第三章知识框架　一元积分学

数一为常规考点, 数二, 数三为考查重点

- 不定积分
  - 两类换元法
    - 第一类 (不定积分考的多)
    - 第二类 (定积分，定积分不定积分都有，比较难的是三角分式有理分式)
  - 分部积分 (多在证明题中出现)
  - 原函数的含义
- 定积分
  - 可积的定义与图像
  - 计算
    - 常规型
    - 带有极限符号的
  - 证明题 (最常见的一般是构造函数，因为变上线积分也是一种函数)
- 反常积分
  - 反常积分的计算
  - 判断敛散性，选择题考 (数三不考)
- 定积分的应用
  - 几何应用 (考试热点，常在填空题或大题中与微分方程一起考察)
  - 物理应用 (数三不考)
  - 经济应用 (数一, 二不考)

一　误区

很多人认为在某一区间上存在原函数和可积是同一回事，其实是不对的

原函数是相对不定积分而言的

可积是相对于定积分而言，即定积分的值存在

那么

1. 什么情况下不存在原函数呢?

有一类间断点时一定不存在原函数，有第二类间断点时, 有可能存在原函数，也有可能没有.

比如 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 有原函数，为 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

2. 什么情况下不可积? ($\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值存在)

1. f(x) 在 $[a,b]$ 上连续，则可积

2. f(x) 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点 (可去，跳跃，震荡有界均可) 则可积

3. 有无穷间断点的时候，有可能可积也有可能不可积 (这就是要变了了瑕积分问题)

二　不定积分

$$
\text{换元法}\begin{cases}
\text{第一类：临场发挥，随机拼凑}\\
\text{第二类}\begin{cases}
\text{三角换元 (其中 n 为常数)}\begin{cases}
\text{出现 }\left(a^2-x^2\right)^m\text{ 型，经常令}x=a\sin t\\
\text{出现 }\left(a^2+x^2\right)^m\text{ 型，经常令}x=a\tan t\\
\text{出现 }\left(x^2-a^2\right)^m\text{ 型，经常令}x=a\sec t\\
\text{出现形如}(\arcsin x)^m,(\arctan x)^m\text{的反函数时，}\\
\text{经常令}x=\sin t\text{或}x=\tan t
\end{cases}\\
\text{倒代换：出现头重脚轻 (分母次数比分子高很多时)可以考虑使用}x=\frac{1}{t}
\end{cases}
\end{cases}
$$

分部积分：“指三幂对反”通常情况下谁在前面谁充当 v'(特别地，有些分部积分求不出来，但可以内部抵掉，或是产生一个负的相同项后转到等号左侧)

注：第一类换元法：

1. 当出现 $\int R(\sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt[m]{ax+b})\mathrm{d}x$ 型时，经常令

$$\sqrt[k]{ax+b}=t,k\text{为}n,m\text{的最小公倍数}$$

2. 当出现 $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 型，经常令 $\displaystyle\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$

3. 对于 $\sin^{2k}x\cos^{2l}x,(k,l\in N)$ 型函数，总可利用三角恒等式化成 cos2x 的多项式

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

4. 对于 $\tan^n x\sec^{2k}x$ 或 $\tan^{2k-1}x\sec^n x\,(n,k,\in N_+)$ 型函数的积分可依次作变换 $u=\tan x$ 或 $u=\sec x$ 求得结果

专题一　分式的不定积分问题

$$\text{分式}\begin{cases}\text{有理分式}\\ \text{三角分式}\end{cases}$$

一：有理分式

步骤一：观察，如果很容易拆项，裂项，直接拆开变成简单或可以使用全书上总结的可以带公式的分式

步骤二：观察不出来时，先判断是否是真假分式，如果是假分式，先将其拆成一个真分式加一个多项式

步骤三：处理真分式

1. 若分母含有 $(x-a)^m$，分解为 $\dfrac{A_1}{x-a}-\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_m}{(x-a)m}$

2. 若分母中含有 $(ax^2+bx+c)^m$ 且 $b^2-4ac<0$,则分解为 $\dfrac{A_1x+B_1}{\theta x^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_mx+Bm}{(ax^2+bx-c)^m}(m\text{很少}\geq 2)$

