第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度

一、斯托克斯公式

二、空间曲线积分与路径无关的条件

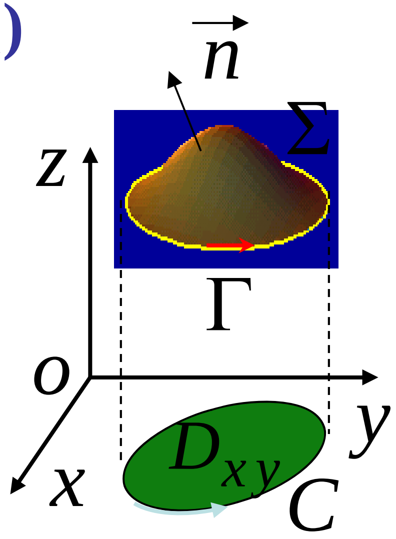
三、环流量与旋度

一、 斯托克斯(Stokes) 公式

定理1. 设标准曲面 Σ 的边界 Γ是分段光滑曲线, Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则, P,Q,R 在包含Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数,则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$ (斯托克斯公式)



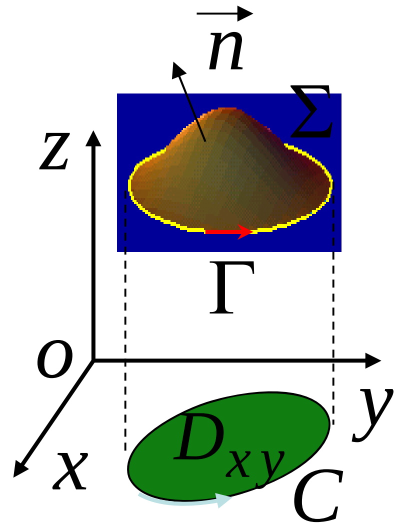
证: 设曲面方程为

$$\Sigma: z=f(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}$$

为确定起见, 不妨设Σ 取上侧 (如图).

$$\because \vec{n} \,\square\, (f_x, f_y, -1), \text{又} \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} \Rightarrow dzdx = -f_y dxdy.$$

(利用格林公式)



$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} f_y + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dxdy$$

$$= \oint_{C} P(x, y, f(x, y)) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx$$

同理可证
$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z} \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} Q \mathrm{d}y$$
$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} \mathrm{d}y \mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x} \mathrm{d}z \mathrm{d}x = \oint_{\Gamma} R \mathrm{d}x$$
三式相加, 即得斯托克斯公式 .

Stokes公式对有限多块标准曲面拼接成的曲面仍成立.
因为此时每两块面的公共边界上的曲线积分值恰好抵消.

注意: 如果 Σ 是 xoy 面上的一块平面区域,则斯托克斯公式就是格林公式,故格林公式是斯托克斯公式的特例.

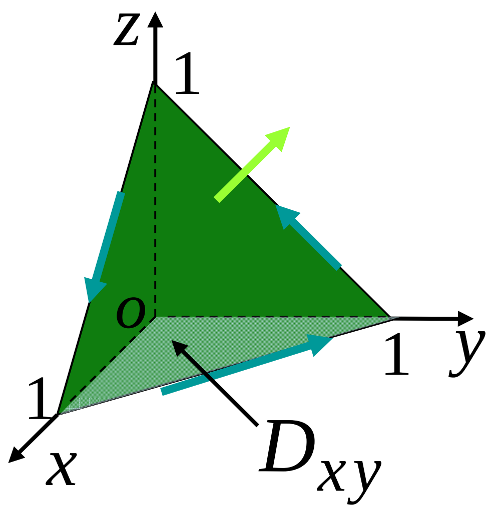
为便于记忆, 斯托克斯公式还可写作:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

例1. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$ 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解: 记三角形域为Σ, 取上侧, 则

$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

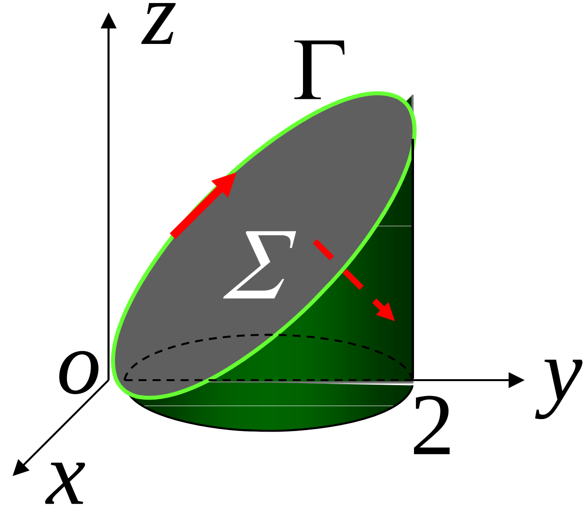
利用对称性

例2. Γ 为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线,从 z 轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解: 设Σ为平面 $z=y$ 上被 Γ 所围椭圆域, 且取下侧,

则其法线方向余弦

$$\cos\alpha=0\,,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}S=0$$

二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理2. 设 G 是空间中单连通区域, 函数 P, Q, R 在 G 内具有连续一阶偏导数, 则下列四个条件相互等价:

(1) 对 G 内任一分段光滑闭曲线 Γ, 有

$$\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

(2) 对 G 内任一分段光滑曲线 Γ, $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 与路径无关

(3) 在 G 内存在某一函数 u, 使 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

(4) 在 G 内处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

证: (4) $\Rightarrow$ (1) 由斯托克斯公式可知结论成立;

(1) $\Rightarrow$ (2) (自证)

(2) $\Rightarrow$ (3) 设函数

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P\,\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y,z)$$

$$=P(x,y,z)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z)$

故有 $\qquad \mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

(3) $\Rightarrow$ (4) 若(3)成立, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

因P, Q, R 一阶偏导数连续, 故有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

同理 $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$

证毕

例3. 验证曲线积分$\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$ 与路径无关, 并求函数

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$$

解: 令 $P=y+z$, $Q=z+x$, $R=x+y$

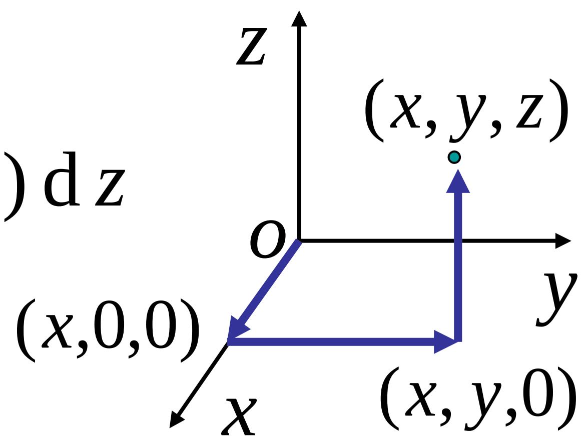
$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$\therefore$ 积分与路径无关, 因此

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z (x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z$$

$$=xy+yz+zx$$



三、 环流量与旋度

斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

设曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

曲线 Γ的单位切向量为 $\vec{\tau}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$

则斯托克斯公式可写为

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A}=(P,Q,R)$, 引进一个向量

$$\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \operatorname{rot}\vec{A}$　　rotation

于是得斯托克斯公式的向量形式：

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

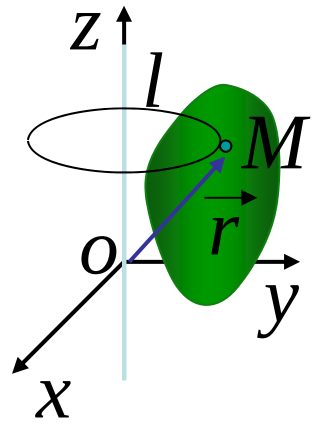
或

$$\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s \qquad ①$$

定义: $\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s$ 称为向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线 Γ的**环流量**. 向量 $\operatorname{rot}\vec{A}$ 称为向量场 $\vec{A}$ 的**旋度** .

旋度的力学意义:

设某刚体绕定轴 l 转动,角速度为 $\vec{\omega}$, M为刚体上任一点, 建立坐标系如图,则



$$\vec{\omega}=(0,0,\omega),\quad \vec{r}=(x,y,z)$$

点 M 的线速度为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=(-\omega y,\omega x,0)$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=(0,0,2\omega)=2\vec{\omega}$$

(此即“旋度”一词的来源)

斯托克斯公式①的物理意义:

$$\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot} A)_n \,\mathrm{d} S=\oint_{\Gamma} A_\tau \,\mathrm{d} s$$

向量场 $\vec{A}$ 产生的旋度场穿过 Σ 的通量

为向量场 $\vec{A}$ 沿 Γ 的环流量

注意 Σ 与 Γ 的方向形成右手系!

例4. 求电场强度 $\vec{E}=\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ 的旋度 .

解: $$\operatorname{rot}\vec{E}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{qx}{r^3} & \dfrac{qy}{r^3} & \dfrac{qz}{r^3} \end{vmatrix}=(0,0,0) \quad (除原点外)$$

这说明, 在除点电荷所在原点外, 整个电场无旋.

例5. 设 $\vec{A}=(2y\,,3x\,,z^2)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$, $\vec{n}$ 为Σ的外法向量,计算 $I=\oiint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$.

解: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & z^2\end{vmatrix}=(0\,,0\,,1)$$

$$\vec{n}=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$$

$$\therefore\quad I=\oiint_{\Sigma}\cos\gamma\,\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\pi$$

场论中的三个重要概念

设 $u=u(x,y,z)$, $\vec{A}=(P,Q,R)$, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, 则

梯度: $$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nabla u$$

散度: $$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$$

旋度: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$$

思考与练习 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=\underline{\ \ {}^2/_r\ \ };\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\underline{\ \ \vec{0}\ \ }.$$

提示： $\operatorname{grad} r=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\cdot {}^x/_r}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

三式相加即得 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r}\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

斯托克斯(1819-1903)

英国数学物理学家. 他是19世纪英国数学物理学派的重要代表人物之一, 其主要兴趣在于寻求解重要数学物理问题的有效且一般的新方法, 在1845年他导出了著名的粘性流体运动方程 (后称之为纳维 – 斯托克斯方程), 1847年先于柯西提出了一致收敛的概念. 他提出的斯托克斯公式是向量分析的基本公式. 他一生的工作先后分 五卷出版 .