第二章知识框架　导数问题

求导问题

- 导数定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$
- 求低阶导的办法
  - 定义法：如某些抽象无表达式函数在某点导数，表达式分段函数在分段点处
  - 其他方法：如泰勒，求导困难，但展开容易
- 求高阶导
- 隐函数求导
  - 求一次导
    - 法一：整个式子对 x 求导，然后处理
    - 法二：化成$F(x\ y)=0$型，有公式$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'x}{F'y}$
  - 求两次导, 得出一阶导的等式后对整个式子求导
- 反函数求导
  - $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$
  - $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{f'(x)}{(f'(x))^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$
- 参数所决定函数求导$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'_ty''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$参数方程是考研热点中的热点，常与以下结
- 复合函数求导
- 可微：主要是理解定义，有一年和泰勒一起考
- 几何应用
  - 曲率
  - 切线
    - 1.在(x_0,y_0)某个确切的点的切线方程$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
    - 2.在任一点$(x\ y)$的切线方程$y-y=f^x(x-x)$变化的点
  - 法线

专题一　求高阶导数问题

法一：记住几类初等函数的高阶求导公式，要配合一些代数运算

例如：

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}x\right)$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$\ln(ax+b)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$$

法二：数学归纳法 (找规律)

例如：设 $f(x)=e^x\sin x$，　求$f^{(n)}(x)$

法三：公式 (适用于函数相乘，求高阶导的形式)，形如求 $[f(x)g(x)]^{(n)}$

法四：与展开式一一对应 (适用于 $F^{(k)}(c)$ 型)c 一般取 0，k 也可以为 n

例：设 $f(x)=\left(1+x^2\right)\ln(1+x)$, 求 $f^{(25)}(0)$

专题二　驻点、极点、最值点、拐点

(最) 极值点：x 的值
(最) 极值：y 的值
拐点，(x，y) 坐标

注：极值点处可导，则一定是驻点 (导数为 0，很多驻值是极值点，例 $y=x^3(x=0\text{时})$)

判断极值点，拐点的方法

法一：定义法

法二：

$$\text{第一充分条件 (以极值点为例)}\begin{cases}\text{求出}f'(x)\\ \text{求出}f(x)\text{的全部驻点和不可导点 (抓到两类嫌疑犯)}\\ \text{用第一充分条件判别 (挨个定罪)}\end{cases}$$

法三：第二充分条件 (适用于易求高阶导，且 x_0 题干告诉是哪个点，只让你判别是极小值，极大值的题目)

补充拐点的第二充分条件：若 $f''(x_0)=0$，$f''(x_0>0(<0))$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的左侧邻还是凸的 (凹的)，右侧邻还是凹的 (凸的)

判断是值点的方法

最值点有可能在端点或内取得，且内的最值点也一定是极值点
步骤一：求出驻点及不可导点处的函数值
步骤二：求出两个端点处的函数值　(三类嫌疑犯)
步骤三：比较三类点的大小　按大小判定
注：不需要用极值的两个充分条件去判断驻点及不可导点是否是极值，只需比较三类点的大小就好，树莓最大的就是最大值点

专题三　不等式的证明

法一：借助求导看单调性，找最值，有时候端点处要借助求极限的方法
例如求证当 $x\in(0.1)$ 时 $\frac{1}{\ln 2}<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$
法二：

$$\text{构造函数求导}^1\begin{cases}\text{情形一：形式对等时，把不同参数分列等号两侧，构造函数，例如函数求证}\\ \qquad\qquad e<a<b\text{时},a^b\text{和}b^a\text{的大小关系}\\ \text{情形二：整个式子构造函数，有些时候会换出新的元}\end{cases}$$

法三：中值定理 (拉格朗日和柯西)
法四：凹凸性用于两端点处等于 0，二阶号恒正 (负) 的情况，可作图分析
法五：二阶保号性：
如果 $f'(x)\geq 0$ 则 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
如果 $f'(x)\leq 0$ 则 $f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

[1]观察有无拉格朗日，柯西形式决定是构造还是中值

专题四　求含参数的两条曲线公共点的个数（等价于求含参数方程的根的个数类问题）

题型一：只含一个未知参数 a

方法：

步骤一：将函数和未知数分置等号两侧，即形如 $a=f(x)$(注意分母要不为零)

