第二节
二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

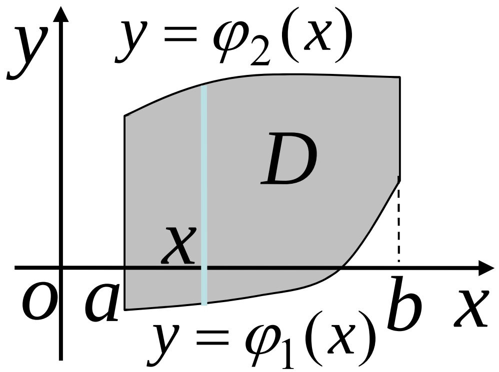
三、二重积分的换元法

一、利用直角坐标计算二重积分

由曲顶柱体体积的计算可知, 当被积函数 $f(x,y)\geq 0$

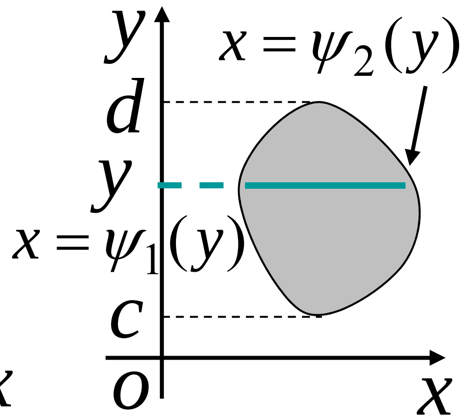
且在D上连续时，若D为 $X-$ 型区域

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\\ a\leq x\leq b\end{cases}$$



则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}\,x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

若D为$Y-$型区域$D:\begin{cases}\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)\\ c\leq y\leq d\end{cases}$



则$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}\,y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

当被积函数 $f(x,y)$在D上变号时, 由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$

均非负

$$\therefore \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

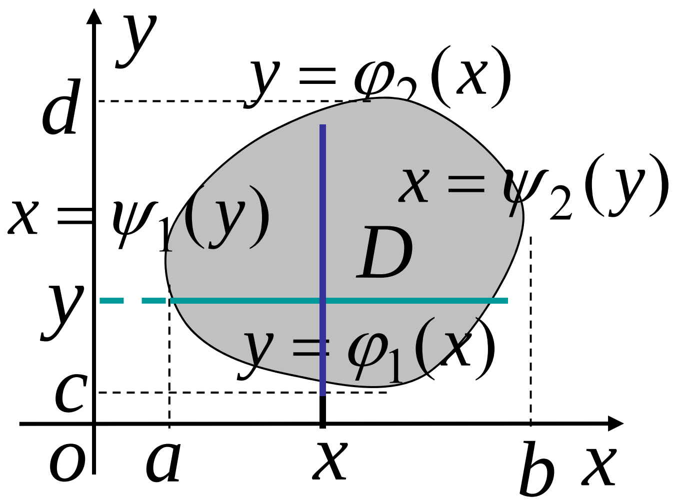
因此上面讨论的累次积分法仍然有效 .

说明: (1) 若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域 ,

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

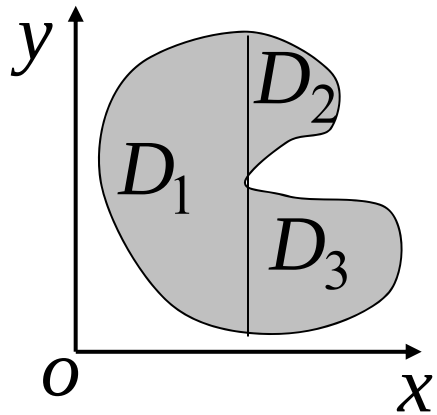
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

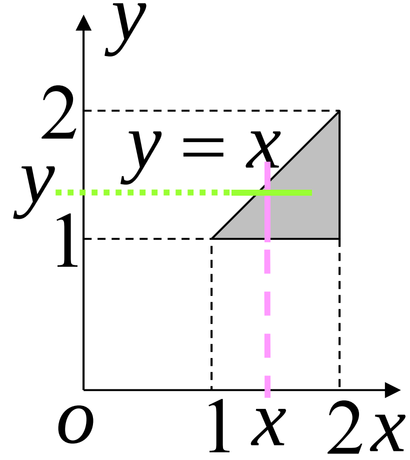
(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干 X-型域或Y-型域 , 则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$



