

# 第十章

## 曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间域	平面域	空间域	曲线域	曲面域

曲线积分 { 对弧长的曲线积分—第一型曲线积分  
对坐标的曲线积分—第二型曲线积分

曲面积分 { 对面积的曲面积分—第一型曲面积分  
对坐标的曲面积分—第二型曲面积分

# 第一节

## 第一型曲线积分

一、第一型曲线积分的概念与性质

二、第一型曲线积分的计算法

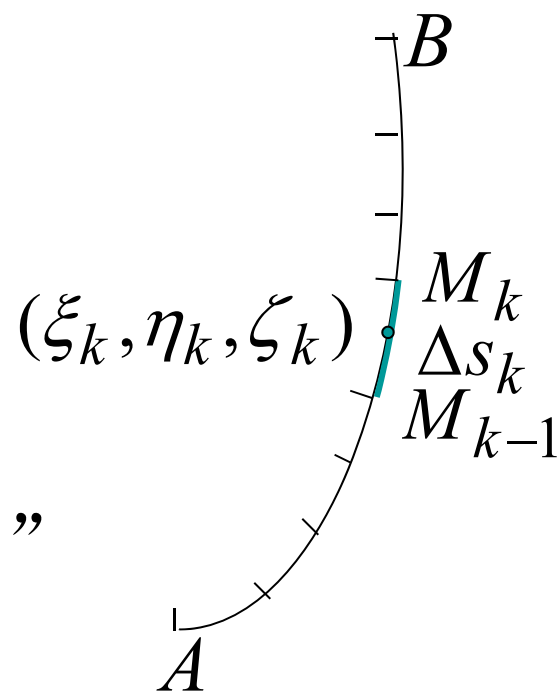
# 一、第一型曲线积分的概念与性质

## 1. 引例1: 曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为 $\widehat{AB}$ , 其线密度为 $\rho(x, y, z)$ , 为计算此构件的质量, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得 
$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$



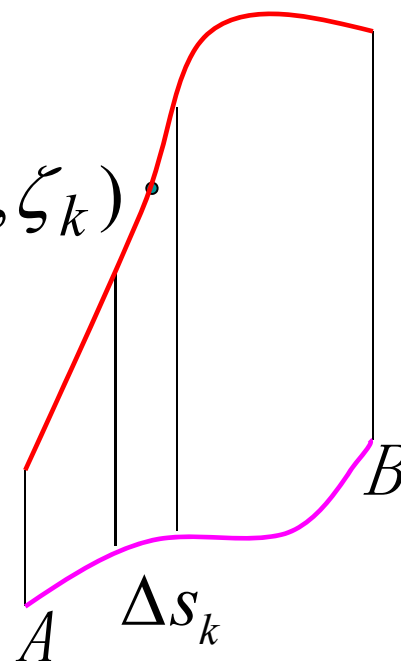
引例2: 曲顶柱面的侧面积

假设曲顶柱面的准线为弧段为 $\widehat{AB}$ ,  
顶为 $u = f(x, y, z)$ ,

为计算此柱面的面积, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得 
$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$

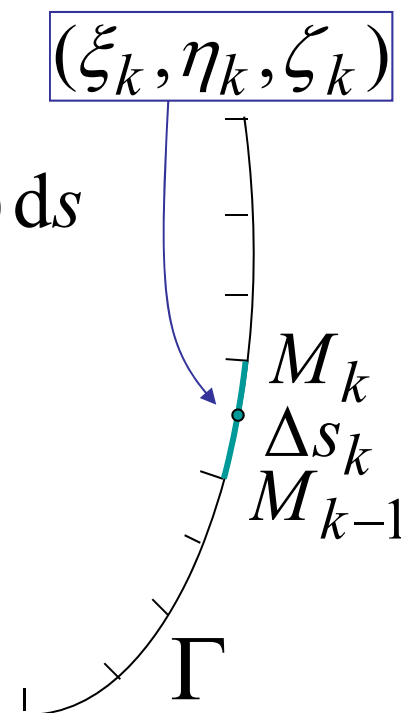


## 2. 定义

设  $\Gamma$  是空间中一条有限长的光滑曲线,  $f(x, y, z)$  是定义在  $\Gamma$  上的一个有界函数, 若通过对  $\Gamma$  的任意分割和对局部的任意取点, 下列“乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \stackrel{\text{记作}}{=} \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$$

都存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在曲线  $\Gamma$  上对弧长的曲线积分, 或第一型曲线积分.  $f(x, y, z)$  称为被积函数,  $\Gamma$  称为积分弧段.



曲线形构件的质量  $M = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds$

如果  $L$  是  $xoy$  面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

如果  $L$  是闭曲线, 则记为  $\oint_L f(x, y) ds$ .

