第五节
第二型曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

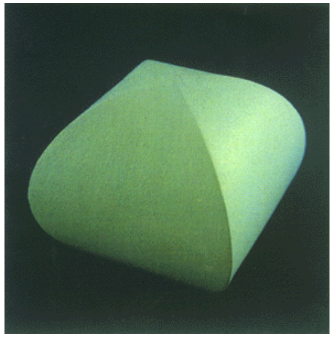
二、第二型曲面积分的概念与性质

三、第二型曲面积分的计算法

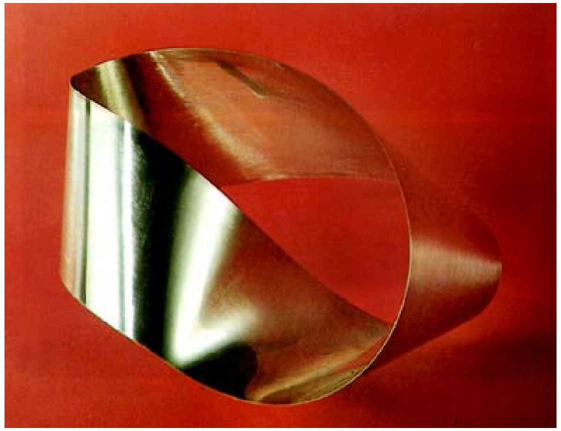
四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

• 曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

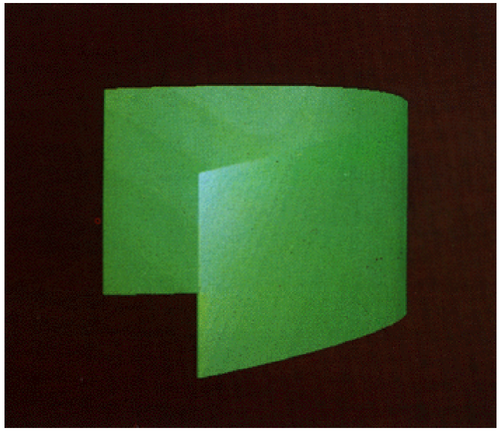


曲面分内侧和外侧

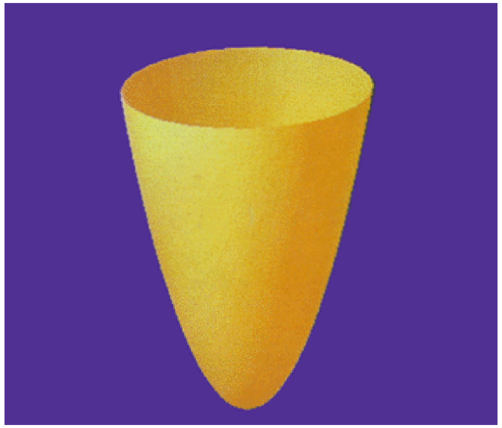


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向表示:

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xoy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\geq 0$, 则规定

$$\Delta S\cos\gamma=(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma>0时\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma<0时\\ 0, & 当\cos\gamma\equiv 0时\end{cases}$$

类似可规定 $\Delta S\cos\alpha=(\Delta S)_{yz}$, $\Delta S\cos\beta=(\Delta S)_{zx}$

二、 第二型曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量Φ .

分析: 若 Σ 是面积为S 的平面,

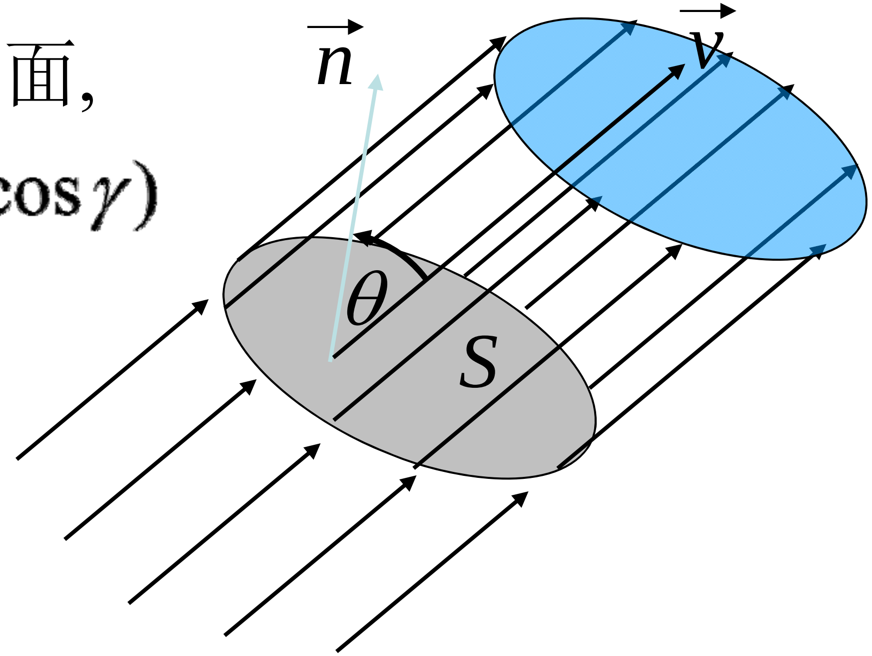
法向量: $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

