第六节

高斯公式　通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

二、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

高斯，C.F.

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \textbf{(Gauss 公式)}$$

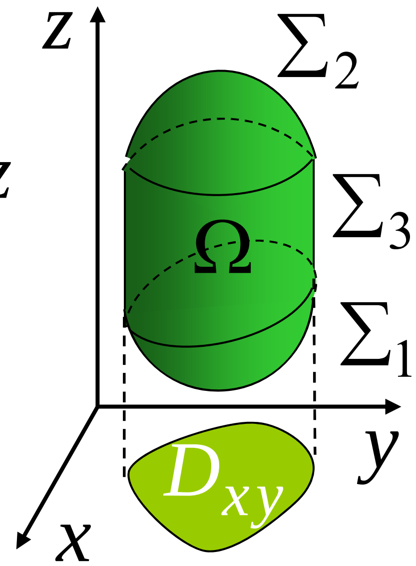
下面先证:

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证明：设$\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

为XY型区域，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$，$\Sigma_1: z = z_1(x,y)$，

$\Sigma_2: z = z_2(x,y)$，则



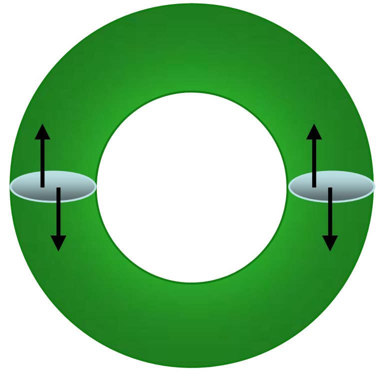
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域, 在辅助面正反两侧面积分正负抵消, 故上式仍成立 .

类似可证 $$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

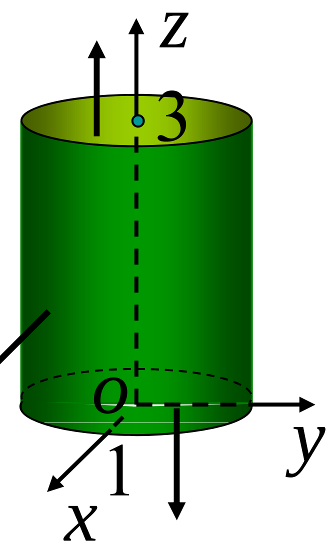
$$\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(用柱坐标)}$$

$$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

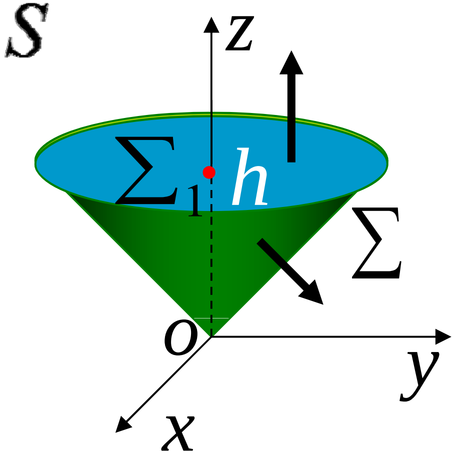
若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例**2.** 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及

$z=\ h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\ \text{取上侧}$$

记Σ,Σ_1所围区域为Ω, 则

$$\boxed{\text{在}\ \Sigma_1\ \text{上}\ \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=0}$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

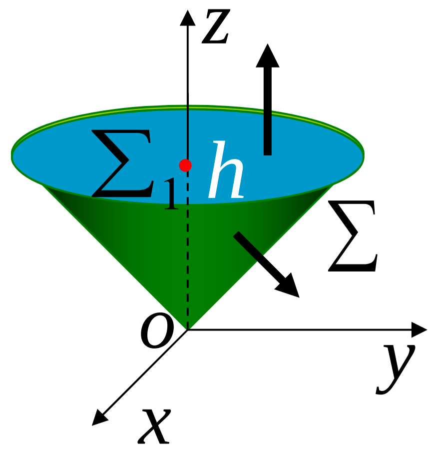
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\downarrow$ 利用重心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z \cdot \pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

