

第九章

重积分

一元函数积分学



多元函数积分学

{ 重积分
曲线积分
曲面积分

第一节

二重积分的概念与性质

一、引例

二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、引例

1. 曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域 D

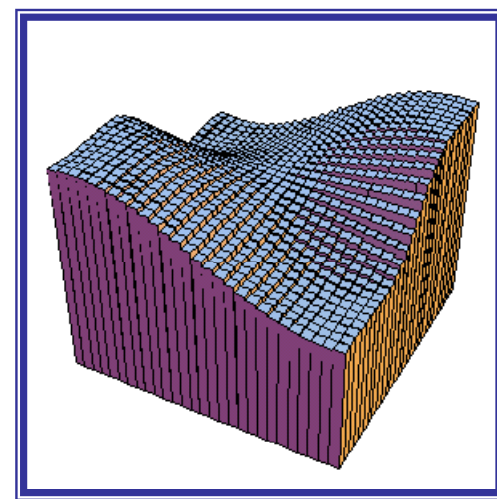
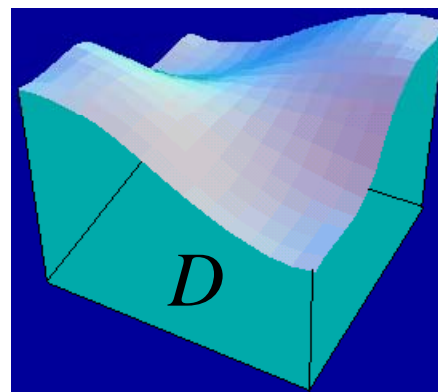
顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面
求其体积.

解法: 类似定积分解决问题的思想:

“大化小, 常代变, 近似和, 求 极限”

$$z = f(x, y)$$

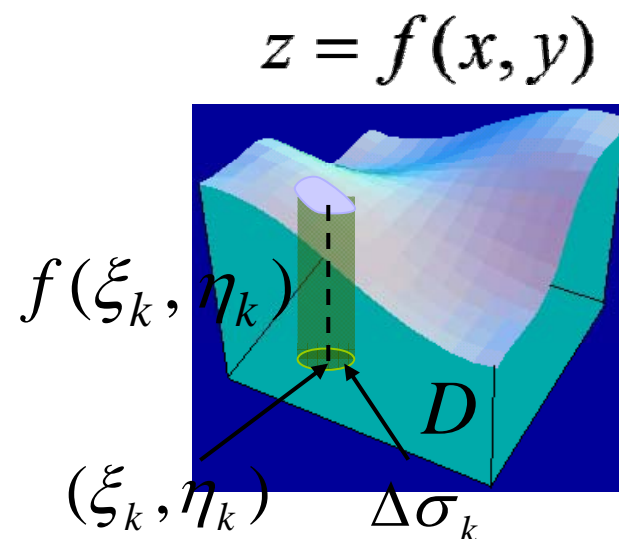


1)“大化小”

用任意曲线网分 D 为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个
小曲顶柱体



2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k) , 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

3) “近似和”

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

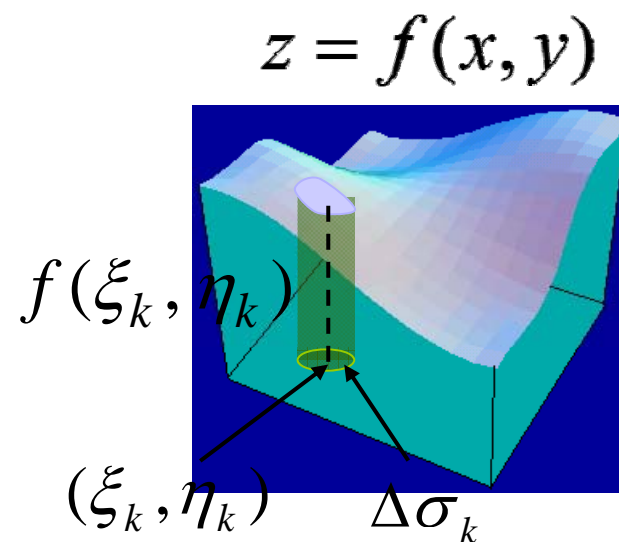
4) “取极限”

定义 $\Delta\sigma_k$ 的直径为

$$d(\Delta\sigma_k) = \max \{ \|P_1 P_2\| \mid P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \}$$

$$\text{令 } \|\Delta\sigma\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{ d(\Delta\sigma_k) \}$$

$$V = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$



2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 D , 其面密度为 $\mu(x, y) \in C$, 计算该薄片的质量 M .

