

第七章
应力和应变分析 强度理论
(4)

1

第七章 应力和应变分析 强度理论

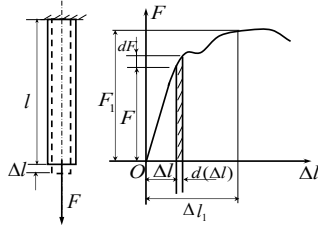
- §7.1 应力状态概述
- §7.2 二向和三向应力状态的实例
- §7.3 二向应力状态分析——解析法
- §7.4 二向应力状态分析——图解法
- §7.5 三向应力状态
- §7.8 广义胡克定律
- §7.9 复杂应力状态的应变能密度
- §7.10 强度理论概述
- §7.11 四种常用强度理论
- §7.12 莫尔强度理论

2

§7.9 复杂应力状态的应变能密度

应变能 (V_ϵ)：固体在外力作用下，因变形而储存的能量称应变能。

当外力逐渐减小时，弹性体变形逐渐恢复，所储存的应变能被释放而做功。



$dW = Fd(\Delta l)$
 $W = \int_0^{\Delta l_1} Fd(\Delta l)$
在 $\sigma \leq \sigma_p$ 范围内,有
 $W = \frac{1}{2} F \Delta l$
 $V_\epsilon = W = \frac{1}{2} F \Delta l$
 $= \frac{1}{2} F \frac{F l}{EA} = \frac{F^2 l}{2EA}$

3

§7.9 复杂应力状态的应变能密度

应变能密度：单位体积内储存的应变能

$$v = \frac{V_\epsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2} F \Delta l}{A l} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

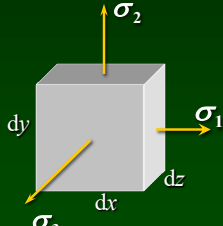
单向应力状态

$$v = \frac{1}{2E} \sigma^2 \longleftrightarrow v = \frac{1}{2} E \epsilon^2$$

4

□ 一般应力状态下的应变能密度

微元的弹性应变能



力的作用点所产生的位移

$$\sigma_1 dy dz \sim \epsilon_1 dx$$
$$\sigma_2 dx dz \sim \epsilon_2 dy$$
$$\sigma_3 dy dx \sim \epsilon_3 dz$$

5

□ 一般应力状态下的应变能密度

力在位移上所作的功转变为微元的应变能

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_1 dy dz) (\epsilon_1 dx) + \frac{1}{2} (\sigma_2 dx dz) (\epsilon_2 dy) + \frac{1}{2} (\sigma_3 dx dy) (\epsilon_3 dz)$$
$$= \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) (dx dy dz)$$
$$= dV_\epsilon$$

6

□ 一般应力状态下的应变能密度

应变能密度

$$v = \frac{dV_\epsilon}{dV} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)(dx dy dz)}{(dx dy dz)}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

