第六章 统计量和抽样分布 参考答案

一、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则 · (C)

(A) $X+Y$ 服从正态分布　　(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　(D) X^2/Y^2 服从 F 分布

2. 对于给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$，则以下结论中不正确的是 · (C)

(A) $u_{1-\alpha}=-u_\alpha$　　(B) $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

(C) $\chi^2_{1-\alpha}(n)=-\chi^2_\alpha(n)$　　(D) $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则下列结论不正确的是 · (B)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$ 服从 χ^2 分布　　(B) $2\left(X_n-X_1\right)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 服从 χ^2 分布　　(D) $n\left(\bar{X}-\mu\right)^2$ 服从 χ^2 分布

4. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$ 为来自总体 $N(3,16)$ 的一组简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则(A)

(A) $\bar{X}-3\sim N(0,1)$　　(B) $4(\bar{X}-3)\sim N(0,1)$　(C) $\frac{\bar{X}-3}{4}\sim N(0,1)$　　(D) $\frac{\bar{X}-3}{16}\sim N(0,1)$

5. 已知总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布 (λ 未知）, $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 是 X 的一组样本，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\lambda)^2,\ \frac{(n-1)S^2}{Var(X)}$$

中可以作为统计量的个数是 · (B)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},x\in\mathbb{R}$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一组样本，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$ ___2___.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的一组样本,$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记统计量 $T=\bar{X}-S^2$, 则 $E(T)=$ ___np^2___.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本，记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $E(T)=$ ___$\mu^2+\sigma^2$___.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的一组样本，则 $Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从的分布为 ___F(10,5)___.

三、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(80,16)$ 的一组样本，当样本容量 n 至少多大，才能使样本均值 $\bar{X}$ 大于 **78** 的概率不小于 **0.95**?（本题 20 分）

解. 因为 $\bar{X} \sim N(80, \frac{16}{n})$, 所以

$$P(\bar{X} > 78) = 1 - \Phi\left(\frac{78-80}{\sqrt{16/n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.95$$

则 $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq u_{0.95} = 1.645$, 解得 $n \geq 10.8$, 故 $n = 11$.

四、设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是取自正态总体 $N(0,4)$ 的一组样本，令 $Y = c_1(X_1 + 2X_2)^2 + c_2(X_3 + 3X_4 - 2X_5)^2$，求 Y 服从 χ^2 分布时常数 c_1, c_2 的值.（本题 20 分）

解. 计算可知，

$$E(X_1 + 2X_2) = 0, Var(X_1 + 2X_2) = 20, \frac{X_1 + 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1),$$

$$E(X_3 + 3X_4 - 2X_5) = 0, Var(X_3 + 3X_4 - 2X_5) = 56, \frac{X_3 + 3X_4 - 2X_5}{\sqrt{56}} \sim N(0,1),$$

且 $X_1 + 2X_2$ 与 $X_3 + 3X_4 - 2X_5$ 相互独立，则

$$Y = \left(\frac{X_1 + 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{X_3 + 3X_4 - 2X_5}{\sqrt{56}}\right)^2 \sim \chi^2(2),$$

即 $c_1 = \frac{1}{20}, c_2 = \frac{1}{56}$.

五、设 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一组样本，令 $Y = \frac{c(X_1+X_3+X_5)}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}$, 其中 c 是不等于零的常数，求 Y 服从 t 分布时常数 c 的值.（本题 20 分）

解. 由

$$\frac{X_1 + X_3 + X_5}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1), \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1), i = 2,4,6,$$

可得

$$\left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(3),$$

则

$$\frac{\frac{X_1+X_3+X_5}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\left(\left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2\right)/3}} \sim t(3),$$

即 $Y = \frac{X_1+X_3+X_5}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}, c = 1.$