



# 2 平面机构运动分析

---

## 2-1 速度瞬心法

## 2-2 相对运动图解法

## 2-3 杆组解析法



## 2 平面机构运动分析

---

思考题:

- 如果考虑摩擦，移动副、回转副和高副中的反力各有何特点？
- 什么是机械装置的效率？
- 什么是机械装置的自锁？

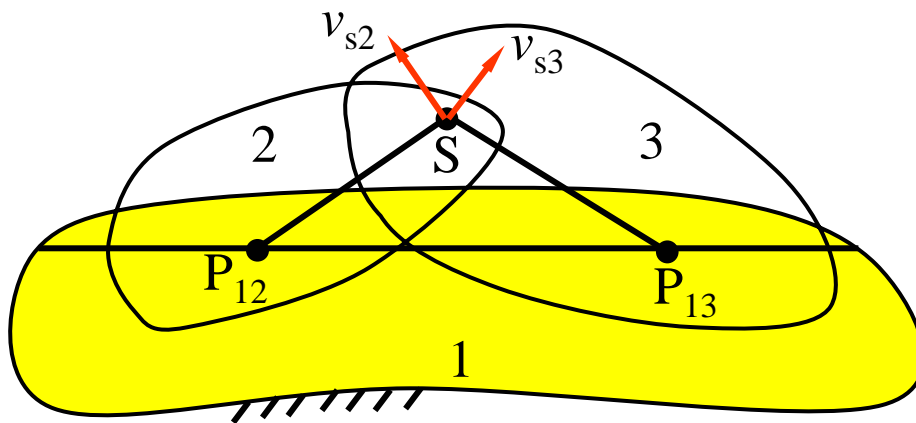
## 2-1 速度瞬心法

- 绝对（相对）瞬心：

瞬时速度为零（相等）的点。

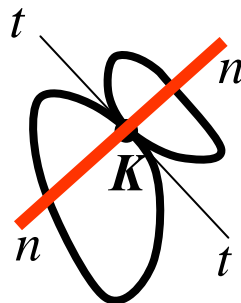
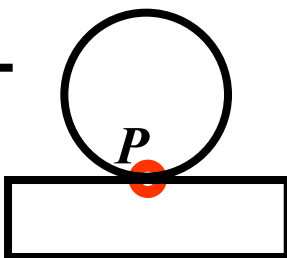
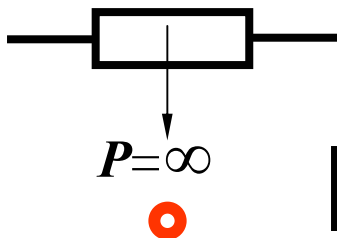
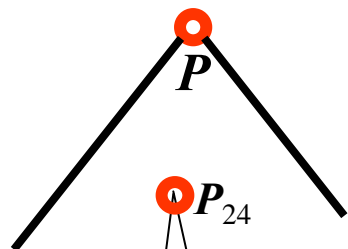
- 三心定理：

相互作平面运动的三构件间的三个相对瞬心必共线。



# 2-1 速度瞬心法

构成平面运动副之两构件的相对瞬心:



$$\omega_1 |P_{13}P_{14}| = \omega_3 |P_{13}P_{34}|$$

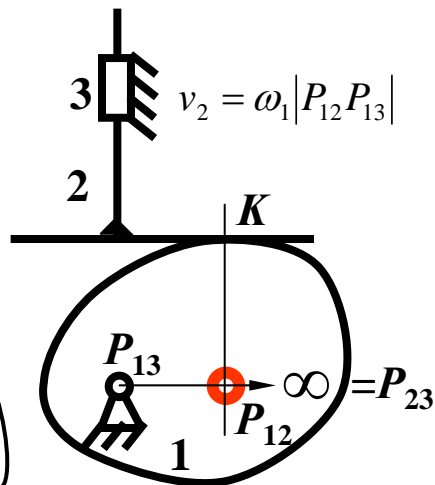
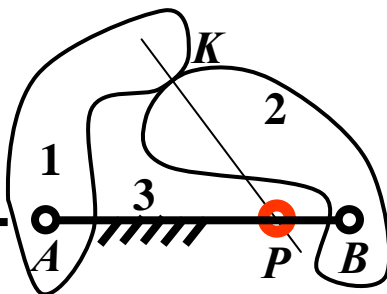
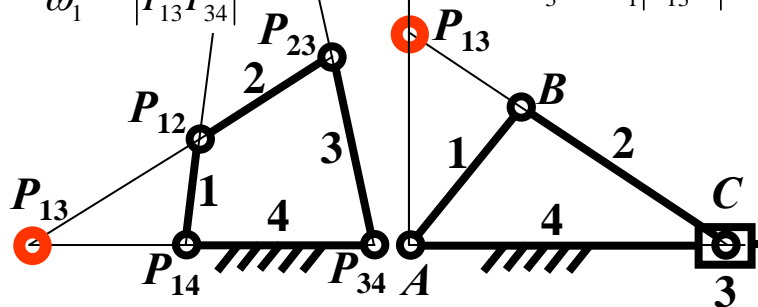
$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{|P_{13}P_{14}|}{|P_{13}P_{34}|}$$

