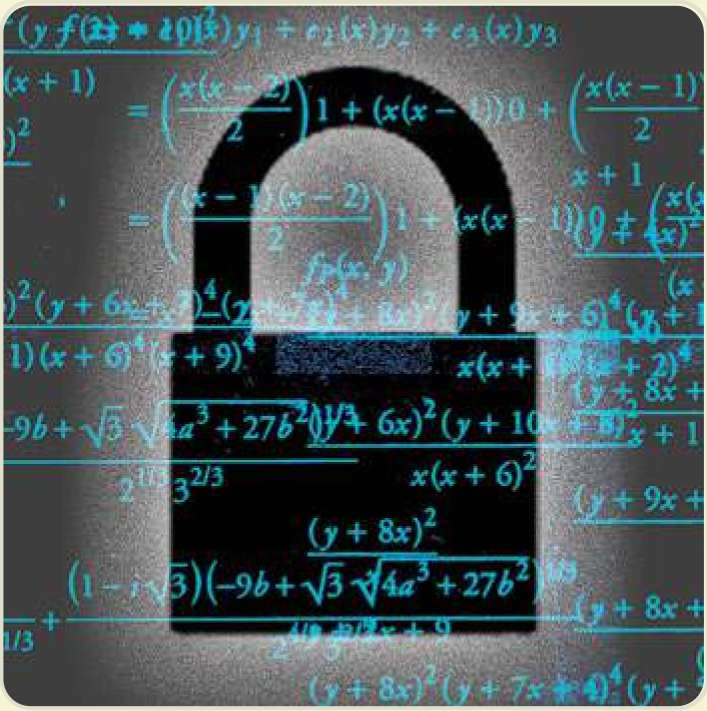
RSA算法原理（一）

作者： 阮一峰

日期： 2013年6月27日

如果你问我，哪一种算法最重要？

我可能会回答"公钥加密算法"。



因为它是计算机通信安全的基石，保证了加密数据不会被破解。你可以想象一下，信用卡交易被破解的后果。

进入正题之前，我先简单介绍一下，什么是"公钥加密算法"。

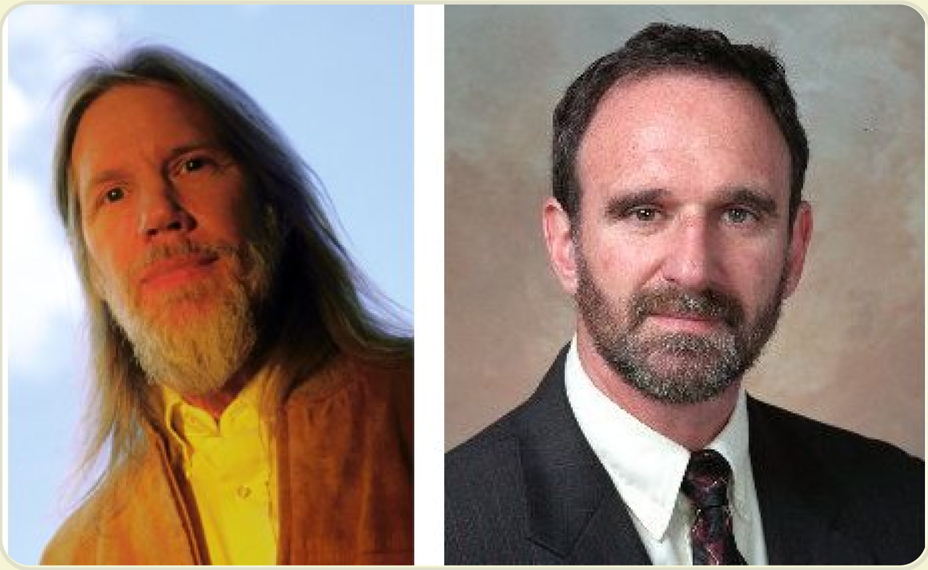
一、一点历史

1976年以前，所有的加密方法都是同一种模式：

> （1）甲方选择某一种加密规则，对信息进行加密；
>
> （2）乙方使用同一种规则，对信息进行解密。

由于加密和解密使用同样规则（简称"密钥"），这被称为"对称加密算法"（Symmetric-key algorithm）。

这种加密模式有一个最大弱点：甲方必须把加密规则告诉乙方，否则无法解密。保存和传递密钥，就成了最头疼的问题。



1976年，两位美国计算机学家Whitfield Diffie 和 Martin Hellman，提出了一种崭新构思，可以在不直接传递密钥的情况下，完成解密。这被称为"Diffie-Hellman密钥交换算法"。这个算法启发了其他科学家。人们认识到，加密和解密可以使用不同的规则，只要这两种规则之间存在某种对应关系即可，这样就避免了直接传递密钥。