思考:

(1) 若在  $L$  上  $f(x, y) \equiv 1$ , 问  $\int_L ds$  表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例?

否! 对弧长的曲线积分要求  $ds \geq 0$ , 但定积分中  $dx$  可能为负.

### 3. 性质

$$(1) \int_{\Gamma} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] ds \\ = \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \pm \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds$$

$$(2) \int_{\Gamma} k f(x, y, z) ds = k \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(3) \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds \\ (\Gamma \text{ 由 } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ 组成})$$

$$(4) \int_{\Gamma} ds = l \quad (l \text{ 为曲线弧 } \Gamma \text{ 的长度})$$

(5) 对称性类似重积分, 例如  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ , 若  $\Gamma$  关于  $y$  轴对称,  $f$  关于  $x$  为奇函数, 则偶倍奇零。

## 二、第一型曲线积分的计算法

基本思路：求曲线积分  $\xrightarrow{\text{转化}}$  计算定积分

定理：设  $f(x, y)$  是定义在光滑曲线弧

$$L: x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

上的连续函数, 则曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

证：根据定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$



设各分点对应参数为  $t_k (k=0,1,\cdots,n)$ ,

点  $(\xi_k, \eta_k)$  对应参数为  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ,

$$\begin{aligned}\Delta s_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \sqrt{\varphi'^2(\tau'_k) + \psi'^2(\tau'_k)} \Delta t_k, \quad \tau'_k \in [t_{k-1}, t_k]\end{aligned}$$

则  $\int_L f(x, y) ds$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau'_k) + \psi'^2(\tau'_k)} \Delta t_k$$

↓ 注意  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  连续

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L f(x, y) ds \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt\end{aligned}$$

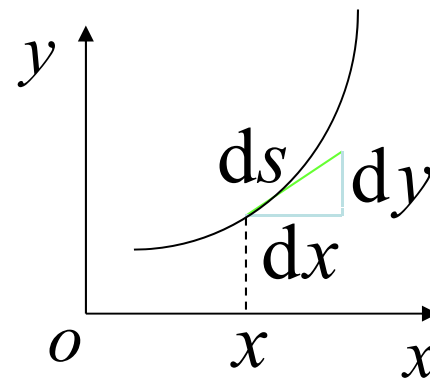
说明:

(1)  $\because \Delta s_k > 0, \therefore \Delta t_k > 0$ , 因此积分限必须满足  $\alpha < \beta$  !

(2) 注意到

$$\begin{aligned}ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt\end{aligned}$$

因此上述计算公式相当于“换元法”.



如果曲线  $L$  的方程为  $y = \psi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

如果方程为极坐标形式:  $L: r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ), 则

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x = \phi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

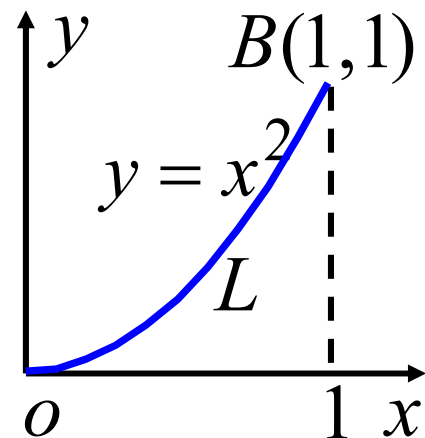
则  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt$$

例1. 计算  $\int_L x ds$ , 其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上点  $O(0,0)$  与点  $B(1,1)$  之间的一段弧.

解:  $\because L: y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_L x ds &= \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)\end{aligned}$$



例2. 计算  $\int_L (x+y) \mathrm{d}s$ , 其中  $L$  是以  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$  为顶点的三角形的边界.

解: 因  $L$  由  $OA, AB, BO$  三条线段连接而成, 故

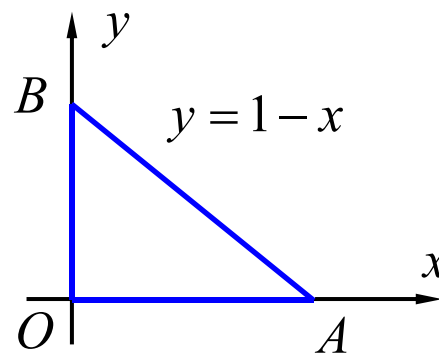
$$\begin{aligned} \int_L (x+y) \mathrm{d}s &= \int_{OA} (x+y) \mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{AB} (x+y) \mathrm{d}s + \int_{BO} (x+y) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\int_{OA} (x+y) \mathrm{d}s = \int_0^1 (x+0) \sqrt{1+0^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{AB} (x+y) \mathrm{d}s = \int_0^1 [x+(1-x)] \sqrt{1+(-1)^2} \mathrm{d}x = \sqrt{2}$$

$$\int_{BO} (x+y) \mathrm{d}s = \int_0^1 (0+y) \sqrt{1+0^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \quad \text{从而}$$

$$\int_L (x+y) \mathrm{d}s = \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + 1$$