$$\infty = P_{34}$$

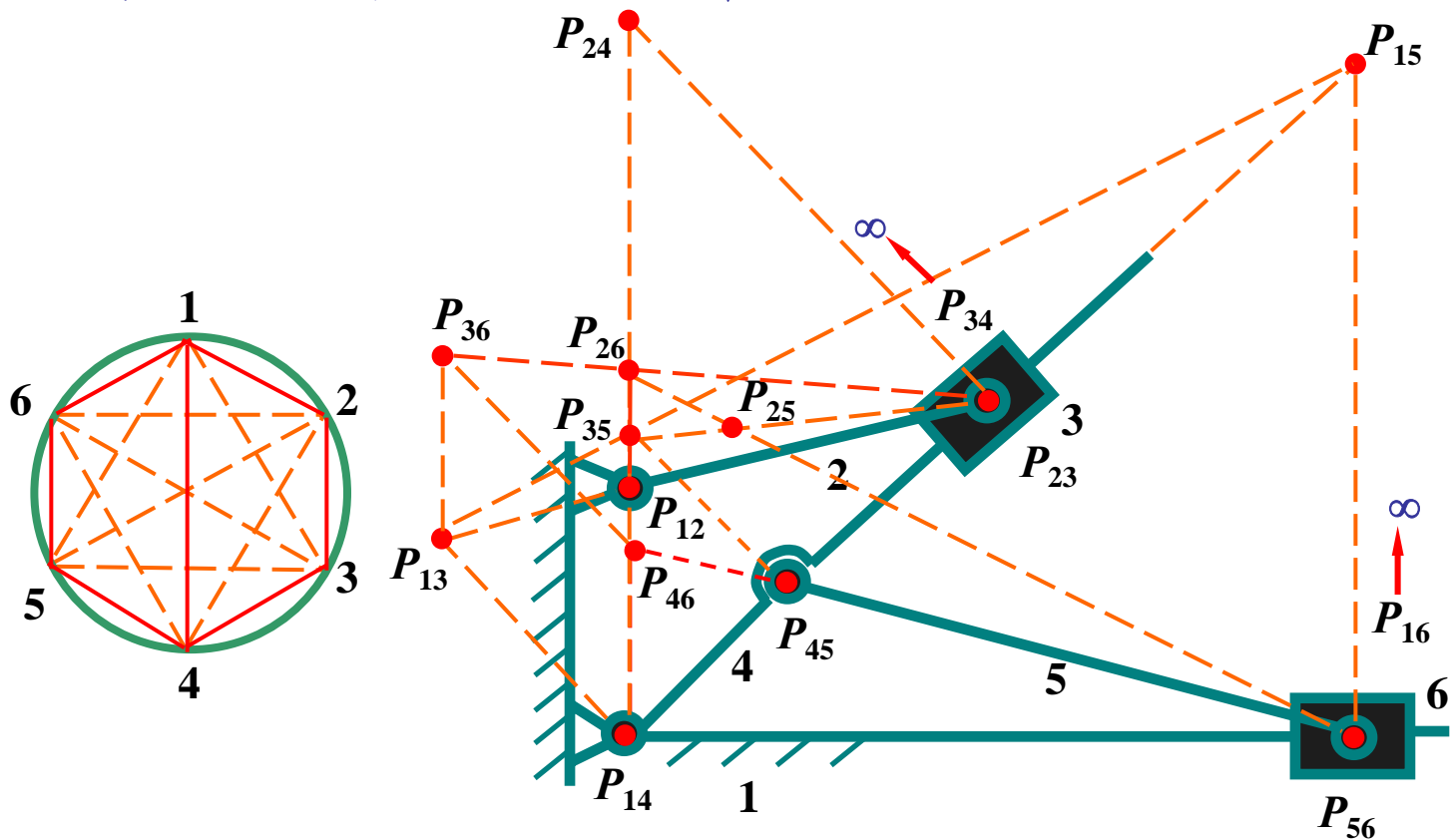
$$v_3 = \omega_1 |P_{13}A|$$

$$\omega_1 |PA| = \omega_2 |PB|$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{|PA|}{|PB|}$$



例\*: 求图示六杆机构的速度瞬心。



## 2-2 相对运动图解法

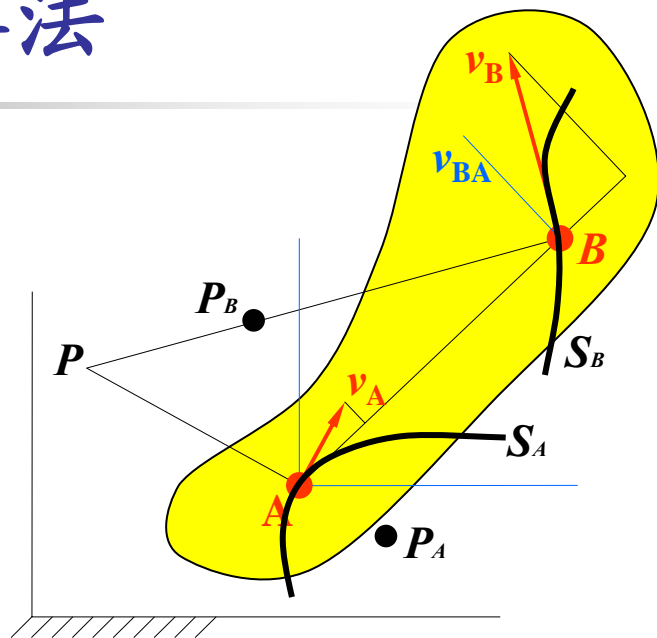
同一构件上两点之间运动关系：

矢量方程： $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$

方向： $\perp BP \quad \perp AP \quad \perp AB$

大小： $\omega l_{BP} \quad \omega l_{AP} \quad \omega l_{AB}$

其中  $P$  为此构件的绝对速度瞬心点。



矢量方程： $\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$

方向： $//BP \quad \perp BP \quad //AP \quad \perp AP \quad B \rightarrow A \quad \perp AB$

