b^2+c^2)D(X)$ 由轮换对称、基本不等式、拉格朗日乘数法均可得到：

当 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 时，$T$ 最有效

## NO.8　2016 – 2017　秋冬学期

### 一、填空题

1. 0.3　　2. $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{12}$　　3. 82.5　7.5

4. $F(2,4)$　不是　$\frac{\sigma^4}{2}$　　5. 0.16　$\frac{62}{13}$

6. $\left(\frac{192}{125},\frac{640}{121}\right)$　0.1　接受

二、（1） $P(Z>3)=P(Y=0)P(Z>3\mid Y=0)+P(Y=1)P(Z>3\mid Y=1)+P(Y=2)P(Z>3\mid Y=2)$

$$=P(Y=1)P(X>3)+P(Y=2)P(X>2)$$
$$=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}=0.22$$

（2） $E(Z)=E(XY+1-Y)=E(X)E(Y)+1-E(Y)=\frac{7}{3}$.

三、（1） $P(2X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}6x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}6x(1-x),0<x<1\\ 0\quad ,其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}3(1-y)^2,0<y<1\\ 0\quad ,其他\end{cases}$$

（3） $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$　∴不独立

四、

（1） $F(x)=\begin{cases}0,\quad x<0\\ \frac{x^2}{8},0\le x<2\\ \frac{x}{4},\ 2\le x<4\\ 1,\quad x\ge 4\end{cases}$；

（2）

| $Y_1\setminus Y_2$ | 0 | 2 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 |
| 1 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |

（3） $E(X)=\int_0^2 x\frac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{13}{6}$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2\frac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4 x^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{17}{3}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2\xrightarrow{P}E(X-2)^2=E(X^2)-4E(X)+4=1$$

五、 $P(X=i)=C_5^i\frac{1}{2^i}\frac{1}{2^{5-i}}$

| 命中次数 $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |
| 理论频数 | 5 | 25 | 50 | 50 | 25 | 5 |
| 组数 | 6 | 27 | 42 | 54 | 28 | 3 |

$\chi^2=3.12<11.07$ 　　接受原假设

六、（1） $Y\sim B(100,\theta)$ 　　$\therefore P(Y=k)=C_{100}^k\theta^k(1-\theta)^{100-k},k=1,2,\cdots,100$

（2）由中心极限定理　　$Y\sim N(100\theta,100\theta(1-\theta))$

$$P(Y\le 13)=P\left(\frac{Y-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\le\frac{13-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\right)\approx\Phi\left(\frac{13-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\right)$$

（3）矩估计：$E(X)=\frac{7}{4}(1-\theta)$，$\hat{\theta}_1=1-\frac{4}{7}\bar{X}$

极大似然估计：$L(\theta)=\theta^{n_0}\left(\frac{1-\theta}{4}\right)^{n_1}\left(\frac{3(1-\theta)}{4}\right)^{n_2}$

$$\ln L(\theta)=n_0\ln\theta+(n_1+n_2)\ln(1-\theta)+C$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n_0}{\theta}-\frac{n_1+n_2}{1-\theta}=0 \qquad \hat{\theta}_L=\frac{n_0}{100}$$

（4） $\hat{\theta}_1=1-\frac{4}{7}\bar{X}=\frac{3}{25}$ 　　$\hat{\theta}_L=0.1$ 　　$P(Y\le 13)\approx\Phi\left(\frac{13-100\times 0.1}{\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}}\right)=\Phi(1)=0.84$

# NO.9　2015－2016　春夏学期

## 一、填空题

1.（1）$1-c$（2）1

2. $1-2.5\mathrm{e}^{-1}$

3. $a-p^2$， $p^2$

4. $\mu^2+\sigma^2$，$(1,-1)$， $F(2,2)$

5.（1）2.975　（2）0.1

二、设 $A$:先加奶， $B$:甲认为先加奶， $C$:两人认为先加奶

（1） $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=0.54$

（2） $P(A\mid C)=\dfrac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(\bar{A})P(C\mid \bar{A})}=\dfrac{14}{15}$

三、（1） $P(Y>2\mid X=2)=0.75$；

（2） $(X,Y)$ 的联合概率密度 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10(10-x)},0<x<10,0<y<10-x\\ 0\quad,\quad \text{其他}\end{cases}$；

