材料力学

第七章

应力和应变分析 强度理论

李德昌
Email: dcli@zju.edu.cn
西溪校区教学主楼553

60

第七章 应力和应变分析 强度理论

61

主要公式：

斜面应力公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

主方向公式

$$\tan 2\alpha_P = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

主应力公式

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

62

§7.4 二向应力状态分析——图解法

1、应力圆（莫尔圆）

斜截面应力计算公式

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

改写为

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

把上面两式等号两边平方，然后相加便可消去α，得

68

§7.4 二向应力状态分析——图解法

1、应力圆（莫尔圆）

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

因为σ_x，σ_y，τ_{xy}皆为已知量，所以上式是一个以σ_α，τ_α为变量的圆周方程。当斜截面随方位角α变化时，其上的应力σ_α，τ_α在σ-τ直角坐标系内的轨迹是一个圆。

圆心的坐标 $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$

圆的半径 $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

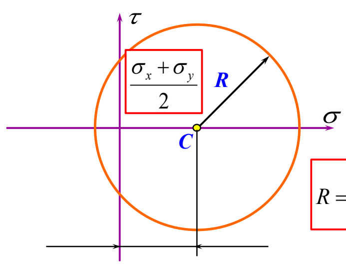
此圆习惯上称为应力圆，或称为莫尔圆。

69

§7.4 二向应力状态分析——图解法

1、应力圆（莫尔圆）

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

70

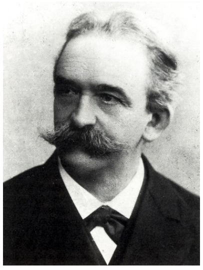
§7.4 二向应力状态分析——图解法

1、应力圆（莫尔圆）

首先由Christian Otto Mohr（1835-1918）于1866年提出。

莫尔是德国土木工程师,主要从事铁路施工工程。

应力圆 (Stress Circle）也称莫尔圆 （Mohr's Circle）

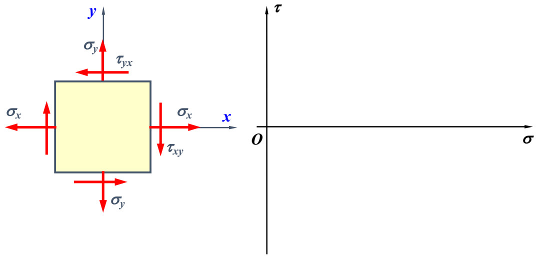


71

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

(1) 建立σ-τ坐标系，选定比例尺。

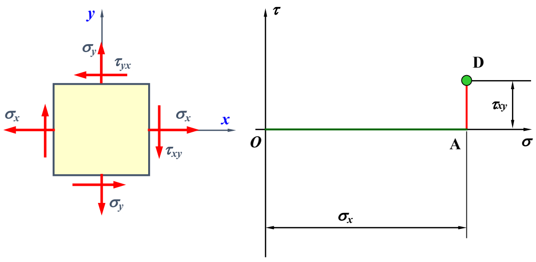


72

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

(2) 量取OA=σ_x，AD =τ_{xy}，得D点。

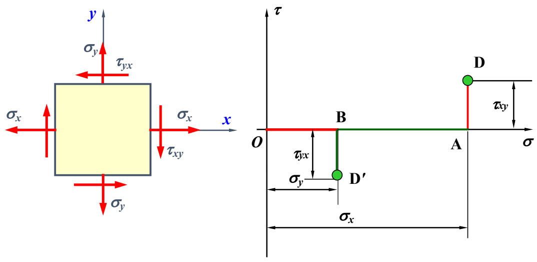


73

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

(3) 量取OB=σ_y，BD' =τ_{yx}，得D'点。

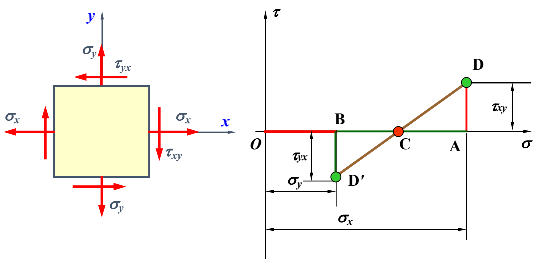


74

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

(4) 连接 DD'两点的直线与σ轴相交于C点。

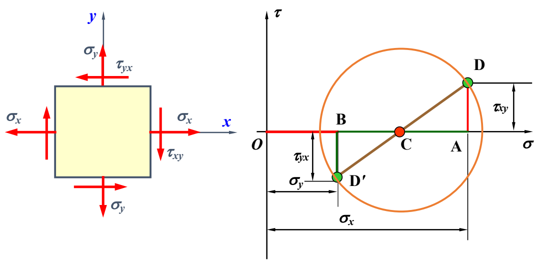


75

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