注：步骤一二可能共存，关键在于求出 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 这些分数，可以用待定系数法求出这些系数，也可以用拉普拉斯方程中的方法

(如果步骤三失效，可尝试用倒代换等其他方法)

二：三角分式

1. 半角化

$$\text{半角公式}\begin{cases}\sin 2x = 2\sin x\cos x\\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x\end{cases}$$

2. $\dfrac{c\sin x + d\cos x}{a\sin x + b\cos x}$ 型

3. 万能公式 (转化成幂函数分式)

4. 若出现 $a\cos x + b\sin x$ 可以变成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta), \theta = \arctan\frac{a}{b}$

5. 积化和差，可能会用到，但和差化积比较少，因为乘法更复杂

6. 把被积函数变成 $f(\tan x)$ $\quad \mathrm{d}x$ 变成 $\mathrm{d}\tan x$，
   常用到半角公式 $1+\sin 2x = (\sin x + \cos)^2$ $1 = \sin^2 + \cos^2 x$

定积分补充公式

1. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a \leq b)$

2. 柯西不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

3. 定积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 用介值定理证明 $\xi \in [a,b]$ 设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
   当 $F(x)$ 在 [a，b] 上满足拉格朗日定理的条件时，即 F(x) 在 [a，b] 上连续，在 (a，b) 上可导，则 $\exists\xi \in (a,b)$ 使得 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$ 其中 $F(b) = \int_a^b(x)\mathrm{d}x \quad F(a) = 0 \quad F'(\xi) = f(\xi)$

   拓展形式：$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx(g(x)\text{不变号}, \xi \in [a,b])$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

   引申华里士公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & n \geq 3 \text{ 为奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \geq 2 \text{ 为偶数}\end{cases}$

5. $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

6. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

   引申：(1) $\int_0^{\pi} xf(|\cos x|)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(|\cos x|)dx$

   (2) $\int_0^{\pi} xf\left(\cos^2 x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\cos^2 x\right)dx$

7. 同期函数的定积分性质

$$\int_{n}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

$$\int_{0}^{n\pi} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$$

引申 1 $\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$

定积分的计算题

带有具体被积函数表达式的定积分计算
先看有无瑕点和无穷区间
有则归为反常积分的计算

1. 首先看有无奇偶可用，简化运算
2. 其次看能否用讲过的三角函数，周期函数公式来简化运算
3. 对于第一类换元法，常用的换元法是$t=a+b-x$
   特别是对称区间时，经常对其中半个区间使用，就可以聚合
   成一个区间($t=a+b-x$)换元法经常用在证明积分大 (小) 于
   0 的证明题中间可能不对称
4. 第一类换元中的其他方法，第二类换元法，分部积分
   幂函数分式，三角分式和计算不定积分一样，先求出原
   函数，然后带入上下限，注意上下限有时候要相应的改变
5. 被积函数中带有绝对值 $\min, \max$ 要注意重新划分区间
   因为不同区间内被积函数表达式不同
6. 转化成二重积分再做计算 (有时候要改变积分次序)

注：1.2.3.6 是定积分才有，不定积分没有的

带有定积分的求极限：问题 (不要使用积分中值定理)，极限有可能加在定积分号的外面，也有可能加在被积函数上：直接使用夹逼准则也就是放缩被积函数

定积分的证明题 (1.2.3.4.5.6 都可能用在定积分不等式中)

1. 比较带有具体函数表达式的定积分大小问题
2. 构造函数，配合求导，求最值等方法证明定积分不等式

   特别地如果含 a，b 两个常数，经常把其中一个设为 x，以前积分里的 x 变成 t 在讨论3. 使用放缩证

4. 对被积函数进行拉格朗日或泰勒展开
5. 使用公式证明
   - 不等式
     - 柯西施瓦茨不等式
     - 绝对值不等式 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$
     - 当$f(x) \ge g(x)$时 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx, (b>a)$
   - 公式：补充的周期函数，三角函数，积分中值定理及拓展形式
6. 转化成二重积分再证明
7. 定积分的零点类问题
   - 法一：写出定积分的变上限函数形式，变上限函数也是函数
     - 零点定理
     - 罗尔定理
   - 法二：使用积分中值定理 (一般是证明题中的辅助手段)