例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X–型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$



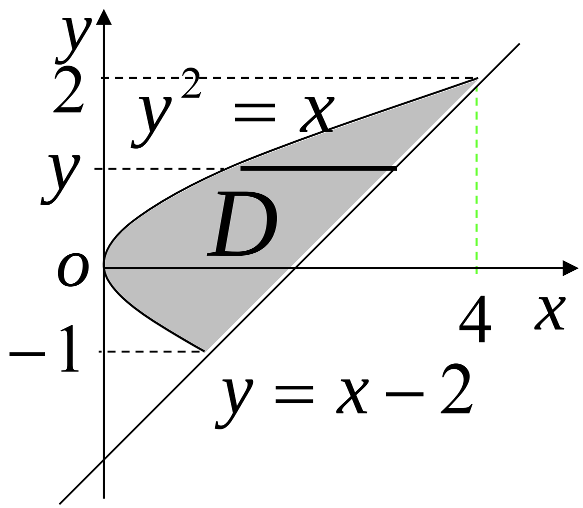
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}\,x\int_1^x xy\,\mathrm{d}\,y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}\,x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法2. 将D看作Y–型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}\,y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}\,x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

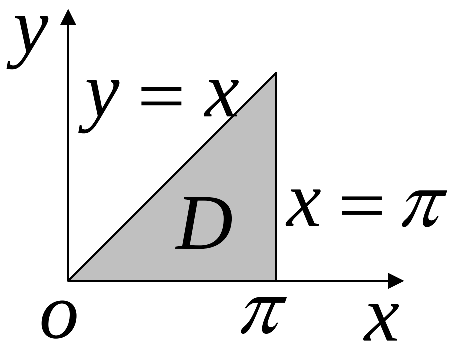
则 $$D:\begin{cases} y^2 \le x \le y+2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2 - y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2} = \frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x, y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取D 为$X-$ 型域 :

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \int_0^{x} \mathrm{d}y$$

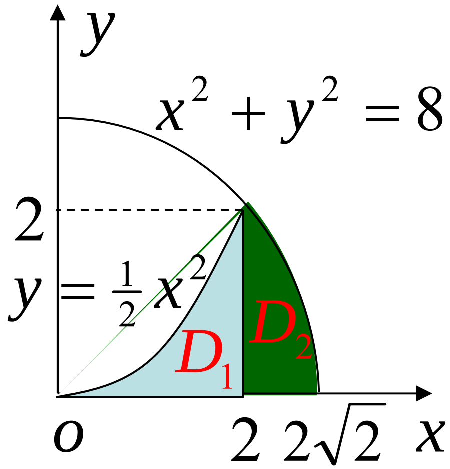
$$= \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



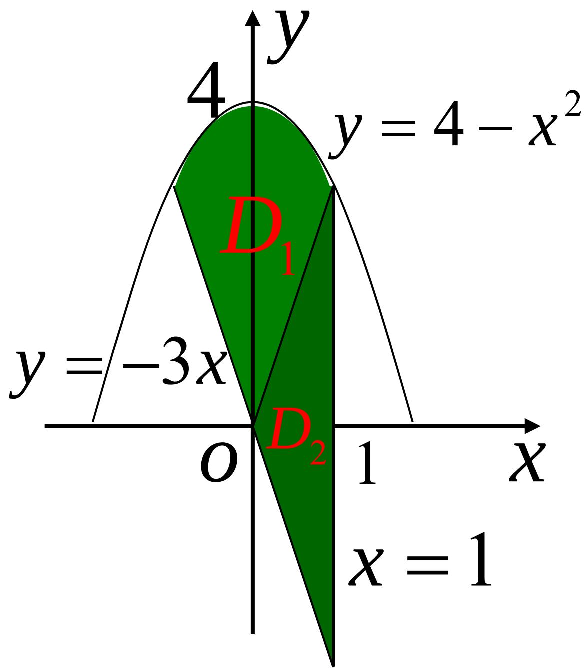
$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

将 $D=D_1+D_2$ 视为Y–型区域，则

$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例5. 计算$I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 所围成.