若 $\mu(x, y) \equiv \mu$ (常数), 设 D 的面积为 σ , 则

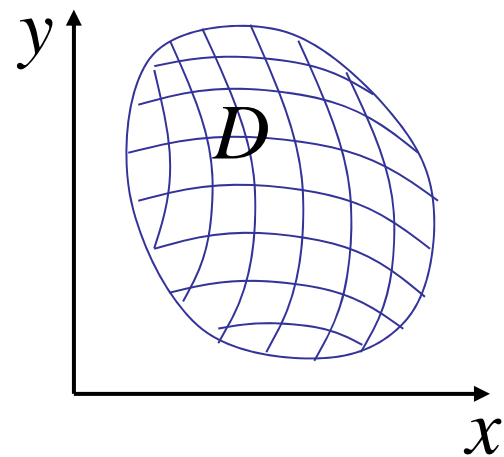
$$M = \mu \cdot \sigma$$

若 $\mu(x, y)$ 非常数, 仍可用

“大化小, 常代变, 近似和, 求 极限”
解决.

1) “大化小”

用任意曲线网分 D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$,
相应把薄片也分为小区域.



2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k) , 则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

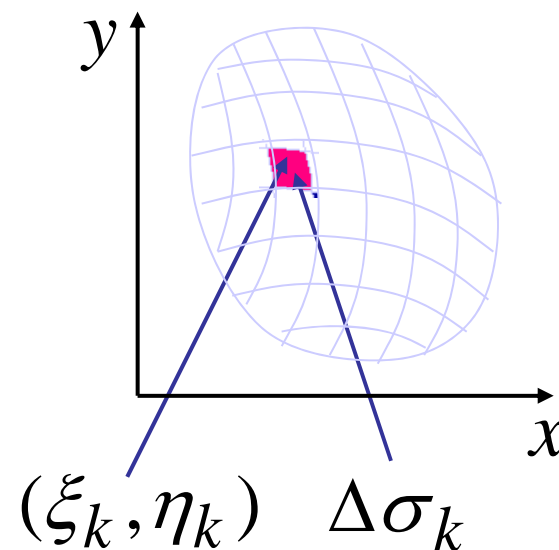
3)“近似和”

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

4)“取极限”

$$\text{令 } \|\Delta\sigma\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{d(\Delta\sigma_k)\}$$

$$M = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$



两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

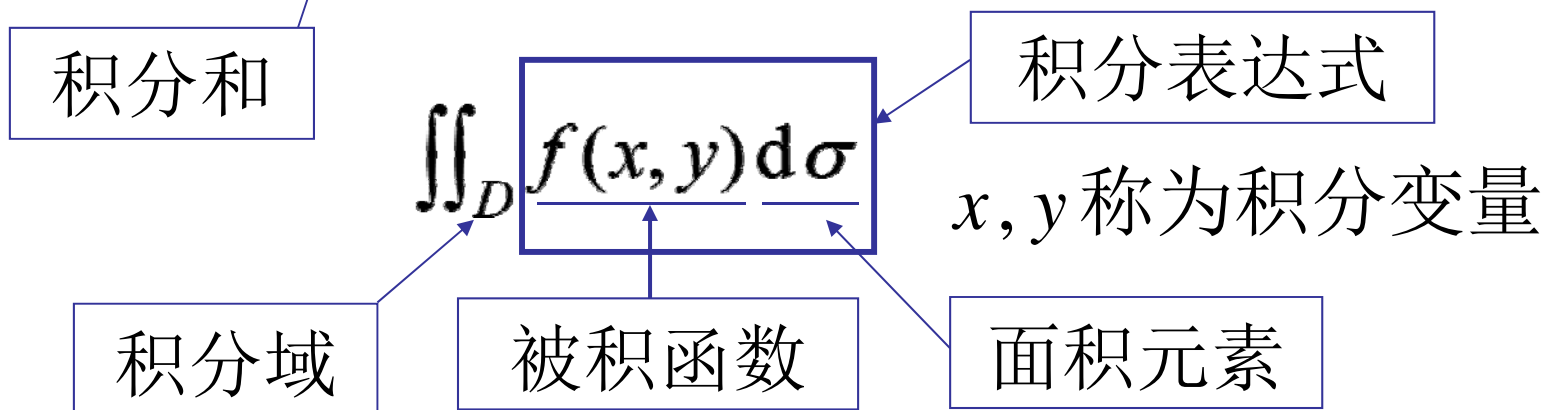
$$M = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义：设 $f(x, y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k$ ($k=1, 2, \dots, n$)，任取一点 $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta\sigma_k$ ，若存在一个常数 I ，使