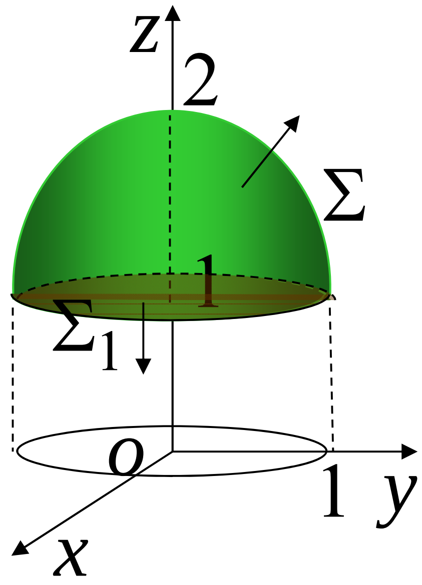
$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$



例3. 设Σ 为曲面$z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_\Sigma (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面



$$\Sigma_1: z=1\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

例4. 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$\iiint_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\boxed{P=u\frac{\partial v}{\partial x}\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y}\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}}$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

分析: 高斯公式 $\displaystyle\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: 令 $P=u\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\dfrac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_\Omega \left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

移项即得所证公式.

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型　设有空间区域 G ,

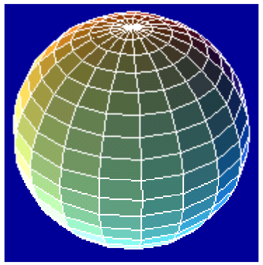
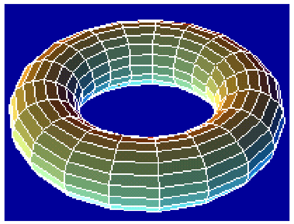
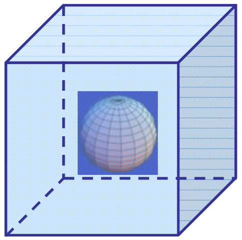
• 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G, 则称 G 为空间二维单连通域 ;

• 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为空间一维单连通域 .

例如, 球面所围区域既是一维也是二维单连通区域 ;

环面所围区域 是二维但不是一维单连通区域 ;

立方体中挖去一个小球所成的区域 是一维但不是二维单连通区域 .

2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在空间二维单连通域$G$内具有连续一阶偏导数,$\Sigma$为$G$内任一闭曲面,则

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\,,\quad (x,y,z)\in G \qquad ②$$

证: "充分性".根据高斯公式可知②是①的充分条件.

"必要性".用反证法已知①成立,假设存在$M_0\in G$,使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}\neq 0$$

因P, Q, R 在G内具有连续一阶偏导数 , 则存在邻域 $\bigcup(M_0)\subset G$,使在$\bigcup(M_0)$上,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$$

设$\bigcup(M_0)$的边界为Σ' 取外侧,则由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma'} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\bigcup(M_0)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\neq 0$$

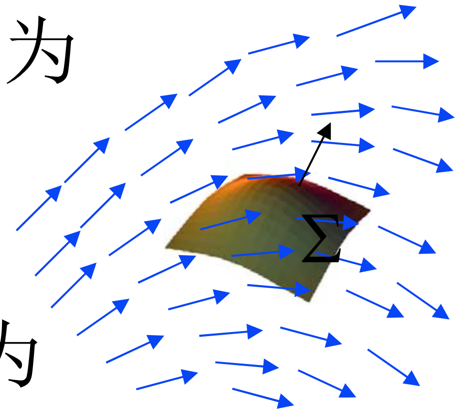
与①矛盾, 故假设不真. 因此条件②是必要的.