解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$$D=D_1+D_2 \quad (\text{如图所示})$$

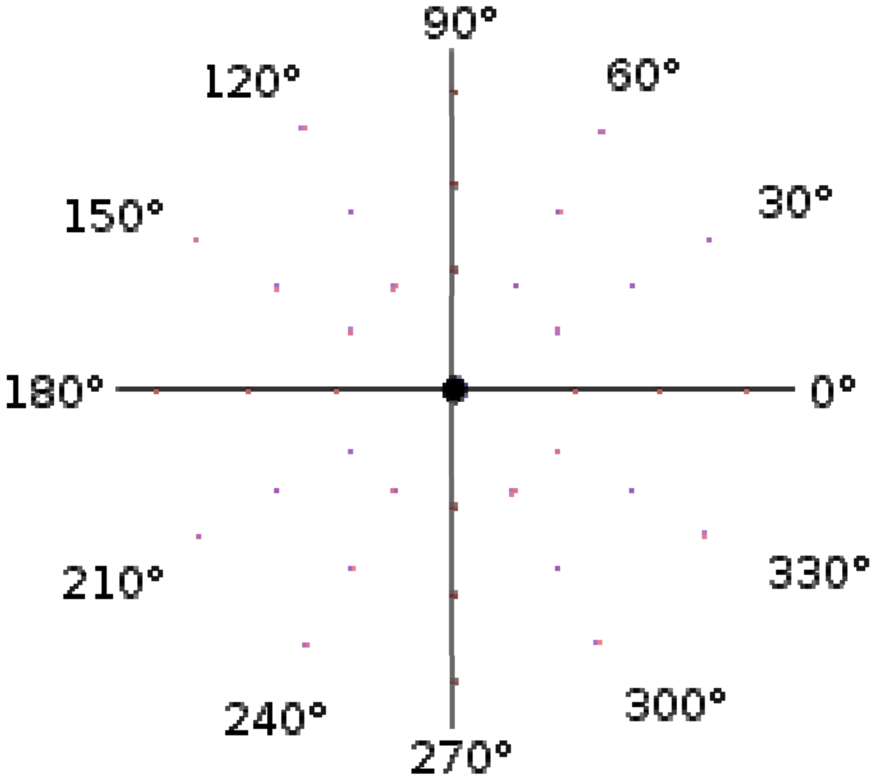
显然, 在D_1上, $f(-x,y)=-f(x,y)$

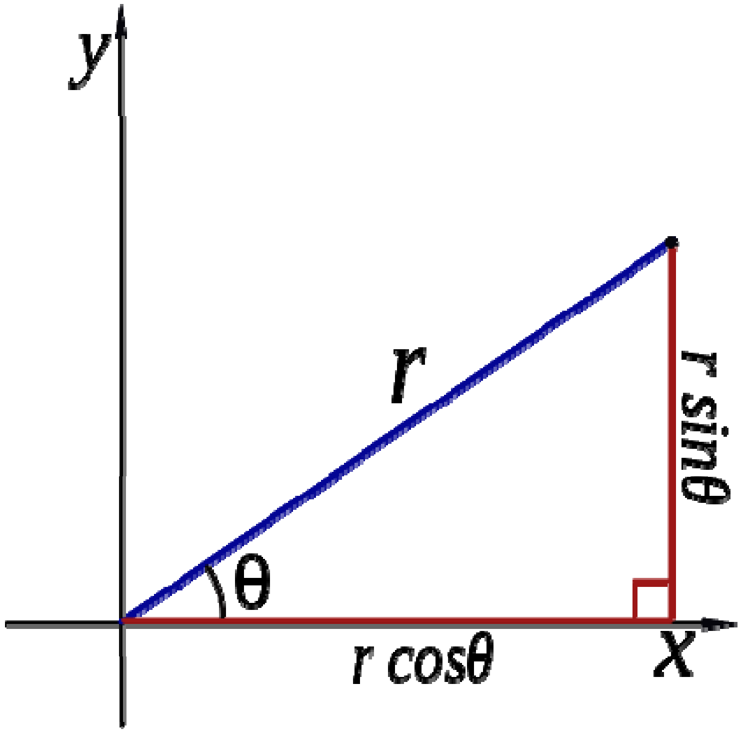
在D_2上, $f(x,-y)=-f(x,y)$

$$\therefore \quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

极坐标系与直角坐标系





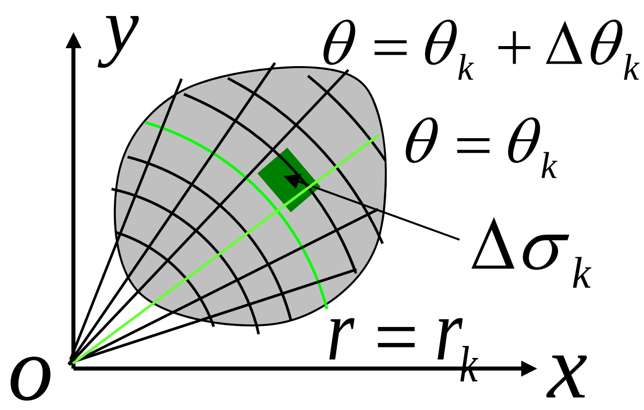
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9E%81%E5%9D%90%E6%A0%87%E7%B3%BB

