第二节
一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、齐次型微分方程

三、可化为齐次型的微分方程

四、一阶线性微分方程

五、全微分方程

四、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为齐次方程 ;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为非齐次方程 .

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 则

$$u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解： 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$, 即 $y=C(x+1)^2$

用**常数变易法**求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$, 则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例2. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 x, y 同号, 当 $x>0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$, 故方程可变形为

$$2\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\frac{\sqrt{x}}{y}=-\frac{2}{\sqrt{y}}$$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量, y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程**通解公式**, 得

$$\sqrt{x}=\underline{e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\left[\int-\frac{1}{\sqrt{y}}\,\underline{e^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\,\mathrm{d}x+\ln|C|\right]$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln|C|\right]=\sqrt{y}\ln\left|\frac{C}{y}\right|$$

所求通解为 $\quad y\,e^{\sqrt{x/y}}=C\;(C\neq 0)$

伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

雅各布第一・伯努利

解法: 以 y^n 除方程两边 , 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例3. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ \ln x$$

其通解为 $$z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1 先解齐次方程, 再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

思考与练习

1. 判别下列方程类型:

提示:

(1) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\longrightarrow$ $\frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2$ 伯努利方程

2. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x) = \sin x - \int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u = x - t$

提示: $f(x) = \sin x - \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x) + f(x) = \cos x \\ f(0) = 0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$$

3. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 \le x \le 1 \\ 0\,, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int 2e^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1\right)$$

$$= e^{-x}(2e^{x} + C_1) = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $\quad y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

2) 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0\,,\ \ x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)\,e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1-e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)\,e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

伯努利(1654 – 1705)

(雅各布第一 · 伯努利)

雅各布第一 · 伯努利

瑞士数学家, 他家祖孙三代出过十多位数学家. 1694年他首次给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式, 1695年提出了著名的伯努利方程, 1713年出版了他的巨著《猜度术》, 这是组合数学与概率论史上的一件大事, 书中给出的伯努利数在很多地方有用, 而伯努利定理则是大数定律的最早形式. 此外, 他对双纽线, 悬链线和对数螺线都有深入的研究 .