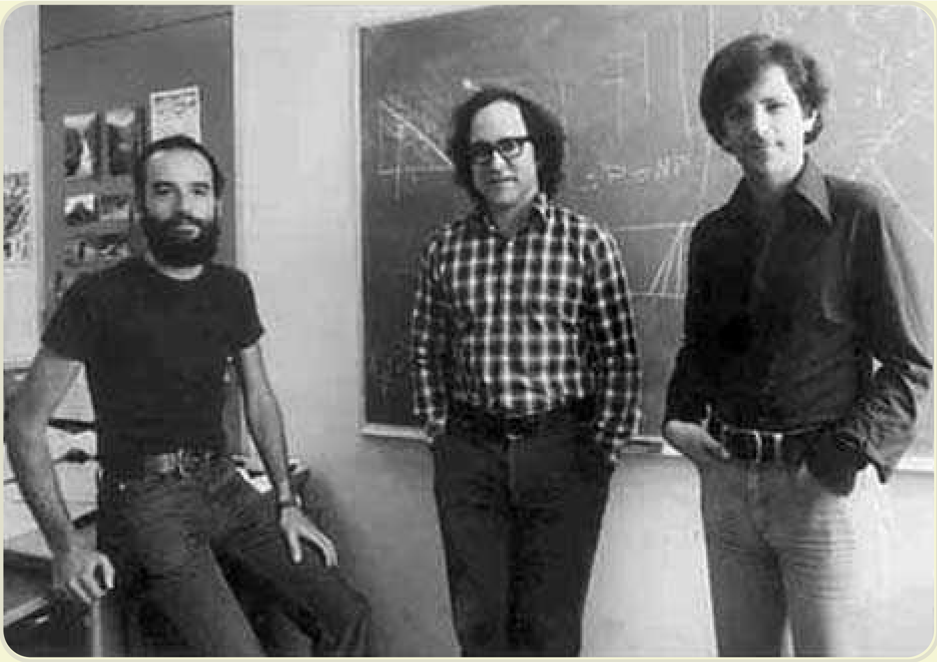
这种新的加密模式被称为"非对称加密算法"。

（1）乙方生成两把密钥（公钥和私钥）。公钥是公开的，任何人都可以获得，私钥则是保密的。

（2）甲方获取乙方的公钥，然后用它对信息加密。

（3）乙方得到加密后的信息，用私钥解密。

如果公钥加密的信息只有私钥解得开，那么只要私钥不泄漏，通信就是安全的。



1977年，三位数学家Rivest、Shamir 和 Adleman 设计了一种算法，可以实现非对称加密。这种算法用他们三个人的名字命名，叫做RSA算法。从那时直到现在，RSA算法一直是最广为使用的"非对称加密算法"。毫不夸张地说，只要有计算机网络的地方，就有RSA算法。

这种算法非常可靠，密钥越长，它就越难破解。根据已经披露的文献，目前被破解的最长RSA密钥是768个二进制位。也就是说，长度超过768位的密钥，还无法破解（至少没人公开宣布）。因此可以认为，1024位的RSA密钥基本安全，2048位的密钥极其安全。

下面，我就进入正题，解释RSA算法的原理。文章共分成两部分，今天是第一部分，介绍要用到的四个数学概念。你可以看到，RSA算法并不难，只需要一点数论知识就可以理解。

二、互质关系

如果两个正整数，除了1以外，没有其他公因子，我们就称这两个数是互质关系（coprime）。比如，15和32没有公因子，所以它们是互质关系。这说明，不是质数也可以构成互质关系。

关于互质关系，不难得到以下结论：

```
　　1. 任意两个质数构成互质关系，比如13和61。

　　2. 一个数是质数，另一个数只要不是前者的倍数，两者就构成互质关系，比如3和10。

　　3. 如果两个数之中，较大的那个数是质数，则两者构成互质关系，比如97和57。

　　4. 1和任意一个自然数是都是互质关系，比如1和99。

　　5. p是大于1的整数，则p和p-1构成互质关系，比如57和56。
```

6． p是大于1的奇数，则p和p-2构成互质关系，比如17和15。

三、欧拉函数

请思考以下问题：

> 任意给定正整数n，请问在小于等于n的正整数之中，有多少个与n构成互质关系？（比如，在1到8之中，有多少个数与8构成互质关系？）

计算这个值的方法就叫做欧拉函数，以φ(n)表示。在1到8之中，与8形成互质关系的是1、3、5、7，所以 φ(n) = 4。

φ(n) 的计算方法并不复杂，但是为了得到最后那个公式，需要一步步讨论。

第一种情况

如果n=1，则 φ(1) = 1 。因为1与任何数（包括自身）都构成互质关系。

第二种情况

如果n是质数，则 φ(n)=n-1 。因为质数与小于它的每一个数，都构成互质关系。比如5与1、2、3、4都构成互质关系。

第三种情况

如果n是质数的某一个次方，即 n = p^k (p为质数，k为大于等于1的整数)，则

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

比如 φ(8) = φ(2^3) =2^3 - 2^2 = 8 -4 = 4。

这是因为只有当一个数不包含质数p，才可能与n互质。而包含质数p的数一共有p^(k-1)个，即1×p、2×p、3×p、...、p^(k-1)×p，把它们去除，剩下的就是与n互质的数。