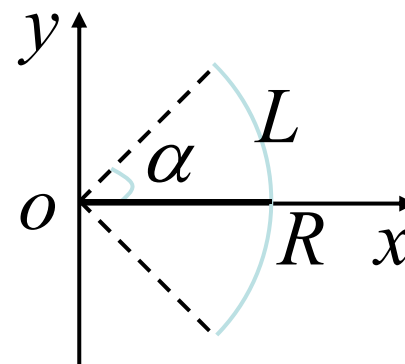


**例2.** 计算半径为  $R$ , 中心角为  $2\alpha$  的圆弧  $L$  对于它的对称轴的转动惯量  $I$  (设线密度  $\mu = 1$ ).

**解:** 建立坐标系如图, 则

$$I = \int_L y^2 \, ds$$

$$\left| L: \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha) \right.$$



$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} \, d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta \, d\theta = 2R^3 \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

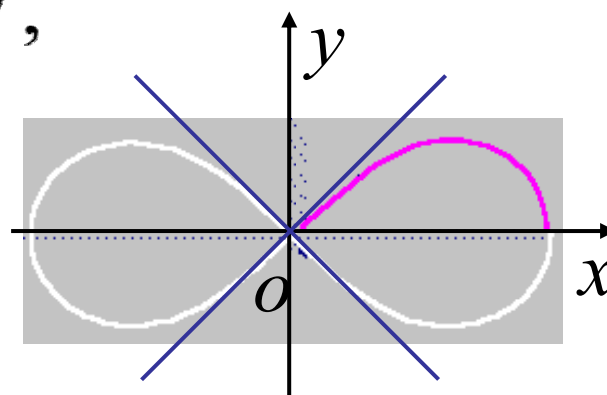
例3. 计算  $I = \int_L |x| \mathrm{d}s$ , 其中  $L$  为双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0)$$

解: 在极坐标系下  $L: r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ,

它在第一象限部分为

$$L_1: r = a\sqrt{\cos 2\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/4)$$



利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_{L_1} x \mathrm{d}s = 4 \int_0^{\pi/4} r \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} \mathrm{d}\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos \theta \mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2} a^2 \end{aligned}$$

例4. 计算曲线积分  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , 其中  $\Gamma$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的一段弧.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (kt)^2] \\ & \quad \cdot \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} [a^2 + k^2 t^2] dt \\ &= \sqrt{a^2 + k^2} \left[ a^2 t + \frac{k^2}{3} t^3 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2) \end{aligned}$$



例5. 计算  $\oint_{\Gamma} x^2 \, ds$ , 其中  $\Gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面  $x + y + z = 0$  所截的圆周.

解: 由对称性可知  $\oint_{\Gamma} x^2 \, ds = \oint_{\Gamma} y^2 \, ds = \oint_{\Gamma} z^2 \, ds$

$$\begin{aligned}\therefore \oint_{\Gamma} x^2 \, ds &= \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds \\ &= \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} a^2 \, ds = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2\pi a \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3\end{aligned}$$

思考: 例5中 $\Gamma$  改为  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ , 如何  
计算  $\oint_{\Gamma} x^2 \, ds$  ?

解: 令  $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \\ Z = z \end{cases}$ , 则  $\Gamma: \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 \\ X + Y + Z = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x^2 \, ds &= \oint_{\Gamma} (X+1)^2 \, ds \\ &= \oint_{\Gamma} X^2 \, ds + 2 \oint_{\Gamma} X \, ds + \oint_{\Gamma} ds \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 + 0 + 2\pi a \\ &= 2\pi a \left( \frac{1}{3} a^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

例6. 计算  $I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , 其中  $\Gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$  与平面  $x + z = 1$  的交线.

解:  $\Gamma: \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ , 化为参数方程

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \\ y = 2 \sin \theta \\ z = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

则

$$ds = \sqrt{(-\sqrt{2} \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta)^2 + (\sqrt{2} \sin \theta)^2} d\theta = 2 d\theta$$

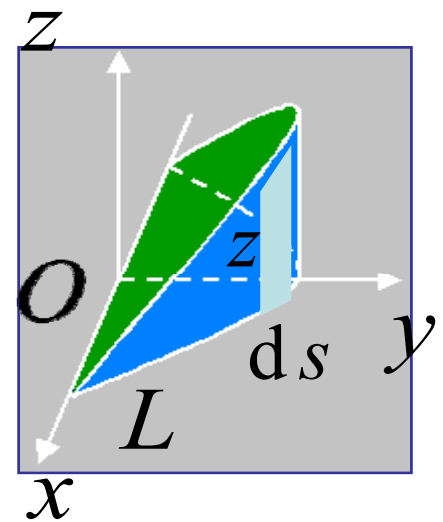
$$\therefore I = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 18\pi$$

例7. 求椭圆柱面  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$  位于  $xOy$  面上方及平面  $z = y$  下方那部分柱面的侧面积  $S$ .