(5) 以C为圆心，CD 为半径作圆，即得该单元体的应力圆。



76

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

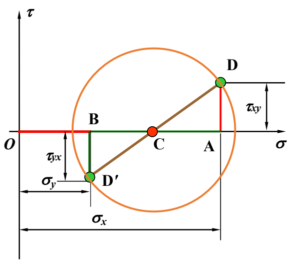
(6) 证明。

应力圆的圆心C点到坐标原点的距离为

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

应力圆半径为

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$



77

§7.4 二向应力状态分析——图解法

2、应力圆的画法

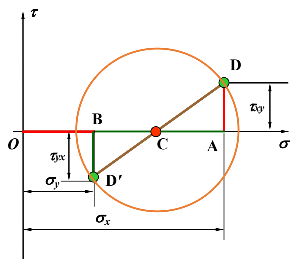
(6) 证明。

$$\overline{OC}=OB+\frac{1}{2}(\overline{OA}-\overline{OB})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{CA}^2+\overline{AD}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$



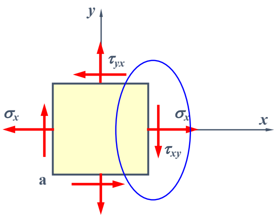
78

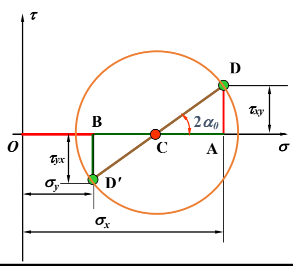
§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

单元体的右侧立面(σ_x, τ_{xy}) ⟷ 应力圆的D点($2\alpha_0$)





80

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

$$\overline{OF}=\overline{OC}+\overline{CF}$$

$$=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)$$

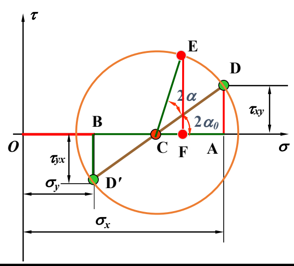
$$=\overline{OC}+\overline{CD}\cos 2\alpha_0\cos 2\alpha$$

$$-\overline{CD}\sin 2\alpha_0\sin 2\alpha$$

$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha$$

$$-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$=\sigma_\alpha$$



81

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

$$\overline{FE}=\overline{CE}\sin(2\alpha_0+2\alpha)$$

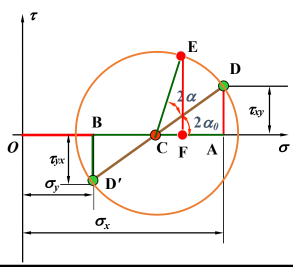
$$=\overline{CD}\sin 2\alpha_0\cos 2\alpha$$

$$+\overline{CD}\cos 2\alpha_0\sin 2\alpha$$

$$=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

$$+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$=\tau_\alpha$$



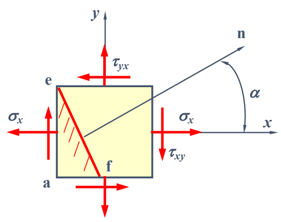
82

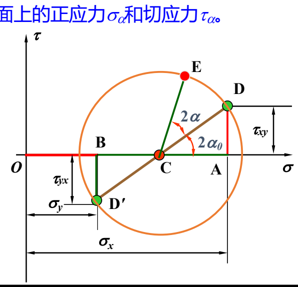
§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

