习题课

线面积分的计算

一、 曲线积分的计算法

二、曲面积分的计算法

一、曲线积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲线积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对弧长)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{定积分}$$

$$\text{(1) 统一积分变量}\left\{\begin{array}{l}\text{用参数方程}\\ \text{用直角坐标方程}\\ \text{用极坐标方程}\end{array}\right.$$

$$\text{(2) 确定积分上下限}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 下小上大}\\ \text{第二类: 下始上终}\end{array}\right.$$

2. 基本技巧

(1) 利用对称性和重心公式简化计算 ;

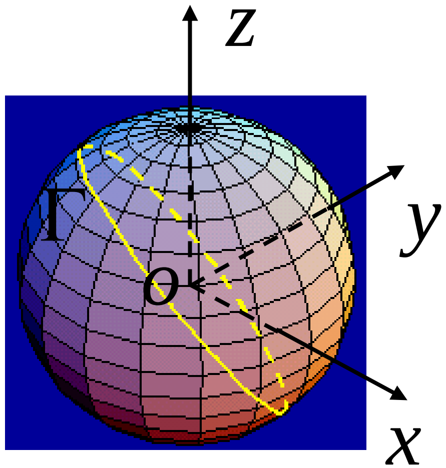
(2) 利用积分与路径无关的等价条件;

(3) 利用格林公式 (注意加辅助线的技巧) ;

(4) 利用两类曲线积分的联系公式 .

例1. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$ 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$



解: 利用轮换对称性，有

$$\int_{\Gamma}x^2\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}y^2\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}z^2\,\mathrm{d}s$$

利用重心公式知 $\int_{\Gamma}y\,\mathrm{d}s=\overline{y}\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=0$ (Γ的重心在原点)

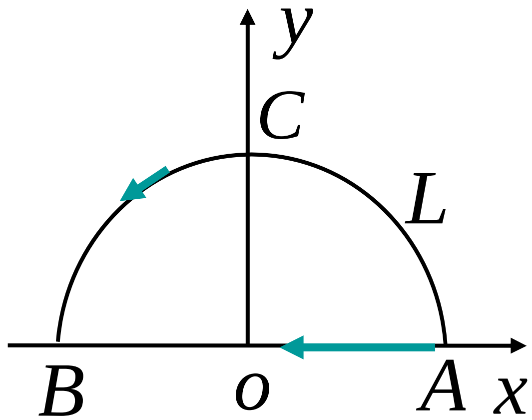
$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{3}a^2\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi a^3$$

例2. 计算$I=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$, 其中$L$ 是沿逆时针方向以原点为中心, a 为半径的上半圆周.

解法1 令 $P=x^2-y,\ Q=y^2-x$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$$

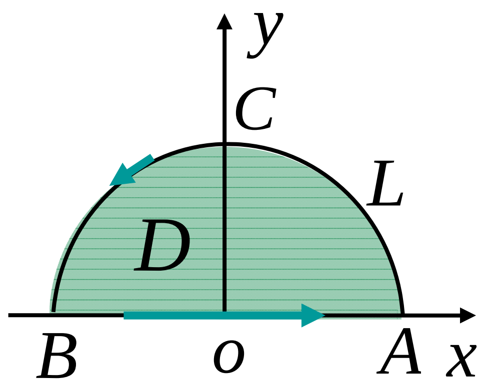


这说明积分与路径无关, 故

$$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^{-a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

解法2 添加辅助线段 $\overline{BA}$,它与L所围区域为D, 则



$$I=\oint_{L+\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

(利用格林公式)

思考:

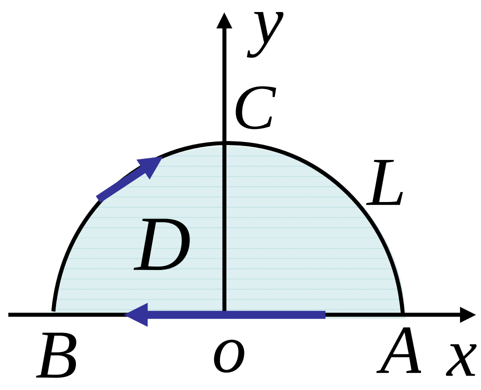
(1) 若L 改为顺时针方向,如何计算下述积分:

$$I_1=\int_L(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

(2) 若 L 同例2 , 如何计算下述积分:

$$I_2=\int_L(x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

思考题解答:



$$(1)\ I_1=\int_L (x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+\overline{AB}}-\int_{\overline{AB}}$$

$$=-2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{2}{3}a^3=a^2\left(\frac{2}{3}a-\pi\right)$$

$$(2)\ I_2=\int_L (x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y+\int_L y^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow\ L: x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ t:0\to\pi$$

$$=I-\int_0^{\pi} a^3\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}a^3-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=-2a^3$$

二、曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)}\\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$$

(3) 确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

思 考 题

1) 二重积分是哪一类积分?

答: 第一类曲面积分的特例.

2) 设曲面 $\Sigma: z=0\,,\,(x,y)\in D$, 问下列等式是否成立?

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \checkmark$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \times$$

不对！ 对坐标的积分与 Σ 的侧有关

2. 基本技巧

(1) 利用对称性和重心公式简化计算

(3) 两类曲面积分的转化

例**4.** 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧.

解:

$$I=\frac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{6}{R^3}\iint_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\Sigma_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$$

$$=\frac{6}{R^3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\pi$$

例5. 计算曲面积分 $I=\oiint_\Sigma [(x+y)^2+z^2+2yz]\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

解:

$$I=\oiint_\Sigma [(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz]\,\mathrm{d}S$$

$$=\underbrace{\oiint_\Sigma (2x+2z)\,\mathrm{d}S}_{\text{用重心公式}}+2\underbrace{\oiint_\Sigma (x+z)y\,\mathrm{d}S}_{\text{利用对称性}}$$

$$=2(\bar{x}+\bar{z})\oiint_\Sigma \mathrm{d}S+0$$

$$=32\pi$$

练习

1.若$f(x,y)$在矩形区域$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le x$上连续，且$x\left(\iint_D f(x,y)dxdy\right)^2=2f(x,y)-6,$求$f(x,y)$.

2. 计算三重积分$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由半球面$x^2+y^2+z^2=4$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成。

3. 计算$\int_L (e^x\sin y-2(x+y))dx+(e^x\cos y-3)dy,$其中$L$为上半圆周：$x^2+y^2=Rx(R>0)$，方向为逆时针方向。

4. 设曲线积分$\int_L (x^2+1)y^3dx + y^2\varphi(x)dy$与路径无关，$\varphi(x)$有连续的导数且$\varphi(0)=1.$

（1）求$\varphi(x)$的表达式,?

（2）求$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2+1)y^3dx + y^2\varphi(x)dy$.?

5.计算$\iint_\Sigma zydxdy$，其中是Σ曲线$z=e^{x^2}\ (0\le x\le 1)$绕z轴旋转得到的旋转曲面，取外侧。

6.确定常数λ，使在右半平面$x>0$上的向量

$$A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}i-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}j$$

为某二元函数的梯度，并求$u(x,y)$.

7.试确定a, b的值，使$\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$

是某函数$u(x,y)$的全微分，并求这样一个原函数。

答案:

$1.A=3$

$$2.\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 rr^2dr=8\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$3.\text{格林公式}=2\iint_D dxdy-\int_{L1}\ \ =\frac{\pi R^2}{2}+R^2$$

$4.\varphi(x)=x^3+3x+1$

$$5.\ z=e^{x^2+y^2},\iint_\Sigma zydxdy=-\iint_{D_{xy}}e^{x^2+y^2}ydxdy,Dxy:x^2+y^2=1$$

区域关于x对称，函数关于y是奇函数，所以为0

$$\iint_{D_{xy}}e^{x^2+y^2}ydxdy=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 e^{r^2}rdr=0$$

6. $\lambda = -1, u(x, y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C$

7. $a = 1, b = 0, u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\frac{x}{y} + C$