【**振动**】表征一种运动的物理量作时而增大时而减小的反复变化，就可以称这种运动为振动。如果变化的物理量是一些机械量或力学量，例如物体的位移、速度、加速度、应力及应变等等，这种振动便称为机械振动。【**机械振动类型**】**确定性振动**（振动是时间的确定性函数）：周期振动、非周期振动；**非确定性振动**（振动是时间的随机函数）：随机振动。【**机械振动系统的基本要素**】惯性元件（惯性特征）；弹性元件（弹性特征）；阻尼元件（耗能特征）。机械振动的基本问题：第一类问题：振动分析（正问题）已知激励和系统特性，求系统响应；第二类问题：系统识别，已知激励和响应，求系统特性；第三类问题：环境预测，已知激励和系统特性，求激励。**【傅里叶级数】**$x(t)=\frac{a\_0}{2}+\sum(a\_ncosn\omega\_1t+b\_nsinn\omega\_1t)$$a\_0=\frac{2}{T}\int\_{0}^{T}x(t)dt$$a\_n=\frac{2}{T}\int\_{0}^{T}x(t)cos{n\omega\_1t}dt$$b\_n=\frac{2}{T}\int\_{0}^{T}x(t)sin{n\omega\_1t}dt$或者$x(t)=\frac{a\_0}{2}+\sum(A\_nsin(n\omega\_1t+\phi\_n)$,其中$A\_n=\sqrt{a\_n^2+b\_n^2},tan{\phi\_n}=\frac{a\_n}{b\_n}$**【两个同方向不同频率简谐运动的合成】**$x=2Acos(\frac{\delta\omega}{2}t)sin(\omega t)$其中$\omega=\frac{1}{2}(\omege\_1+\omega\_2),\delta\omega=\omega\_2-\omega\_1$。**拍**：合振动忽强忽弱的现象；**拍频：**单位时间内强弱变化的次数$\omega\_2-\omega\_1$【**振动问题的分类**】**激励特性**：自由，受迫，自激，参激；**自由度**：单自由度，多自由度，连续系统振动。【**固有频率公式**】$\omega\_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}$其中$\lambda$为**静变形**。【**扭振系统**】固有圆频率$\dot{p\_n}=\frac{k\_n}{I\_O}$【**等效质量和等效刚度**】能量法（最大动能等于最大势能）；定义法（单位位移所需力；单位加速度所需力）。【**有阻尼系统衰减振动**】**动力学方程**$\ddot{x}+2\zeta\omega\_0\dot{x}+\omega\_0^2x=0$，其中$2\zeta\omega\_0=\frac{c}{m}$**固有频率**$\omega\_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$**相对阻尼系数**$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}$**特征根**$\lambda=-\zeta\omega\_0\pm \omega\_o\sqrt{\zeta^2-1}$【**欠阻尼**】**特征根**$\labmda=-\zeta\omega\_0\pm i\omega\_d$**振动解**$x(t)=e^{-\zeta\omega\_0t}(c\_1cos(\omega\_d t)+c\_2sin(\omega\_d t))$其中$c\_1,c\_2$由初始条件决定，**阻尼固有频率**（有阻尼的自由振动频率）$\omega\_d=\omega\_0\sqrt{1-\zeta^2}$阻尼自由振动的周期大于无阻尼自由振动的周期。**当初始条件为**$x\_0,\dot{x}\_0$**时**，$x(t)=e^{-\zeta\omega\_0t}(x\_0cos(\omega\_d t)+\frac{\dot{x}\_0+\zeta\omega\_0x\_0}{\omega\_d}sin(\omega\_d t))= e^{-\zeta\omega\_0t}Asin(\omega\_d t+\theta)$,其中$A=\sqrt{x\_0^2+(\frac{\dot{x}\_0+\zeta\omega\_0x\_0}{\omega\_d})^2},\theta=tg^{-1}\frac{x\_0\omega\_d}{\dot{x}\_0+\zeta\omega\_0x\_0}$。**减幅系数**$\eta=e^{\zeta\omega\_0T\_d}$，说明$\zeta\omega\_0$决定振幅衰减的快慢；对数衰减率$\Lambda=\zeta\omega\_0T\_d$。