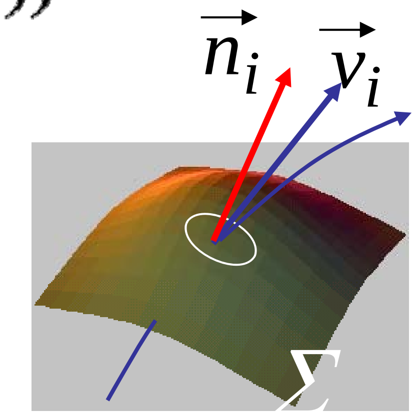
则流量

$$\Phi=S\cdot|\vec{v}|\cos\theta$$

$$=S\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$



对一般的有向曲面Σ，对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$



用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$

设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Big]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

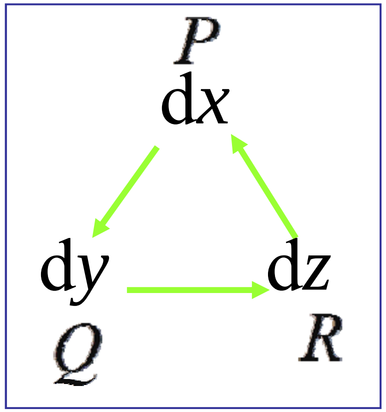
2. 定义. 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 若对$\Sigma$ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二型曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

P, Q, R 叫做被积函数; Σ 叫做积分曲面.



$\iint_{\Sigma} P \mathrm{d} y \mathrm{d} z$称为$P$ 在有向曲面Σ上对 y, z 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} Q \mathrm{d} z \mathrm{d} x$ 称为Q 在有向曲面Σ上对 z, x 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} R \mathrm{d} x \mathrm{d} y$ 称为R 在有向曲面Σ上对 x, y 的曲面积分.

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P \mathrm{d} y \mathrm{d} z + Q \mathrm{d} z \mathrm{d} x + R \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

若记 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d} S} = \vec{n} \mathrm{d} S = (\mathrm{d} y \mathrm{d} z, \mathrm{d} z \mathrm{d} x, \mathrm{d} x \mathrm{d} y)$

$$\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

则对第二型曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 用 Σ^- 表示 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

三、第二型曲面积分的计算法

定理：设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧，$R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证：$\displaystyle\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$\because \Sigma$ 取上侧，$\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$,则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

- 若 $\Sigma: y = y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$,则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

计算第二型曲面积分也可以利用对称性：

设有向曲面Σ关于xOy平面对称 (包括曲面方向对称)，当$f(x,y,z)$是z的<u>奇函数</u>时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中Σ_1为Σ中$z \geq 0$的部分；当$f(x,y,z)$是z的<u>偶函数</u>时，

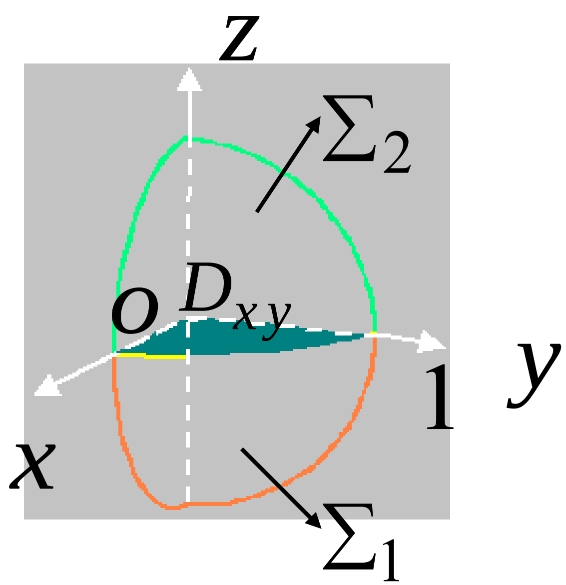
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

在有向曲面Σ关于zOx及关于yOz对称时， 有类似的结果.

特别注意, 由于曲面的方向性, 对称性与以往是不同的！ 下面例1将验证这个性质.