坐标转化公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{y^2 + x^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

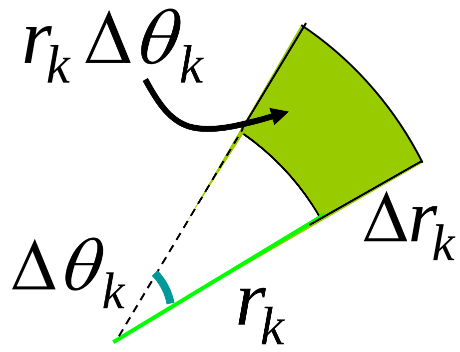
二、利用极坐标计算二重积分



在极坐标系下, 用同心圆 r =常数及射线 θ =常数, 分划区域D 为

$$\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

则除包含边界点的小区域外,小区域的面积



$$\Delta\sigma_k=\tfrac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k-\tfrac{1}{2}r_k{}^2\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\tfrac{1}{2}[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\overline{r_k}\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

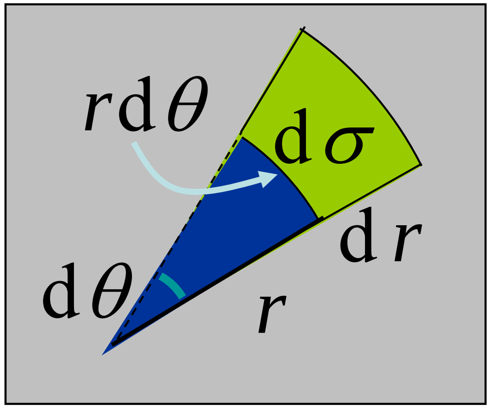
在 $\Delta\sigma_k$ 内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$, 对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\ \ \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

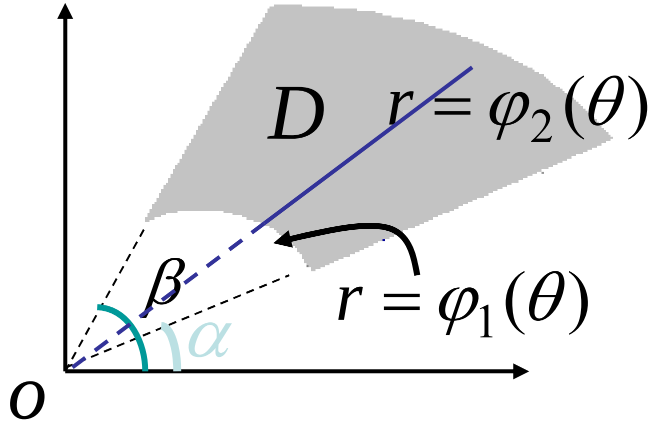
$$\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$