$$I = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \stackrel{\text{记作}}{=} \iint_D f(x, y) d\sigma$$

则称 $f(x, y)$ 可积，称 I 为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分。



如果 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 可用平行坐标轴的直线来划分区域 D , 这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$, 因此面积元素 $d\sigma$ 也常记作 $dx dy$, 二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

引例2中平面薄板的质量:

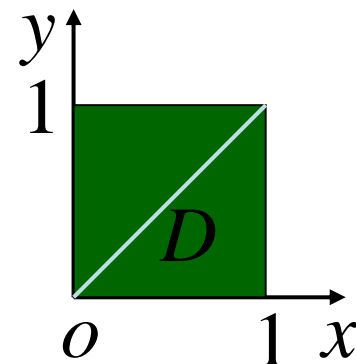
$$M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D \mu(x, y) dx dy$$

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

定理2. 若有界函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

例如, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ 在 $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$



上二重积分存在; 但 $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ 在 D 上

二重积分不存在.

三、二重积分的性质

$$1. \iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为常数})$$

$$\begin{aligned} 2. \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma \\ = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \\ &\quad (D = D_1 \cup D_2, D_1, D_2 \text{ 无公共内点}) \end{aligned}$$

4. 若在 D 上 $f(x, y) \equiv 1$, σ 为 D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma$$

5. 若在 D 上 $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma$$

特别, 由于 $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$

$$\therefore \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

6. 设 $M = \max_D f(x, y)$, $m = \min_D f(x, y)$, D 的面积为 σ ,

则有
$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 为 D 的面积, 则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma$$

证: 由性质6 可知,

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi, \eta) \in D$ 使

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$$

因此

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma, \quad \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$

其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$

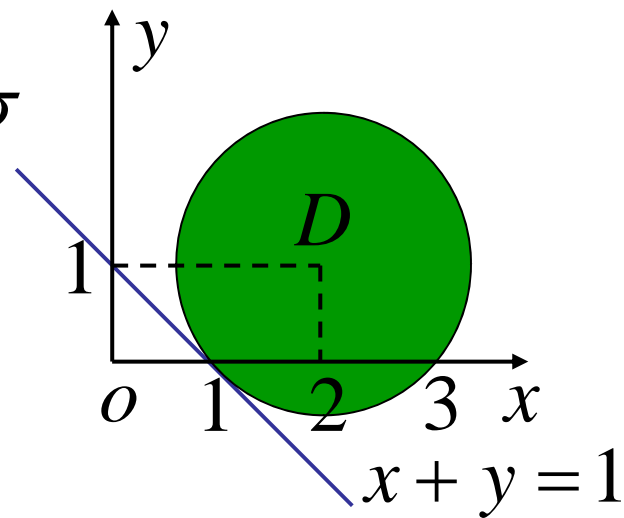
解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

它与 x 轴交于点 $(1,0)$, 与直线 $x+y=1$ 相切. 而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y \geq 1$, 从而