大小： $v_B^2/r_B \quad dv_B/dt \quad v_A^2/r_A \quad dv_A/dt \quad \omega^2 l_{AB} \quad \alpha l_{AB}$

其中  $r_A = AP_A$ 、 $r_B = BP_B$  为  $A$ 、 $B$  在各自轨迹上的曲率半径。

## 2-2 相对运动图解法

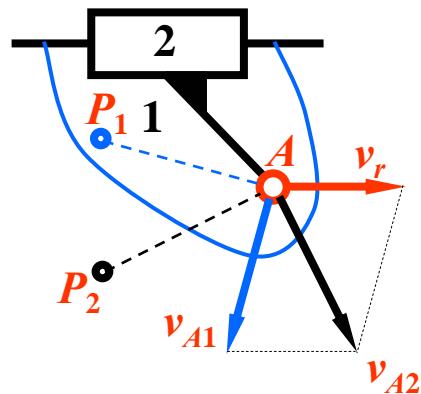
移动副两构件上瞬时重合点间的运动关系：

矢量方程： $\boldsymbol{v}_{A2} = \boldsymbol{v}_{A1} + \boldsymbol{v}_{21}^r$

方向： $\perp AP_2 \perp AP_1$  沿导轨

大小： $\omega l_{P2A} \quad \omega l_{P1A} \quad v_r$

其中 $P_1$ 与 $P_2$ 分别为构件1与2的绝对瞬心点。



矢量方程： $\boldsymbol{a}_{A2}^n + \boldsymbol{a}_{A2}^t = \boldsymbol{a}_{A1}^n + \boldsymbol{a}_{A1}^t + \boldsymbol{a}_{21}^k + \boldsymbol{a}_{21}^r$