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第八卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:



根据对称性 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0$

解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} xy\,(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$+ \iint_{D_{xy}} xy\,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2 \sin\theta \cos\theta \sqrt{1-r^2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$

例2. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x+y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

解：因Σ关于yOz平面对称， y^2, z^3 关于 x 都是偶函数,

所以 $\oiint_{\Sigma}(y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$. 设 Σ_1 为Σ中 $x\geq 0$ 的部分,

D_{yz} 为 Σ_1 在 yOz 上的投影, 根据对称性，有

$$\oiint_{\Sigma}(x+y^2+z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

例**3.** 设S 是球面$x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算

$$I=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

解: 易证 $\iint_S \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}=0$

$$\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},$$

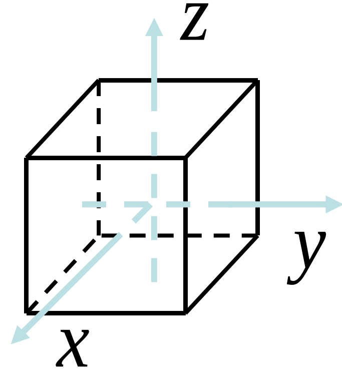
$$\therefore I=\iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}=-4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\tan 1$$

例4. 计算$\iint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$\text{原式}=3\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},|y|\le\frac{a}{2})$ 取下侧

$$=3\left[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3\left[\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3a^3$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,\big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\,\big]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

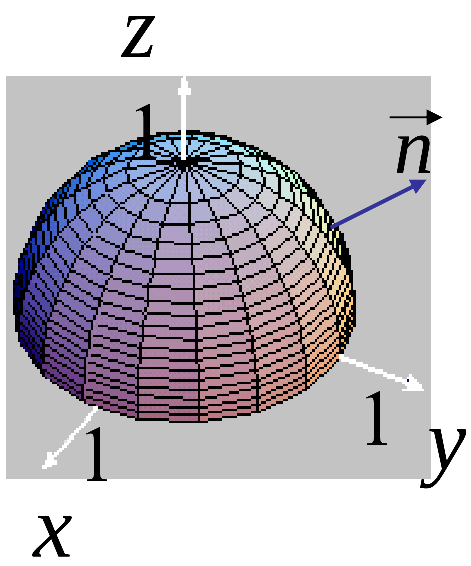
$$dS\cos\gamma = dxdy$$

$$dS\cos\beta = dzdx$$

$$dS\cos\alpha = dydz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dxdz}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}}$$

例5. 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.



解: $I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$$=\iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

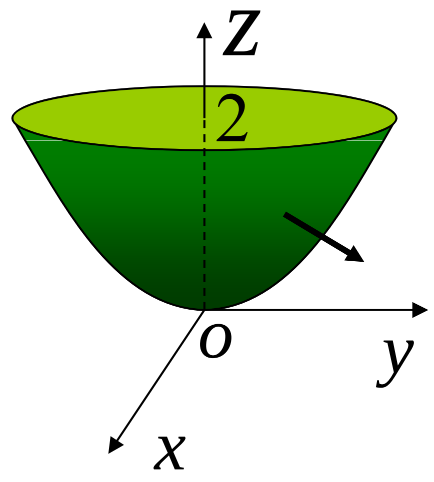
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$

旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$

及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

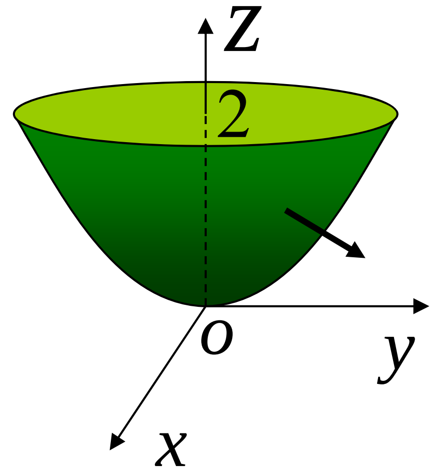
$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \qquad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\iint_{\Sigma}\left[\,(z^2+x)\,(-x)-z\,\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得



