# 第二节
# 一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、齐次型微分方程

三、可化为齐次型的微分方程

四、一阶线性微分方程

五、全微分方程

# 一、可分离变量微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)\; N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Big\downarrow \text{转化}$$

解分离变量方程 $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$

**分离变量方程的解法:**

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

设 $y=\varphi(x)$ 是方程①的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$

则有 $G(y) = F(x) + C \qquad ②$

当$G(y)$ 与$F(x)$ 可微且 $G'(y) = g(y) \neq 0$ 时，上述过程可逆, 说明由②确定的隐函数 $y=\Phi(x)$ 是①的解. 同样,当$F'(x) = f(x) \neq 0$ 时，由②确定的隐函数 $x=\psi(y)$ 也是①的解.

称②为方程①的隐式通解, 或通积分.

**例1.** 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

**解:** 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$

或

$\ln|y|=x^3+\ln|C|$

( $C$ 为任意常数 )

**说明:** 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

( 此式含分离变量时丢失的解 $y=0$ )

**例2.** 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \underline{y(0)=1} \end{cases}$

**解：** 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （$C$ 为任意常数）

由初始条件得 $C=1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

**例3.** 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

**解:** 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （ $C$ 为任意常数 ）

**练习:** 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.

**解法 1** 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y}=e^{x}+C$$

即 $$(e^{x}+C)e^{y}+1=0 \quad (C<0)$$

**解法 2** 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $$u'=1+e^{u}$$

积分 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{1+e^{u}}=x+C$$

$$u-\ln(1+e^{u})=x+C$$

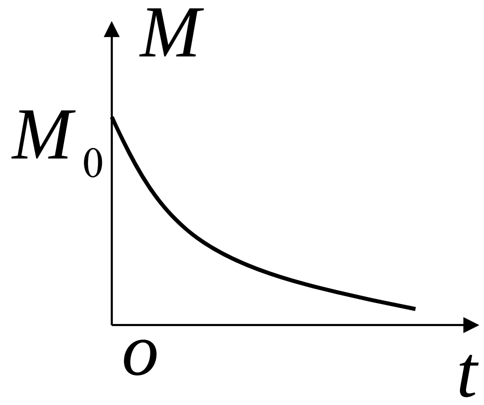
所求通解: $\ln(1+e^{x+y})=y-C$ ( $C$ 为任意常数 )

**例4.** 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 $M$ 成正比，已知 $t=0$ 时铀的含量为 $M_0$，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 $t$ 的变化规律.

**解:** 根据题意，有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$

对方程分离变量，然后积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln|M| = -\lambda t + \ln|C|$，即 $M = C e^{-\lambda t}$




利用初始条件，得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$ .

**例5.** 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时( $t=0$ ) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

**解:** 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$ )

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

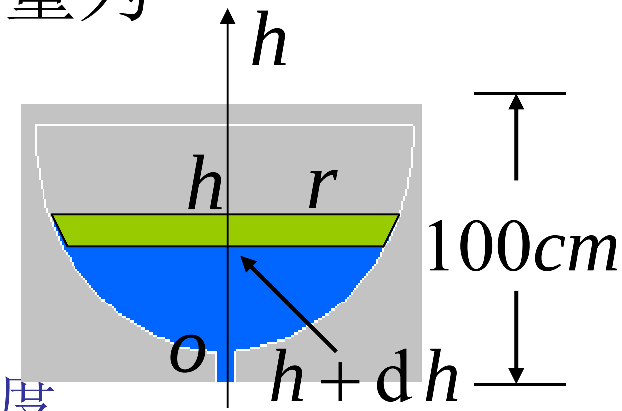
$t$ 足够大时

$v\approx\dfrac{mg}{k}$

**例6.** 有高 1m 的半球形容器，水从它的底部小孔流出，小孔横截面积 $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ .开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中，容器里水面的高度 $h$ 随时间 $t$ 的变化规律.

