第五章 大数定律及中心极限定理 参考答案

一、单选题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，a 为一常数，则 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 a 是指 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (A)

(A) $\forall \epsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n-a|\geq \epsilon\}=0$ (B) $\forall \epsilon>0, P\{|X_n-a|\geq \epsilon\}=1$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n=a$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n=a\}=1$

2. 设随机变量序列 X_n 相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$, 则根据林德伯格-莱维中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $\{X_n\}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (C)

(A) 有相同的数学期望 (B) 有相同的方差

(C) 服从同一指数分布 (D) 服从同一离散型随机变量的分布

3. 设随机变量序列 X_n 独立同分布，其共同的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases},\lambda>0,$$

$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (A)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right\}=\Phi(x)$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right\}=\Phi(x)$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right\}=\Phi(x)$

思路：由指数分布的参数，可知期望和方差，进而知部分和的期望和方差，再利用独立同分布的中心极限定理。

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_1000$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $X_i\sim B(1,p)(0<p<1)$, 则下列式子不正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (C)

(A) $\frac{1}{1000}\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k$ 在概率的意义下近似于 p

(B) $P\{a<\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k<b\}\approx\Phi(\frac{b-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}})-\Phi(\frac{a-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}})$

(C) $P\{a<\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k<b\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$

(D) $\sum\limits_{k=1}^{1000}X_k\sim B(1000,p)$

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $Var(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ __$\frac{1}{9}$__.

2. 设随机变量 X 与 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5, 则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$ __$\frac{1}{12}$__.

3. 设 $X_1,X_2,...$ 是独立同分布的随机变量，且 $X_i\sim U(-2,2), i=1,2,...$，则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}X_i^2$ 依概率收敛于 __$\frac{4}{3}$__.

4. 掷一枚均匀的骰子 n 次，用 X 表示出现点数不超过 3 的次数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}|\geq 0.1\}=$ __0__.

注. 以下三个题目中，若涉及到随机变量的正态近似，需给出理由或说明, 否则会扣分.

三、设某网店每天接到的订单数服从参数为 20 的泊松分布．若一年 365 天该网店都营业, 且假设每天得到的订单数相互独立．求该网店一年至少得到 7000 个订单的概率的近似值．（本题 20 分）

解. 设 X_i 为第 i 天接到的订单数，则 $X_i \sim P(20), E(\sum_{i=1}^{365} X_i) = 7300, Var(\sum_{i=1}^{365} X_i) = 7300$，由列维-林德伯格中心极限定理可知：$\sum_{i=1}^{365} X_i$ 近似服从 $N(7300, 7300)$. 该网店一年至少得到 7000 个订单的概率为

$$P\left(\sum_{i=1}^{365} X_i \geq 7000\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{7000-7300}{\sqrt{7300}}\right) = \Phi(3.51) = 0.9998.$$

四、某产品成箱包装，每箱的重量是随机的．假设每箱平均重量为 50kg，标准差是 5kg. 现用载重为 5t 的汽车承运．试问，汽车最多只能装多少箱，才能使不超载的概率不小于 0.95?（本题 20 分）

解. 设 X_i 为第 i 箱重量（单位:kg），n 为所求箱数，则 $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = 50n, Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = 25n$，由列维-林德伯格中心极限定理可知：$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(50n, 25n)$. 该网店一年至少得到 7000 个订单的概率为

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 5000\right) \approx \Phi\left(\frac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right) \geq 0.95.$$

查表可得:$\frac{5000-50n}{\sqrt{25n}} \geq 1.65$, 解得最多可装 98 箱才能使不超载的概率不小于 0.95.

五、设某保险公司开办了一个农业保险项目，农户参加这项保险，每户需交保险费 1050 元，一旦农户因病虫害等因素受到损失可获得 10000 元的赔付，假设各农户是否受到损失相互独立．每个农户因病虫害等因素受到损失的概率为 0.1. 不计营销和管理费用.（本题 20 分）

(1) 若共有 10000 农户参加这项保险，求该保险公司在该险种上产生亏损的概率；

(2) 若共有 10000 农户参加这项保险，求该保险公司在该险种上的盈利不少于 30 万的概率.

解. 设 X 为这 10000 农户中因病虫害等因素收到损失的户数，则 $X \sim B(10000, 0.1)$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理可知，X 近似服从 $N(1000, 900)$.

(1) 该保险公司在该险种上产生亏损的概率为

$$P(10000X \geq 1.05\times10^7) = P(X \geq 1050) \approx 1 - \Phi(\frac{1050-1000}{\sqrt{900}}) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475.$$

(2) 盈利不少于 30 万的概率为

$$P(1.05\times10^7 - 10000X \geq 30\times10^4) = PX \leq 1020 \approx \Phi(\frac{1020-1000}{\sqrt{900}}) = \Phi(0.67) = 0.7486.$$