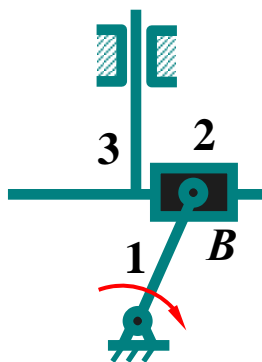
方向： $//AP_2 \perp AP_2 //AP_1 \perp AP_1 \perp \boldsymbol{v}_{21}^r$  沿导轨

大小： $v_{A2}^2/r_{A2} \quad dv_{A2}/dt \quad v_{A1}^2/r_{A1} \quad dv_{A1}/dt \quad 2\omega v_r \quad dv_r/dt$

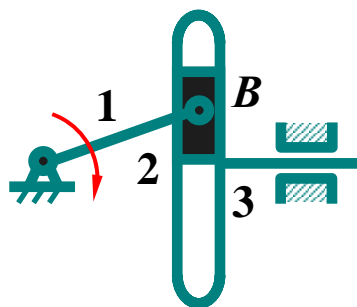
其中 $r_{A1}$ 、 $r_{A2}$ 为 $A_1$ 与 $A_2$ 在各自轨迹上的曲率半径。

## 2-2 相对运动图解法

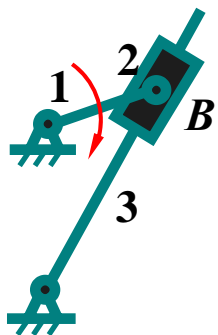
哥氏加速度的存在及其方向的判断\*



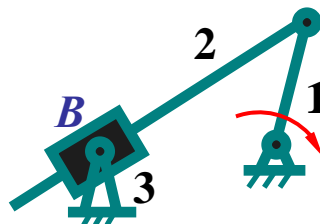
牵连运动为  
平动，无 $a^k$



牵连运动为  
平动，无 $a^k$



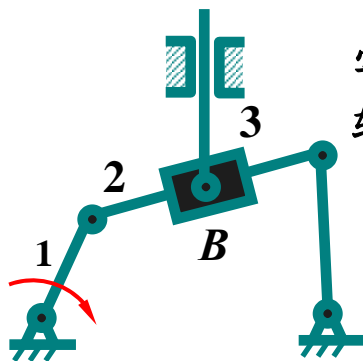
牵连运动为  
转动，有 $a^k$



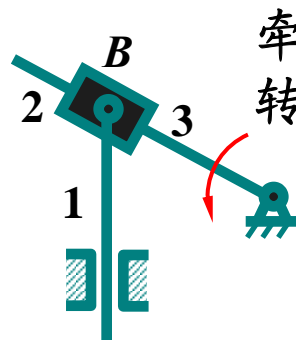
牵连运动为  
转动，有 $a^k$



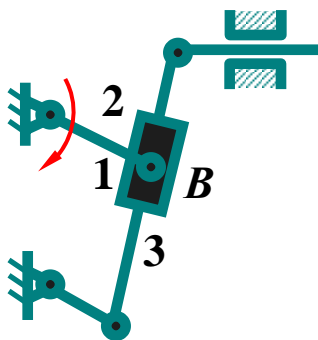
## 2-2 相对运动图解法



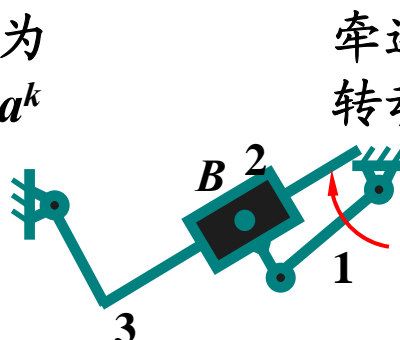
牵连运动为  
转动, 有  $a^k$



牵连运动为  
转动, 有  $a^k$



牵连运动为  
转动, 有  $a^k$



牵连运动为  
转动, 有  $a^k$

## 2-2 相对运动图解法

取C为重合点

$$\mathbf{v}_{C3} = \mathbf{v}_{C4} + \mathbf{v}_{34}$$

大小	?	?	?
方向	?	✓	✓

取构件3为研究对象

$$\mathbf{v}_{C3} = \mathbf{v}_{B3} + \mathbf{v}_{CB}$$

