第四节

对面积的曲面积分

一、第一型曲面积分的概念与性质

二、第一型曲面积分的计算法

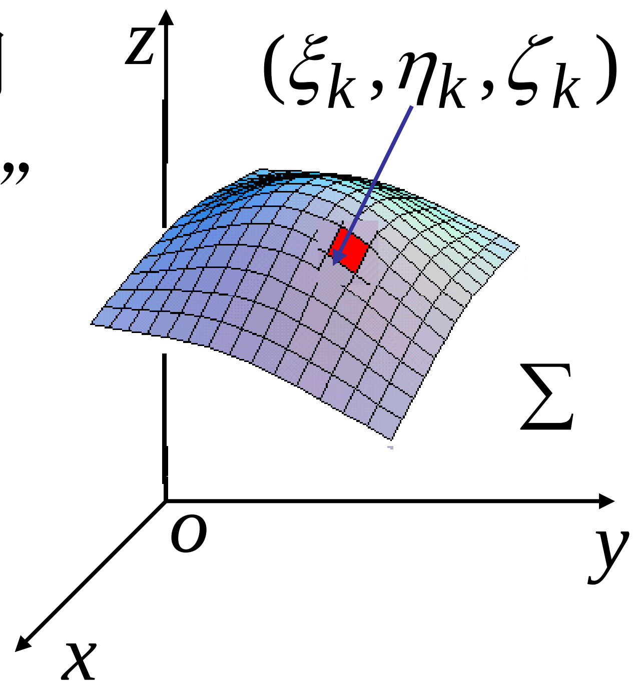
一、第一型曲面积分的概念与性质

引例： 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

的方法, 可得



$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, “乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S$

第一型曲面积分与第一型曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续, 则第一型曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若Σ是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面Σ_1,Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设k_1,k_2为常数,则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z)\pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$$
$$=k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、第一型曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

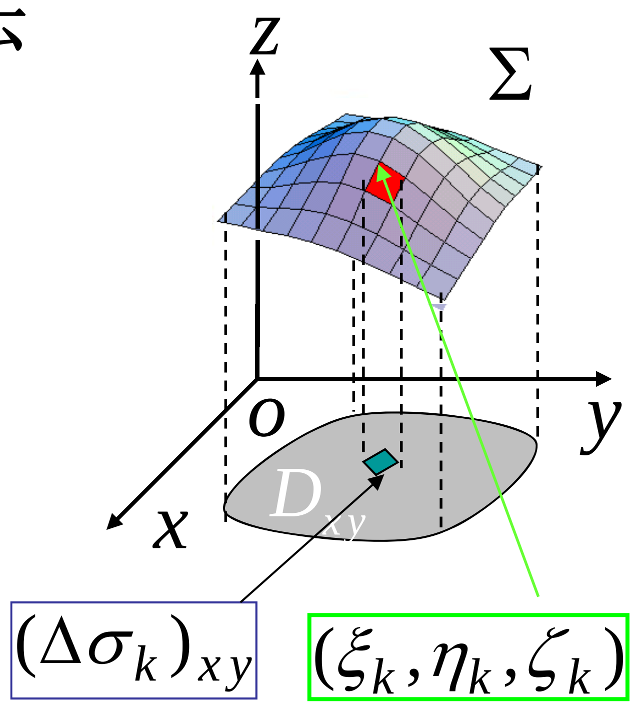
$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\ 2}(x, y) + z_y^{\ 2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^2(\xi_k', \eta_k')+z_y^2(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\underline{\xi_k, \eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x^2(\underline{\xi_k', \eta_k'})+z_y^2(\underline{\xi_k', \eta_k'})}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^2(\xi_k, \eta_k)+z_y^2(\xi_k, \eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$$

或 $$y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

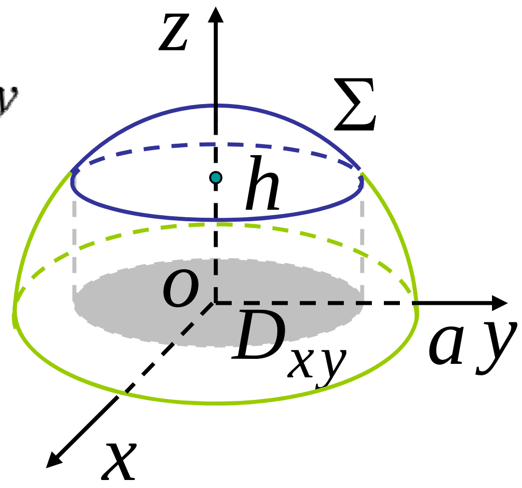
2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下dS的表达式 , 也可将第一型曲面积分转化为对参数的二重积分. (见本节后面的例4, 例5)

