3.4 常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$ 型

二阶常系数线性非齐次微分方程 :

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (\, p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理 , 其通解为

$$\underset{\text{齐次方程通解}}{Y} \qquad y = Y + y^{*} \qquad \underset{\text{非齐次方程特解}}{y^{*}}$$

求特解的方法 — **待定系数法**

根据 $f(x)$ 的特殊形式 , **给出特解** y^{*} 的待定形式,

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

设特解为 $y^*=\underline{e^{\lambda x}Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda\,Q(x)}+\underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda^2\,Q(x)}+\underline{2\lambda\,Q'(x)}+\underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$.

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(2) 若λ 是特征方程的单根 , 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\quad 2\lambda + p \neq 0\,,$$

则$Q'(x)$为m 次多项式, 故特解形式为 $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根 , 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\quad 2\lambda + p = 0\,,$$

则$Q''(x)$ 是 m 次多项式, 故特解形式为 $y^* = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①, 当λ 是特征方程的 k 重根 时, 可设

特解 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}\quad (k = 0, 1, 2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

例1. 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda=0$, 而特征方程为 $r^2-2r-3=0$,

$\lambda=0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$, 代入方程 :

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0=3 \\ -2b_0-3b_1=1 \end{cases} \Longrightarrow b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\frac{1}{3}$.

例2. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 其根为

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得 $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

因此特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$.

例3. 求解定解问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题 $\lambda = 0$, 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = bx$, 代入方程得 $2b = 1$, 故

$y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -{}^3\!/_4 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -{}^1\!/_4 \end{cases}$$

于是所求解为

$$y = -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x})$$

二、$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

分析思路:

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+\tilde{P}_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda+i\omega$ 是特征方程的 k 重根 (k = 0, 1)，则 ② 有

特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $\quad (y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解 :

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}[Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m}\, e^{-i\omega x}]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[\, Q_m(\cos\omega x + i\sin\omega x)$$

$$+ \overline{Q_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\,]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[\, R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x\,]$$

其中 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次多项式 .

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

因 $$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^*本质上为实函数，因此 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式 .

小 结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例4. 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, \tilde{P}_n(x) = 0,$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数 , 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\therefore\ a = \frac{-1}{3},\ d = \frac{4}{9}$

$b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$.

例5. 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2+9=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$\pm 3i$为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x-\underline{6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x-\underline{30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5$, $b=3$,

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

例6. 求下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1)\quad y^{(4)}+2y''+y=\sin x$$

$$(2)\quad y^{(4)}+y''=\underline{x}+\underline{e^{x}}+\underline{3\sin x}$$

解: (1) 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$, 即 $(r^2+1)^2=0$, 有二重根 $r=\pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4+r^2=0$, 即 $r^2(r^2+1)=0$ 有根

$$r_{1,2}=0,\quad r_{3,4}=\pm i$$

利用叠加原理, 可设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(ax+b)+ce^x+x(d\cos x+k\sin x)$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,e^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 k (＝0, 1, 2) 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 k (＝0, 1)重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \widetilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\, l, n \,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

思考与练习

1 . (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k\,e^{2x}$

提示: $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + \widetilde{R}_m(x)\sin\omega x\right]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

2. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$ 的通解 (其中 α 为实数) .

解: 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$, 特征根: $r_1 = r_2 = -2$

对应齐次方程通解: $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

$\alpha \neq -2$时, 令 $y^* = Ae^{\alpha x}$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}$

$\alpha = -2$时, 令 $y^* = Bx^2 e^{\alpha x}$, 代入原方程得 $B = \frac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{\alpha x}$

3. 已知二阶常微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y = e^{-x}(1 + xe^{2x})$，求微分方程的通解 .

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)e^{-x} + (2+a)e^x + (1+a+b)xe^x = ce^x$$

比较系数得 $\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 2+a=c \\ 1+a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

故原方程为 $y'' - y = 2e^x$

$$\boxed{y = e^{-x} + xe^x}$$

对应齐次方程通解: $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

原方程通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x$