第七章 参数估计 参考答案

一、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的一组简单随机样本，$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$, 则可以作为 σ^2 的无偏估计量的是…………………………………………(A)

(A) 当 μ 为已知时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n}$ (B) 当 μ 为已知时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n-1}$

(C) 当 μ 为未知时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n}$ (D) 当 μ 为未知时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n-1}$

2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}, S^2$，则以下结论中正确的是…………………………………………(C)

(A) S 是 σ 的无偏估计量 (B) S 是 σ 的极大似然估计量

(C) S 是 σ 的相合估计量 (D) $\bar{X}$ 与 S^2 不独立

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一组样本，总体 X 的期望为 μ, 则下列结论正确的是…………………………………………(C)

(A) X_1 是 μ 的相合估计量 (B) X_1 是 μ 的极大似然估计量

(C) X_1 是 μ 的无偏估计量 (D) X_1 不是 μ 的估计量

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的一组样本，$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$, 且 μ, σ^2 是未知参数，$\hat{\mu}_1=X_1, \hat{\mu}_2=\bar{X}$, 则下列结论错误的是…………………………(C)

(A) $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计量 (B) $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计量

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是 μ 的极大似然估计量 (D) 估计量 $\hat{\mu}_2$ 较 $\hat{\mu}_1$ 更有效

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中参数 μ 已知，σ^2 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一组样本，则下述关于 σ^2 的估计量中不是无偏估计量的是……………………(B)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

(C) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (D) $\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$

二、设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是 $\theta(\theta\neq 0)$ 的两个无偏估计，且 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 不相关，$Var(\hat{\theta}_1)=3Var(\hat{\theta}_2)\neq 0$, 求在形如 $C_1\hat{\theta}_1+C_2\hat{\theta}_2$ 的估计中达到最小方差的无偏估计.（本题 20 分）

解. 因为 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是 $\theta(\theta\neq 0)$ 的两个无偏估计，故 $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$. 要使 $C_1\hat{\theta}_1+C_2\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计，则

$$E(C_1\hat{\theta}_1+C_2\hat{\theta}_2)=C_1E(\hat{\theta}_1)+C_2E(\hat{\theta}_2)=C_1\theta+C_2\theta=\theta,$$

即 $C_1+C_2=1$. 又因 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 不相关，则

$$Var(C_1\hat{\theta}_1+C_2\hat{\theta}_2)=C_1^2Var(\hat{\theta}_1)+C_2^2Var(\hat{\theta}_2)=(3C_1^2+C_2^2)Var(\hat{\theta}_2).$$

求解可得，$C_1=\frac{1}{4}, C_2=\frac{3}{4}$.

三、设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\frac{|x|}{2\theta}\cdot e^{-\frac{|x|}{\theta}}(-\infty<x<+\infty)$，其中 θ 未知，$\theta>0$，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，试求：θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.（本题 30 分）

解. (1) 矩估计法：$E(X)=0, E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{|x|}{2\theta}\cdot e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{theta}}dx=6\theta^3$, 即 $\theta=\sqrt[3]{\frac{E(X^2)}{6}}$, 故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_1=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}X_i^2}{6}}.$$

(2) 极大似然估计法: 似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{|x_1|\cdots|x_n|}{(2\theta)^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}}.$$

取对数为

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln|x_i|-n\cdot\ln(2\theta)-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}.$$

求导数为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta^2}=0.$$

解得 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.

四、设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的分布律如下:

X	**-1**	**0**	**1**
P	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中 θ 未知，$0<\theta<1$, 试求:**(1)**θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$;**(2)** 讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性.（本题 30 分）

解. (1) 因为 $E(X)=0, E(X^2)=\theta$, 所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

由分布律 $p(x;\theta)=\left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|}\cdot(1-\theta)^{1-|x|}$ 可得似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=i}^{n}p(x_i;\theta)=\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\cdot(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}|x_i|}.$$

取对数为
$$\ln L(\theta)=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)\cdot\ln(\frac{\theta}{2})+(n-\sum_{i=1}^{n}|x_i|)\cdot\ln(1-\theta).$$

求导数为
$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{1-\theta}=0.$$

解得 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.

(2) 经验证可得 $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$, 即两者均为无偏估计.