即 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

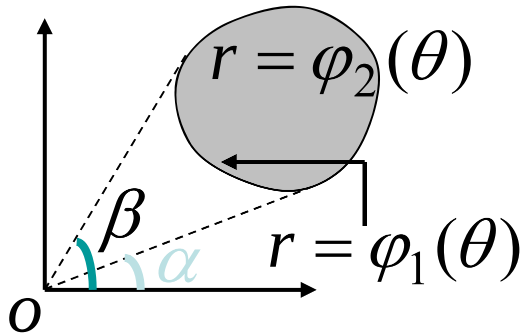


设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$, 则

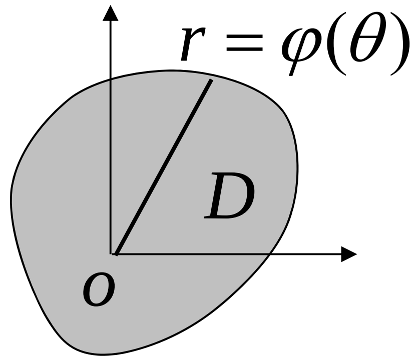


$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$



特别, 对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

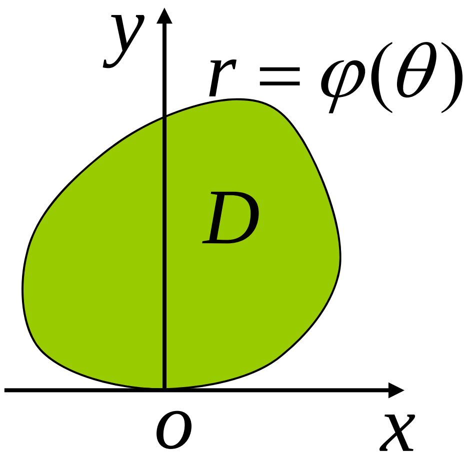
$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

若 $f\equiv 1$ 则可求得D 的面积

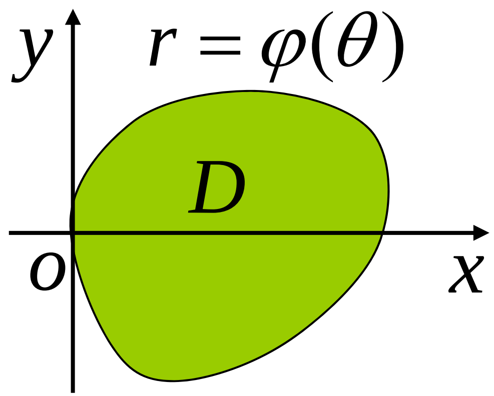
$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0\le\theta\le\pi$; (2) $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

例6. 计算$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: x^2+y^2 \le a^2$.

解: 在极坐标系下$D: \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$, 故

$$原式 = \iint_D e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r e^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2})$$

由于e^{-x^2} 的原函数不是初等函数 , 故本题无法用直角坐标计算.

注:利用例6可得到一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上, 当D 为 R^2 时,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

利用例6的结果, 得

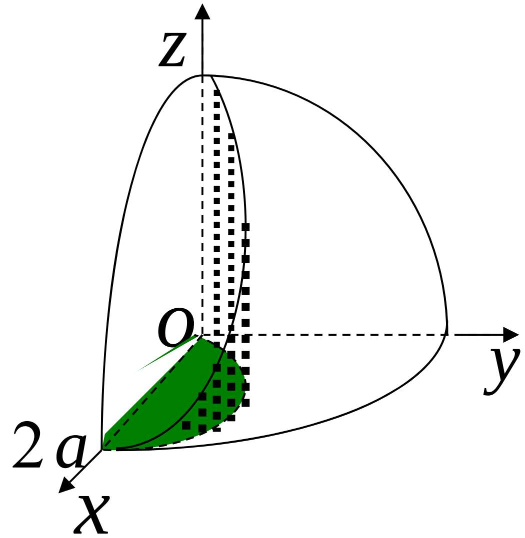
$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立 .

例7. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

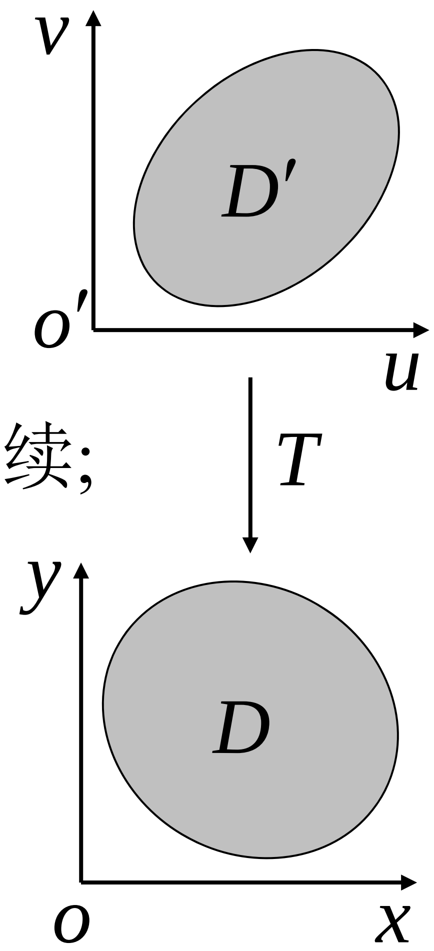
$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