例1. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,\ (x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



$$\therefore \iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

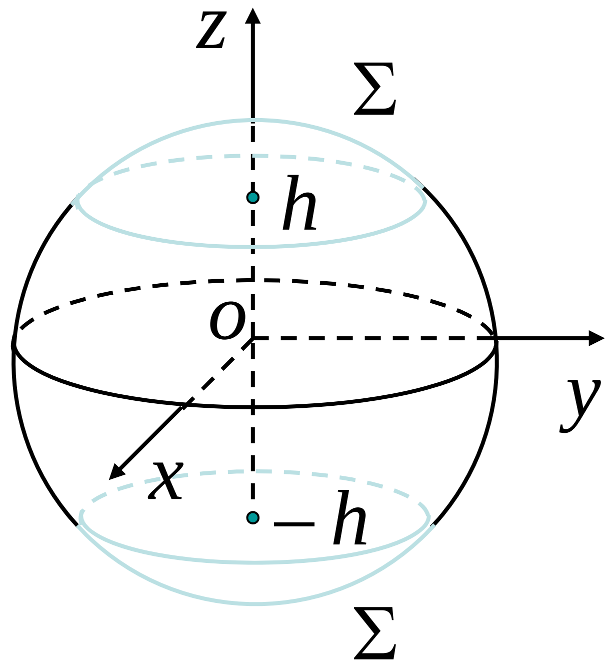
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

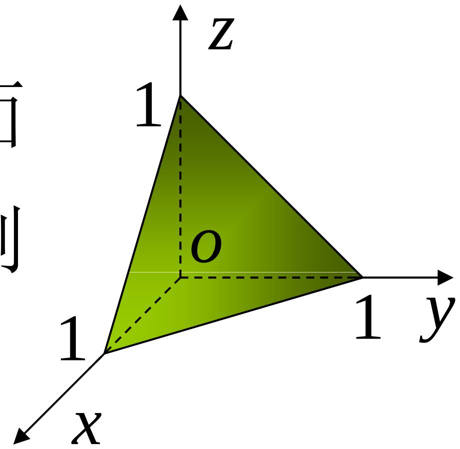
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad 0 \qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\ 4\pi a\ln\frac{a}{\mathrm{h}}\ )$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$ 在平面 $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

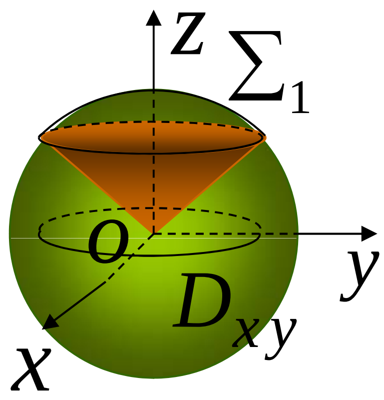
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y,\ \ (x,y)\in D_{xy} : \begin{cases} 0\le y\le 1-x \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当}z\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当}z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{1}{2}a.$

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leq\frac{1}{2}a^2\right\}$,则

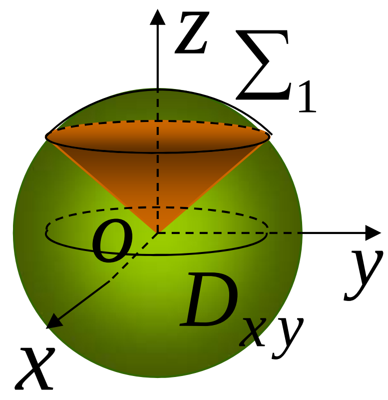
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$



思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{当}\ |z|\ge\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & \text{当}\ |z|<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

计算结果如何？

例4. 求半径为*R* 的均匀半球壳 Σ 的重心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $x_G=y_G=0$, 而

$$z_G=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

用球坐标

$$z=R\cos\varphi$$

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

思考题: 例 3 是否可用直角坐标计算？

例5. 计算$I=\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{\lambda - z}\ (\lambda > R)$, $\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: 取球面坐标系, 则$\Sigma: z = R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\varphi}{\lambda - R\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi R \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\lambda - R\cos\varphi)}{\lambda - R\cos\varphi}$$

$$= 2\pi R \ln \frac{\lambda + R}{\lambda - R}$$

例6. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oiint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\cdot x_G\cdot\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\cdot 1\cdot 4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

利用重心公式

$$x_G=\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S\Big/\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

试试用球面坐标计算!

例7. 计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是介于平面

$z=0, z=H$之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)

两片, 则计算较繁.