（3） $P(X<Y)=\int_0^5 \mathrm{d}x\int_x^{10-x}\dfrac{1}{10(10-x)}\mathrm{d}y=1-\ln 2$

四、（1） $F(2)=1=\lim\limits_{x\to 2}c\left[(x+1)^2-1\right]=8c\qquad c=\dfrac{1}{8}$

（2） $P(X>1)=1-F(1)=\dfrac{5}{8}$

（3） $Y_3\sim B\left(3,\dfrac{5}{8}\right)$， $P(Y=k)=C_3^k\left(\dfrac{5}{8}\right)^k\left(\dfrac{3}{8}\right)^{3-k}$， $k=0,1,2,3$

（4） $Y_{240}\sim B\left(240,\dfrac{5}{8}\right)$ 由中心极限定理 $Y_{240}\sim N\left(150,\dfrac{225}{4}\right)$

$P(Y_{240}>135)\approx 1-\Phi\left(\dfrac{135-150}{15/2}\right)=0.98$

五、 $E(X)=\int_0^{\sqrt{\theta}}\dfrac{2x^2}{\theta}\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{\theta}}{3}\qquad \hat{\theta}_1=\left(\dfrac{3}{2}\bar{x}\right)^2=2.25$

$L(\theta)=\dfrac{2^6x_1\cdots x_6}{\theta^6}$ 单调递减　$\therefore \hat{\theta}_2=\theta_{\min}=\max\{x_i\}^2=2.56$

六、（1）拒绝域：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{0.975}(8,7)$或$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \ge F_{0.025}(8,7)$　　$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=0.53$　　∴接受原假设

（2）拒绝域：$|T|=\dfrac{\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{8S_1^2+7S_2^2}{15}}\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}}} \ge t_{0.025}(15)$　　$|t|=1.896$　　∴接受原假

七、

| $x$取值 | $x \le 0.5$ | $0.5 < x \le 1$ | $1 < x \le 1.5$ | $1.5 < x \le 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | 0. 39 | 0. 24 | 0. 14 | 0. 09 | 0. 14 |
| 理论频数 | 39 | 24 | 14 | 9 | 14 |
| 频数 | 32 | 28 | 12 | 12 | 16 |

$\chi^2=3.49<\chi_{0.05}^2(4)$，不拒绝原假设

## NO.10　2015 – 2016　秋冬学期

**一、填空题**

1. （1）1　（2）$\dfrac{1}{3}$

2. 3 ；$\dfrac{1-4\mathrm{e}^{-3}}{1-\mathrm{e}^{-3}}=0.843$

3. $1-\mathrm{e}^{-1}$　$\mathrm{e}^{-1}$　$1-\mathrm{e}^{-3}$

4. $N\left(\dfrac{400}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{400(\pi-2)}{\pi}\right)$　　0　　$F(1,50)$

5. $(0.37,2.97)$　　0. 63

三、$P(X=0)=0.4\times0.5=0.2$　　$P(X=1)=0.6\times0.2+0.4\times0.5=0.32$　　$P(X=2)=0.6\times0.8=0.48$

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0. 2 | 0. 32 | 0. 48 |

四、（1）$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0\\ x-\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \dfrac{x}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$；

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{11}{12}$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{59}{144}$$

（3）$F_Y(y)=\left[F(y)\right]^3\begin{cases}0, & y<0\\ \left(y-\dfrac{y^2}{2}\right)^3, & 0\le y<1\\ \dfrac{y^3}{8}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$ $\quad\therefore f_Y(y)=\begin{cases}3\left(y-\dfrac{y^2}{2}\right)^2(1-y), & 0\le y<1\\ \dfrac{3y^2}{8}, & 1\le y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

五、（1）$P(X>4)=1-\Phi(1)=0.159$；

（2）$f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-3)^2}{8}},z\in\mathrm{R}$；

（3）$\mathrm{Cov}(X,X+4Y)=D(X)+4\mathrm{Cov}(X,Y)=0$+正态分布=$X$ 与 $X+4Y$ 相互独立

六、（1）$E(X)=4-\dfrac{7\theta}{2}$ $\quad\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{7}\left(4-\bar{X}\right)$ $\quad E\left(\hat{\theta}_1\right)=\theta$ $\quad\therefore$是无偏估计