三、二重积分换元法

定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

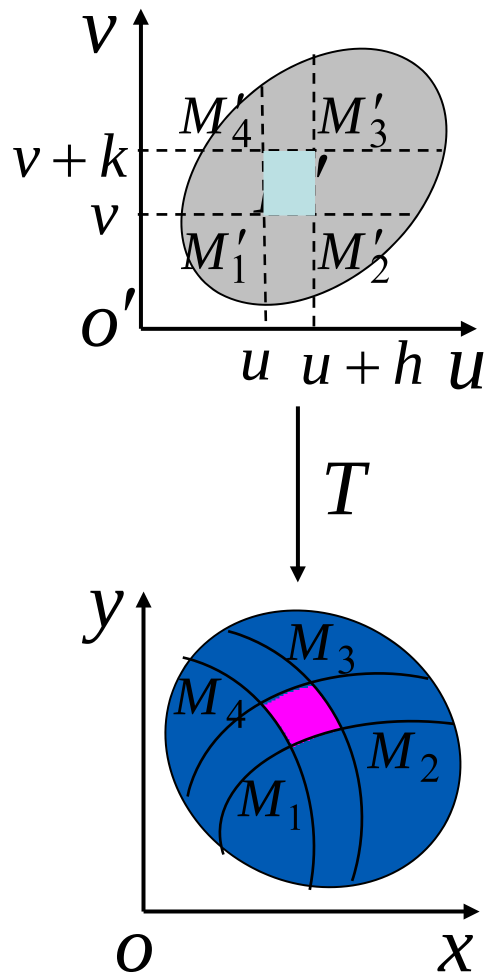
$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D'\to D$ 是一一对应的 ,

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在$uo'v$坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为



$$M_1'(u,v),\qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k),\quad M_4'(u,v+k).$$

通过变换T, 在 xoy 面上得到一个四边形, 其对应顶点为$M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u, v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k 充分小时,曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}| = \left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$\approx \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}h & \frac{\partial y}{\partial u}k \\ \frac{\partial x}{\partial v}h & \frac{\partial y}{\partial v}k \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| hk = |J(u,v)|\,hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

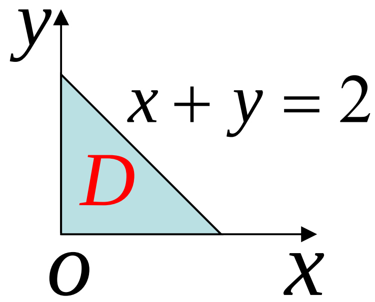
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

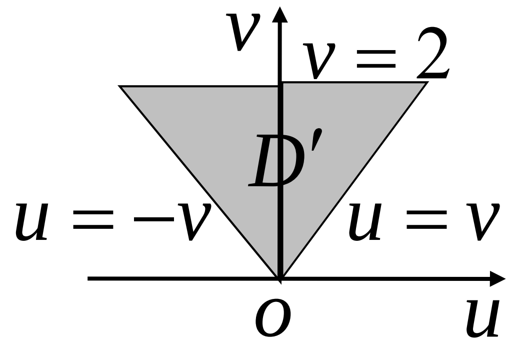
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例8. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$ 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.



解: 令 $u=y-x$, $v=y+x$, 则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$

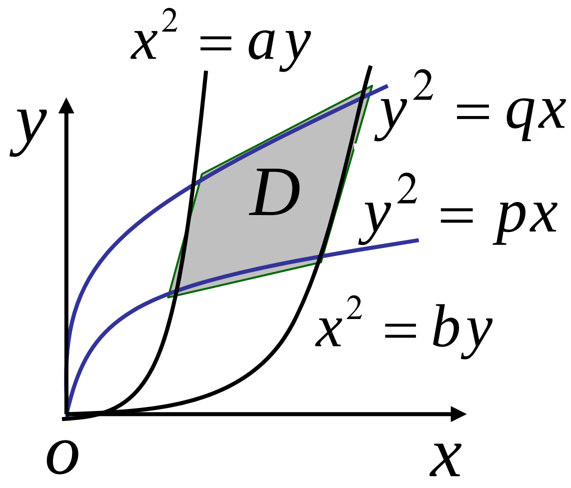


$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})v\,\mathrm{d}v=e-e^{-1}$$

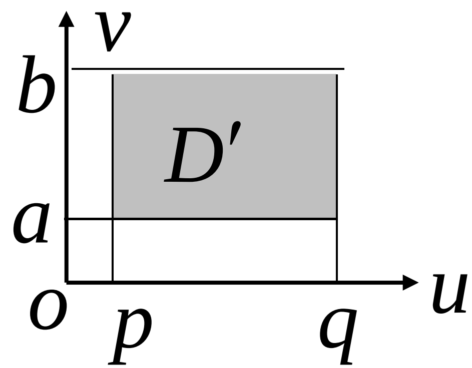
例9. 计算由 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S .