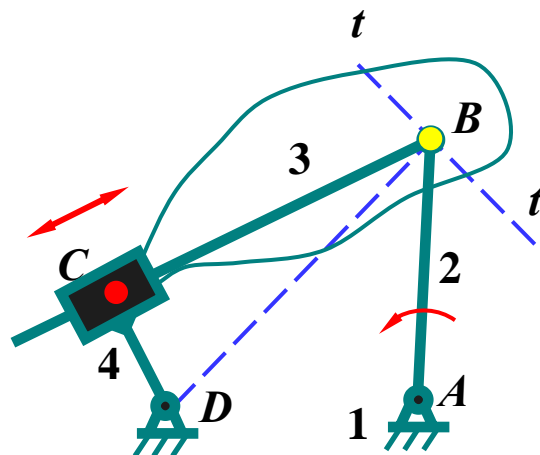
大小	?	✓	?
方向	?	✓	✓

将构件4扩大至包含B点，取B点为重合点

$$\mathbf{v}_{B4} = \mathbf{v}_{B3} + \mathbf{v}_{43}$$

大小	?	✓	?
方向	✓	✓	✓

重合点的选取\*



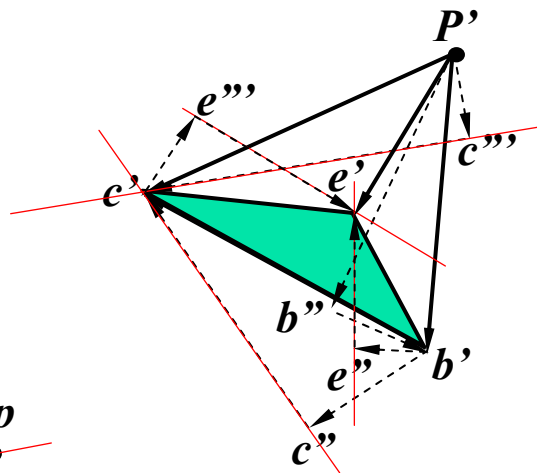
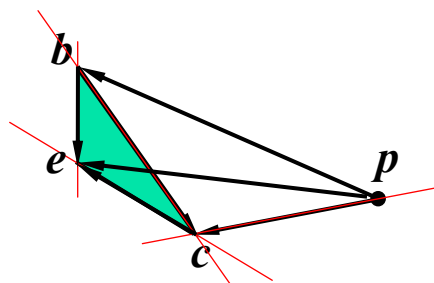
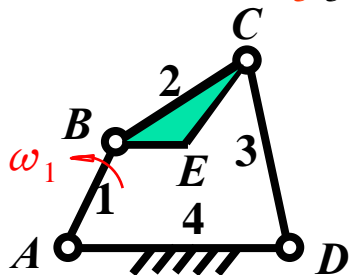
## 2-2 相对运动图解法

例1: 已知构件1逆时针转。

矢量方程:  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$

方向:  $\perp CD \perp BA \perp BC$

大小:  $\omega_3 l_3 \quad \omega_1 l_1 \quad \omega_2 l_2$



矢量方程:  $\mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^t = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t$

方向:  $C \rightarrow D \perp CD \quad B \rightarrow A \perp AB \quad C \rightarrow B \perp BC$

大小:  $\omega_3^2 l_3 \quad \alpha_3 l_3 \quad \omega_1^2 l_1 \quad \alpha_1 l_1 \quad \omega_2^2 l_2 \quad \alpha_2 l_2$

这里, 因为  $v_C = \omega_3 l_3$ , 所以  $v_C^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3$  且  $dv_C / dt = \alpha_3 l_3$

