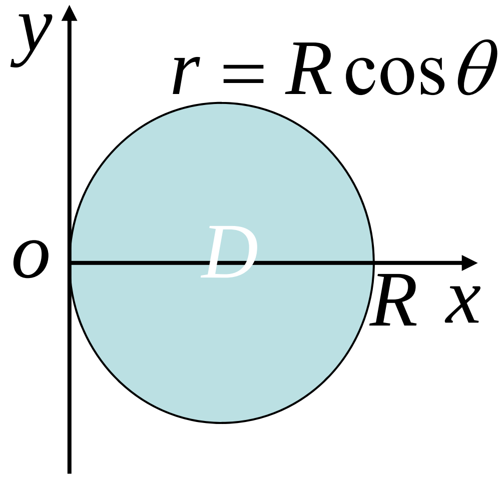
重积分习题课

P80 4(2) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,

其中D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D:\begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$

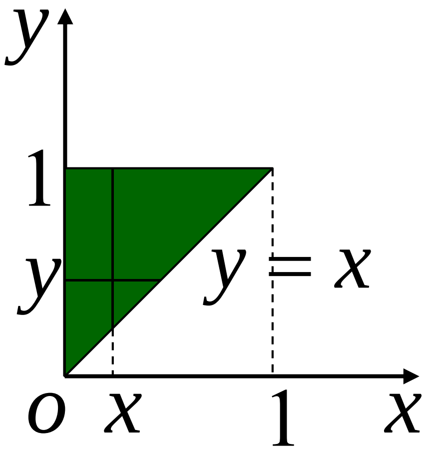
$$= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$$

P101. 3.

设$f(x)\in C[0,1]$,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

求$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.



提示: 交换积分顺序后, x , y互换

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

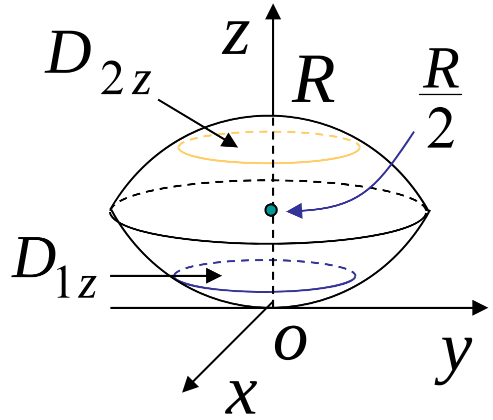
$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=A^2$$

P101. 5(1).计算积分$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中Ω是两个球

$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

($R>0$)的公共部分.



提示: 由于被积函数缺 x , y ,

利用"先二后一"计算方便 .

$$原式=\int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{1z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{2z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

P101. 5(3). 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解法1 利用“先二后一”计算.

$$D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^c \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

***解法2**　利用三重积分换元法. 令

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = cr\cos\varphi$$

则

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2\sin\varphi, \quad \Omega' : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} |J|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\iiint_{\Omega'} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi abc$$

例**1.** 设 $f(u)\in C,\ f(0)=0,\ f'(0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$,

其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

解: 在球坐标系下

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^{t}f(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$F(0)=0$$

利用洛必达法则与导数定义, 得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 左端 $=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x)+f^2(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \boxed{D:\begin{cases} a\le x\le b \\ a\le y\le b\end{cases}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

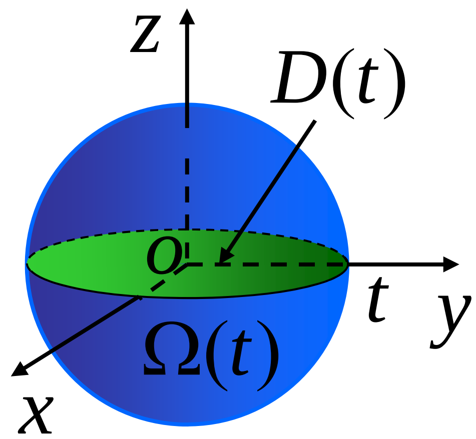
$$=\frac{b-a}{2}\left(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b f^2(y)dy\right)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx=\text{右端}$$

例3. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$. (03考研)

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t\,f(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$, 故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2>0$

因 $$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$$g(t)>g(0)=0\qquad(t>0)$$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0.$