$\hat{\theta}_1\xrightarrow{P}\theta$ $\quad\therefore$是相合估计

（2）$L(\theta)=\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^{2+5}\left(\dfrac{2(1-\theta)}{3}\right)^7\left(\dfrac{1-\theta}{3}\right)^2$

$$\ln L(\theta)=7\ln\theta+9\ln(1-\theta)-9\ln 3$$

$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{7}{\theta}-\dfrac{9}{1-\theta}=0$ $\quad\hat{\theta}_2=\dfrac{7}{16}$

# NO.11　2014 – 2015　春夏学期

## 一、填空题

1.【答案】（1）0. 24　（2）0. 7

2.【答案】$(1+\lambda)e^{-\lambda}$ $\quad\dfrac{\lambda^{16}e^{-5\lambda}}{1036800}$ $\quad$ 3. 2

3.【答案】$1-e^{-2}$ $\quad e^{-1}$

4.【答案】$\mu^2+\sigma^2$ $\quad$ 0. 5 $\quad F(3,6)$ $\quad$ 0. 01　拒绝

三、见表

| $P$ | | $Y$ 0 | 1 | 2 | $P(X=i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | $\frac{4}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{4}{7}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\frac{6}{35}$ | $\frac{8}{35}$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{3}{7}$ |
| $P(Y=j)$ | | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | |

四、（1） $P(Y<50)=P(X<0.5)=\int_0^{0.5}2(1-x)dx=0.75$

（2） $f_Y(y)=f_X\left(h(y)\left|h'(y)\right|\right)=\begin{cases}\frac{3}{10}-\frac{y}{200},0<y<60\\0,\ \text{其他}\end{cases}$

（3）设 $Z$ 为少于 50 分的次数，则 $Z\sim B(6,0.75)$

$P(Z\geq 5)=P(Z=5)+P(Z=6)=0.534$

（4） $E(Y)=40+20E(X)=\frac{140}{3}$， $D(Y)=400D(X)=\frac{200}{9}$ $\quad\quad \therefore \bar{Y}\sim N\left(\frac{140}{3},\frac{2}{9}\right)$

五、（1） $P(X>Y)=\int_0^1 dy\int_y^2(x-xy)dx=\frac{23}{24}$

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x,0<x<2\\0,\ \text{其他}\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}2-2y,0<y<1\\0,\ \text{其他}\end{cases}$

$\therefore f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ $\quad\therefore$独立

六、（1） $E(X)=\int_0^{\frac{\theta}{2}}x\frac{8x}{\theta^2}dx=\frac{\theta}{3}$ $\quad\quad \therefore \hat{\theta}_1=3\bar{X}$ $\quad\quad E\left(\hat{\theta}_1\right)=\theta$ $\quad\quad\therefore$是无偏估计

（2） $L(\theta)=8^n\theta^{-2n}X_1\cdots X_n$ $\quad\therefore \ln L(\theta)=n\ln 8-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ $\quad$ 单调递减

$\therefore\ \hat{\theta}_2=2\max\{X_i\}$

令 $Y=\max\{X_i\}$，则 $F_Y(y)=\left[F_X(y)\right]^n\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}2n4^n y^{2n-1}\theta^{-2n},0\leq y\leq\frac{\theta}{2}\\0,\ \text{其他}\end{cases}$

$\therefore E\left(\hat{\theta}_2\right)=2E(Y)=\frac{2n\theta}{2n+1}<\theta$ $\quad\quad\therefore$不是无偏估计

# NO.12 2014 – 2015 秋冬学期

## 一、填空题

1.【答案】0.4　　0.375

2.【答案】$1-5e^{-4}$ $\quad\quad 15e^{-4}\left(1-5e^{-4}\right)^2$

3.【答案】（1）$\frac{3}{4}$　　$\frac{x^2}{4}$　　（2）$\frac{2}{3\theta}$　　不是

4.【答案】0.68　　$\frac{25}{24}$

二、（1）见下表：

| $P$ | | $X_2$ = 0 | $X_2$ = 1 | $P(X_1=i)$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | $\frac{7}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{8}$ |
| | 1 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{8}$ |
| $P(X_2=j)$ | | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | |

（2）$\rho_{X_1X_2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}=\frac{1}{5}$

三、（1）$P(X>2|X>1)=\frac{\int_2^{+\infty}e^{-x}dx}{\int_1^{+\infty}e^{-x}dx}=e^{-1}$；

（2）$P(Y\le 2|X=1)=\int_1^2 e^{-(y-1)}dy=1-e^{-1}$；

（3）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-y} & y>x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P(Y<3X)=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{3x}e^{-y}dy=\frac{2}{3}$；

（4）$Y$ 的边际概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$.