【**过阻尼**】**特征根**$\labmda=-\zeta\omega\_0\pm\omega^\*$**振动解**$x(t)=e^{-\zeta\omega\_0t}(c\_1ch(\omega^\*t)+c\_2sh(\omega^\*t))$，其中$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, sh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,$\omega^\*=\omega\_0\sqrt{\zeta^2-1}$**当初始条件为**$x\_0,\dot{x}\_0$**时**，$x(t)=e^{-\zeta\omega\_0t}(x\_0ch(\omega^\*t)+\frac{\dot{x}\_0+\zeta\omega\_0x\_0}{\omega^\*}sh(\omega^\*t))$是一种按指数规律衰减的非周期蠕动，没有振动发生【**临界阻尼**】**振动解**$x(t)=e^{-\omega\_0t}(x\_0+(\dot{x}\_0+\omega\_0x\_0)t)$**临界阻尼系数**$c\_{cr}=2\sqrt{km}$具有临界阻尼的系统与过阻尼系统比较它为最小阻尼系统【**简谐外力激励受迫振动**】**振动微分方程**$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\_0e^{i\omega t}$**振动微分方程（标准）**$\ddot{x}+2\zeta\omega\_0\dot{x}+\omega\_0^2x=B\omega\_0^2e^{i\omega t}$其中**静变形**$B=\frac{F\_0}{k}$**振动解**$x=\overline{x}e^{i\omega t}$其中**稳态响应复振幅**$\overline{x}=H(\omega)F\_0$**复频响应函数**$H(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omgega}$.引入**S**$s=\frac{\omega}{\omega\_0}$,得**复频响应函数**$H(\omega)=\frac{1}{k}\frac{1}{1-s^2+2\zeta si}=\frac{1}{k}\betae^{i\theta}$其中**振幅放大因子(无量纲，只和系统本身特性有关)**$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}}$**相位差**$\theta(s)=tg^{-1}\frac{2\zeta s}{1-s^2}$，进而可以化简**振动解**$x=\frac{F\_0}{k}\beta e^{i(\omega t-\theta)}=Ae^{i(\omega t-\theta)}$, 其中**稳态响应的实振幅**$A=\beta B$。*线性系统对简谐激励的稳态响应是频率等同于激振频率、而相位滞后激振力的简谐振动。*【**稳态幅频特性**】当s<<1，响应的振幅A与静位移B 相当；可视为无阻尼。当s>>1，响应的振幅很小0 ；可视为无阻尼。s≈1，共振；对阻尼敏感；对有阻尼系统，βmax出现在s略小于1；当ζ>1/√2，β<1，振幅无极值。**品质因子**：$Q={{\beta}\_{s=1}}=\frac{1}{2\zeta}$；在共振峰的两侧取与$\beta =\frac{Q}{\sqrt{2}}$对应的两点$\omega\_1,\omega\_2$，**带宽**$\Delta = \omega\_2-\omega\_1$。$Q=\frac{\omega\_0}{\Delta\omega}$。阻尼越弱，Q越大，带宽越窄，共振峰越陡峭。【**稳态相频特性**】当s<<1，相位差基本为0；当s>>1，位移与激振力反相；当s≈1,共振时相位差为pi/2，与阻尼无关。【**无阻尼正弦激励受迫振动过渡阶段**】**振动微分方程**$m\ddot{x}+kx=F\_0sin(\omega t)$**通解**$x=c\_1cos(\omega\_0t)+c\_2sin(\omega\_0t)+\frac{B}{1-s^2}$。代入初始条件,有通解$x=x\_1+x\_2+x\_3$其中**初始条件响应**$x\_1=x\_0cos(\omega\_0t)+\frac{\dot{x}\_0}{\omega+0}sin(\omega\_0 t)$**自由伴随振动（以系统固有频率为振动频率）**$x\_2=-\frac{Bs}{1-s^2}sin(\omega\_0 t)$**强迫响应**$\frac{B}{1-s^2}sin(\omega t)$**零初始条件**$x=x\_2+x\_3$【**有阻尼正弦激励受迫振动过渡阶段**】**通解**$x(t)=x\_1+x\_2+x\_3$，**初始条件响应x1**$e^{-\zeta\omega\_0t}(x\_0cos(\omega\_d t)+\frac{\dot{x}\_0+\zeta\omega\_0x\_0}{\omega\_d}sin(\omega\_d t))$**自由伴随振动x2**$B\beta e^{-\zeta\omega\_0t}[sin(\theta)cos(\theta\_d t)+\frac{\omega\_0}{\omega\_d}(\zeta\sin{\theta}-s\cos{\theta})\sin{\omega\_d t}]$**强迫响应**$B\beta\sin{\omega t-\theta}$经过充分长时间后，作为瞬态响应的前两种振动都将消失，只剩稳态强迫振动。