解: 这是曲顶柱面的侧面积问题.

$$L: x = \sqrt{5} \cos t, y = 3 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$\begin{aligned} \int_L z \, ds &= \int_L y \, ds \\ &= \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} \, dt \\ &= -3 \int_0^\pi \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} \, d \cos t \\ &= 9 + \frac{15}{4} \ln 5 \end{aligned}$$



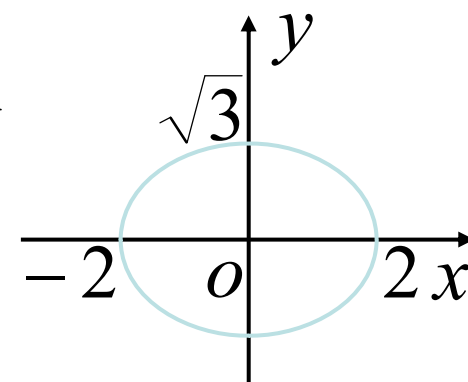
## 思考与练习

1. 已知椭圆  $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  周长为  $a$ , 求

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$$

提示: 利用对称性  $\oint_L 2xy ds = 0$

$$\text{原式} = 12 \oint_L \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) ds = 12 \oint_L ds = 12a$$



---

分析:  $\oint_L 2xy ds = \int_{L_{\text{上}}} 2xy ds + \int_{L_{\text{下}}} 2xy ds$

$$= \int_{-2}^2 2x \sqrt{\dots} \sqrt{1+y'^2} dx + \int_{-2}^2 2x(-\sqrt{\dots}) \sqrt{1+y'^2} dx$$

2. 设均匀螺旋形弹簧 $L$ 的方程为  $x = a \cos t, y = a \sin t,$   
 $z = kt \ (0 \leq t \leq 2\pi),$

(1) 求它关于  $z$  轴的转动惯量  $I_z$ ;

(2) 求它的质心.

解: 设其密度为  $\rho$  (常数).

$$\begin{aligned} (1) \quad I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho \, ds = \int_0^{2\pi} a^2 \rho \sqrt{a^2 + k^2} \, dt \\ &= 2\pi a^2 \rho \sqrt{a^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$(2) \quad L \text{ 的质量 } m = \int_L \rho \, ds = 2\pi \rho \sqrt{a^2 + k^2}$$

$$\text{而 } \int_L x \rho \, ds = a \rho \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

$$\int_L y \rho \, ds = a \rho \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$$

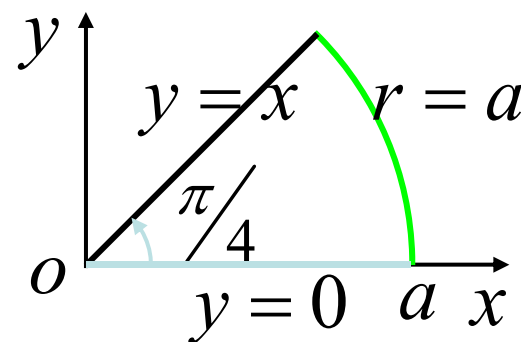
$$\int_L z \rho \, ds = k \rho \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi^2 k \rho \sqrt{a^2 + k^2}$$

故重心坐标为  $(0, 0, k\pi)$

3. 设  $C$  是由极坐标系下曲线  $r = a, \theta = 0$  及  $\theta = \pi/4$  所围区域的边界, 求

$$I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$$

提示: 分段积分



$$\begin{aligned} I &= \int_0^a e^x dx + \int_0^{\pi/4} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{x\sqrt{2}} \sqrt{2} dx \\ &= \left( \frac{\pi}{4} a + 2 \right) e^a - 2 \end{aligned}$$



4.  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  在第一卦限与三个坐标面的交线，求其形心。

解：如图所示，交线长度为

$$l = 3 \int_{L_1} ds = 3 \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{2}$$

由对称性，形心坐标为

$$\begin{aligned} \bar{z} = \bar{y} = \bar{x} &= \frac{1}{l} \int_{L_1+L_2+L_3} x ds \\ &= \frac{1}{l} \left[ \int_{L_1} x ds + \int_{L_2} x ds + \int_{L_3} x ds \right] = \frac{2}{l} \int_{L_1} x ds \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \theta \cdot R d\theta = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