**解:** 由水力学知，水从孔口流出的流量为

$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \underbrace{0.62}_{\text{流量系数}}\,\underbrace{S}_{\text{孔口截面面积}}\sqrt{2\underbrace{g}_{\text{重力加速度}}h}$$




即
$$\mathrm{d}V = 0.62\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$$

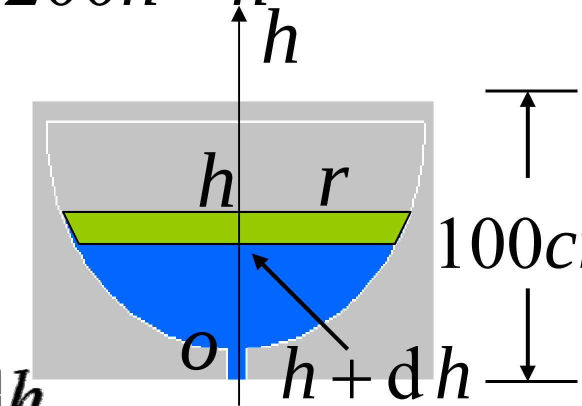
设在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内水面高度由 $h$ 降到 $h+\mathrm{d}h\,(\mathrm{d}h<0)$,

对应下降体积

$$\mathrm{d}V = -\pi r^2 \,\mathrm{d}h$$

$$r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2}$$

$$\mathrm{d}V = -\pi(200h - h^2)\,\mathrm{d}h$$




因此得微分方程定解问题:

$$\begin{cases} 0.62\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -\pi(200h - h^2)\,\mathrm{d}h \\ h\big|_{t=0} = 100 \end{cases}$$

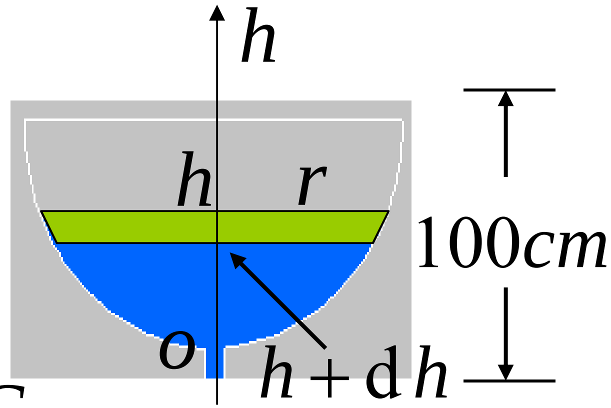
将方程分离变量:

$$\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200h^{1/2} - h^{3/2})\,\mathrm{d}h$$

两端积分, 得

$$t = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\int(200h^{1/2} - h^{3/2})\,\mathrm{d}h$$

$$= -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right) + C$$




$$h\Big|_{t=0} = 100$$

利用初始条件, 得 $C = \dfrac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\cdot\dfrac{14}{15}\cdot 10^5$

因此容器内水面高度 $h$ 与时间 $t$ 有下列关系:

$$t = \frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times 10^5 - 10^3 h^{3/2} + 3h^{5/2})$$

## 思考与练习

1.求下列方程的通解：

$$(1)\ (x+xy^2)\,\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$$

$$(2)\ y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

**提示: (1)** 分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

**(2)** 方程变形为 $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

**2.** 已知曲线积分 $\int_L F(x,y)[y\sin x\mathrm{d}x-\cos x\,\mathrm{d}y]$ 与路径无关, 其中 $F\in C^1$, $F(0,1)=0$, 求由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$.

**解:** 因积分与路径无关, 故有

$$\frac{\partial}{\partial x}[-F(x,y)\cos x]=\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y)y\sin x]$$

即

$$-F_x\cos x+\cancel{F\sin x}=F_y\,y\sin x+\cancel{F\sin x}$$

$$\boxed{y'}\Longrightarrow\boxed{-\frac{F_x}{F_y}}=y\tan x$$

因此有

$$\begin{cases} y'=y\tan x \\ y\big|_{x=0}=1 \end{cases}\Longrightarrow y=\frac{1}{\cos x}=\sec x$$