从应力圆的半径CD按方位角α的转向转动2α得到半径CE，圆周上E点的坐标就依次为α斜截面上的正应力σ_α和切应力τ_α。





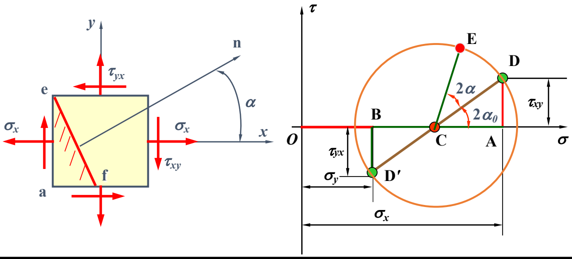
83

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

斜截面的应力(σ_α , τ_α) ⟷ 应力圆E点坐标(σ_α，τ_α)



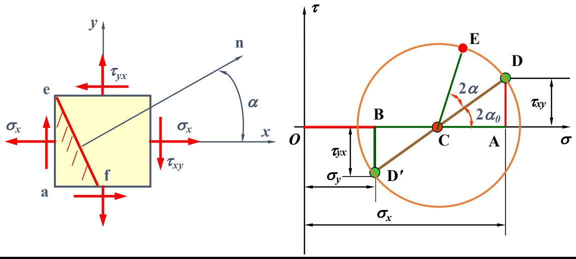
84

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

单元体上角度α ⟷ 应力圆上CE与CD夹角2α，且转向一致



85

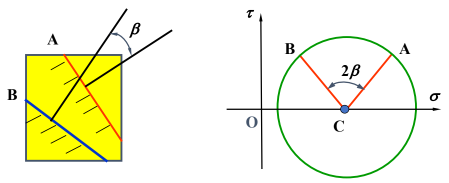
§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(1) 求单元体上任一截面上的应力

点面之间的对应关系：单元体某一面上的应力，必对应于应力圆上某一点的坐标。

夹角关系：圆周上任意两点所引半径的夹角等于单元体上对应两截面夹角的两倍。两者的转向一致。



86

§7.4 二向应力状态分析——图解法

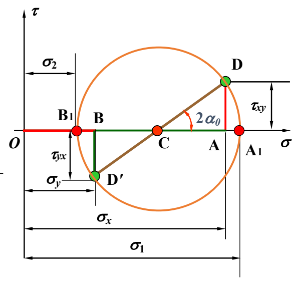
3、应力圆的应用

(2) 求主应力数值和主平面位置

主应力数值

A_1和B_1两点为与主平面对应的点，其横坐标为主应力σ_1，σ_2。

$$\overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1}$$
$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$
$$= \sigma_{\max} = \sigma_1$$



87

§7.4 二向应力状态分析——图解法

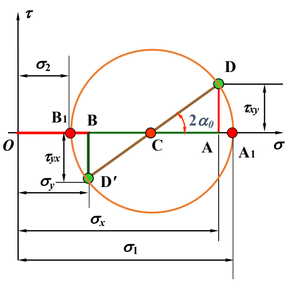
3、应力圆的应用

(2) 求主应力数值和主平面位置

主应力数值

A_1和B_1两点为与主平面对应的点，其横坐标为主应力σ_1，σ_2。

$$\overline{OB_1} = \overline{OC} - \overline{CB_1}$$
$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$
$$= \sigma_{\min} = \sigma_2$$



88

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(2) 求主应力数值和主平面位置

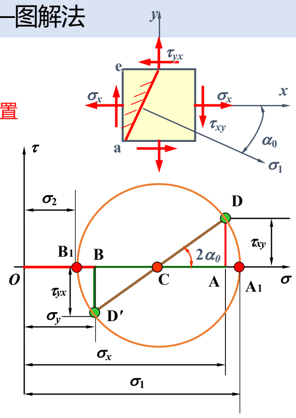
主平面位置

由CD顺时针转$2\alpha_0$到CA_1

所以单元体上从x轴顺时针转α_0（负值）即到σ_1对应的主平面的外法线

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$



89

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(2) 求主应力数值和主平面位置

主平面位置

由CD顺时针转$2\alpha_0$到CA_1

所以单元体上从x轴顺时

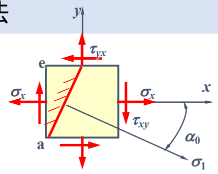
针转α_0（负值）即到σ_1

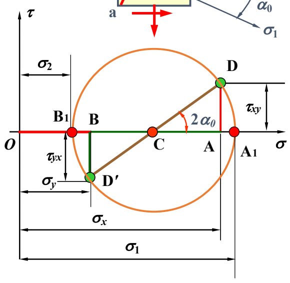
对应的主平面的外法线

$$2\alpha_0=\tan^{-1}\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right)$$