上面的式子还可以写成下面的形式：

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$$

可以看出，上面的第二种情况是 k=1 时的特例。

第四种情况

如果n可以分解成两个互质的整数之积，

```
n = p1 × p2
```

则

```
φ(n) = φ(p1p2) = φ(p1)φ(p2)
```

即积的欧拉函数等于各个因子的欧拉函数之积。比如，φ(56)=φ(8×7)=φ(8)×φ(7)=4×6=24。

这一条的证明要用到["中国剩余定理"]，这里就不展开了，只简单说一下思路：如果a与p1互质(a<p1)，b与p2互质(b<p2)，c与p1p2互质(c<p1p2)，则c与数对 (a,b) 是一一对应关系。由于a的值有φ(p1)种可能，b的值有φ(p2)种可能，则数对 (a,b) 有φ(p1)φ(p2)种可能，而c的值有φ(p1p2)种可能，所以φ(p1p2)就等于φ(p1)φ(p2)。

第五种情况

因为任意一个大于1的正整数，都可以写成一系列质数的积。

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$$

根据第4条的结论，得到

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1})\phi(p_2^{k_2})...\phi(p_r^{k_r})$$

再根据第3条的结论，得到

$$\phi(n) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_r})$$

也就等于

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_r})$$

这就是欧拉函数的通用计算公式。比如，1323的欧拉函数，计算过程如下：

$$\phi(1323) = \phi(3^3 \times 7^2) = 1323(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 756$$

四、欧拉定理

欧拉函数的用处，在于欧拉定理。"欧拉定理"指的是：

> 如果两个正整数a和n互质，则n的欧拉函数 `φ(n)` 可以让下面的等式成立：
>
> $$a^{\phi(n)} \equiv 1 (mod\ n)$$

也就是说，a的φ(n)次方被n除的余数为1。或者说，a的φ(n)次方减去1，可以被n整除。比如，3和7互质，而7的欧拉函数φ(7)等于6，所以3的6次方（729）减去1，可以被7整除（728/7=104）。

欧拉定理的证明比较复杂，这里就省略了。我们只要记住它的结论就行了。

欧拉定理可以大大简化某些运算。比如，7和10互质，根据欧拉定理，

$$7^{\phi(10)} \equiv 1\,(mod\,10)$$

已知 φ(10) 等于4，所以马上得到7的4倍数次方的个位数肯定是1。

$$7^{4k} \equiv 1\,(mod\,10)$$

因此，7的任意次方的个位数（例如7的222次方），心算就可以算出来。

欧拉定理有一个特殊情况。

> 假设正整数a与质数p互质，因为质数p的`φ(p)`等于`p-1`，则欧拉定理可以写成
>
> $$a^{p-1} \equiv 1\,(mod\ p)$$

这就是著名的费马小定理。它是欧拉定理的特例。

欧拉定理是RSA算法的核心。理解了这个定理，就可以理解RSA。

五、模反元素

还剩下最后一个概念：

> 如果两个正整数a和n互质，那么一定可以找到整数b，使得 `ab-1` 被n整除，或者说ab被n除的余数是1。

$$ab \equiv 1 \, (mod\ n)$$

这时，b就叫做a的"模反元素"。

比如，3和11互质，那么3的模反元素就是4，因为 (3 × 4)-1 可以被11整除。显然，模反元素不止一个， 4加减11的整数倍都是3的模反元素 {...,-18,-7,4,15,26,...}，即如果b是a的模反元素，则 b+kn 都是a的模反元素。

欧拉定理可以用来证明模反元素必然存在。

$$a^{\phi(n)} = a \times a^{\phi(n)-1} \equiv 1 \, (mod\ n)$$

可以看到，a的 φ(n)-1 次方，就是a的模反元素。

==

好了，需要用到的数学工具，全部介绍完了。RSA算法涉及的数学知识，就是上面这些，下一次我就来介绍公钥和私钥到底是怎么生成的。

（完）

文档信息

-
- 发表日期： 2013年6月27日

相关文章

- **2021.01.27:** 异或运算 XOR 教程

  > 大家比较熟悉的逻辑运算，主要是"与运算"（AND）和"或运算"（OR），还有一种"异或运算"（XOR），也非常重要。

- **2019.11.17:** 容错，高可用和灾备

  > 标题里面的三个术语，很容易混淆，专业人员有时也会用错。

- **2019.11.03:** 关于计算机科学的50个误解

  > 计算机科学（Computer Science，简称 CS）是大学的热门专业。但是，社会上对这个专业有很多误解，甚至本专业的学生也有误解。