7

□ 一般应力状态下的应变能密度

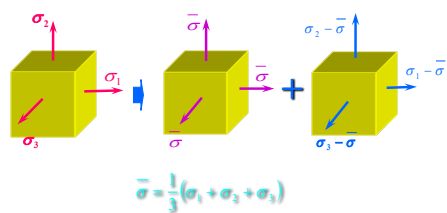
♣ 体积改变能密度与畸变能密度

8

□ 一般应力状态下的应变能密度

♣ 体积改变能密度与畸变能密度

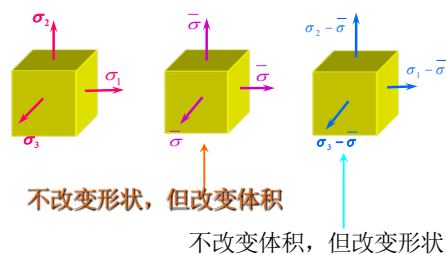
将一般应力状态分解为两种特殊情形



9

□ 一般应力状态下的应变能密度

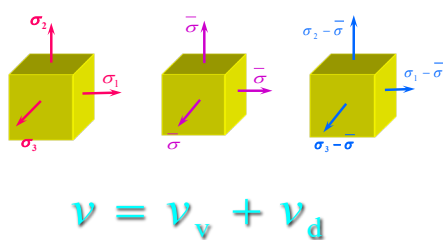
♣ 体积改变能密度与畸变能密度



10

□ 一般应力状态下的应变能密度

♣ 体积改变能密度与畸变能密度



11

□ 一般应力状态下的应变能密度

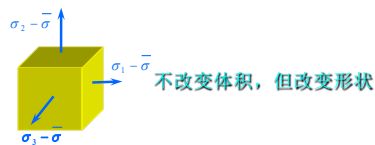
♣ 体积改变能密度与畸变能密度



12

□ 一般应力状态下的应变能密度

• 体积改变能密度与畸变能密度

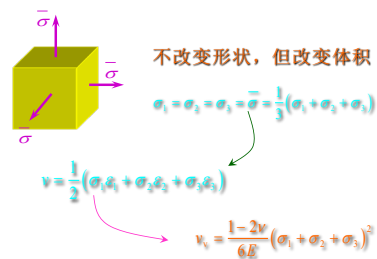


v_d : 畸变能密度

13

□ 一般应力状态下的应变能密度

• 体积改变能密度与畸变能密度



不改变形状，但改变体积

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

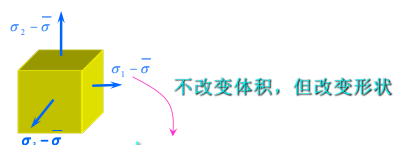
$$v = \frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

$$v_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

14

□ 一般应力状态下的应变能密度

• 体积改变能密度与畸变能密度



不改变体积，但改变形状

$$v = \frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

$$v_d = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

15

§7.9 复杂应力状态的应变能密度

1、计算公式

体积改变能密度

$$v_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

畸变能密度

$$v_d = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

16

第七章 应力和应变分析 强度理论

§7.1 应力状态概述

§7.2 二向和三向应力状态的实例

§7.3 二向应力状态分析——解析法

§7.4 二向应力状态分析——图解法

§7.5 三向应力状态

§7.8 广义胡克定律

§7.9 复杂应力状态的应变能密度

§7.10 强度理论概述

§7.11 四种常用强度理论

§7.12 莫尔强度理论

17

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

正应力强度条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{轴向拉压} \quad \sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma] \\ \text{弯曲} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \end{array} \right\} \sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

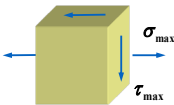
切应力强度条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{剪切} \quad \tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau] \\ \text{扭转} \quad \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau] \\ \text{弯曲} \quad \tau_{\max} = \frac{F_{S\max} \cdot S_z^*}{I_z b} \leq [\tau] \end{array} \right\} \tau_{\max} \leq [\tau]$$

18

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念



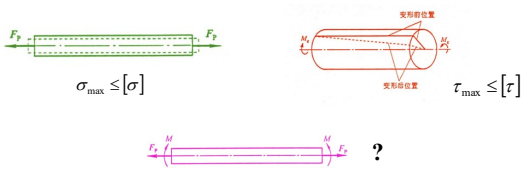
满足 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 且 $\tau_{\max} \leq [\tau]$

是否强度就没有问题了? (问题一)