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$

$$\therefore \iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma$$



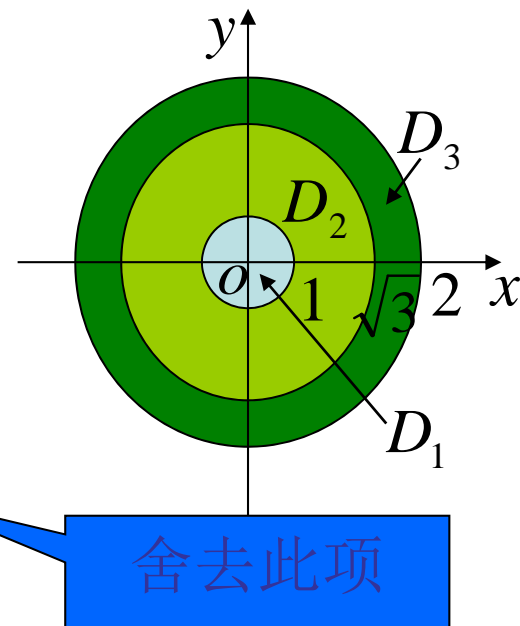
例2. 判断积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy$ 的正负号.

解: 分积分域为 D_1, D_2, D_3 , 则

$$\text{原式} = \iint_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$- \iint_{D_2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy$$

$$- \iiint_{D_3} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy$$



猜想结果为负

$$< \iint_{D_1} dx dy - \iint_{D_3} \sqrt[3]{3-1} dx dy$$

$$= \pi - \sqrt[3]{2}\pi(4-3) = \pi(1-\sqrt[3]{2}) < 0$$

例3. 估计下列积分之值

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \quad D: |x| + |y| \leq 10$$

解: D 的面积为 $\sigma = (10\sqrt{2})^2 = 200$

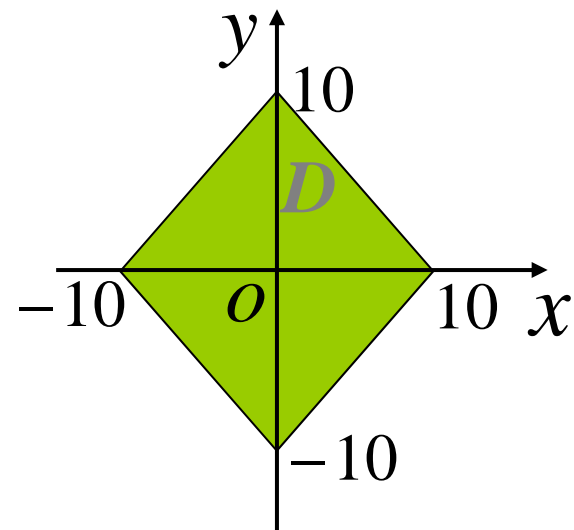
由于

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$$

积分性质5

$$\frac{200}{102} \leq I \leq \frac{200}{100}$$

$$\text{即: } 1.96 \leq I \leq 2$$

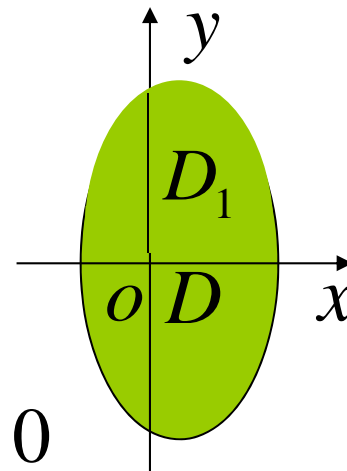


8. (1) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域上连续, 域 D 关于 x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为 D_1 , 在 D 上

若 $f(x, -y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$$

若 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$



(2) 当区域关于 y 轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时, 仍有类似结果.

如, D_1 为圆域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 在第一象限部分, 则有

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$$

(3) 如果 D 关于原点对称, 对 $(x, y) \in D$,

若 $f(-x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$

若 $f(-x, -y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

其中 $D_1 + D_2 = D$, 且 D_1, D_2 关于原点对称。

例如, $\iint_D (x + y) dx dy = 0$.

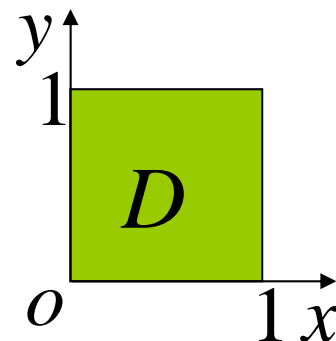
(4) 若 D 关于 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

特别地, $\iint_D \varphi(x) d\sigma = \iint_D \varphi(y) d\sigma$

例4. 证明: $1 \leq \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2}$, 其中 D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

解: 利用题中 x, y 位置的对称性, 有



$$\begin{aligned} & \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_D (\sin x^2 + \cos x^2) d\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos y^2) d\sigma \right] \\ &= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2) d\sigma = \sqrt{2} \iint_D \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) d\sigma \end{aligned}$$

$\because 0 \leq x^2 \leq 1, \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 又 D 的面积为 1, 故结论成立.

