第二节

一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、齐次型微分方程

三、可化为齐次型的微分方程

四、一阶线性微分方程

五、全微分方程

五、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

为全微分方程 (又叫做恰当方程) .

判别: P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

$$① \text{ 为全微分方程} \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

   方法1　凑微分法;

   方法2　利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例1. 求解

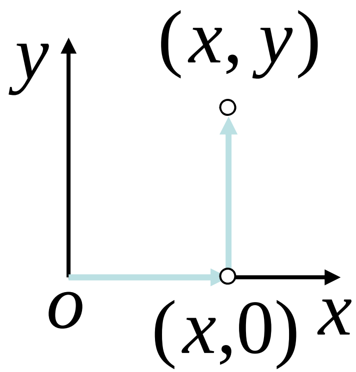
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故这是全微分方程.

取 $x_0=0,\ y_0=0,$ 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

例2. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0$, 或 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}\right)=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

思考： 如何解方程 $(x^3+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$?

这不是一个全微分方程 , 但若在方程两边同乘 $\dfrac{1}{x^2}$,
就化成例2 的方程 .

积分因子法

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$为原方程的积分因子.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

常用微分倒推公式:

1) $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,x \pm y\,)$

2) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\,xy\,)$

3) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$

4) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}(\,\dfrac{x}{y}\,)$

5) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}(\,\dfrac{-y}{x}\,)$

6) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}(\,\ln\dfrac{x}{y}\,)$

7) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}(\,\arctan\dfrac{x}{y}\,)$

8) $\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathrm{d}(\,\sqrt{x^2 + y^2}\,)$

积分因子不一定唯一 .

例如, 对 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

可取 $\mu = \dfrac{1}{y^2}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$,

$\mu = \dfrac{1}{xy}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

例3. 求解 $(1+xy)y\,\mathrm{d}x+(1-xy)x\,\mathrm{d}y=0$

解: 分项组合得 $(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+xy(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0$

即 $$\mathrm{d}(xy)+x^2y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)=0$$

选择积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2}$, 同乘方程两边 , 得

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^2}+\frac{\mathrm{d}\,x}{x}-\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=0$$

即 $$\mathrm{d}\left(\frac{-1}{xy}\right)+\mathrm{d}(\ln|x|)-\mathrm{d}(\ln|y|)=0$$

因此通解为 $\dfrac{-1}{xy}+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=\ln|C|$, 即 $\dfrac{x}{y}=C\,e^{\frac{1}{xy}}$

因 $x=0$ 也是方程的解 , 故 C 为任意常数 .

练习题 解方程 $y\,\mathrm{d}\,x+(y-x)\mathrm{d}\,y=0.$

解法1 积分因子法. 原方程变形为

$$(y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y)+y\,\mathrm{d}\,y=0$$

$$\Big\downarrow \text{取积分因子 } \mu=\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=0$$

故通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$

此外, $y=0$ 也是方程的解.

解法2 化为齐次方程. 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{y-x}=\frac{y/x}{1-y/x}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } y=ux\text{, 则 } y'=u+xu',$$

$$u+xu'=\frac{u}{1-u} \longrightarrow \frac{(1-u)\,\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入， 得通解 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$

此外, $y=0$ 也是方程的解.

解法3 化为线性方程. 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=-1$$

$$\boxed{P=-\frac{1}{y},\ Q=-1}$$

其通解为

$$x=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(-1)\,e^{\int\frac{-1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=y\left[C-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right]=y\left[C-\ln|y|\right]$$

即
$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C$$

此外, $y=0$ 也是方程的解.