19

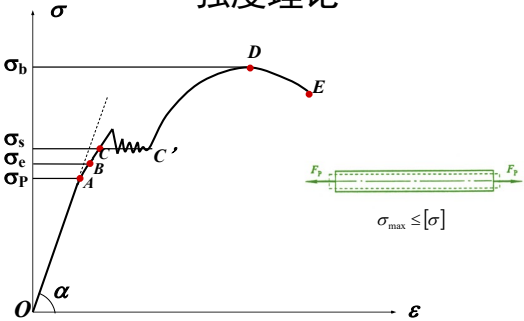
强度理论

背景：复杂应力状态使依靠实验测定各种应力状态下的实效力难以实现



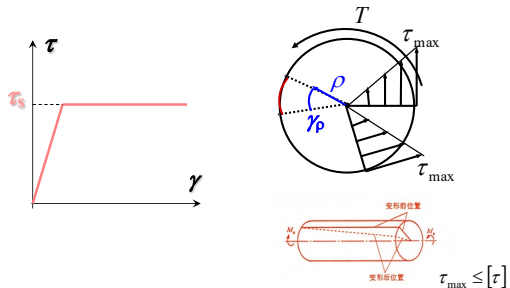
20

强度理论



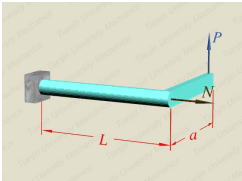
21

强度理论

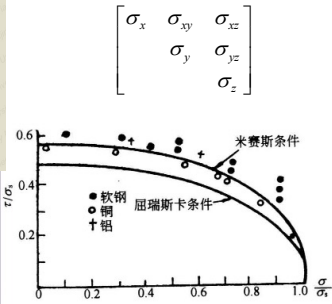


22

强度理论



三向应力状态?
要做多少实验? (问题二)



23

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

前述强度条件具有如下特点：

(1) 危险点处于单向应力状态或纯剪切应力状态；

(2) 材料的许用应力，是通过拉（压）试验或纯剪切试验测定试件在破坏时其横截面上的极限应力,以此极限应力作为强度指标，除以适当的安全系数而得，即根据相应的试验结果建立的强度条件。

24

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

强度理论是关于“构件发生强度失效的起因”的假说。

根据材料在复杂应力状态下破坏时的一些现象与形式,进行分析,提出破坏原因的假说。在这些假说的基础上,可利用材料在单向应力状态时的试验结果,来建立材料在复杂应力状态下的强度条件。

25

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

强度理论是关于“构件发生强度失效的起因”的假说。

根据材料在复杂应力状态下破坏时的一些现象与形式,进行分析,提出破坏原因的假说。在这些假说的基础上,可利用材料在单向应力状态时的试验结果,来建立材料在复杂应力状态下的强度条件。

强度理论是为了建立复杂应力状态下的强度条件,而提出的关于材料破坏原因的假设及计算方法。

26

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

强度理论的基本观点

构件受外力作用而发生破坏时,不论破坏的表面现象如何复杂,其破坏形式总不外乎几种类型,而同一类型的破坏则可能是某一个共同因素所引起的。

27

§7.10 强度理论概述

1、强度理论的概念

强度理论的基本观点

构件受外力作用而发生破坏时,不论破坏的表面现象如何复杂,其破坏形式总不外乎几种类型,而同一类型的破坏则可能是某一个共同因素所引起的。

28

§7.10 强度理论概述

2、材料破坏（失效）的两种类型：断裂与屈服

(1) 断裂失效

脆性断裂：无明显的变形下突然断裂。

(铸铁、石料、陶瓷等)

韧性断裂：产生大量塑性变形后断裂。

(钢、铜、铝、聚合材料等)

