

3.2 高阶线性微分方程 解的结构

一、线性齐次方程解的结构

二、线性非齐次方程解的结构

定义：***n*** 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习：一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

$$\text{通解: } y = \underbrace{C e^{-\int P(x) dx}}_{\text{齐次方程通解 } Y} + \underbrace{e^{-\int P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx}_{\text{非齐次方程特解 } y^*}$$

一、 线性齐次方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 也是该方程的解. (叠加原理)

证: 将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$\begin{aligned} & [C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] \\ & \quad + Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\ &= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] \\ & \quad + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0 \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

说明:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$y_2(x) = 2y_1(x)$ 也是齐次方程的解

但是 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2)y_1(x)$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义：设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在不全为 0 的常数 k_1, k_2, \dots, k_n ，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上线性相关，否则称为线性无关。

例如， $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ ，在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关；

又如， $1, x, x^2$ ，若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$ ，则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0 ，故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都线性无关。

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 \iff 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\iff \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1} \quad \left(\text{不妨设 } k_1 \neq 0 \right)$$

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\iff \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{常数}$

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{证明略})$$

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$

必线性 相关

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是该方程的通解.

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\frac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

推论. 若 y_1, y_2, \dots, y_n 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (C_k \text{ 为任意常数})$$

二、 线性非齐次方程解的结构

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$\begin{aligned} & (Y'' + \underline{y^{*''}}) + P(x)(Y' + \underline{y^{*'}}) + Q(x)(Y + \underline{y^*}) \\ &= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y) \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

故 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又 Y 中含有两个独立任意常数, 因而 ② 也是通解. 证毕

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

定理 4. 设 $y_k^*(x)$ ($k=1,2,\dots,n$) 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_k(x) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

的特解, 则 $y = \sum_{k=1}^n y_k^*$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程之解的叠加原理)

定理3, 定理4 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.

定理 5. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y = \underline{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$



齐次方程通解



非齐次方程特解

例3. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

~~(A)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3;$

~~(B)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3;$

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3;$

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3.$ (89 考研)

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,
二者线性无关. (反证法可证)

例4. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ 的特解.

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1$, $C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.