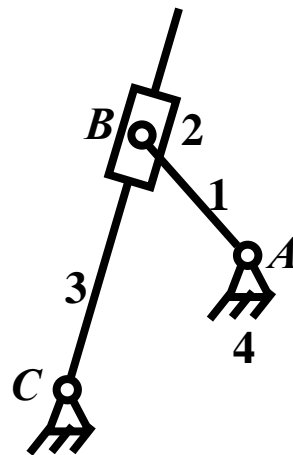
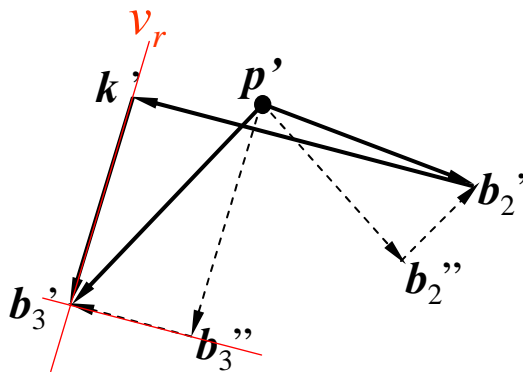
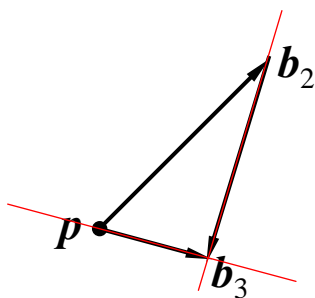
## 2-2 相对运动图解法

例2：已知构件1顺时针转。

矢量方程： $\mathbf{v}_{B3} = \mathbf{v}_{B2} + \mathbf{v}_{32}^r$

方向： $\perp BC$   $\perp AB$  沿  $BC$

大小： $\omega_3 l_{BC}$   $\omega_1 l_{AB}$



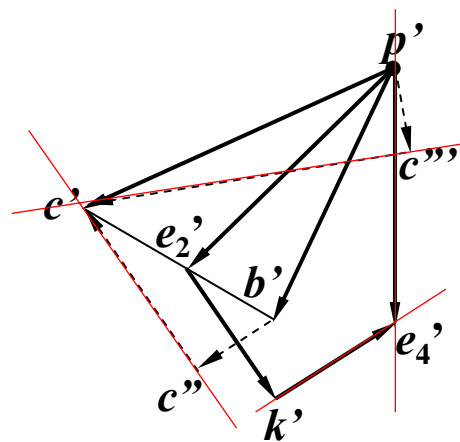
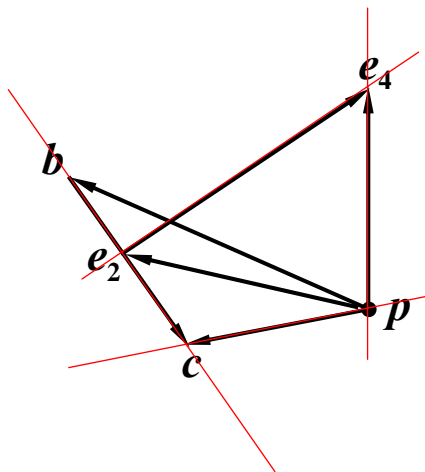
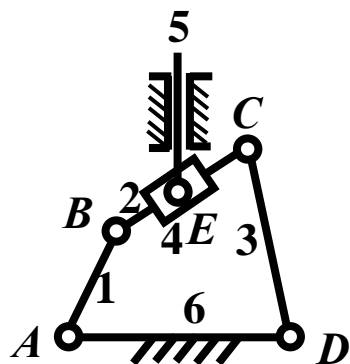
矢量方程： $\mathbf{a}_{B3}^n + \mathbf{a}_{B3}^t = \mathbf{a}_{B2}^n + \mathbf{a}_{B2}^t + \mathbf{a}_{32}^k + \mathbf{a}_{32}^r$

方向： $B \rightarrow C$   $\perp BC$   $B \rightarrow A$   $\perp BA$   $\perp BC$  沿  $BC$

大小： $\omega_3^2 l_{BC}$   $\alpha_3 l_{BC}$   $\omega_1^2 l_1$   $\alpha_1 l_1$   $2\omega_2 v_r$   $a_r$

## 2-2 相对运动图解法

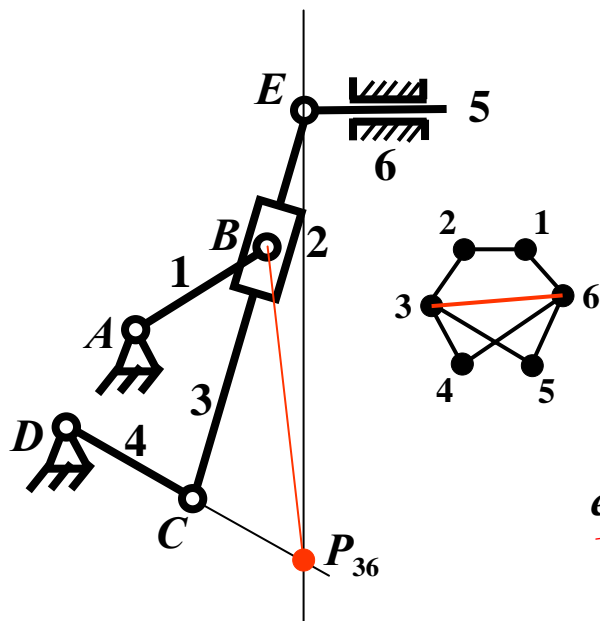
例3: 已知各杆长, 构件1逆时针匀速转动, 其角速度已知。求此时构件5的速度与加速度。