注：变上限函数的零点问题又回归到之前讲的微分学中的零点问题了，零点和罗尔都只能证明至少有一个零点，如果还要证明零点是唯一的，则需要通过求导说明其是单调的，罗尔定理经常使用我们前面讲过的还原法

2 中含 a，b 两个参数的证明不等式问题，经常令其中一个常数设成 x，另一个不动，然后借助求导求最值的方法，很类似之前的不等式专题中的法二不能分离参数的形式

小专题一

已知 f(x) 和 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的关系 (g(x) 是具体函数，有时候取 1), 求 f(x) 的函数表达式

步骤一: 设 $\int_a^b f(x)g(x)dx = A$

步骤二：对整个函数等式左右两侧同乘以 g(x) 后，再取从 a 到 b 的积分，然后通过该方程解出未知数 A，从而得 f(x) 的表达式

拓展 1：已知 f(x) 同时和 $\int_a^b f(x)dx \quad \int_c^d f(x)dx$ 的函数关系，让求 f(x)?

步骤一：设 $\int_a^b f(x)dx = A \quad \int_c^d f(x)dx = B$

步骤二：先对整个函数等式取从 a 到 b 的积分，然后再对整个函数取从 c 到 d 的积分，得到一个一元二次方程，解出来未知数 A，B，从而得到 f(x) 的表达式

拓展 2：有些重积分也会用到该专题

小专题二

比较有具体被积函数表达式的定积分大小

$$\begin{cases} \text{定积分} \begin{cases} \text{比较被积函数大小 (前提上限大于下限)} \\ \text{做差合并区间} \end{cases} \\ \text{重积分 (选择题居多)} \begin{cases} \text{积分区域是一样时，比较被积函数的大小} \\ \text{被积函数相同时，比较积分区域的大小} \end{cases} \end{cases}$$

定积分比大小

法一：如果可以先借助奇偶性简化，然后根据 $f(x) > g(x)$ 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ 这个定理来判断，实际上就是比较被积函数的大小

法一：对积分区间分段，通过换元把不同区间变成同一个区间，然后合并积分，在新区间内的被积函数恒大于 0

小专题三

利用分部积分证明或求定积分

情形一：题干已知 $f(x)\ f'(x)\cdots$ 的某些具体数值，被积函数中含有更高阶的导数，采用分部积分 $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ 连续让那个更高阶的导数充当 v'，每次得到 uv 后代入题干中的某些条件，可能要用多次分部积分

例一：f(x) 在 [a，b] 上二阶连续时，又 $f(a) = f'(a) = 0$

求证：$\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2dx = \int_a^b f(x)dx$

例二：$f(0)=f(1)=0$ 求证 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-x^2)f''(x)dx$

情形二：题干有变上限函数，让球的定积分被积函数中含有变上限函数

采用分部积分 $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ 让那么变上限函数充当 u，其余部分充当 v'

例一：设 $G(x)=\int_1^{x^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$, 则 $\int_0^1 xG(x)dx=$_____

例二：设 $G\quad'=\arcsin(x-1)^2, G(0)=0$ 求 $\int_0^1 G(x)dx=$_____

小专题四　反常积分的计算

步骤一：首先看能不能对 $\int_0^{+\infty}$ 上的函数使用 $\Gamma(x)$ 函数的公式，或着变形成 $\Gamma(x)$ 后直接套用关于 $\Gamma(x)$ 的现成公式

步骤二：若不能套公式看区间内部有没有瑕点

步骤三：

1. 如果内部无瑕点，直接装不知道，按定积分计算，求出原函数，带入端点值相减(如果端点处是瑕点或无穷，则端点处的反常积分实则就是求极限问题，如果两个极限有一个或两个不存在，就是发散的)

