

Prim 算法正确性的形式化验证

刘衍

2025 年 12 月 6 日

1 算法介绍

Prim 算法是一个寻找最小生成树的边贪心算法。它从任意起始顶点出发，每次添加从树中指出的权重最小的边来构建这棵树。

在这里。我们主要证明对一个简单无向的非负权图和任意给定的点 S，对它进行 Prim 算法得到的边集和点集能够构成一个原图的最小生成树。

2 算法描述

Algorithm 1 Prim Algorithm

Require: Undirected, Simple, Connected, Positive-Weighted Graph $G(V, E)$, an arbitrary vertex S in G and singleton vertex set $vSet := [S]$, an empty edge set $eSet$.
Ensure: $vSet$ and $eSet$ constructs a MST of G

```
1: while !(vSet = V) do
2:   e = (u, v) is the cut edge with minimum weight
3:   vSet += [v]
4:   eSet += [e]
5: end while
```

我们证明每次循环增加一个点到 $vSet$ 中和一条边到 $eSet$ 中都不会改变它们构成的图是原图的某个最小生成树的子图。换句话说，我们来证明这是一个循环不变量。

首先将一颗树外的一个点连到树上总还是保持一颗树，所以可以说构成树是一个不变量。

假设循环开始时的树 T_1 是原图的某个最小生成树 T_1 的子图，并且选中 $e = (x, y)$ 是权重最小的跨边，来证明把 e 连到树中得到的 T_2 也包含于某个最小生成树 T_2 中。

(1) $e \in T_1$ ，则取 $T_2 = T_1$ 即可。

(2) $e \notin T_1$ ，则由于树的简单性质， $T + e$ 上存在环 c 。环 c 上有跨边 e ，由于二分图的简单性质，环 c 上会有另一条跨边 $f \neq e$ 。

① 权重 $f.weight < e.weight$ ，与 e 是权重最小的跨边矛盾。

② 权重 $f.weight \geq e.weight$ ，则 $T_1 + e - f$ 的权值不大于 T_1 ，并且由于从环上删去条边不改变图的连通性，所以 $T_1 + e - f$ 是一颗树。于是我们找到了权值不大于 T_1 的包含 T_2 的最小生成树 $T_2 = T_1 + e - f$ 。

3 任务指导

你已经被给出了 Monad 算子定义的 Prim 算法程序，见 Prim.v，并且我们给出了关于（最小）生成树的性质列表。

- (A) 证明性质列表中所有关于（最小）生成树的性质。
- (B) 证明 Prim.v 中关于 Prim 算法的正确性 (Theorem Prim_correct) 的描述。在合适的位置写出需要证明的循环不变量，并使用性质列表中的性质完成不变量的证明。

例如提到的：

当前程序状态得到的图是一棵树。

当前程序状态得到的图包含于某个原图的最小生成树中。

当前程序状态中的边集没有跨边。

4 性质列表

性质的形式化描述详见 prim.v。

Lemma (path_simplifier). 如果两个顶点之间存在路径，则这两个顶点之间也存在简单路径。

Lemma (tree_have_path). 树中任意两个顶点之间存在路径。

Lemma (tree_have_unique_simple_path). 树中任意两个顶点之间存在唯一一条简单路径。

Lemma (tree_add_edge_have_circuit). 往树中加入一条边会形成唯一的一条简单回路。

Lemma (circuit_crossing_cut_has_two_edges). 如果简单回路上存在一条跨边，则存在另一条跨边。

Lemma (remove_edge_on_circuit_preserves_connectivity). 从一个连通图中移除一条属于某个环路的边，图的连通性不受影响。

Lemma (tree_add_edge_delete_on_circuit_is_tree). 往一颗树中加入一条边再删去加入边后形成的简单回路中的任意一条边得到的图仍然是一棵树。

Lemma (list_sum_add_edge). 往树中加入一条边，再删除权重更大的一条边，得到的图的权重和更小。