α_0确定后，σ_1对应的主平

面方位即确定。





90

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(3) 求最大切应力

G_1和G_2两点的纵坐标分别

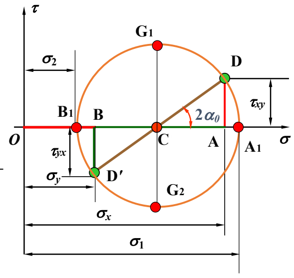
代表最大和最小切应力

$$\overline{CG_1}=+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=\tau_{\max}$$

$$\overline{CG_2}=-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=\tau_{\min}$$



91

§7.4 二向应力状态分析——图解法

3、应力圆的应用

(3) 求最大切应力

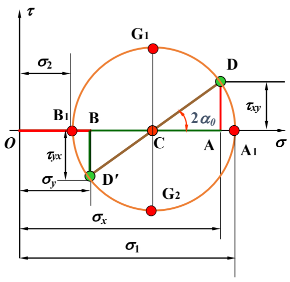
G_1和G_2两点的纵坐标分别

代表最大和最小切应力

最大最小切应力等于应力圆

的半径

$$\left.\begin{cases}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{cases}\right\}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

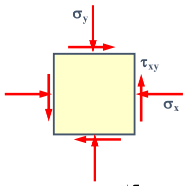


92

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x=-1$ MPa，$\sigma_y=-0.4$ MPa，$\tau_{xy}=-0.2$ MPa，$\tau_{yx}=0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在α=30°和$\alpha=-40°$两斜面上的应力。

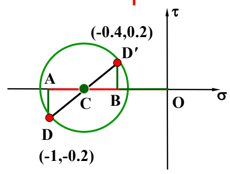


解：(1) 画应力圆

量取OA= σ_x=−1，AD = τ_{xy}=−0.2，定出D点；

量取OB = σ_y= −0.4，BD′ = τ_{yx}= 0.2，定出 D′点。

以 DD′ 为直径绘出的圆即为应力圆。

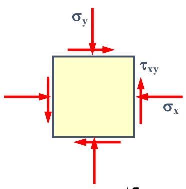


93

§7.4 二向应力状态分析——图解法

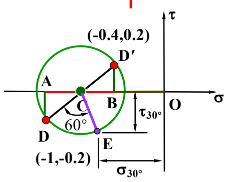
例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x=-1$ MPa，$\sigma_y=-0.4$ MPa，$\tau_{xy}=-0.2$ MPa，$\tau_{yx}=0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在α=30°和$\alpha=-40°$两斜面上的应力。



解：(2) 确定α=30°斜截面上的应力

将半径CD逆时针转动2α=60°到半径CE，E点的坐标就代表α=30°斜截面上的应力。

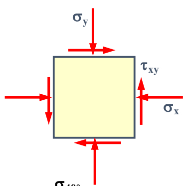


94

§7.4 二向应力状态分析——图解法

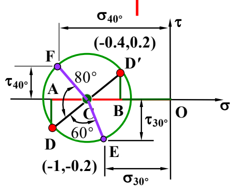
例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x=-1$ MPa，$\sigma_y=-0.4$ MPa，$\tau_{xy}=-0.2$ MPa，$\tau_{yx}=0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在α=30°和$\alpha=-40°$两斜面上的应力。



解：(3) 确定α=−40°斜截面上的应力

将半径CD顺时针转动2α=80°到半径CF，F点的坐标就代表α=−40°斜截面上的应力。

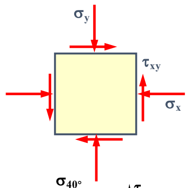


95

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.6

从水坝体内某点处取出的单元体如图所示，$\sigma_x = -1$ MPa，$\sigma_y = -0.4$ MPa，$\tau_{xy} = -0.2$ MPa，$\tau_{yx} = 0.2$ MPa，求：(1)绘出相应的应力圆；(2)确定此单元体在$\alpha=30^\circ$和$\alpha=-40^\circ$两斜面上的应力。



