第二节 一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、齐次型微分方程

三、可化为齐次型的微分方程

四、一阶线性微分方程

二、齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做**齐次方程** .

解法：令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u，便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 代入原方程得

$$u + xu' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得 $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$, 即 $\sin u = Cx$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x} = Cx$ (C 为任意常数)

例2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-(\dfrac{y}{x})^2$, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则有

$$u+xu'=2u-u^2$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u})\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$

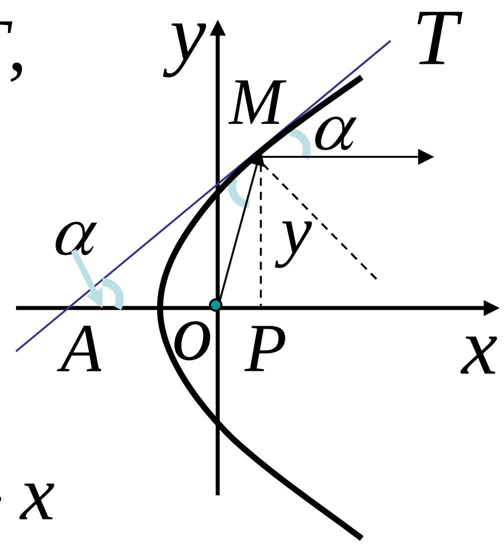
代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy$ (C 为任意常数)

说明: 显然 $x=0$, $y=0$, $y=x$ 也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

例3. 在制造探照灯反射镜面时,要求点光源的光线反射出去有良好的方向性 , 试求反射镜面的形状.

解: 设光源在坐标原点, 取x 轴平行于光线反射方向, 则反射镜面由曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转而成 .

过曲线上任意点 $M\,(x, y)$ 作切线 $M\,T$,



由光的反射定律: $\boxed{\text{入射角} = \text{反射角}}$

可得 $\angle OMA = \angle\, OAM = \alpha$

从而 $AO = OM$

而 $AO = AP - OP = y\cot\alpha - x = \dfrac{y}{y'} - x$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

于是得微分方程 : $\dfrac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$

利用曲线的对称性, 不妨设 $y>0$, 于是方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$ (齐次方程)

令 $v=\frac{x}{y}$, 则 $x=yv$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1+v^2}$$

积分得 $\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln y-\ln C$

$$v+\sqrt{1+v^2}=\frac{y}{C}$$

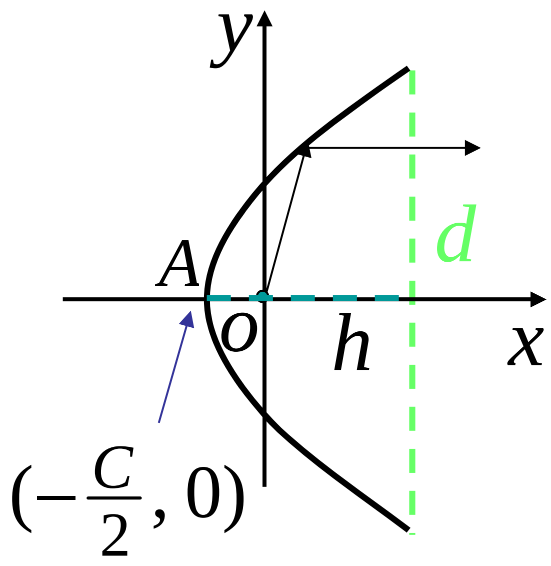
$$\left(\frac{y}{C}-v\right)^2=1+v^2$$

故有 $\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1$

代入 $yv=x$, 得 $y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$ (抛物线)

故反射镜面为旋转抛物面.

说明: $y^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$



若已知反射镜面的底面直径为 d，顶到底的距离为 h，则将

$$x + \frac{C}{2} = h, \quad y = \frac{d}{2}$$

代入通解表达式得 $C = \dfrac{d^2}{8h}$

这时旋转曲面方程为

$$y^2 + z^2 = \frac{d^2}{4h}\left(x + \frac{d^2}{16h}\right)$$

三、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\quad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$ (h, k 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

$$\Bigg\downarrow\ 令\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}, 解出\ h, k$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$ (齐次方程)

求出其解后, 将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入, 即得原方程的解.

2.当 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \quad (b\neq 0)$$

令 $v=ax+by$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\,\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

例**4.** 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X+1, y = Y-5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y=Xu$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$,如何求解?

提示: 令 $v=x+y$.