(2) 屈服破坏

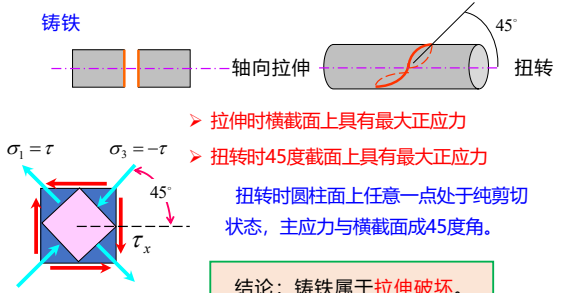
材料出现显著的塑性变形而丧失其正常的工作能力。

29

§7.10 强度理论概述

3、材料破坏的主要因素

铸铁



拉伸时横截面上具有最大正应力

扭转时45度截面上具有最大正应力

扭转时圆柱面上任意一点处于纯剪切状态,主应力与横截面成45度角。

结论：铸铁属于拉伸破坏。

30

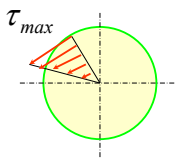
§7.10 强度理论概述

3、材料破坏的主要因素

低碳钢：拉伸和扭转时出现滑移线。



➤ 拉伸时45度截面上具有最大剪应力



$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \Big|_{\alpha=45^\circ}$$

➤ 扭转时横截面周线上具有最大剪应力

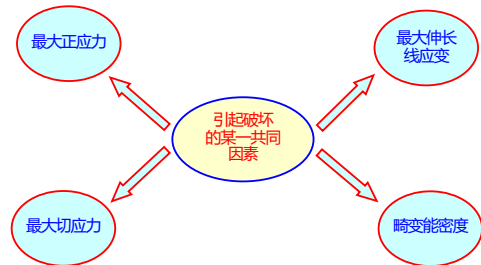
结论：低碳钢属于剪切破坏。

31

§7.10 强度理论概述

4、失效准则

材料发生脆断或塑性破坏的具体原因或共同因素。



32

§7.10 强度理论概述

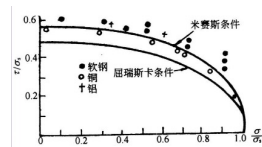
5、强度理论的必要性

为了解决组合变形问题 ➡ 应力状态理论

为什么要建立强度理论？

逐一由实验建立不同变形所需强度条件的不可能性。

(实验的工作量太大)



