第三章 二维随机变量及其分布 参考答案

一、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设二维连续型随机变量 (X_1,X_2) 与 (Y_1,Y_2) 的联合密度分别为 $p(x,y)$ 与 $g(x,y)$，令 $f(x,y)=ap(x,y)+bg(x,y)$，要使函数 $f(x,y)$ 是某个二维随机变量的联合密度，则 a,b 应满足…………………………………………………………(D)

(A) $a+b=1$　　(B) $a>0,b>0$

(C) $0\le a\le 1, 0\le b\le 1$　　(D) $a\ge 0, b\ge 0$ 且 $a+b=1$

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P(X<Y)=$…………………………………………………………(A)

(A) 1/5.　　(B) 1/3.　　(C) 2/3.　　(D) 4/5.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=1/2, P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2,$$

，则下列各式中成立的是…………………………………………(A)

(A) $P\{X=Y\}=1/2$　　(B) $P\{X=Y\}=1$

(C) $P\{X+Y=0\}=1/4$　　(D) $P\{XY=1\}=1/4$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

则 $P\{X+Y=2\}=$…………………………………………………………(B)

(A) 1/12　　(B) 1/6　　(C) 1/8　　(D) 1/2

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从标准正态分布，则…………………(D)

(A) $P\{X+Y\ge 0\}=1/4$　　(B) $P\{X-Y\ge 0\}=1/4$

(C) $P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=1/4$　　(D) $P\{\min\{X,Y\}\ge 0\}=1/4$

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1;\\ 0, & \text{else},\end{cases}$$

则 $P\{X+Y\le 1\}=$ $\underline{\frac{1}{4}}$.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim B(2,p), Y\sim B(3,p)$, 且 $P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$, 则 $P\{X+Y=1\}=$ $\underline{\frac{80}{243}}$.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从几何分布 $Ge(p)$，则 $P\{X=Y\}=$ $\underline{\frac{p}{2-p}}$.

4. 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度函数在 $x=2$ 处的值为 $\underline{\frac{1}{4}}$.

5. 用一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是次品的概率为 $\frac{1}{i+1}, i=1,2,3,$ 设 X 为 3 个零件中合格品（即非次品）的个数，$Y=\max\{X,2\}$，则 $P\{Y=2\}=$ $\underline{\quad \frac{3}{4} \quad}$.

三、已知随机变量 X_1 与 X_2 的分布律分别为：（本题 20 分）

X_1	0	1
P	3/4	1/4

X_2	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

且 $P\{X_1X_2=1\}=0$，求 $P\{X_1=X_2\}$.

解. 据题意，(X_1,X_2) 的联合分布律为

X_1 \ X_2	-1	0	1
0	1/4	1/4	1/4
1	0	1/4	0

$$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=\tfrac{1}{4}+0=\tfrac{1}{4}.$$

四、设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & \textbf{else.}\end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x;\\ 0, & \textbf{else.}\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$;

(2) 求 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$;

(3) 求 $P\{X>2Y\}$.（本题 20 分）

解. (1) 当 $0<x<1$ 时，

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

(2)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1\frac{9y^2}{x}dx, & 0<y<1;\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

(3)

$$P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}dy=\frac{1}{8}.$$

五、设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6(1-y), & 0<x<y<1; \\ 0, & \textbf{else.} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X>0.5, Y>0.5\}$**;**

(2) 求 $P\{X<0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$**.**（本题 20 分）

解. (1)

$$P\{X>0.5, Y>0.5\}=\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{y}6(1-y)dxdy=6\int_{0.5}^{1}(-y^2+1.5y-0.5)dy=\frac{1}{8}.$$

(2)

$$P\{X<0.5\}=\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{1}6(1-y)dydx=6\int_{0}^{0.5}(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2})dy=\frac{7}{8}.$$

$$P\{Y<0.5\}=\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{0.5}6(1-y)dydx=6\int_{0.5}^{1}(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{8})dy=\frac{1}{2}.$$