第二章 随机变量及其分布 参考答案

一、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 哪一种分布具有无记忆性:…………………………………………(A)

(A) 指数分布.　(B) 负二项分布.　(C) 标准正态分布.　(D) 泊松分布.

2. 已知随机变量 $X \sim B(3,p)$，且 $P(X=0)=P(X=1)$，则 $P(X=2)=$:…………(A)

(A) 9/64.　(B) 1/4.　(C) 1/3.　(D) 1/8.

思路：由 $P(X=0)=P(X=1)$ 求出 $p=1/4$.

3. 随机变量 X 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布，随机变量 $Y=X^2+1$，则 $P(Y<1.16)$ 的概率为…………………………………………(B)

(A) 0.8.　(B) 0.2.　(C) 0.16.　(D) 0.4.

思路：$P(Y<1.16)=P(X^2<0.16)=P(0<X<0.4)$，再利用 X 的密度积分计算.

4. X_1,X_2,X_3 是 3 个随机变量，且 $X_1 \sim N(2,2^2)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(0,3^2)$，$p_j=P(-1<X_j<1)$, $j=1,2,3$，则 p_1,p_2 和 p_3 的大小关系为:…………………………(B)

(A) $p_1<p_2<p_3$.　(B) $p_1<p_3<p_2$.　(C) $p_3<p_1<p_2$　(D) $p_3<p_2<p_1$

法1：将三个变量均化为标准变量，再利用分布函数的单调性；2：画出密度图，比较面积.

5. 已知一强地震发生后 48 小时内还会发生 3 级以上余震的次数 X 服从参数为 4 的泊松分布．设某地刚发生了一次强地震，则接下来 48 小时内，发生 3 级以上余震的次数不超过 4 次的概率不超过:…………………………………………(D)

(A) 0.3.　(B) 0.5.　(C) 0.4.　(D) 0.7.

思路：$P(X\leqslant 4)=P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=4)=0.6288$

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X=4)=$ $\underline{\frac{2}{3}e^{-2}}$.

思路：由已知得 $\lambda=2$

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 求 X 落在区间 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 内的概率为 $\underline{0.9544}$.

思路：将 X 标准化，概率为 $2\phi(2)-1$

3. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别是随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，为了使得 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数，则 a 与 b 满足等式 $\underline{a-b=1}$.

思路：两侧另 $x\to\infty$

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{A}{(1+x)^2}(x>0)$，则 $A=$ $\underline{1}$.

思路：利用密度函数的规范性

5. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k}(k=1,2,\ldots)$, 令 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$，求 $P(Y=0)$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

思路：P(Y=0)=P(X=2k)=[(1/4)*(1-1/4^n)]/(1-1/4)

三、已知随机变量的分布律如下：（本题 20 分）

X	-1	0	$\pi/6$
概率	0.3	p	0.3

求：(1) 未知量 p, X 的分布函数 $F(x)$. (2) 随机变量 $Y=|\sin(X)|$，求 $Y\geq 0.5$ 的概率

解. (1) 由分布律的规范性：$0.3+p+0.3=1$，可得 $p=0.4$.
分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<-1,\\ 0.3,\ -1\leq x<0,\\ 0.7,\ 0\leq x<\pi/6,\\ 1,\ x\geq \pi/6.\end{cases}$$

(2) Y 的分布律表为:

Y	0	0.5	$\sin(1)$
概率	0.4	0.3	0.3

$P(Y\geq 0.5)=P(Y=\sin(1))+P(Y=0.5)=0.6.$

四、本学期某门课周一早上 8:30 上课，某同学从宿舍出发到达该门课教室所需的时间 X 服从正态分布 $N(15,25)$（单位：min）.
(1) 求他能在 10 分钟内到达教室的概率.
(2) 已知该同学周一早上 8:20 出发，现在是 8:25，求他 8:30 到达教室的概率.
(3) 本学期这门课一共 18 周，他每周一早上 8:20 出发，不考虑放假调休等因素，本门课迟到不超过 1 次的概率（本题 20 分）

解. (1) 因为 $X\sim N(15,25)$，则 $U=(X-15)/5\sim N(0,1)$, 因此所求概率为

$$P(X\leq 10)=P(U\leq -1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.1587.$$

(2) $P(X\leq 10|X>5)=P(5<X\leq 10)/P(X>5)=P(-2\leq U\leq -1)/P(U>-1)=0.8566.$
(3) 记随机变量 Y为该同学上课迟到的次数，则 $Y\sim B(18,0.8413)$. 则所求概率为

$$\begin{aligned}&P(Y\leq 1)\\&=P(Y=0)+P(Y=1)\\&=C^{0}{}_{18}\times 0.8413^{0}\times 0.1587^{18}+C^{1}{}_{18}\times 0.8413^{1}\times 0.1587^{17}\approx 0\end{aligned}$$

五、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} a-|x|, & |x|\le 2, \\ 0, & others \end{cases}$$

用“分布函数法" 求随机变量 $Y=X^2+1$ 在区间 $[1,5]$ 上的密度函数 $f_Y(y)$（本题 20 分）

解. 由密度函数的规范性 $\int_{-2}^{2} f(x)dx=1$，可得 $a=\frac{5}{4}$，即

$$f(x)=\begin{cases} 5/4-|x|, & |x|\le 2, \\ 0, & others \end{cases}$$

(1) 由分布函数法，Y 的分布函数为: $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)$.

当 $y<1$ 时，$P(X^2+1\le y)=0$，

当 $1\le y<5$ 时，$P(X^2+1\le y)=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x)dx=5\sqrt{y-1}/2-y+1$,

当 $y\ge 5$ 时，$P(X^2+1\le y)=1$. 整理可得

$$F_y(y)=\begin{cases} 0, & y<1, \\ 5\sqrt{y-1}/2-y+1, & 1\le y<5, \\ 1, & y\ge 5. \end{cases}$$

对 $F_y(y)$ 求导可得 Y 的密度函数 $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\begin{cases} 5/(4\sqrt{y-1})-1, & 1\le y<5, \\ 0, & others \end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)=P(0\le X\le\sqrt{y-1})+P(-\sqrt{y-1}\le X<0)$.

在 $0\le X\le\sqrt{y-1}$ 区间上，$y=x^2+1$ 及反函数 $x=\sqrt{y-1}$ 都是严格单增函数.

在 $-\sqrt{y-1}\le X<0$ 区间上，$y=x^2+1$ 及反函数 $x=-\sqrt{y-1}$ 都是严格单减函数.

由定理 1 可得，

$$f_Y(y)=f_X[\sqrt{y-1}]|\sqrt{y-1}'|+f_X[-\sqrt{y-1}]|(-\sqrt{y-1})'|=5/(4\sqrt{y-1})-1.$$

注：本题目不够严谨，忽略了密度函数的非负性。可将题目中的密度函数改写如下

$$f(x)=\begin{cases} a-|x|, & |x|\le 1, \\ 0, & others \end{cases}$$

利用密度函数的规范性，可求得 $a=1$，上述解题过程不变，可求得

$$f_Y(y)=\begin{cases} \sqrt{y-1})-1, & 1\le y<5, \\ 0, & others \end{cases}$$