【**简谐惯性力激励的受迫振动**】**基座位移规律**$x\_f(t)=De^{i\omega t}$设相对基座位移x1，有**振动微分方程**$m\ddot{x}\_1+c\dot{x}\_1+kx\_1=mD\omega^2e^{i\omega t}$**相对位移振动解**$x\_1=\beta\_1 De^{i(\omega t-\theta\_1)}$其中$\beta\_1=\frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}},\theta\_1=tg^{-1}\frac{2\zeta s}{1-s^2}$**绝对位移**$x=x\_1+f\_f=\beta\_2 De^{i(\omega t-(\theta\_1-theta\_2))}$其中$\beta\_2=\sqrt{\frac{1+(2\zeta s)^2}{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}}, \theta\_2=tg^{-1}(2\zeta s)$**无阻尼情况**$x=D\frac{1}{1-s^2}e^{i\omega t}$【**偏心轮离心惯性力激励的受迫振动**】**振动微分方程**$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin{\omega t}$其中M为机械总质量，m为转子偏心质量，偏心距为e，转动角速度为w。**振动解**$x=\beta\_1B\_1\sin{\omega t-\theta}$其中$\beta\_1=\frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2+(2\zeta s)^2}},B\_1=\frac{me}{M}$。【**任意周期激励的响应**】**振动微分方程**$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a\_0}{2}+\sum\_n{a\_n\cos{n\omega\_1t}+b\_n\sin{n\omega\_1t}}$**系统稳态响应**$x(t)=\frac{a\_0}{2k}+\sum{\frac{a\_n\cos{n\omega\_1t-\theta\_n}+b\_n\sin{n\_\omega\_1t-\theta\_n}}{k\sqrt{(1-n^2s^2)^2+(2\zeta ns)^2}}}$【**多自由度系统振动**】**作用力方程**$M\ddot{X}+KX=P(t)$质量矩阵M，加速度向量，刚度矩阵，位移向量，激励力向量【**刚度矩阵/质量矩阵**】**刚度矩阵**K 中的元素k\_{ij} 是使系统仅在第j 个坐标上产生单位位移而相应于第i 个坐标上所需施加的力；**质量矩阵**M 中的元素m\_{ij}是使系统仅在第j 个坐标上产生单位加速度而相应于第i 个坐标上所需施加的力；**影响系数法**mij kij又分别称为质量影响系数和刚度影响系数，根据它们的物理意义可以直接写出系统质量矩阵 M 和刚度矩阵 K从而建立作用力方程。【**耦合**】矩阵中非零的非对角元元素称为耦合项；质量矩阵中出现耦合项称为惯性耦合；刚度矩阵或柔度矩阵中出现耦合项称为弹性耦合。*耦合的表现形式取决于坐标的选择：不出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度只在该坐标上引起惯性力，出现惯性耦合时，一个坐标上产生的加速度还会在别的坐标上引起惯性力*。【**坐标变换**】使系统运动微分方程的全部耦合项全部解耦的坐标称为**主坐标。运动微分方程的变换：**$M\ddot{X}+KX=P$对应$T’MT\ddot{Y}+T’KTY=T’P$，其中$X=TY$【**多自由度系统的自由振动**】**固有振动方程（自由振动方程）**$M\ddot{X}+KX=0$。**同步振动**：系统在各个坐标上除了运动幅值不相同外，随时间变化的规律都相同的运动。$X=\Phi f(t)$,其中$\Phi$为常数列向量。代入**固有振动方程**，有$\ddot{f}+\omega^2f=0$。当w=0,有$f=at+b$,当w>0,有$f=a\sin{\omega t+\phi}$。