解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$



$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例10. 试计算椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解: 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\,r\cos\theta$, $y=b\,r\sin\theta$, 则D 的原象为

$$D':r\le 1\,,\,0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,r$$

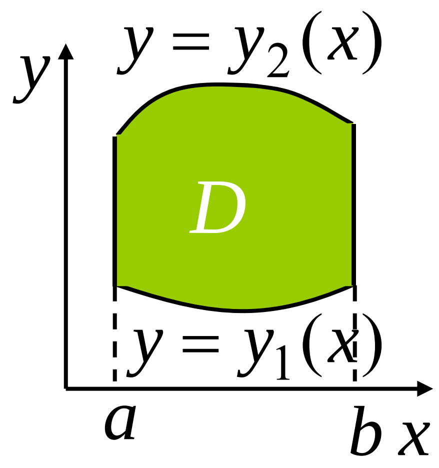
$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\,abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r=\frac{4}{3}\pi\,abc$$

内容小结

(1) 二重积分化为累次积分的方法

直角坐标系情形：



- 若积分区域为

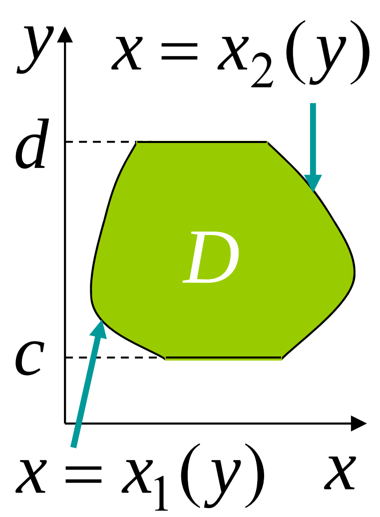
$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

- 若积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

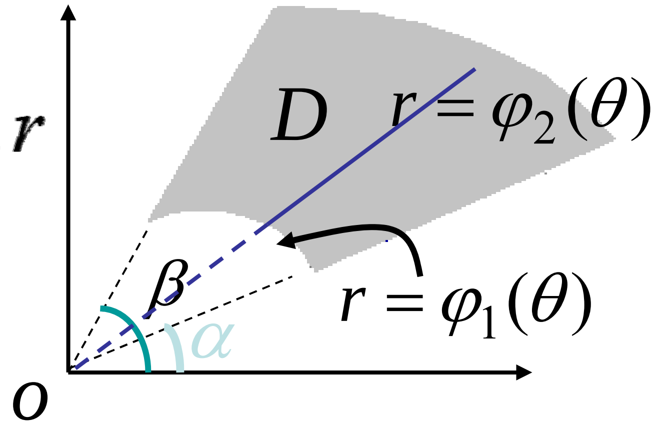


极坐标系情形：若积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\right\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



(2) 一般换元公式

在变换 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 下

$$(x,y)\in D\longleftrightarrow(u,v)\in D',\ \text{且}\ J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$$

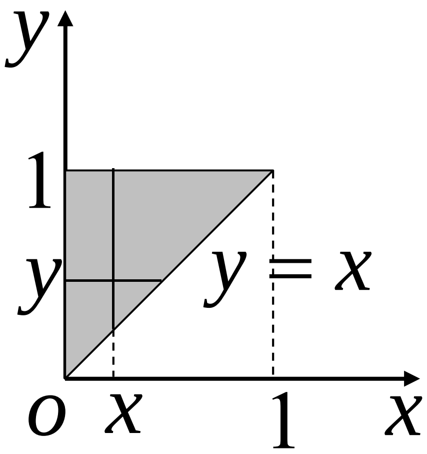
则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(3) 计算步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系
  - 域边界应尽量多为坐标线
  - 被积函数关于坐标变量易分离
- 确定积分序
  - 积分域分块要少
  - 累次积好算为妙
- 写出积分限
  - 图示法
  - 不等式

