hiho 挑战赛 Solution

金策

September 10, 2015

1 MX Loves Game

行变换和列变换之间是互不干扰的。设 A 的第 1 行对应 B 的第 i 行，A 的第 1 列对应 B 的第 j 列，那么有 $A_{11} = B_{ij}$。

枚举这 n 对符合条件的 (i, j)，然后根据 B 的第 i 行与 A 的第 1 行之间的对应关系可以求出列变换所需的操作。同理也可以求出行变换所需的操作。接着检查一下余下的 $(n-1)^2$ 个位置是否也对应相等，如果相等就可以更新答案。

现在问题变为最少用几次交换操作才能将一个排列还原为 $1, 2, \cdots, n$ 的形状。只需要用 DFS 将它分解成若干个轮换，最少次数即为 n 减去轮换数目。

总的复杂度是 $O(n^3)$。

2 MX Loves Bomb

这是一道简单的树 dp 题。

注意到，如果仅允许使用链操作，那么所需要的操作次数即为奇度数点的数目除以 2（一笔画定理）。

如果我们确定了哪些点执行点操作，那么剩下所需的链操作次数也可以按上述办法求得。

因此我们只要 dp 对哪些点执行点操作就好了，同时需要记录度数奇偶信息以统计奇度数点对答案的贡献。

dp 的状态为 $f[u]$ 表示 u 进行点操作时，u 子树的答案；$g[u][0]$ 表示 u 不做点操作，且 u 剩余度数为偶数时的答案；$g[u][1]$ 表示 u 不做点操作，且 u 剩余度数为奇数时的答案。这样就可以转移了。

转移的时候需要对子树 dp 值排序，因此总复杂度是 $O(n \log n)$。

3 MX Loves Hash

根据

$$x^2 \equiv y^2 (\bmod m) \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \equiv 0 (\bmod m),$$

可以考虑枚举 $x+y, x-y$ 与 m 的公约数以求得答案。

记 $f(a, b)$ 为满足 $a | x+y, b | x-y, 0 \le x, y \le n-1$ 的二元组 (x, y) 的数量。

先来考虑简单的情况：$m = p^k$，p 是质数。这时枚举一下 $\gcd(m, x+y)$ 是 p 的几次幂，容易得到答案为 $\sum_{0 \le i \le k} f(p^i, p^{k-i}) - \sum_{1 \le i \le k} f(p^i, p^{k+1-i})$。

如果 m 包含多种质因子，也是一样的道理。按照上面的式子，DFS 每一个质因子 p_i 在 $f()$ 的两个参数中分别出现了几次幂，同时记录一下这一项的符号正负。这样总的枚举量是 $\prod_i(2k_i+1) < d(m^2)$，可以接受。

现在剩下的问题就是如何计算 $f(a,b)$。令

$$x+y=pa, x-y=qb,$$

那么

$$x=\frac{pa+qb}{2}, y=\frac{pa-qb}{2}$$

结合约束 $0 \le x, y \le n-1$，我们就得到了关于 p, q 的两个线性不等式，它在平面上围成一个区域，我们需要求出这个区域内整点 (p,q) 的数量。这个问题可以用经典的辗转相除算法解决。

需要注意的是这个式子不能直接用，因为我们还需要保证 $pa+qb, pa-qb$ 是偶数。解决方法也很简单，枚举 p, q 的奇偶性，并设成 $p=2p'$ 或 $p=2p'+1$ 即可。

所以这个题的总复杂度是 $O(d(m^2)\log m)$。