对于正定系统，即w>0，只可能出现系统在各个坐标上都是按相同频率及初相位作简谐振动的。对于半正定系统，即w>=0,可能出现$f=at+b$。**固有频率：**求解$|K-\omega^2M|=0$，得到n个值，按升序排列，即为第i阶固有频率。其中w\_1为基频。*固有频率仅取决于系统本身的刚度、质量等物理参数。*【**模态】**$(K-\omega^2M)\Phi=0$,\omega特征值（固有频率）对应的\Phi就是**特征向量（模态）。归一化：**在特征向量中规定某个元素的值以确定其他各元素的值的过程。**系统的固有振动：**$X(t)=\sum\Phi^{(i)}a\_i\sin{\omega\_i t+\phi\_i}$。**求主振型（特征值w为单根可用）：**伴随矩阵的每一列就是主振型矢量或者差一常数因子，adjB（\omega），其中$B(\omega)=K-\omega^2M$。**画图**：横坐标表示静平衡位置，纵坐标表示主振型中各元素的值（如果传感器放在第i阶节点位置，则测量的信号中将不包含有第i阶模态的信息）【**模态的正交性**】关于质量正交：$\Phi^{(i)}’M\Phi^{(j)}=0$；关于刚度正交$\Phi^{(i)}’K\Phi^{(j)}=0$。意义：从能量的观点看，各阶主振动是互相独立的。**主质量**：$\Phi^{(i)}’M\Phi^{(i)}=m\_{pi}$。**主刚度**：$\Phi^{(i)}’K\Phi^{(i)}=k\_{pi}$.第i阶固有频率$\omega\_i=\sqrt{\frac{k\_{pi}}{m\_{pi}}}$。**正则模态**：全部主质量皆为1的主模态，$\Phi\_N^{i}=\frac{1}{\sqrt{m\_{pi}}}\Phi^{(i)}$，此时的主刚度$\Phi\_N^{(i)}’K\Phi\_N^{(i)}=\omega\_i^2$。**模态矩阵**：$\Phi=[\Phi^{(1)}…\Phi{(n)} ]$，对应的主质量矩阵、主刚度矩阵是对角阵。**正则模态矩阵：**对应的主质量矩阵是单位阵、主刚度矩阵是谱矩阵$\Lambda$（对角阵，对角元素为$\omega\_i^2$）。【**无阻尼系统对初始条件响应**】使用主模态坐标：先列出动力学方程；求出固有频率与模态矩阵（特征值与特征向量）；求主质量矩阵和主刚度矩阵；把初始条件转变为主坐标；根据变换后的动力学方程，$m\_{pi}\ddot{x}\_{pi}+k\_{pi}x\_{pi}=0$，有：$x\_{pi}=x\_{pi}(0)\cos{\omega\_i t}+\frac{\dot{x}\_{pi}(0)}{\omega\_i}\sin{\omega\_i t}$。求得X\_p后，根据$X=\Phi X\_p$求得原系统的解。使用正则模态坐标，同上，变换后的动力学方程为$ \ddot{x}\_{Ni}+\omega\_i^2 x\_{Ni}=0$，有：$x\_{Ni}=x\_{Ni}(0)\cos{\omega\_i t}+\frac{\dot{x}\_{Ni}(0)}{\omega\_i}\sin{\omega\_i t}$【**多自由度系统振动零根**】K 为奇异矩阵是零固有频率存在的充要条件，满足此条件时系统的刚度矩阵 K 是半正定的。消除刚体自由度：代入约束条件$\sum{x\_i}=0$，减少一个自由度。**系统存在刚体模态的条件（各个广义坐标上不产生弹性变形，刚度阵奇异）**：（1）对应频率为零（2）对应振型元素全相等。【**多自由度系统振动重根**】若$\Phi^{(3)}$和$\Phi^{(4)}$不正交，就令$\overline{\Phi^{(4)}}=c\Phi^{(3)}+ \Phi^{(4)}$，其中$c=-\frac{\Phi^{(3)}’M\Phi^{(4)}}{ Phi^{(3)}’M\Phi^{(3)}$.【**多自由度系统的受迫振动**】**受迫振动方程**$M\ddot{X}+KX=F\_0e^{i\omega t}$。**幅频响应矩阵**$H(\omega)=[K-\omega^2M]^{-1}$.**振动解**$X=HFe^{i\omega t}$.**阻抗矩阵**$K-\omega^2M$,导纳矩阵H(\omega)。**共振**当外部激励频率接近系统的任意一个固有频率时，都会使受迫振动的振幅无限增大，引起共振。【**无阻尼吸振器**】连一个km系统。此时x1的振幅为$\frac{F\_0}{\Delta(\omega)}(k\_2-m\_2\omega^2)$。当输入激励为$\sqrt{\frac{k\_2}{m\_2}}$时，主系统上受到的激振力恰好被来自吸振器的弹性恢复力平衡。一般选k2/k1=m2/m1。

[2019-2020 夏 现代机械系统动力学 - CC98论坛](https://www.cc98.org/topic/4958778)