四、曲顶柱体体积的计算

设曲顶柱的底为

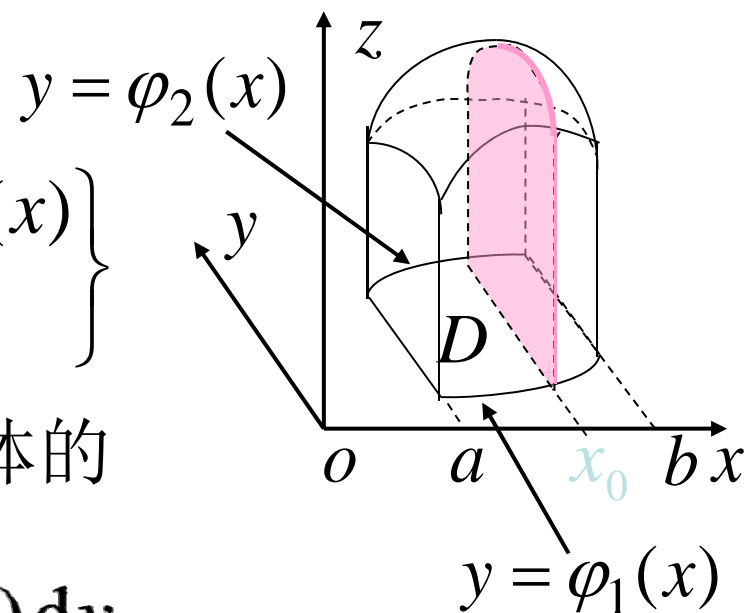
$$D = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right. \right\}$$

任取 $x_0 \in [a, b]$, 平面 $x = x_0$ 截柱体的

截面积为 $A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$

故曲顶柱体体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b A(x) dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

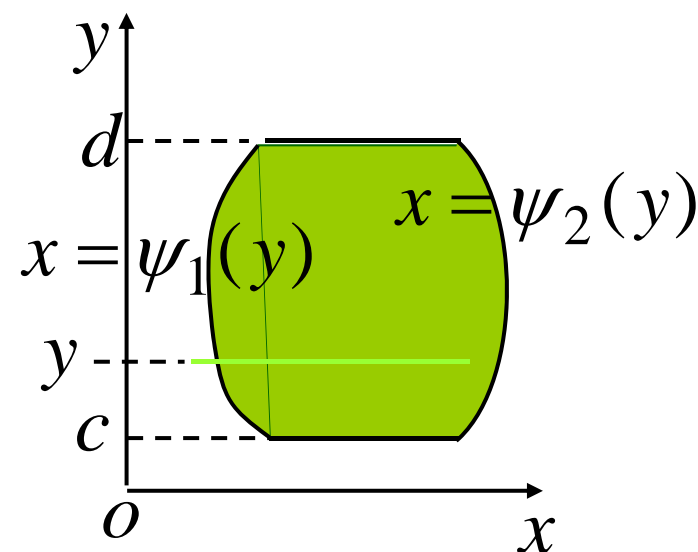


同样, 曲顶柱的底为

$$D = \{ (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \ c \leq y \leq d \}$$

则其体积可按如下两次积分计算

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ &\triangleq \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \mathrm{d}x \end{aligned}$$



例5. 求两个底圆半径为 R 的直角圆柱面所围的体积.