2. 如果内部有瑕点，必须以瑕点为中断点，把区间沿瑕点，断成两个，逐个区间装不知道，使用求定积分的办法

小专题五　审敛法修改版

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]([-\infty,b])$ 上连续，如果 ∃P>1

使得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} x^p f(x)=$ 常数，那么收敛

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} xf(x)=$ 等于不为 0 的常数或为无穷，那么反常积分发散

注：若 $x^pf(x)\to\infty$ 或 $xf(x)=0$ 极限审敛法失效，敛散性判别需改换方式重判

2.$f(x)$ 在 [a，b] 上连续，如果 $\exists q$ 使 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^qf(x)$(或 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^qf(x)$) 存在，那就收敛

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)f(x)$) 等于不为 0 的常数或趋于无穷，那就发散

(数三不要求掌握)

小专题六　定积分的应用

$$
\begin{cases}
\text{几何}\begin{cases}
\text{面积}\begin{cases}\text{直角坐标}\\ \text{极坐标}\end{cases}\\
\text{弧长}\begin{cases}\text{一般参数式}\\ \text{直角坐标}\\ \text{极坐标}\end{cases}\\
\text{曲面积}\\
\text{体积}\begin{cases}\text{旋转体体积}\begin{cases}\text{模型一：圆纸片的叠加 (圆台模型)}\\ \text{模型二：卷状卫生纸模型}\end{cases}\\ \text{平行截面积已知的立体体积}\end{cases}\\
\text{平均值}\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}
\end{cases}\\
\text{物理}\begin{cases}
\text{质量}\\
\text{形心，质心 (二重积分有公式)}\\
\text{力}\begin{cases}\text{引力}a\frac{m_1m_2}{r^2}\\ \text{压力}PS\\ \text{弹力}F=kx\\ \text{重力}mg\end{cases}\\
\text{功}W=F\cdot S=FS\cos\theta
\end{cases}\\
\text{经济 (数一，二不考)}
\end{cases}
$$

1. 平面中的三种坐标形式

1. 直角坐标：y=y(x) 2. 参数式 $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$ 3. 极坐标 $\rho=\rho(\theta)$

例如 $x^2+y^2=1$ 通过 $\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{matrix}$ 的极坐标转化成 $\rho=1$ 的极坐标形式, 其中有两个 $\rho\theta$ 未知数

几种常见图形

1. 圆 $x^2+y^2=a^2$，参数方程形式 $\begin{matrix} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{matrix}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

2. 椭圆： 参数方程形式 $\begin{matrix} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{matrix}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

3. 摆线：参数方程 $\begin{matrix} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{matrix}$

4. 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 参数的方程 $\begin{matrix} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{matrix}$ $(\cos\theta\le 2\pi)$

5. 心形线 $a(1+\cos\theta)(a>0)$ 上半部分为 $[0\ \pi]$ $S=2S_{A1}=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\theta^2(1+\cos\theta)^2d\theta \quad l=2l_1$

6. 伯努利双扭线 (双重积分中考察，直接转化成极坐标计算)

$x^2+y^2=a^2(x^2-y^2)$ 极坐标形式 $\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{matrix}$ $\Rightarrow \rho^2=a^2\cos 2\theta$

$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{4}\pi,2\pi\right)$

综上 5.6 有极坐标形式，但没有参数方程

旋转体体积

圆台体模型

由连续曲线 $y=f(x)$ 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx \quad (a<b)$$

引申 1：若绕 y=a 旋转一周呢?

$$V_x = \int_a^b \pi[f(x)-a]^2 dx$$

引申 2：如果同时存在 $f_2(x), f_1(x)$ 且 $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ 呢?

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_a^b f_2^2(x)dx - \pi \int_a^b f_1^2(x)dx$$

二，如果绕 y 轴旋转一周，所得旋转体体积为：

$$V_y = 2\pi \int_a^b |x||f(x)|dx$$

引申 1：如果绕 x=c 时旋转呢?

$$V_y = 2\pi \int_a^b |x-c||f(x)|dx$$

引申 2：如果同时有 $f_2(x), f_1(x)$ 绕 y 轴旋转的体积呢?

$$V = 2\pi \int_a^b x f_2(x)dx - 2\pi \int_a^b x f_1(x)dx$$