期中试卷讲评

柳银萍

一、 填空题（共 16 分，每题 4 分）

1、设 $z=\left(e^{xy}+x\right)^{x}$，则全微分 $dz\big|_{(1,0)}=(2\ln 2+1)\,dx+dy$。

2、已知点 A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,3,2)，则ΔABC 的面积=$2\sqrt{6}$。

3、已知曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$，则其在点 P $(1,-2,2)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$。

4、设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x\le 0\\ 1-x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，则它的傅立叶级数在 x=π处收敛于 $-\dfrac{\pi^2}{2}$。 在 x=4π处收敛于 0。

一、 **选择题**（共 12 分，每题 3 分。每题给出的选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（B ）

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在；

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在；

1、设 $u_n \neq 0$, n=1,2,3,‥, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $(-1)^{n}(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n-1}})$ 敛散性有

（C）

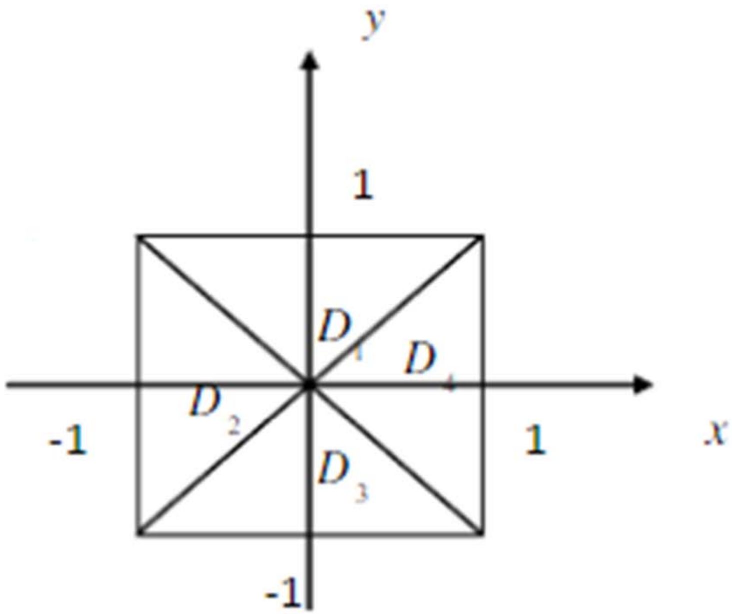
(A)发散 (B)绝对收敛 (C)条件收敛 (D)无法确定其敛散性

2、两直线 $L1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为（ D）

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

1、如图，正方形$\{(x, y) \| |x| \le 1, |y| \le 1\}$被其对角线划分为四个区域

$D_k (k = 1,2,3,4)$， $I_k = \iint\limits_{D_k} y \cos x dxdy$, 则$\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} =$(A)



(A) I_1;　　　　(B) I_2;　　　　(C) I_3;　　　　(D) I_4;

第9题　函数在任一点处的最大方向导数，是沿梯度方向的，其值等于梯度的模，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\max} = \left|\nabla f(x,y)\right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

因此本题的解为

目标函数：$F = f_x^2 + f_y^2 = (1+y)^2 + (1+x)^2$

s.t. $x^2 + y^2 + xy = 3$

设 $L = (1+y)^2 + (1+x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$

则 $\begin{cases} L_x = 2(1+x) + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ L_y = 2(1+y) + 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

得到四个驻点：（1,1），（-1，-1），（2，-1），（-1,2）

分别计算函数值：

$$F(1,1)=8, F(-1,-1)=0, F(2,-1)=F(-1,2)=9$$

因此函数 $f(x,y)$ 沿曲线 C 的最大方向导数为：

$$\max\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y)\in C}\right\}=\max\sqrt{F}=3$$

第10题

1、直线L: $\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\end{cases}$ 与平面π：x+2y-z=1 是否平行？若不平行，求交点；若平行，求直线 L 到平面π的距离.

直线的方向向量为 (1,-2,-3), $\Rightarrow$ 直线 L 与平面π 平行。在直线上任取一点，这一点到平面π的距离即为直线 L 到平面π的距离。故令 x=1，代入直线 L 的方程，得 y=-1,z=-1. 利用点到平面的距离公式得直线 L 到平面π的距离为：$d=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

1、计算幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

第11题

因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)}\right|=x^2$，所以当 $x^2<1$，即$-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；当 $x=\pm1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$收敛。故收敛域为$[-1,1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},$$

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$, $x\in(-1,1)$,

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{1}{1+x^2}$.

又因为 $f(0)=0$，故$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\arctan x$,

故 $s(x)=x\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

1、将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $[0,\ \pi]$ 上展开成正弦级数(即只含正弦项).