解: 设两个直圆柱方程为

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + z^2 = R^2$$

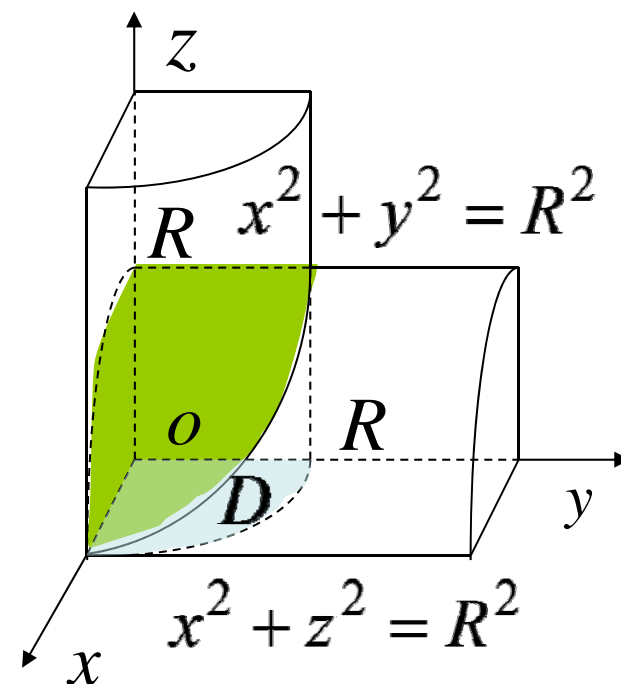
利用对称性, 考虑第一卦限部分,

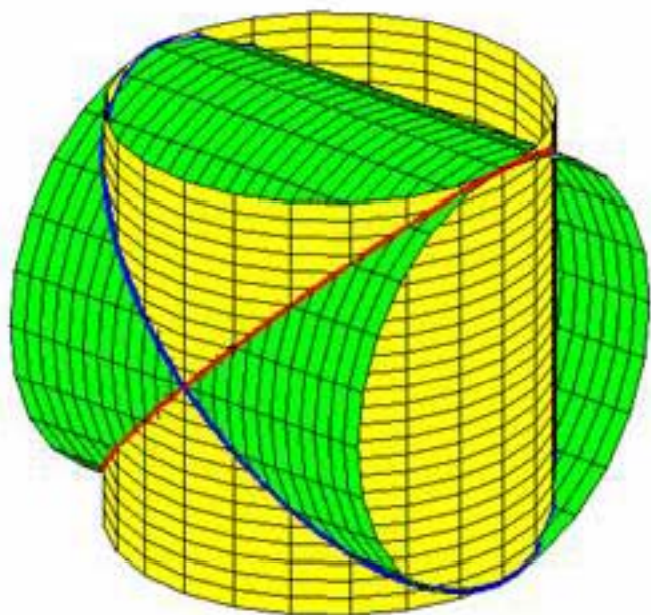
其曲顶柱体的顶为 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$(x, y) \in D: \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq R \end{cases}$$

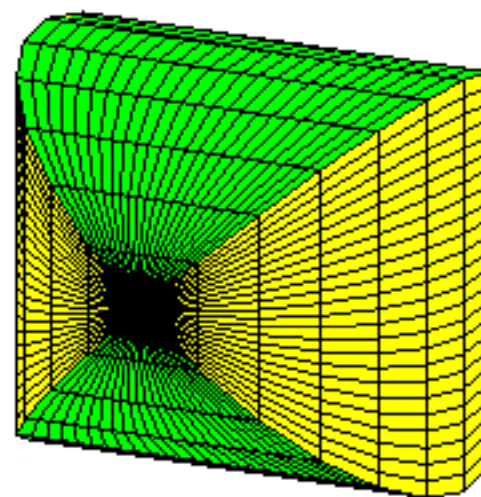
则所求体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy = 8 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\ &= 8 \int_0^R (R^2 - x^2) \, dx = \frac{16}{3} R^3 \end{aligned}$$





例5对应的完整图形称为
牟合方盖



<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%89%9F%E5%90%88%E6%96%B9%E7%9B%96>

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\|\Delta\sigma\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (d\sigma = dx dy)$$