四、由中心极限定理，$Y=\sum_{i=1}^{50}X_i\sim N(12000,300^2)$

$\therefore P(Y>11700)\approx 1-\Phi(-1)=0.84$

由全概率公式：

$$\begin{aligned}P(U>11700)&=P(Z=1800)P(Y>13500)+P(Z=900)P(Y>12600)\\&\quad+P(Z=300)P(Y>12000)+P(Z=0)P(Y>11700)\\&\approx 0.6206\end{aligned}$$

五、$E(X)=\int_1^{+\infty}\theta x^{-\theta}dx=\frac{\theta}{1-\theta}$　　$\therefore \hat{\theta}_1=\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$

$L(\theta)=\theta^n(X_1\cdots X_n)^{-\theta-1}$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0\Rightarrow\hat{\theta}_2=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

六、（1） $E\left(S_w^2\right)=\frac{6}{13}E\left(S_1^2\right)+\frac{7}{13}E\left(S_2^2\right)=E\left(S^2\right)=\sigma^2$

$$D\left(S_w^2\right)=\frac{36}{169}D\left(S_1^2\right)+\frac{49}{169}D\left(S_2^2\right)=\frac{2\sigma^4}{13}$$

$$Mse\left(S_w^2\right)=D\left(S_w^2\right)+\left[E\left(S_w^2\right)-\sigma^2\right]^2=\frac{2\sigma^4}{13}$$

（2） $\begin{cases}\bar{x}=2.51\\ \bar{y}=2.62\end{cases}\quad\begin{cases}s_1^2=0.0083\\ s_2^2=0.0114\end{cases}$

取 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.728$， $\begin{matrix}p=P\left(F(6,7)>0.728\right)=0.643\\ P_-=2\min\left(p,1-p\right)=0.714\end{matrix}$ ，∴接受原假设

（3）置信区间 $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{0.025}(13)S_w\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}\right)\Rightarrow(-0.222,0.002)$

## NO.12 2020 - 2021 秋冬学期

### 一、填空题

1.【答案】25%　　　　0.6

【解析】第一空：由全概率公式

$$P(\text{选中共同好友})=P(\text{选中共同好友}\mid\text{选中甲})P(\text{选中甲})+P(\text{选中共同好友}\mid\text{选中乙})P(\text{选中乙})$$

$$=30\%\times\frac{1}{2}+20\%\times\frac{1}{2}=\boxed{25\%}$$

第二空：由贝叶斯公式

$$P(\text{选中甲}\mid\text{选中共同好友})=\frac{P(\text{选中共同好友}\mid\text{选中甲})P(\text{选中甲})}{P(\text{选中共同好友})}$$

$$=\frac{30\%\times\frac{1}{2}}{25\%}=\frac{3}{5}\text{ 即 }\boxed{0.6}$$

2.【答案】0.3413　　　13

【解析】这是一个二元正态分布，可以得到 $X$ 和 $Y$ 均服从正态分布，其中

$X\sim N(2,4)\quad Y\sim N(1,9)$　相关系数 $\rho=0.5$

所以 $X$ 均值 2，方差 $4=2^2$，于是

$$P(2<X<4)=P(0<X-2<2)=P\left(0<\frac{X-2}{2}<1\right)=\Phi(1)-\Phi(0)=\boxed{0.3413}$$

$$Var(2X-Y)=Var(2X)+Var(Y)+2\mathrm{Cov}(2X,-Y)$$

$$=4Var(X)+Var(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=4Var(X)+Var(Y)-4\rho\sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

$$=4\times4+9-4\times0.5\times\sqrt{4\times9}=\boxed{13}$$

3.【答案】0.2　　$(1-p)^2(1+2p)$

【解析】由分布函数具有阶梯形状，可以知道这是离散型随机变量。

则 $P(X=0)=0.6-0.4=\boxed{0.2}$;

