第十二章

微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y — 积分问题

推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y

— 微分方程问题

第一节 微分方程的基本概念

引例 $\begin{cases} \text{几何问题} \\ \text{物理问题} \end{cases}$

↓

微分方程的基本概念

引例1. 一曲线通过点(1,2) ,在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$, 求该曲线的方程 .

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ (C为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2. 列车在平直路上以 $20\ \mathrm{m/s}$ 的速度行驶, 制动时获得加速度 $a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

解: 设列车在制动后 t 秒行驶了s 米 , 即求 $s = s\,(t)$.

已知 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s=-0.2\,t^2+C_1\,t+C_2$

利用后两式可得 $C_1=20,\ C_2=0$

因此所求运动规律为 $s=-0.2\,t^2+20\,t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住 , 以及制动后行驶了多少路程 .

微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程** .

分类 $\begin{cases} \text{常微分方程 (本章内容)} \\ \text{偏微分方程} \end{cases}$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶.**

一般地 , n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数.

$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{通解} — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同. \\ \textbf{特解} — 不含任意常数的解, 其图形称为\textbf{积分曲线}. \end{array} \right.$

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的**初始条件(或初值条件)**:

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

引例1 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=2 \end{array} \right.$　　引例2 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0\,,\quad \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0}=20 \end{array} \right.$

通解:　$y=x^2+C$　　$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

特解:　$y=x^2+1$　　$s=-0.2t^2+20t$

例1. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2为常数)
是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + k^2 x = 0$ 的解，并求满足初始条件

$$x\Big|_{t=0} = A, \left.\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}\right|_{t=0} = 0$$ 的特解 .

解: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt$

$$= -k^2 (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) = -k^2 x$$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为

$$x = A \cos kt$$

例2. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分，求所满足的微分方程 .

解: 如图所示，点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令 $Y = 0$, 得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$\therefore \quad x + yy' = -x$， 即 $yy' + 2x = 0$