RSA算法原理（二）

作者： 阮一峰

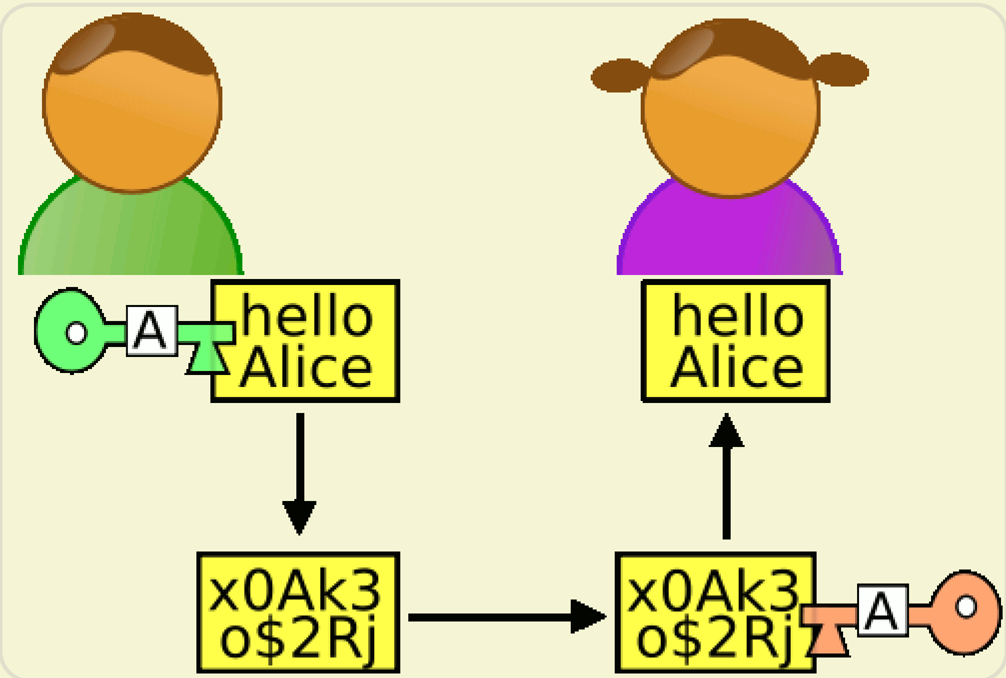
日期： 2013年7月 4日

上一次，我介绍了一些数论知识。

有了这些知识，我们就可以看懂RSA算法。这是目前地球上最重要的加密算法。

六、密钥生成的步骤

我们通过一个例子，来理解RSA算法。假设爱丽丝要与鲍勃进行加密通信，她该怎么生成公钥和私钥呢？



第一步，随机选择两个不相等的质数**p**和**q**。

爱丽丝选择了61和53。（实际应用中，这两个质数越大，就越难破解。）

第二步，计算**p**和**q**的乘积**n**。

爱丽丝就把61和53相乘。

```
n = 61×53 = 3233
```

n的长度就是密钥长度。3233写成二进制是110010100001，一共有12位，所以这个密钥就是12位。实际应用中，RSA密钥一般是1024位，重要场合则为2048位。

第三步，计算**n**的欧拉函数**φ(n)**。

根据公式：

```
φ(n) = (p-1)(q-1)
```

爱丽丝算出φ(3233)等于60×52，即3120。

第四步，随机选择一个整数**e**，条件是**1< e < φ(n)**，且**e**与**φ(n)** 互质。

爱丽丝就在1到3120之间，随机选择了17。（实际应用中，常常选择65537。）

第五步，计算**e**对于**φ(n)**的模反元素**d**。

所谓"模反元素"就是指有一个整数d，可以使得ed被φ(n)除的余数为1。

```
ed ≡ 1 (mod φ(n))
```

这个式子等价于

```
ed - 1 = kφ(n)
```

于是，找到模反元素d，实质上就是对下面这个二元一次方程求解。

```
ex + φ(n)y = 1
```

已知 e=17, φ(n)=3120，

```
17x + 3120y = 1
```

这个方程可以用"扩展欧几里得算法"求解，此处省略具体过程。总之，爱丽丝算出一组整数解为 (x,y)=(2753,-15)，即 d=2753。

至此所有计算完成。

第六步，将**n**和**e**封装成公钥，**n**和**d**封装成私钥。

在爱丽丝的例子中，n=3233，e=17，d=2753，所以公钥就是 (3233,17)，私钥就是（3233, 2753）。

实际应用中，公钥和私钥的数据都采用ASN.1格式表达（实例）。

七、**RSA**算法的可靠性

回顾上面的密钥生成步骤，一共出现六个数字：

```
p
q
n
φ(n)
e
d
```

这六个数字之中，公钥用到了两个（n和e），其余四个数字都是不公开的。其中最关键的是d，因为n和d组成了私钥，一旦d泄漏，就等于私钥泄漏。

那么，有无可能在已知**n**和**e**的情况下，推导出**d**？

```
（1）ed≡1 (mod φ(n))。只有知道e和φ(n)，才能算出d。

（2）φ(n)=(p-1)(q-1)。只有知道p和q，才能算出φ(n)。

（3）n=pq。只有将n因数分解，才能算出p和q。
```