步骤二：讨论含未知数一侧函数的增减情况，画出函数简图

步骤三：让 y=a 与函数图相交，看交点个数不同时 a 的取值

例一：试确定 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围

例二：求 $y=k\arctan x$ 和 y=x 交点的个数

题型二：含两个参数

方法：最好把两个参数都分在同一侧，另一侧是只含 x 的函数，如果不能就只分一个参数过去 (未考过)

专题五　洛必达法则的说明

1. 必须符合 $\frac{0}{0},\frac{00}{\infty}$ 型才能用
2. $f(x)\quad F(x)$ 必须在去心邻域内可导
3. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或无穷) 时，洛必达有效，此时 $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或无穷)
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为无穷时，洛必达失效，此时 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在与否不确定，需换其他方法求
5. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{F(x)}=A$(或无穷), 不能说明 $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或无穷)

专题六　只含 ξ 的罗尔定理类问题

还原法（含 $\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)}$）

步骤一：将所证中的 ξ 全换成 x

步骤二：利用 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=[\ln f(x)]\quad$ (或$\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=\left[\ln f'(x)'\right]$)(或$\dfrac{f(x)}{F(x)}=[\ln F(x)]'$) 将函数进行还原

步骤三：将函数合并成 $[m\varphi(x)]'=0$，通过题干条件，$\varphi(x)$ 有两个函数值正好相等，$\varphi'(\xi)=0$ 经过变形正好就是要证的结论

分组构造法

步骤一：雷同

步骤二：可能出现 $\dfrac{f'(x)-k}{f(x)-kx}=[\ln(f(x)-kx)]'$,(或$\dfrac{f'(x)}{f(x)-x}=[\ln(f(x)-\lambda)]'$) 的形式，将函数还原

步骤三：雷同

凑微法

步骤一：雷同

步骤二：需要自己观察出所证结论的原函数，有时可借助求不定积分的办法求原函数，当然有些函数的原函数可能是变上限函数的形式

步骤三：根据题干，原函数有两个点的函数值相等，使用罗尔定理得到的中项还是要证结论

专题七　含 ξ, a, b 的中值定理

首先看 ξ 和 a，b 是否能分离，如果可以分离到等号两侧，尝试对 a，b 这一侧使用柯西或拉格朗日，有时候 a，b 可能是具体的数值

如果不能分离，整个让说明的式子构造函数，去寻找其原函数，去寻找其原函数类似前一个专题讲的凑微法

例一：$f(x) \in C[a,b]$ 在开区间 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$

例二：设 a>0，b>0,(a<b) 证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $ae^b - be^a = (a-b)(1-\xi)^{e^{\xi}}$

专题八　所证结论中含 ξ y(也可能同时含 a,b)

方法一

所证结论中除常数外只含 $f'(\xi), f'(y)$，证明方法是：找三个点，两次使用拉格朗日中值定理

方法二

所证结论中含 ξ, y，但设计两个中值定理的项的复杂程度不同，将 ξ, y 分置等号两侧，让 a，b 分离到中值项形式简单的那一侧，等号两侧的中值项可能是经过拉格朗日或柯西得到的.(大概率中值项形式简单的那一侧使用拉格朗日定理得到的，中值项复杂的那一侧使用柯西定理得到的不绝对) 你可以用求不定积分的方法求一下每一个中值项的原函数，如果能求出原函数，那很可能就是用拉格朗日定理得到的中项

方法三

所证结论中含 ξ, y 涉及两个中项的形式复杂程度一样 (但未必完全一样) 证明的方法一般是三个点分成两段，其中一段使用拉格朗日得到了第一个中项，另一段使用拉格朗日得到第二个中项，当然两个中项也有可能都是通过柯西得到的，具体是拉格朗日还是柯西得到的中值项，还是可以用求不定积分 (凑微分) 的方法求一下原函数

专题九　泰勒展开的经验

1. 二阶以上的证明可以考虑泰勒展开，区间展开点不好说，可以不停尝试，如果告诉某一点导数有等于 0，可以优先考虑在该点处展开, 因为展开形式变得简单
2. 如果区间对称，且告诉你两个端点函数值，则很有可能将两个端点分别在区间中点 (0 点) 处展开，写出两个式子