33

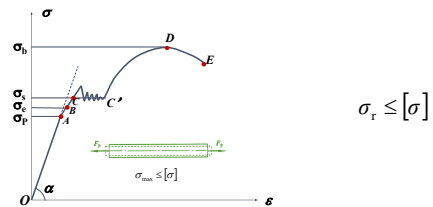
§7.10 强度理论概述

6、建立强度理论的思路

1) 简单实验定标准：拉伸实验得许用应力；

2) 从某个失效形态引出失效准则；

3) 从失效准则，推出计算公式。



34

§7.10 强度理论概述

7、四个强度理论

➤ 第一类强度理论：以脆断作为破坏的标志。

包括：最大拉应力理论和最大伸长线应变理论。

➤ 第二类强度理论：以出现屈服现象作为破坏的标志。

包括：最大切应力理论和畸变能密度理论。

35

§7.11 四种常用强度理论

1、最大拉应力理论（第一强度理论）

根据：当作用在构件上的外力过大时，其危险点处的材料就会沿最大拉应力所在截面发生脆断破坏。

基本假说：最大拉应力 σ_1 是引起材料脆断破坏的因素。

失效准则：最大拉应力 σ_1

脆断破坏的条件： $\sigma_1 = \sigma_b$

强度条件： $\sigma_1 \leq [\sigma]$

无论材料处于什么应力状态，只要微元内的最大拉应力 σ_1 达到了单向拉伸的强度极限 σ_b ，就会发生断裂破坏。

36

§7.11 四种常用强度理论

1、最大拉应力理论（第一强度理论）





铸铁拉伸

铸铁扭转

实验表明：此理论对于大部分脆性材料受拉应力作用，结果与实验相符合，如铸铁受拉、扭。

37

§7.11 四种常用强度理论

1、最大拉应力理论（第一强度理论）

局限性：

➢ 未考虑另外二个主应力影响

➢ 对没有拉应力的应力状态无法应用

➢ 对塑性材料的破坏无法解释

➢ 无法解释三向均匀受压时，既不屈服、也不破坏的现象

38

§7.11 四种常用强度理论

2、最大伸长线应变理论（第二强度理论）

根据：当作用在构件上的外力过大时，其危险点处的材料就会沿垂直于最大拉应变方向的平面发生破坏。

基本假说：最大拉应变 ϵ_1 是引起材料脆断破坏的因素。

失效准则：最大拉应变 ϵ_1

最大拉应变： $\epsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

强度条件： $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

无论材料处于什么应力状态，只要构件内有一点处的最大拉应变达到了单向拉伸的应变极限，就发生断裂破坏。

39

§7.11 四种常用强度理论

2、最大伸长线应变理论（第二强度理论）

实验表明：第二强度理论对于一拉一压的二向应力状态的脆性材料的断裂较符合，如铸铁受拉压比第一强度理论更接近实际情况。

局限性：

➢ 第一强度理论不能解决的问题，同样未能解决。

40

§7.11 四种常用强度理论

3、最大切应力理论（第三强度理论）

根据：当作用在构件上的外力过大时，其危险点处的材料就会沿最大切应力所在截面滑移而发生屈服失效。

基本假说：最大切应力 τ_{\max} 是引起材料屈服的因素。

失效准则：最大切应力 $\tau_{\max} = \tau_s$

在复杂应力状态下一点处的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

屈服的条件： $\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

41

§7.11 四种常用强度理论

3、最大切应力理论（第三强度理论）

根据：当作用在构件上的外力过大时，其危险点处的材料就会沿最大切应力所在截面滑移而发生屈服失效。

基本假说：最大切应力 τ_{\max} 是引起材料屈服的因素。

失效准则：最大切应力 $\tau_{\max} = \tau_s$

强度条件： $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

不管在什么应力状态下，只要构件内有一点处的最大切应力达到单向拉伸的塑性屈服时的剪应力，就发生塑性屈服破坏。

42

§7.11 四种常用强度理论

3、最大切应力理论（第三强度理论）



低碳钢拉伸 低碳钢扭转

实验表明：此理论对于塑性材料的屈服破坏能够得到较为满意的解释。此外，该理论还能解释材料在三向均压下不发生塑性变形或断裂的事实。（ $\tau_{\max} = 0$ ）

43

§7.11 四种常用强度理论

3、最大切应力理论（第三强度理论）

局限性：

- 未考虑 σ_2 的影响，试验证实最大影响达15%。
- 不能解释三向均拉下可能发生断裂的现象。

44

§7.11 四种常用强度理论

4、畸变能密度理论（第四强度理论）

根据：无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服，都是由微元的最大畸变能密度达到一个极限值。

基本假说：畸变能密度 v_d 是引起材料屈服的因素。

v_d ：构件危险点的畸变能密度

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

失效准则：最大畸变能密度 v_{ds}

单向拉伸下， $\sigma_1 = \sigma_s$ ， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ，材料畸变能密度的极限值

$$v_{ds} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_s^2$$

46

§7.11 四种常用强度理论

4、畸变能密度理论（第四强度理论）

屈服条件：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

强度条件：

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_s}{n_s} = [\sigma]$$

不管在什么应力状态下，只要构件内有一点处的畸变能密度达到单向拉伸的塑性屈服时的畸变能密度，就发生塑性屈服破坏。

实验表明：对塑性材料，此理论比第三强度理论更符合试验结果，在工程中得到了广泛应用。

47

§7.11 四种常用强度理论

5、相当应力

把各种强度理论的强度条件写成统一形式

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

σ_r 称为复杂应力状态的相当应力。

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

48

§7.11 四种常用强度理论

6、各种强度理论的适用范围

(1) 脆性材料选用第一或第二强度理论；
(2) 塑性材料选用第三或第四强度理论；
(3) 在二向和三向等拉应力时，无论是塑性还是脆性都发生脆性破坏，故选用第一或第二强度理论；
(4) 在二向和三向等压应力时，无论是塑性还是脆性材料都发生塑性破坏，故选用第三或第四强度理论。

49

§7.11 四种常用强度理论

7、强度计算的步骤

- (1) 外力分析：确定所需的外力值；
- (2) 内力分析：画内力图，确定可能的危险面；
- (3) 应力分析：画危险面应力分布图，确定危险点并画出单元体，求主应力；
- (4) 强度分析：选择适当的强度理论，计算相当应力，然后进行强度计算。