二、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ 为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面Σ 的流量为



$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

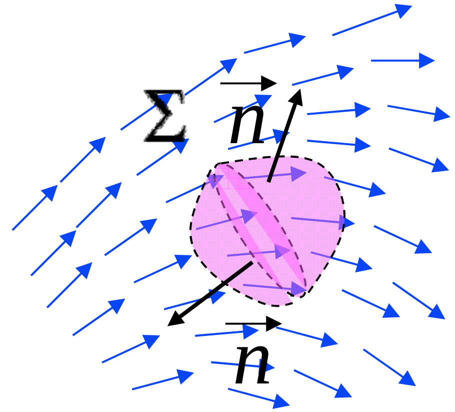
由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ 的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi > 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量少于流出的, 表明Σ 内有源;

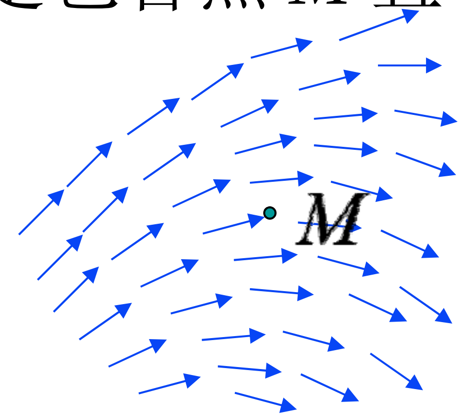
当$\Phi < 0$ 时, 说明流入Σ 的流体质量多于流出的, 表明Σ 内有洞 ;

当$\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出Σ 的流体质量相等 .

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad ③$$

为了揭示场内任意点M处的特性，设Σ是包含点M且方向向外的任一闭曲面，记Σ所围域为Ω，在③式两边同除以Ω的体积V，并令Ω以任意方式缩小至点M（记作$\Omega \to M$），则有



$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} = \lim_{\Omega \to M} \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\Omega \to M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad ((\xi,\eta,\zeta) \in \Omega)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M$$

此式反应了流速场在点M的特点：其值为正，负或 0，分别反映在该点有流体涌出，吸入，或没有任何变化.

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的通量(流量) .

在场中点 $M(x,y,z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\operatorname{div}\vec{A}$$

divergence

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$ 表明该点处有源,

$\operatorname{div}\vec{A} < 0$ 表明该点处有洞,

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 $\vec{A}$ 处处有 $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, 则称 $\vec{A}$ 为无源场.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

故它是无源场.

例5. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z) \qquad (\vec{r}\neq\vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E}=q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]$

$$=q\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]$$

$$=0 \qquad (r\neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.

内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式: $\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, P, Q, R, 在域G内有一阶 连续偏导数, 则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$\boxed{\text{思考与练习}}$ 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧, Ω 为Σ所围立体, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,判断下列演算是否正确?

$$(1)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v \cancel{=} \frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

$$(2)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\cancel{=}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

当函数 P, Q, R 在闭曲面Σ内存在点不满足高斯定理条件时, 可考虑添加辅助曲面后再用高斯公式.

例. 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中Σ为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 取外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解: 作辅助曲面 $\Sigma_\varepsilon : x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取内侧. ε 足够小, 使得 Σ_ε 围成的小球体 Ω_ε 在Σ所围区域内部， 则在Σ与 Σ_ε 围成的区域Ω内函数满足高斯公式的条件.

由

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

于是

$$\iint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}-\iint_{\Sigma_\varepsilon}\right)$$

$$=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取内侧

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_\varepsilon}(1+1+1)\mathrm{d}V=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi$$

高斯(1777 – 1855)


高斯，C.F.

德国数学家、天文学家和物理学家，是与阿基米德，牛顿并列的伟大数学家，他的数学成就遍及各个领域，在数论、代数、非欧几何、 微分几何、 超几何级数、复变函数及椭圆函数论等方面均有一系列开创性的贡献，他还十分重视数学的应用，在对天文学、大地测量学和磁学的研究中发明和发展了最小二乘法、曲面论和位势论等．他在学术上十分谨慎，恪守这样的原则：“问题在思想上没有弄通之前决不动笔”．