  (先积一条线, 后扫积分域)
- 计算要简便
  - 充分利用对称性
  - 应用换元公式

思考与练习



1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

提示: 交换积分顺序后, x , y互换

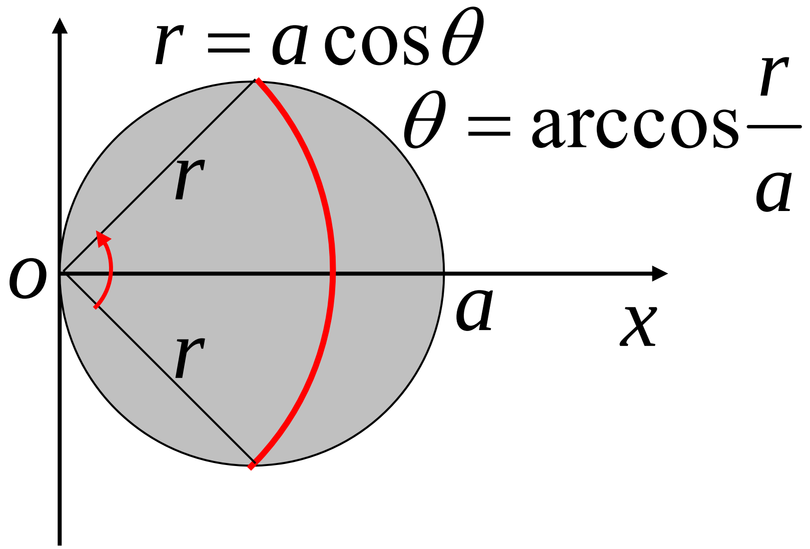
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}\,y=A^2$$

2. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r \quad (a>0)$

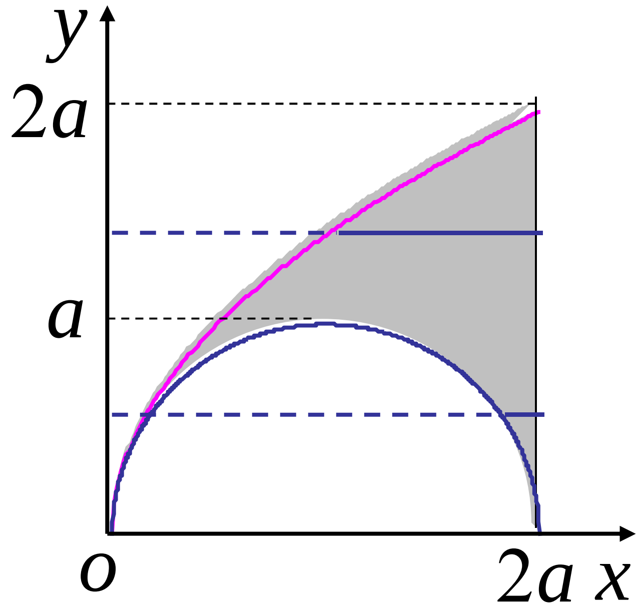
提示: 积分域如图



$$I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

备用题 1. 给定 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\ (a>0)$

改变积分的次序.



解: $y=\sqrt{2ax}\ \Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$

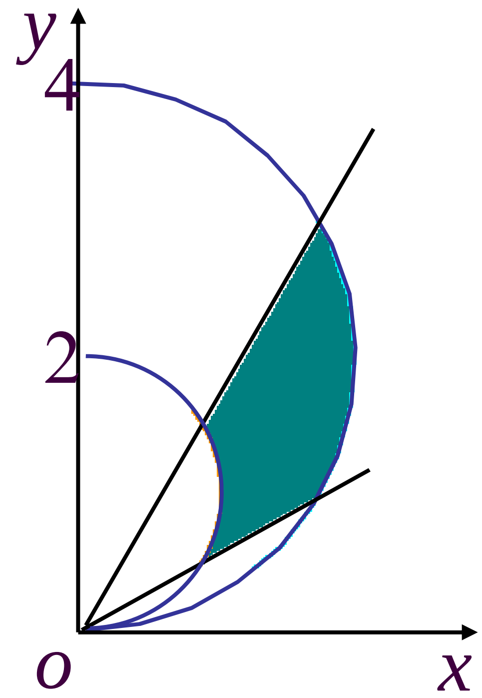
$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$

$$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

2. 计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$ 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解：

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$$

$$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$