50

§7.11 四种常用强度理论

例题7.11

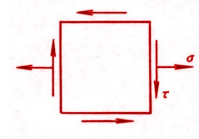
已知： σ 和 τ 。试写出最大切应力理论和畸变能理论的表达式。

解：主应力为

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



56

§7.11 四种常用强度理论

例题7.12

根据强度理论，从材料在单轴拉伸时的 $[\sigma]$ 推导出低碳钢类塑性材料在纯剪切应力状态下的 $[\tau]$ 。

解：纯剪切应力状态下：

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

按第三强度理论得强度条件为：

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma] \Rightarrow \tau \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

另一方面，剪切的强度条件是：

$$\tau \leq [\tau]$$

$$\text{所以 } [\tau] = 0.5 [\sigma]$$

57

§7.11 四种常用强度理论

例题7.12

根据强度理论，从材料在单轴拉伸时的 $[\sigma]$ 推导出低碳钢类塑性材料在纯剪切应力状态下的 $[\tau]$ 。

解：纯剪切应力状态下：

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

按第四强度理论得强度条件为：

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\tau - 0)^2 + (0 - (-\tau))^2 + (-\tau - \tau)^2]} = \sqrt{3}\tau \leq [\sigma] \Rightarrow \tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

$$\text{所以 } [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.577[\sigma] \approx 0.6[\sigma]$$

58

§7.11 四种常用强度理论

例题7.13

直径为 $d=0.1$ m的铸铁圆杆受力 $T=7$ kN·m， $P=50$ kN， $[\sigma]=40$ MPa，用第一强度理论校核强度。

解：危险点A的应力状态如图

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4 \times 50}{\pi \times 0.1^2} \times 10^3 = 6.37 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{16 \times 7000}{\pi \times 0.1^3} = 35.7 \text{ MPa}$$

安全

$$\sigma'_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{6.37}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6.37}{2}\right)^2 + 35.7^2} = \frac{39}{-32} \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 39 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -32 \text{ MPa} \quad \sigma_1 < [\sigma]$$



59

小结

- 1、二向应力状态的解析法和图解法
- 2、三向应力状态的图解法
- 3、广义胡克定律
- 4、四种常用强度理论及其适用范围

68

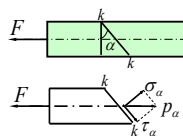
本章复习

1、应力的点和面。

➢ 同一面上不同点的应力各不相同；

➢ 同一点不同方向面上的应力也是各不相同。

2、过一点不同方向面上应力的情况，称之为这一点的应力状态，亦指该点的应力全貌。



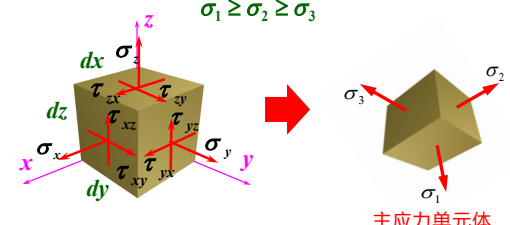
$$\begin{cases} \sigma_a = p_a \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_a = p_a \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

69

本章复习

3、单元体、主单元体、主平面、主应力。

一点处必定存在这样的一个主应力单元体，其中三个相互垂直的面均为主平面，三个互相垂直的主应力分别记为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 且规定按代数值大小的顺序来排列，即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



主应力单元体

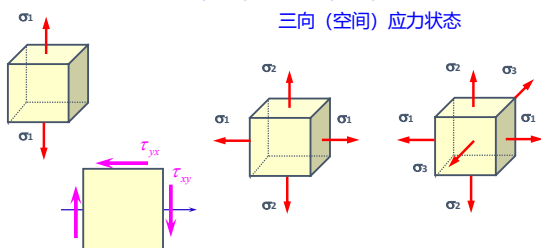
70

本章复习

4、应力状态的分类

➢ 简单应力状态（两种）：单向应力状态、纯剪应力状态

➢ 复杂应力状态（两种）：双向（平面）应力状态、三向（空间）应力状态



71

本章复习

5、任意斜截面的应力

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad \tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

