第四章 随机变量的数字特征 参考答案

一、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 · · · · · · (C)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

思路：对于二维正态分布，独立和不相关是等价的；X+Y~N(0,3), X-Y~N(0,7).

2. 设随机变量 X 的期望和方差分别为 μ,σ^2，则对任意常数 c，必有 · · · · · · (D)

(A) $E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$. (B) $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$.

(C) $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$. (D) $E(X-c)^2\geq E(X-\mu)^2$.

思路：左侧=E [(X- μ) +(μ -c)^2]，展开

3. 设随机变量 $X\sim N(0,4)$, $Y\sim B(3,\frac{1}{3})$, 且 X,Y 不相关，则 $Var(X-3Y+1)=$ · · · · · · (D)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10

思路：利用方差的性质，所求方差化为 X 和 Y 的方差组合

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X),E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$, 则 $E(UV)=$ · · · · · · (B)

(A) $E(U)E(V)$ (B) $E(X)E(Y)$ (C) $E(U)E(Y)$ (D) $E(X)E(V)$

思路：利用 UV=XY

5. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 记 $U=X-Y, V=X+Y$，则随机变量 U 与 V 必然 · · · · · · (D)

(A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关 (D) 不相关

思路：求 U 和 V 的协方差

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$, 则 $\lambda=$ __1__.

思路：泊松分布的期望和方差等于 λ

2. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5, 且 $E(X)=E(Y)=0, E(X^2)=E(Y^2)=2$, 则 $E((X+Y)^2)=$ __6__.

思路：将所求值展开，其中包括 X 与 Y 的协方差，可由相关系数求出

3. 设随机变量 (X,Y) 服从 $N(0,0;1,4;\rho)$, $Var(2X-Y)=1$，则 $\rho=$ __$\frac{7}{8}$__.

思路：由已知的方差求出 X 和 Y 的协方差，进而求出相关系数

4. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=a+bx^2, 0<x<1$, 已知 $E(X)=0.6$, 则 $Var(X)=$ __$\frac{2}{25}$__.

思路：由密度的规范性和期望，进而密度函数中的两个参数

5. 设随机变量 X 的分布函数

$$F(X)=\frac{1}{2}\Phi(x)+\frac{1}{2}\Phi(\frac{x-4}{2}),$$

则 $E(X)=$ __2__.

思路：利用标准正态分布的期望为0，以及密度的规范性

三、游客乘电梯从电视塔底层到顶层观光，电梯于每个整点的第 **5** 分钟、**25** 分钟和 **55** 分钟从底层起行．假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 **[0，60]** 上服从均匀分布，求该游客等候时间的数学期望．（本题 30 分）

解. 已知 X 在 [0,60] 上服从均匀分布，其概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

设 Y 为游客等候电梯的时间 (单位：分)，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0<X\le 5,\\ 25-X, & 5<X\le 25,\\ 55-X, & 25<X\le 55,\\ 60-X+5, & 55<X\le 60.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)dx$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{60}[12.5+200+450+37.5]=11.67$$

注：学生不可省略计算步骤。

四、设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为（本题 30 分）

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

求: (1) $Var(X-Y)$; (2)ρ_{XY}.

解. 方法1 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 3x^2dx\int_0^x dy=\int_0^1 3x^3=\frac{3}{4}.$$

同理可求（学生不可以省略计算步骤）：

$$E(X^2)=\frac{3}{5},E(Y)=\frac{3}{8},E(Y^2)=\frac{1}{5},E(XY)=\frac{3}{10},$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{3}{80}.\quad Var(Y)=\frac{19}{320},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{160},$$

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)=\frac{19}{320}.$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{3}{\sqrt{57}}.$$

方法2 $$E(X-Y)=\frac{3}{8}\ ,E(X-Y)^2=\frac{1}{5}$$

$$Var(X-Y)=\boldsymbol{E(X-Y)^2}-E^2(X-Y)=\frac{19}{320}.$$