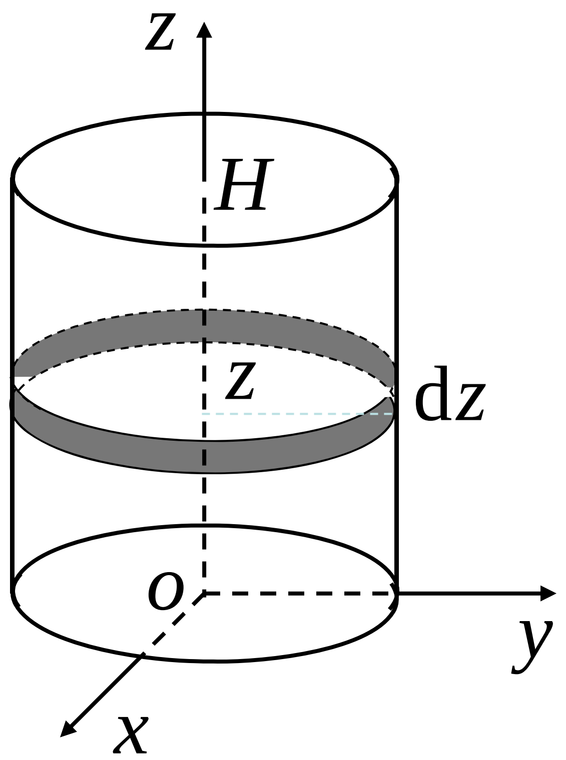
解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$



例8. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xoy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S .

解: $S=\iint_\Sigma \mathrm{d}S$

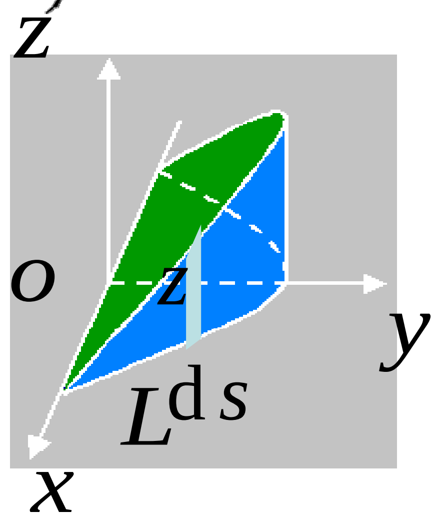
$L: x=\sqrt{5}\cos t\,,\; y=3\sin t\quad (0\le t\le \pi)$

取 $\mathrm{d}\,S = z\,\mathrm{d}\,s$

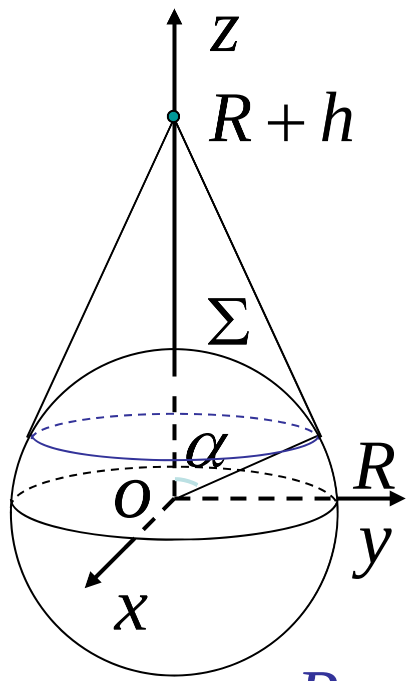
$$=\int_L z\,\mathrm{d}s \;=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\;\mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$



例9. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面高度 $h = 36000$ km, 运行的角速度与地球自转角速度相同, 试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比. (地球半径 $R = 6400$ km)



解: 建立坐标系如图, 覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α, 利用球坐标系, 则

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

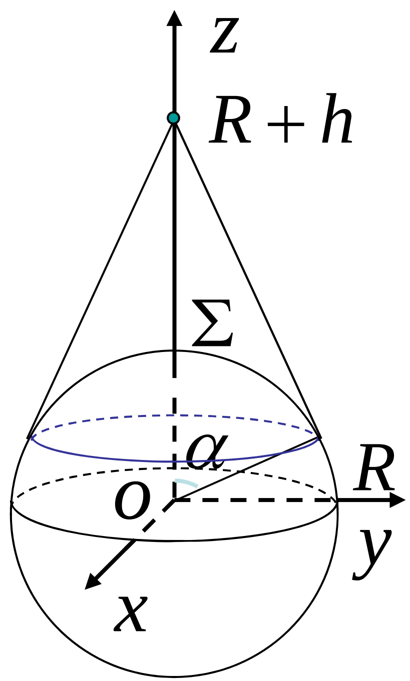
$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2}=\frac{h}{2(R+h)}$$

$$=\frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6}\approx 40.5\,\%$$



由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $1/3$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $2\pi/3$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A.

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z＝1以上部分Σ 的质量 M .

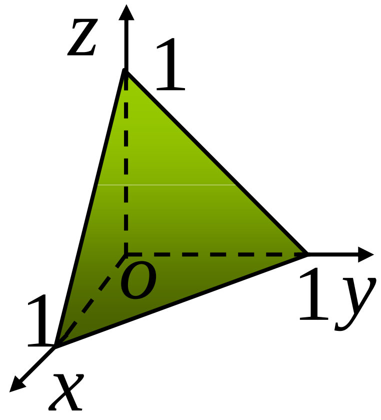
解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 2$，故

$$M=\iint_{\Sigma}\mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)=13\pi$$

2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$

$$\therefore I=(\sqrt{3}+1)\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y+$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$