## 2-2 相对运动图解法

例4：已知各杆长，构件1逆时针匀速转动，其角速度已知。求此时构件5的速度。

矢量方程： $\boldsymbol{v}_{B3} = \boldsymbol{v}_{B2} + \boldsymbol{v}_{32}^r$   
 方向： $\perp BP_{36}$   $\perp AB$  沿  $BC$   
 大小： $\omega_3 l_{BP36}$   $\omega_1 l_{AB}$   $v_r$



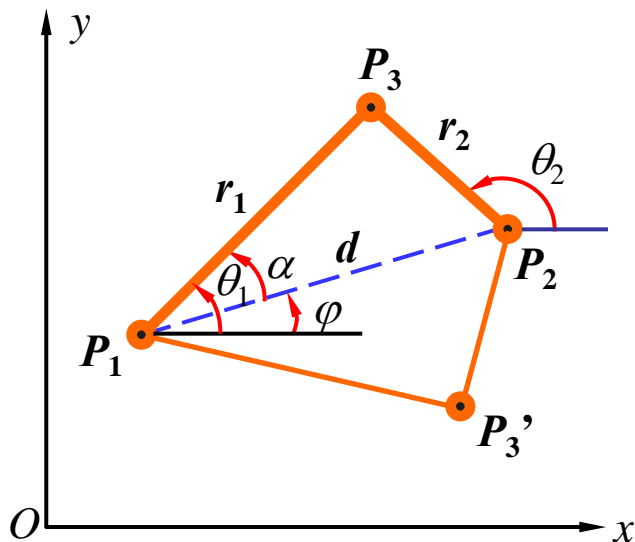
## 2-3 杆组解析法

基本思想:

- 1) 对基本杆组进行运动分析并编制相应的求解函数。
- 2) **从主动件开始**, 依次对各杆组调用相应的求解函数, 完成整个机构的运动分析。

以二级杆组RRR为例:

已知 $P_1$ 、 $P_2$ 的位置、速度、加速度以及两杆长度。求两杆的角位置、角速度、角加速度, 以及 $P_3$ 的位置、速度与加速度。



RRR组运动分析

## 2-3 杆组解析法

已知参数(外接运动副 $P_1$ 、 $P_2$ 的运动参数, 两构件几何参数)  
 $(x_1, y_1), (\dot{x}_1, \dot{y}_1), (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1), (x_2, y_2), (\dot{x}_2, \dot{y}_2), (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2), r_1, r_2$

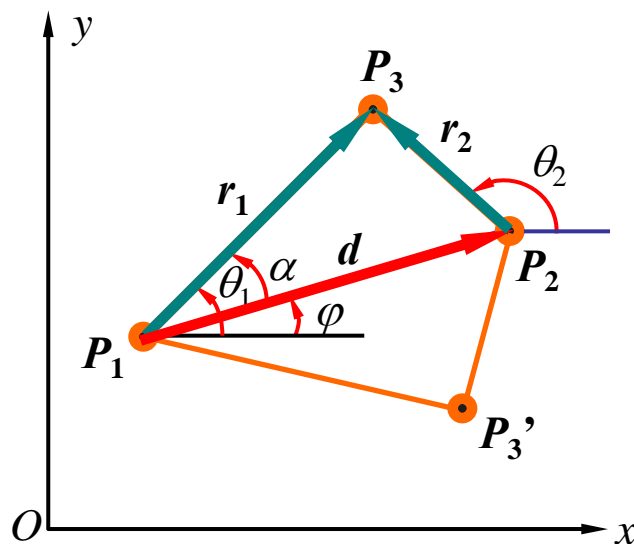
待求参数(内接运动副 $P_3$ 的运动参数, 两构件角运动参数)  
 $(x_3, y_3), (\dot{x}_3, \dot{y}_3), (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3), \theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$