结论：如果**n**可以被因数分解，**d**就可以算出，也就意味着私钥被破解。

可是，大整数的因数分解，是一件非常困难的事情。目前，除了暴力破解，还没有发现别的有效方法。维基百科这样写道：

> "对极大整数做因数分解的难度决定了RSA算法的可靠性。换言之，对一极大整数做因数分解愈困难，RSA算法愈可靠。
>
> 假如有人找到一种快速因数分解的算法，那么RSA的可靠性就会极度下降。但找到这样的算法的可能性是非常小的。今天只有短的RSA密钥才可能被暴力破解。到2008年为止，世界上还没有任何可靠的攻击RSA算法的方式。
>
> 只要密钥长度足够长，用RSA加密的信息实际上是不能被解破的。"

举例来说，你可以对3233进行因数分解（61×53），但是你没法对下面这个整数进行因数分解。

```
12301866845301177551304949
58384962720772853569595334
79219732245215172640050726
36575187452021997864693899
56474942774063845925192557
32630345373154826850791702
61221429134616704292143116
02221240479274737794080665
351419597459856902143413
```

它等于这样两个质数的乘积：

```
33478071698956898786044169
84821269081770479498371376
85689124313889828837938780
02287614711652531743087737
814467999489
    ×
36746043666799590428244633
79962795263227915816434308
76426760322838157396665112
79233373417143396810270092
798736308917
```

事实上，这大概是人类已经分解的最大整数（232个十进制位，768个二进制位）。比它更大的因数分解，还没有被报道过，因此目前被破解的最长RSA密钥就是768位。

八、加密和解密

有了公钥和密钥，就能进行加密和解密了。

（**1**）加密要用公钥 **(n,e)**

假设鲍勃要向爱丽丝发送加密信息m，他就要用爱丽丝的公钥 (n,e) 对m进行加密。这里需要注意，m必须是整数（字符串可以取ascii值或unicode值），且m必须小于n。

所谓"加密"，就是算出下式的c：

$$m^{e} \equiv c \pmod{n}$$

爱丽丝的公钥是 (3233, 17)，鲍勃的m假设是65，那么可以算出下面的等式：

$$65^{17} \equiv 2790 \pmod{3233}$$

于是，c等于2790，鲍勃就把2790发给了爱丽丝。

（**2**）解密要用私钥**(n,d)**

爱丽丝拿到鲍勃发来的2790以后，就用自己的私钥(3233, 2753) 进行解密。可以证明，下面的等式一定成立：

$$c^{d} \equiv m \pmod{n}$$

也就是说，c的d次方除以n的余数为m。现在，c等于2790，私钥是(3233, 2753)，那么，爱丽丝算出

$$2790^{2753} \equiv 65 \pmod{3233}$$

因此，爱丽丝知道了鲍勃加密前的原文就是65。

至此，"加密--解密"的整个过程全部完成。

我们可以看到，如果不知道d，就没有办法从c求出m。而前面已经说过，要知道d就必须分解n，这是极难做到的，所以RSA算法保证了通信安全。

你可能会问，公钥(n,e) 只能加密小于n的整数m，那么如果要加密大于n的整数，该怎么办？有两种解决方法：一种是把长信息分割成若干段短消息，每段分别加密；另一种是先选择一

种"对称性加密算法"（比如DES），用这种算法的密钥加密信息，再用RSA公钥加密DES密钥。

九、私钥解密的证明

最后，我们来证明，为什么用私钥解密，一定可以正确地得到m。也就是证明下面这个式子：

$$c^d \equiv m \pmod n$$

因为，根据加密规则

$$m^e \equiv c \pmod n$$

于是，c可以写成下面的形式：

$$c = m^e - kn$$

将c代入要我们要证明的那个解密规则：

$$(m^e - kn)^d \equiv m \pmod n$$

它等同于求证

$$m^{ed} \equiv m \pmod n$$

由于

$$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$$

所以

$$ed = h\phi(n)+1$$

将ed代入：

$$m^{h\phi(n)+1} \equiv m \pmod n$$

接下来，分成两种情况证明上面这个式子。

（**1**）**m**与**n**互质。

根据欧拉定理，此时

$$m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

得到

$$(m^{\phi(n)})^h \times m \equiv m \pmod{n}$$

原式得到证明。

（**2**）**m**与**n**不是互质关系。

此时，由于n等于质数p和q的乘积，所以m必然等于kp或kq。

以 m = kp为例，考虑到这时k与q必然互质，则根据欧拉定理，下面的式子成立：

$$(kp)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

进一步得到

$$[(kp)^{q-1}]^{h(p-1)} \times kp \equiv kp \pmod{q}$$

即

$$(kp)^{ed} \equiv kp \pmod{q}$$

将它改写成下面的等式

$$(kp)^{ed} = tq + kp$$

这时t必然能被p整除，即 t=t'p

$$(kp)^{ed} = t'pq + kp$$

因为 m=kp，n=pq，所以

$$m^{ed} \equiv m \pmod{n}$$

原式得到证明。

（完）

文档信息

- 发表日期： 2013年7月 4日

相关文章

- **2021.01.27:** 异或运算 XOR 教程

  > 大家比较熟悉的逻辑运算，主要是"与运算"（AND）和"或运算"（OR），还有一种"异或运算"（XOR），也非常重要。

- **2019.11.17:** 容错，高可用和灾备

  > 标题里面的三个术语，很容易混淆，专业人员有时也会用错。

- **2019.11.03:** 关于计算机科学的50个误解

  > 计算机科学（Computer Science，简称 CS）是大学的热门专业。但是，社会上对这个专业有很多误解，甚至本专业的学生也有误解。

- **2019.10.29:** 你所不知道的 AI 进展

  > 人工智能现在是常见词汇，大多数人可能觉得，它是学术话题，跟普通人关系不大。

Weibo | Twitter | GitHub

Email: yifeng.ruan@gmail.com