第12题

解　对 $f(x)$ 作奇式周期延拓，如图 15-11 所示。

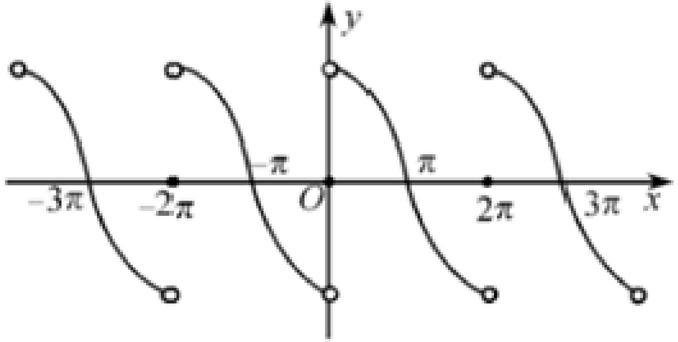


图 15-11

$a_0 = 0, a_n = 0 \ (n - 1, 2, \cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{2n+1}\left[-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1}\left[-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{n}{4n^2-1}$$

由收敛定理，在区间 $(0,\pi)$ 上

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx$$

当 $x = 0, \pi$ 时，右端级数收敛于零。

1、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2' \neq 0$，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 以及 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

第13题

解：$F_1'=\dfrac{\partial F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)}{\partial \dfrac{y}{x}},F_2'=\dfrac{\partial F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)}{\partial \dfrac{z}{x}}$

$$F_x'=F_1'\frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial x}+F_2'\frac{\partial \frac{z}{x}}{\partial x}=-F_1'\frac{y}{x^2}-F_2'\frac{z}{x^2}$$

$$F_y'=F_1'\frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial y}+F_2'\frac{\partial \frac{z}{x}}{\partial y}=F_1'\frac{1}{x}$$

$$F_z'=F_1'\frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial z}+F_2'\frac{\partial \frac{z}{x}}{\partial z}=F_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\frac{y}{x^2}+F_2'\frac{z}{x^2}}{F_2'\frac{1}{x}}=\frac{F_1'y+F_2'z}{F_2'x}$$

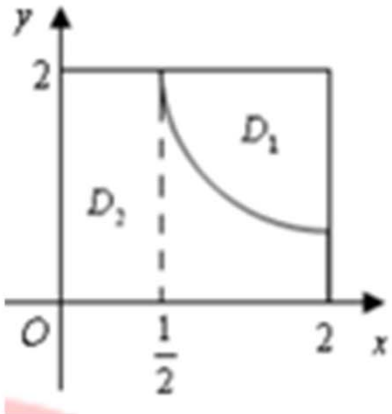
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\frac{1}{x}}{F_2'\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{F_1'y+F_2'z}{F_2'x}-y\frac{F_1'}{F_2'}=z$$

设 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2\}$，计算 $\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}dxdy$

第14题

解：曲线 xy=1 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2



则 $\iint\limits_{D} \max\{xy,1\}dxdy = \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} 1dxdy$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}xydy + \int_{0}^{\frac{1}{2}}dx\int_{0}^{2}dy + \int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{0}^{\frac{1}{z}}dy$$

$$= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2\ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2$$

1、设函数$f(x)$连续，区域D是由x轴，直线$y=x\tan v\left(0<v\le\frac{\pi}{2}\right)$，

$x^2+y^2=\frac{1}{u}, x^2+y^2=u\ (u>1)$在第一象限围成的封闭区域，若

$$F(u,v)=\iint_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

(1) 计算$\frac{\partial F}{\partial u}$，$\frac{\partial F}{\partial v}$的值;

(2) 若函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$,计算$F\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$的值;

若函数$f(x)=e^{-x}$,计算$\lim\limits_{u\to\infty}F\left(u,\frac{\pi}{2}\right)$的值;

第15题

（1） $$F(u, v) = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx\,dy = \int_0^v d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{u}}}^{\sqrt{u}} f(\rho^2) d\rho$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v\left(f(u)\frac{1}{2\sqrt{u}} + f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{2u\sqrt{u}} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \int_{\frac{1}{\sqrt{u}}}^{\sqrt{u}} f(\rho^2) d\rho$$

（2）令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$， 则 $x^2 + y^2 = \rho^2$ 。

$$F(u,v) = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{\rho(1+\rho^2)} \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(1+\rho^2)} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \arctan\rho \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{\pi}{2} \times (\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2})$$

（3）和上题类似

$$F(u,\frac{\pi}{2})=\iint_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\rho^2}}{\rho}\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

注：令 $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt$，则 $I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t^2+u^2)}dtdu$

转换成极坐标得

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}re^{-r^2}drd\theta=\pi$$

所以 $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$