记 $P(X=0)=p$，记观测到 $Y$ 次 $X=0$，则至多有一次观测到“0”的概率可以翻译为

$$P(Y\le1)=P(Y=0)+P(Y=1)$$

$$=(1-p)^3+C_3^1p(1-p)^2$$

$$=\boxed{(1-p)^3+3p(1-p)^2}$$

4.【答案】$\dfrac{5}{3}$

【解析】$Var(XY)=E\left(X^2Y^2\right)-E^2(XY)$

! 因为 $X$ 与 $Y$ 独立，所以 $X^2$ 和 $Y^2$ 也应当独立

$\therefore E\left(X^2Y^2\right)=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$　　$E(XY)=E(X)E(Y)$

$X$ 服从参数为 1 的指数分布 $\Rightarrow E(X)=1$，$Var(X)=1^2=1$

$Y$ 服从区间 $(0,2)$ 上均匀分布 $\Rightarrow E(Y)=1$，$E\left(Y^2\right)=\int_0^2\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$

$\because Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)\Rightarrow E\left(X^2\right)=Var(X)+E^2(X)=1+1=2$

$\therefore Var(XY)=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)-\left[E(X)E(Y)\right]^2$

$$=2\times\frac{4}{3}-(1\times1)^2=\boxed{\frac{5}{3}}$$

5.【答案】$\dfrac{1}{n}$　　$2\sigma^4\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

【解析】$\bar{X}^2-kS^2$ 是 $\mu^2$ 的无偏估计量 $\Leftrightarrow$ $E\left(\bar{X}^2-kS^2\right)=\mu^2$

因为 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，所以 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 相互独立

于是$E\left(\bar{X}^2-kS^2\right)=E\left(\bar{X}^2\right)-kE\left(S^2\right)=\mu^2$

$\because E\left(\bar{X}^2\right)=E^2\left(\bar{X}\right)+Var\left(\bar{X}\right)$

而$E\left(\bar{X}\right)=\mu$，$Var\left(\bar{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　于是$E\left(\bar{X}^2\right)=\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{n}$

$\therefore E\left(S^2\right)=\sigma^2$

$\therefore E\left(\bar{X}^2-kS^2\right)=\mu^2+\dfrac{\sigma^2}{n}-k\sigma^2=\mu^2 \Rightarrow \boxed{k=\dfrac{1}{n}}$

第二空：$\because \mu=0 \quad \therefore \bar{X}\sim N\left(0,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

于是 $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X}\sim N(0,1)$

由$\chi^2$分布的定义，$\dfrac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，则$Var\left(\dfrac{n}{\sigma^2}\bar{X}^2\right)=Var\left(\chi^2(1)\right)=2$

$\therefore Var\left(\bar{X}^2\right)=2\dfrac{\sigma^4}{n^2}$

而$Var\left(S^2\right)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

$\therefore Var\left(S^2-\bar{X}^2\right)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}+2\dfrac{\sigma^4}{n^2}=\boxed{2\sigma^4\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

（教材例题 6.3.1 和 6.3.2 非常重要，其中的普适性结论一定要牢记，方法一定要掌握）

6.【答案】0.054　　接受原假设　　0.40

【解析】注意这里的$\mu$和$\sigma$都未知

（1）取检验统计量$t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{1.2-1.1}{0.3/\sqrt{25}}=\dfrac{5}{3}$=1.67

$\because \ t_{0.054}(24)=1.67 \qquad \therefore \boxed{P_{-}=0.054}>0.05 \quad \therefore$ $\boxed{\text{接受原假设}}$

（2）枢轴量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{24\times0.3^2}{\sigma^2}$

则单侧置信上限 $\chi^2>\chi^2_{0.95}(24)=13.8$

$\therefore \dfrac{24\times0.3^2}{\sigma^2}>13.8$　得　$\sigma<\sqrt{\dfrac{24\times0.3^2}{13.8}}=0.40$

二、【解析】

（1）写出$X$的分布律：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | $a+b$ | $a+2b$ | $2a+b$ |

$\therefore E\left(X^2\right)=0+\left(a+2b\right)+4\left(2a+b\right)=\boxed{9a+6b}$