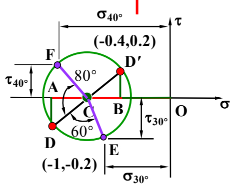
解：(4)

$\sigma_{30^\circ} = -0.68$ MPa

$\tau_{30^\circ} = -0.36$ MPa

$\sigma_{-40^\circ} = -0.95$ MPa

$\tau_{-40^\circ} = -0.26$ MPa

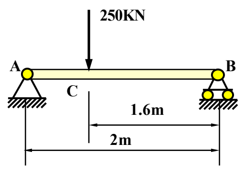


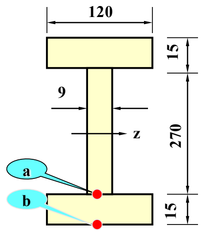
96

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面c上a、b两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。



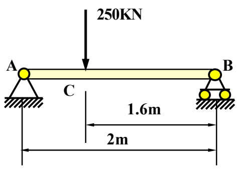


97

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

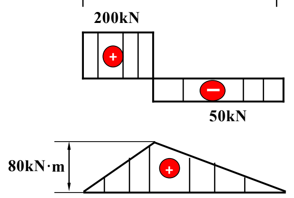
两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面c上a、b两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。



解：(1) 作剪力、弯矩图

$F_{S\max} = F_{C左} = 200$ kN

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \qquad \tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

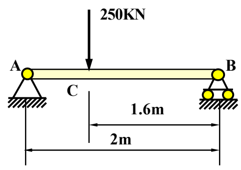


98

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面c上a、b两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。

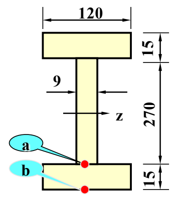


解：(2) 横截面C上a点应力

$$I_z = \frac{120\times300^3}{12} - \frac{111\times270^3}{12}$$

$$= 88\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$y_a = 135\ \text{mm}$$

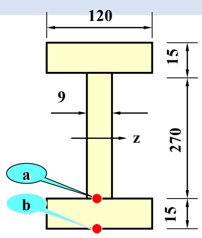


99

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

两端简支的焊接工字钢梁及其荷载如图所示，梁的横截面尺寸示于图中。试绘出截面c上a、b两点处的应力圆，并用应力圆求出这两点处的主应力。



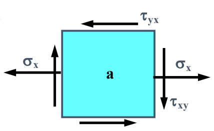
解：(2) 横截面C上a点应力

$$\sigma_a = \frac{M_c}{I_z} y_a = 122.5\ \text{MPa}$$

$$S_{za}^* = 120\times15\times(150-7.5) = 256000\ \text{mm}^3$$

$$\tau_a = \frac{F_S S_{za}^*}{I_z d} = 64.6\ \text{MPa}$$

a点的单元体如图所示



100

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

解：(3) 作应力圆

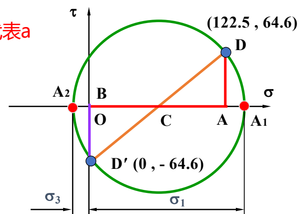
$\sigma_x = 122.5$ MPa，$\tau_{xy} = 64.6$ MPa　$\sigma_y = 0$，$\tau_{yx} = -64.6$ MPa

由σ_x、τ_{xy}定D点，由σ_y、τ_{yx}定D′点，以 DD′为直径作应力圆

A_1，A_2两点的横坐标分别代表a点的两个主应力σ_1和σ_3

$$\sigma_1 = OA_1 = 150\ \text{MPa}$$

$$\sigma_5 = OA_2 = -27\ \text{MPa}$$



101

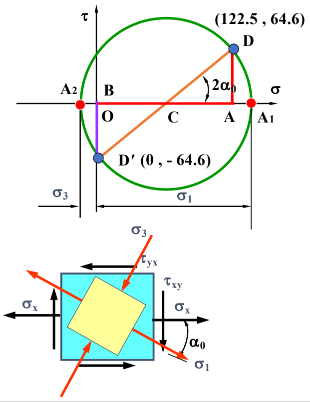
§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