6、最大正应力的方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$$

7、最大正应力

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

8、最大切应力的方位

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ \end{cases}$$

72

本章复习

9、最大切应力

$$\begin{cases} \tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

10、应力圆（莫尔圆）

$$\left(\sigma_a - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_a^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

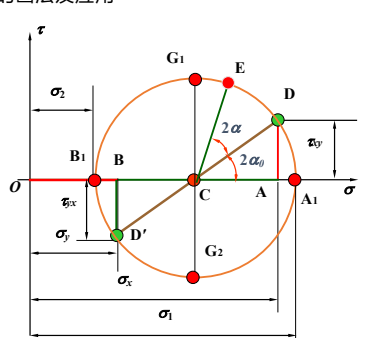
圆心的坐标 $C(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$

圆的半径 $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

73

本章复习

11、应力圆的画法及应用



74

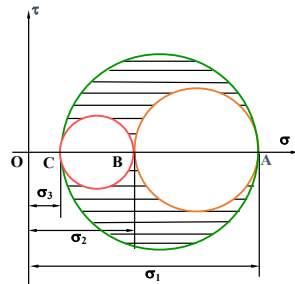
本章复习

12、三向应力状态

三个应力圆圆周上的点及由它们围成的阴影部分上的点的坐标代表了空间应力状态下所有截面上的应力。

该点处的最大正应力（指代数值）应等于最大应力圆上A点的横坐标 σ_1 。

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$



75

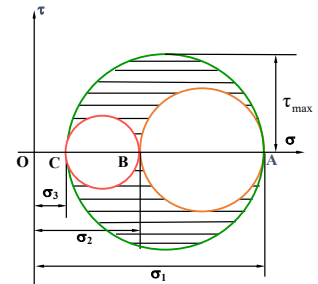
本章复习

12、三向应力状态

最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

最大切应力所在的截面与 σ_2 所在的主平面垂直，并与 σ_1 和 σ_3 所在的主平面成 45° 角。



76

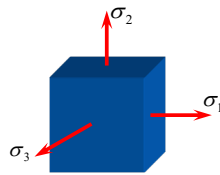
本章复习

13、广义胡克定律（主应力）

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$



材料为各向同性，且变形处于线弹性范围。

77

本章复习

14、构件每单位体积的体积变化，称为**体积应变**，用 θ 表示。

15、各向同性材料在三向应力状态下的体积应变

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

16、纯剪切应力状态, $\theta = 0$

即在小变形下，切应力不引起各向同性材料的体积改变。

17、**等值应力**：三个主应力的平均值

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

78

本章复习

18、三向等值应力单元体的主应变为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu(\sigma_m + \sigma_m)] = \frac{(1-2\mu)}{E} \cdot \sigma_m$$

19、在任意形式的应力状态下，各向同性材料内一点处的**体积应变**与通过该点的任意三个相互垂直的平面上的正应力之和成正比，而与切应力无关。

20、畸变能密度

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

79

本章复习

21、材料破坏（失效）的两种类型：**断裂与屈服**

脆性材料：断裂，破坏极限 σ_b

塑性材料：屈服，破坏极限 σ_s

22、四个强度理论

➤ 第一类强度理论：以脆断作为破坏的标志。

包括：**最大拉应力理论**和**最大伸长线应变理论**。

➤ 第二类强度理论：以出现屈服现象作为破坏的标志。

包括：**最大切应力理论**和**畸变能密度理论**。

80

本章复习

23、最大拉应力理论（第一强度理论）

$\sigma_1 \leq [\sigma]$ （脆性材料）

24、最大伸长线应变理论（第二强度理论）

$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$ （脆性材料）

25、最大切应力理论（第三强度理论）

$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ （塑性材料）

26、畸变能密度理论（第四强度理论）

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_s}{n_s} = [\sigma]$$

（塑性材料）

81

本章复习

27、相当应力

把各种强度理论的强度条件写成统一形式

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

σ_r 称为复杂应力状态的相当应力.

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

82

作业

7.31, 7.32, 7.35, 7.36

84