（2）由分布函数定义 $F\left(1,1\right)=P\left(X\le 1,Y\le 1\right)$

从联合分布律可以得到 $F\left(1,1\right)=a+0+b+a=2a+b$

（3）$\because Z=\min\left(X,Y\right)$

$\therefore X=0$ 时，不管 $Y$ 为何值，$Z=0$　　　$\therefore P\left(X=0,Z=0\right)=P\left(X=0\right)=a+b$

$X=1$ 时，若 $Y=0$，$Z=0$，否则 $Z=1$

$\therefore$　$P\left(X=1,Z=0\right)=P\left(X=1,Y=0\right)=b$

$P\left(X=1,Z=1\right)=P\left(X=1\right)-P\left(X=1,Y=0\right)=a+2b-b=a+b$

$\because$　$X=2$ 时，$Z=Y$

$\therefore$　$P\left(X=2,Z=z\right)=P\left(X=2,Y=z\right)$

$\therefore$　综上，$\left(X,Z\right)$ 的联合分布律如下

| $X\setminus Z$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $a+b$ | 0 | 0 |
| 1 | $b$ | $a+b$ | 0 |
| 2 | 0 | $b$ | $2a$ |

（4）$P\left(X>Y\right)=P\left(Y=0,X=1\right)+P\left(Y=0,X=2\right)+P\left(Y=1,X=2\right)$

$=b+0+b=2b=0.2$　　$\therefore \boxed{b=0.1}$

而由概率性质 $4\left(a+b\right)=1\Rightarrow a+b=0.25$　　$\therefore \boxed{a=0.15}$

$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=\left(a+2b+2b+8a\right)-\left(a+2b+4a+2b\right)\left(a+b+4a+4b\right)$

$=\left(9a+4b\right)-5\left(5a+4b\right)\left(a+b\right)$

$=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16}>0$　　$\therefore$ 正相关

（建议大家在草稿纸上把边际分布律补充完整，并把 $XY$ 的值填在对应的格子里，必须细心，否则就是咔嚓一下分没了）

**三、【解析】**

（1）由题意，得到条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

则 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}6(1-x), & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\therefore P(X+Y<1)=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{0.5}\mathrm{d}y\int_y^{1-y}6(1-x)\mathrm{d}x=\boxed{\frac{3}{4}}$

（2）$f_Y(y)=\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 6(1-x)\mathrm{d}x, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\boxed{\begin{cases}3(y-1)^2, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}}$

（3）$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6(1-x)}{3(y-1)^2}=\frac{2(1-x)}{(y-1)^2}(0<y<x<1)$

令 $y=0.5$，则 $\boxed{f_{X|Y}(x|0.5)=\begin{cases}8(1-x), 0.5<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}}$

**四、【解析】**

（1）（本小题是全卷最难的题目，难在解题时思路绕不过弯，一定要画图分区域，然后分类讨论）

由分布函数的定义：$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x,X^2\le y)$

① 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$

② 当 $x>1$ 且 $y>1$ 时，$P(x\le\min\{x,y\})=P(x\le 1)=1$

③ 当 $0<y<1$ 且 $\sqrt{y}\le x$ 时，则 $\min\{x,\sqrt{y}\}=\sqrt{y}$，此时 $F(x,y)=P(X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}3x^2\mathrm{d}x=y^{1.5}$

④ 当 $0<x<1$ 且 $\sqrt{y}>x$ 时，则 $\min\{x,\sqrt{y}\}=x$，此时 $F(x,y)=P(X\le x)=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x=x^3$

综上所述，$\boxed{F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0\\ y^{1.5}, & 0\le y<1, y\le x^2\\ x^3, & 0\le x<1, y>x^2\\ 1, & x>1, y>1\end{cases}}$

$\because F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y^{1.5}, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

显然 $F_X(x)F_Y(y)\ne F(x,y)$，所以 $\boxed{X 与 Y 不独立}$　更简便的方法是代一个数进去

（2）$E(X)=\int_0^1 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$　　$E(X^2)=\int_0^1 3x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$

$\therefore Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$

由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{240}X_i \sim N\left(240E(X),240D(X)\right)$，即$\sum_{i=1}^{240}X_i \sim N(180,9)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{240}X_i>177\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{240}X_i-180}{3}>-1\right)\approx 1-\Phi(-1)=\Phi(1)=\boxed{0.8413}$$