解：(3) 作应力圆

A_1点对应于单元体上σ_1所在的主平面

$$2\alpha_0 = -45^0$$
$$\alpha_0 = -22.5^0$$
$$\sigma_1 = 150 \ \text{MPa}$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -27 \ \text{MPa}$$

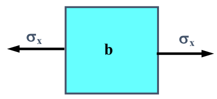


102

§7.4 二向应力状态分析——图解法

例题7.7

解：(4) 横截面C上b点应力



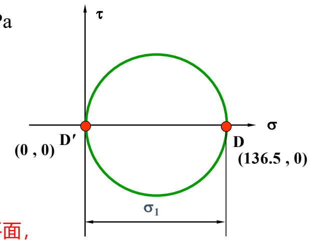
$$y_b = 150 \ \text{mm}$$
$$\sigma_b = \frac{M_c}{I_z} y_b = 136.5 \ \text{MPa}$$
$$\tau_b = 0$$

b点的单元体如图所示

b点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 136.5 \ \text{MPa}$$
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

σ_1所在的主平面就是x平面，即梁的横截面C。



103

§7.4 二向应力状态分析——图解法

4、小结

(1) 解析法

一般公式2个（正、切应力），
极值应力4个（极大与极小正应力，极大与极小切应力）
主单元体方位角1个
缺点：公式不好记 —— 7个

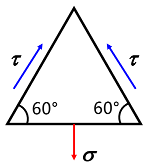
(2) 图解法

前半部 —— 画应力圆
后半部 —— 看图精确计算
优点：不必记公式

104

作业

自平面受力物体内取出一微体，其上受正应力σ及切应力$\tau = \sigma/\sqrt{3}$，如图所示。求该点处的三个主应力并画出主应力单元体。



7.5, 7.8, 7.12

105

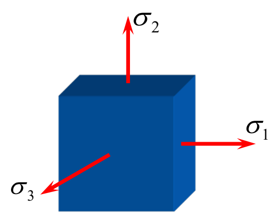
第七章 应力和应变分析 强度理论

106

§7.5 三向应力状态

1、定义

三向应力状态：三个主应力都不为零的应力状态



$$\sigma_1 \neq 0, \ \sigma_2 \neq 0, \ \sigma_3 \neq 0$$

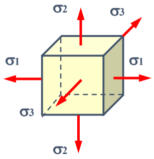
107

§7.5 三向应力状态

2、三向应力状态下的最大正应力与最大切应力

已知受力物体内某一点处三个主应力 σ_1、σ_2、σ_3

利用应力圆确定该点的最大正应力和最大切应力。



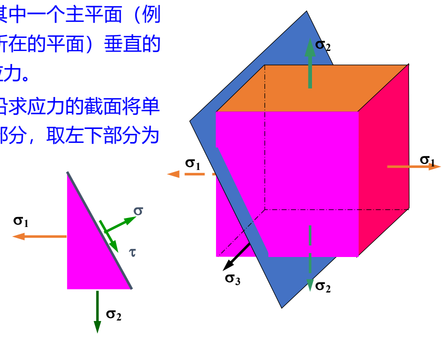
108

§7.5 三向应力状态

2、三向应力状态下的最大正应力与最大切应力

首先研究与其中一个主平面（例如主应力σ_3所在的平面）垂直的斜截面上的应力。

用截面法，沿求应力的截面将单元体截为两部分，取左下部分为研究对象。



109

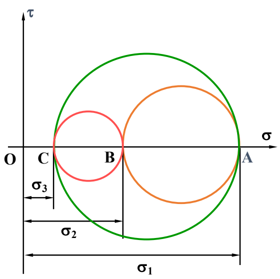
§7.5 三向应力状态

2、三向应力状态下的最大正应力与最大切应力

该应力圆上的点对应于与σ_3所在主平面垂直的所有斜截面上的应力（主应力σ_1、σ_2）。