2. 二重积分的性质（与定积分性质相似）

3. 曲顶柱体体积的计算 —— 二次积分法

思考与练习

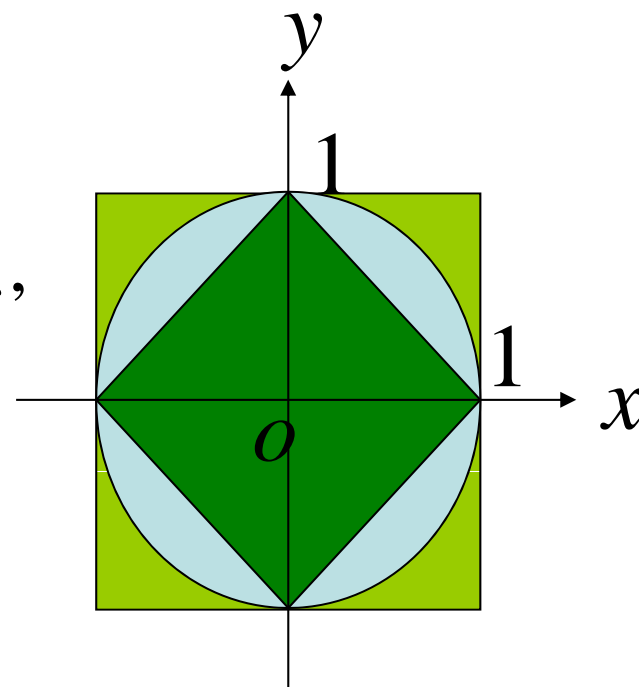
1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |xy| \, dx \, dy \quad I_2 = \iint_{|x|+|y| \leq 1} |xy| \, dx \, dy$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |xy| \, dx \, dy$$

解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,
由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$



2. 设 D 是第二象限的一个有界闭域, 且 $0 < y < 1$, 则

$$I_1 = \iint_D yx^3 \, d\sigma, \quad I_2 = \iint_D y^2 x^3 \, d\sigma, \quad I_3 = \iint_D y^{1/2} x^3 \, d\sigma$$

的大小顺序为 (D)

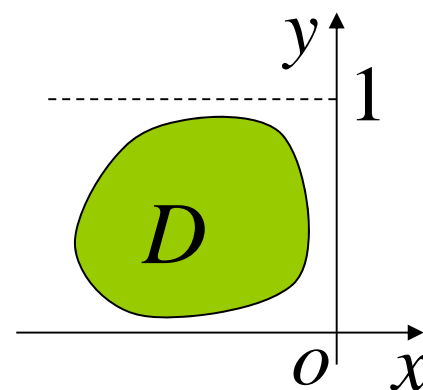
(A) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$; (B) $I_2 \leq I_1 \leq I_3$;

(C) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$; (D) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$.

提示: 因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \leq y \leq y^{1/2}$;

又因 $x^3 < 0$, 故在 D 上有

$$y^{1/2} x^3 \leq yx^3 \leq y^2 x^3$$



3. 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$

解:
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin y + \cos y] \mathrm{d}y \\ &= [-\cos y + \sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

备用题

1. 估计 $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ 的值, 其中 D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

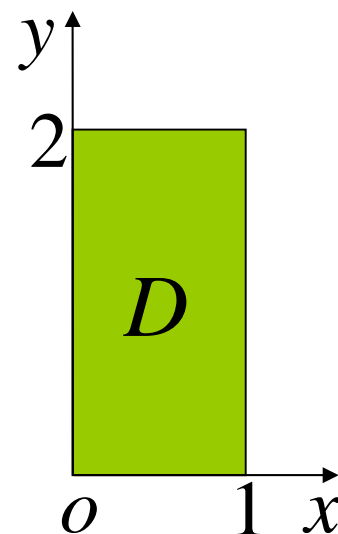
解: 被积函数 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2 + 16}}$

D 的面积 $\sigma = 2$

在 D 上 $f(x, y)$ 的最大值 $M = f(0, 0) = \frac{1}{4}$

$f(x, y)$ 的最小值 $m = f(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$

故 $\frac{2}{5} \leq I \leq \frac{2}{4}, \therefore 0.4 \leq I \leq 0.5$



2. 判断 $\iint_{\sigma \leq |x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$ ($\sigma > 0$) 的正负.

解: $\sigma \leq |x| + |y| \leq 1$ 时,

$$0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$$

故 $\ln(x^2 + y^2) \leq 0$

$$|x| + |y| < 1 \quad \ln(x^2 + y^2) < 0$$

$$\iint_{\sigma \leq |x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0$$