五、【解析】

（1）$E(X)=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{2\theta^2}{x}\bigg|_{\theta}^{+\infty}=-(0-2\theta)=2\theta$

$\therefore$矩估计量$\boxed{\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}\bar{X}}$

$\because n\to\infty$时，$\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}\bar{X}\xrightarrow{P}=\frac{1}{2}E(X)=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta$　$\therefore$ $\boxed{\text{是相合估计}}$

（2）极大似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\theta^2}{X_i^3}=2^n\theta^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^3$

则$\ln L(\theta)=n\ln 2+2n\ln\theta+3\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

显然，$\ln L(\theta)$关于$\theta$单调递增

$\therefore\theta$取最大值时，$L(\theta)$达到最大　$\therefore\boxed{\hat{\theta}_2=\min\{X_i\}}$

现在求$Z=\min\{X_i\}$的概率密度函数

$X$的分布函数$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\frac{\theta^2}{x^2}, & x\ge\theta\end{cases}$

$Z$的分布函数$F_Z(z)=P\left(\min\{X_i\}<z\right)=1-P\left(\min\{X_i\}>z\right)$

$$=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)$$
$$=1-P^n(X>z)$$

$$=1-\left[1-F_X(z)\right]^n=\begin{cases}0, & z<\theta\\ 1-\frac{\theta^{2n}}{z^{2n}}, & z\ge\theta\end{cases}$$

$\therefore$概率密度函数$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<\theta\\ \frac{2n\theta^{2n}}{z^{2n+1}}, & z\ge\theta\end{cases}$

$$\therefore E(z)=\int_{\theta}^{+\infty} z\frac{2n\theta^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z=2n\int_{\theta}^{+\infty}\frac{\theta^{2n}}{z^{2n}}\mathrm{d}z=-\frac{2n}{2n-1}\frac{\theta^{2n}}{z^{2n-1}}\bigg|_{\theta}^{+\infty}=\frac{2n}{2n-1}\theta\neq\theta$$

∴$\boxed{\text{不是无偏估计量}}$

（本小题是全卷第二难的题目，最值的期望要熟练掌握）

六、【解析】

（1）概率如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^3}{6}e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^4}{24}e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^5}{120}e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^6}{720}e^{-\lambda}$ |

$$\therefore\ L(\lambda)=\left(e^{-\lambda}\right)^{32}\left(\lambda e^{-\lambda}\right)^{41}\left(\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\right)^{16}\left(\frac{\lambda^3}{6}e^{-\lambda}\right)^{5}\left(\frac{\lambda^4}{24}e^{-\lambda}\right)^{0}\left(\frac{\lambda^5}{120}e^{-\lambda}\right)^{4}\left(\frac{\lambda^6}{720}e^{-\lambda}\right)^{2}$$

$$=e^{-32\lambda}\lambda^{41}e^{-41\lambda}\frac{\lambda^{32}}{2^{16}}e^{-16\lambda}\frac{\lambda^{15}}{6^5}e^{-5\lambda}\frac{\lambda^{20}}{120^4}e^{-4\lambda}\frac{\lambda^{12}}{720^2}e^{-2\lambda}=\frac{\lambda^{120}}{C}e^{-100\lambda}$$（$C$为常数）

则 $\ln L(\lambda)=120\ln\lambda-100\lambda-\ln C$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{120}{\lambda}-100=0\Rightarrow\boxed{\hat{\lambda}=\frac{6}{5}}\qquad \hat{P}(X=1)=\hat{\lambda}e^{-\hat{\lambda}}=\boxed{\frac{6}{5}e^{-\frac{6}{5}}}$$

（2）将 $\lambda=1.2$ 代入，列出下表：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\geq 4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.30 | 0.36 | 0.22 | 0.09 | 0.03 |
| 理论频数 | 30 | 36 | 22 | 9 | 3 |
| 实际频数 | 32 | 41 | 16 | 5 | 6 |

则 $\chi^2=\frac{2^2}{30}+\frac{5^2}{36}+\frac{6^2}{22}+\frac{4^2}{9}+\frac{3^2}{3}\approx 7.24$

而 $\chi^2_{0.05}(5-1-1)=\chi^2_{0.05}(3)=7.82>7.24$　　∴$\boxed{\text{接受原假设}}$