与主应力σ_2所在主平面垂直的斜截面上的应力σ, τ可用由 σ_1、σ_3作出的应力圆上的点来表示。

与主应力σ_1所在主平面垂直的斜截面上的应力σ, τ可用由 σ_2、σ_3作出的应力圆上的点来表示。



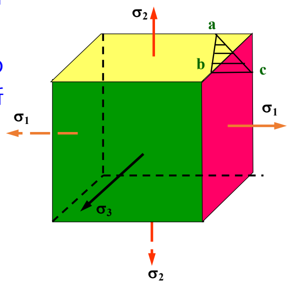
110

§7.5 三向应力状态

2、三向应力状态下的最大正应力与最大切应力

abc截面表示与三个主平面斜交的任意斜截面。

该截面上应力σ和τ对应的D点必位于上述三个应力圆所围成的阴影内。



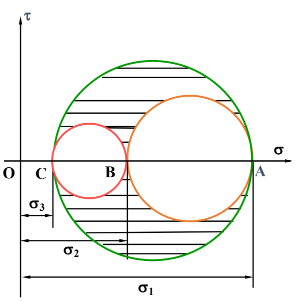
111

§7.5 三向应力状态

2、三向应力状态下的最大正应力与最大切应力

abc截面表示与三个主平面斜交的任意斜截面。

该截面上应力σ和τ对应的D点必位于上述三个应力圆所围成的阴影内。



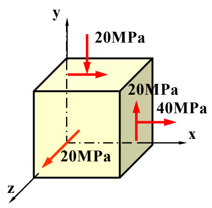
112

§7.5 三向应力状态

例题7.8

单元体的应力如图所示，作应力圆，并求出主应力和最大切应力值及其作用面方位。

解：(1) 该单元体有一个已知主应力：



$$\sigma_z = 20 \ \text{MPa}$$

因此与该主平面正交的各截面上的应力与主应力σ_z无关，依据x截面和y截面上的应力画出应力圆。

113

§7.5 三向应力状态

例题7.8

解：(2) 求另外两个主应力

$\sigma_x = 40\ \text{MPa}，\tau_{xy} = -20\ \text{MPa}，\sigma_y = -20\ \text{MPa}，\tau_{yx} = 20\ \text{MPa}$

由σ_x，τ_{xy}定出D点， 由σ_y，τ_{yx}定出D′点。

以 DD′为直径作应力圆

A_1，A_2两点的横坐标分别代表另外两个主应力σ_1和σ_3。

σ_1=46 MPa σ_3=−26 MPa

该单元体的三个主应力

σ_1=46 MPa σ_2=20 MPa σ_3= −26 MPa

114

§7.5 三向应力状态

例题7.8

解：(3) 应力圆

该单元体的三个主应力

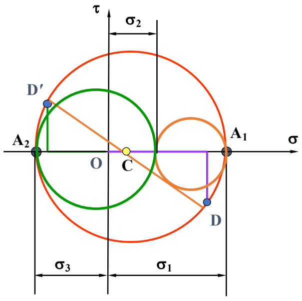
σ_1=46 MPa

σ_2=20 MPa

σ_3= −26 MPa

根据上述主应力，作出三个应力圆。

$\tau_{max} = 36\ \text{MPa}$



115

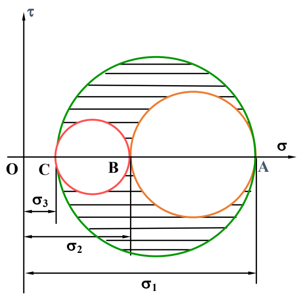
§7.5 三向应力状态

3、结论

三个应力圆圆周上的点及由它们围成的阴影部分上的点的坐标代表了空间应力状态下所有截面上的应力。

该点处的最大正应力（指代数值）应等于最大应力圆上A点的横坐标 σ_1。

$\sigma_{max} = \sigma_1$



116

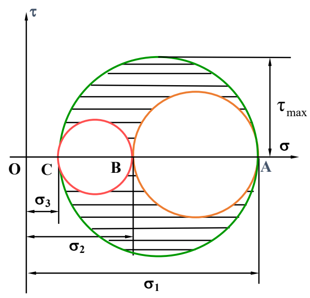
§7.5 三向应力状态

3、结论

最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

最大切应力所在的截面与 σ_2所在的主平面垂直，并与σ_1和σ_3所在的主平面成45°角。



117

作业

7.14, 7.17, 7.19

118