1) 求 $\theta_1$

将杆组用封闭矢量三角形表示,  
求出 $P_1$ 到 $P_2$ 的距离 $d$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$



RRR组运动分析



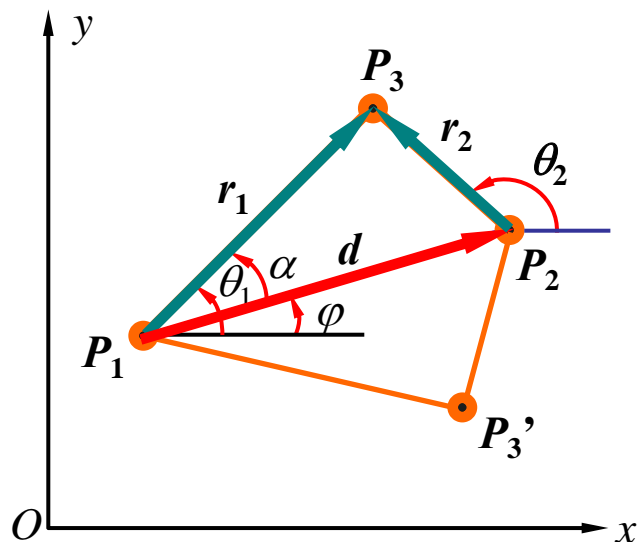
## 2-3 杆组解析法

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2r_1d}\right)$$

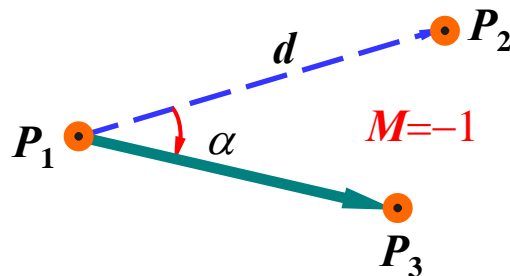
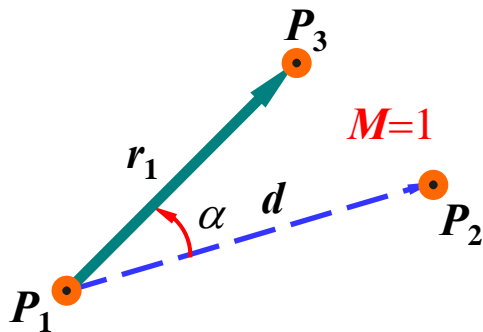
因有两种装配模式

$$\theta_1 = \varphi \pm \alpha$$

在计算机程序中，用给定装配模式系数  $M$  的方法来确定上式中的正负号。



RRR组运动分析



## 2-3 杆组解析法

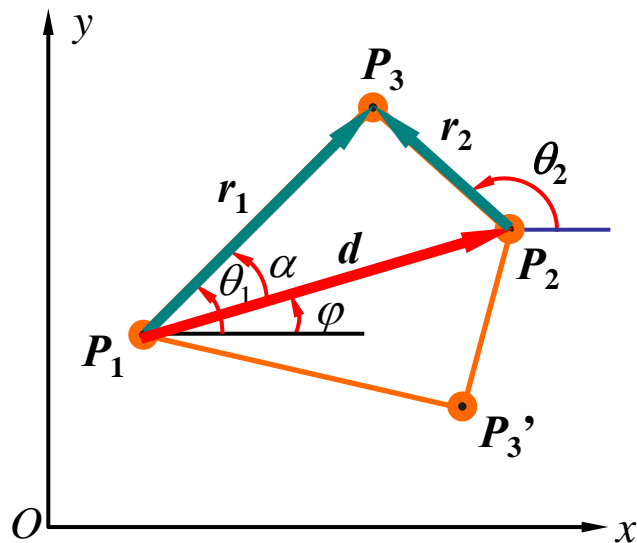
2)求 $(x_3, y_3)$ 和 $\theta_2$

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + r_1 \cos \theta_1 \\ y_3 = y_1 + r_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \arctan \left( \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right)$$

3)求  $(\dot{x}_3, \dot{y}_3), (\ddot{x}_3, \ddot{y}_3), \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$

求导从略。



RRR组运动分析

## 2-3 杆组解析法