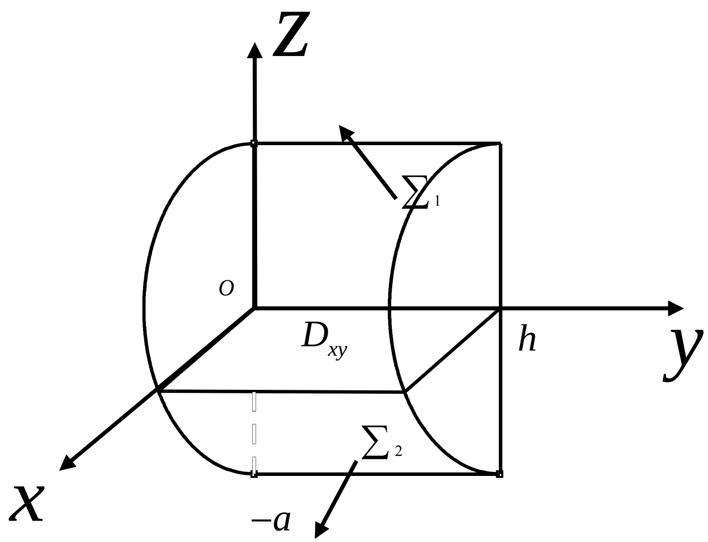
$$\text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

例7. 计算$I=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$,其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geq 0$ 的一半被平面 $y=0$ 和 $y=h$ $(h>0)$ 所截下部分的外侧.



解: 先计算 $I_1=\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases}\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2}, \\ \Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2},\end{cases}$$

$$(x,y)\in D_{xy}:\ 0\leq x\leq a, 0\leq y\leq h,$$

根据对称性，有

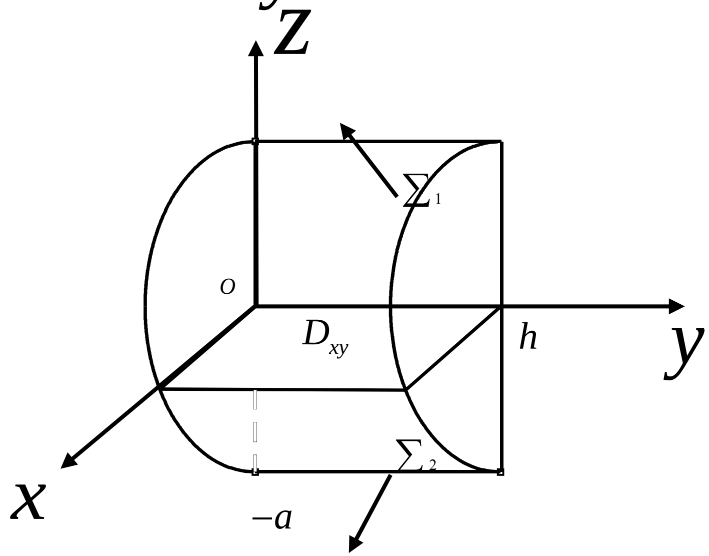
$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_1 = 2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^h xy\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^h y\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}h^2a^3.$$



Σ在 yOz 平面上的投影区域为

$D_{yz}: 0 \le y \le h, -a \le z \le a$，$\Sigma$的正侧为前侧，故

$$I_2 = \iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} z\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

注意到积分区域 D_{yz} 关于 y 轴对称，被积函数是z 的奇函数，于是 $I_2 = 0$.

$$I_1 = \frac{1}{3}h^2a^3, \qquad I_2 = 0.$$

Σ在 zOx 平面上投影为一曲线， $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0$, 因此

$$I_3 = \iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0.$$

最终得到：

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3}h^2a^3 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{3}h^2a^3$$

在例7中, 将Σ的方程看成 $x=\sqrt{a^2-z^2}$, 取前侧,

则有 (将Σ投影到yOz平面)

$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(yz\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}+z\sqrt{a^2-z^2}+z^2\cdot 0\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h y\,\mathrm{d}y\int_{-a}^{a} z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^2a^3.$$

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)//\left(1,0,x_z=\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

例8. 设函数 $f(x,y,z)$连续，Σ：$x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧. 试求

$$I=\iint_{\Sigma}(f+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2f+y)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解： Σ 的方程为$z=1-x+y$, $n\,/\!/\,(1,-1,1)$, D_{xy}为 Σ 在xOy平面上的投影，于是

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\left[(f+x)+(2f+y)(-1)+(f+z)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$
- $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质： $$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系： $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考：

两类曲面积分的定义一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾？

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程

(方程不同时分片积分)

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：面积投影}\\ \text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注：二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取“+”, 下侧取“−”)

类似可考虑在 *yoz* 面及 *zox* 面上的二重积分转化公式 .

备用题　求$I=\oiint_{\Sigma}\left(\dfrac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right)$，其中

$\Sigma:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 取外侧 .

解: $\oiint_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}=\dfrac{2}{c}\iint_{D_{x,y}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

注意±号

$D_{x,y}:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$

$x=a\,r\cos\theta\,,\ y=b\,r\sin\theta\,,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=abr\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$

$$=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}\,r=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\therefore \quad I = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$