第四节
重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的重心

四、物体的转动惯量

1. 能用重积分解决的实际问题的特点

所求量是 $\begin{cases} \text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性} \end{cases}$

2. 用重积分解决问题的方法

- 用微元分析法 (元素法)
- 从定积分定义出发 建立积分式

3. 解题要点

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

一、立体体积

- 曲顶柱体的顶为连续曲面 $z = f(x, y), (x, y) \in D,$

则其体积为

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 占有空间有界域 Ω 的立体的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例1. 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积 V.

解: 曲面 S_1 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程为

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0^2 - y_0^2$$

它与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xoy 面上的投影为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad \text{(记所围域为}D\text{)}$$

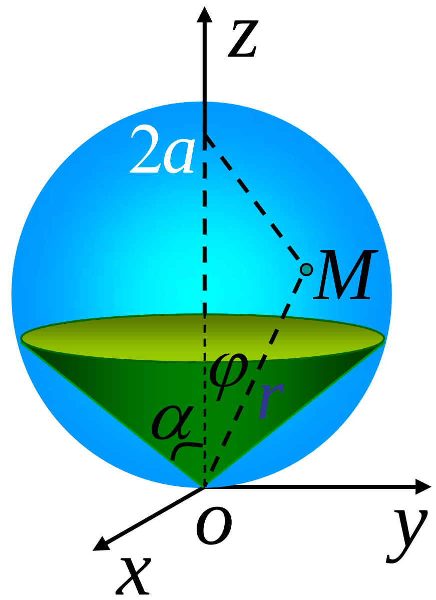
$$\therefore \quad V = \iint_D [2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - x^2 - y^2] \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_D [1 - \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)] \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

令 $x - x_0 = r\cos\theta$, $y - y_0 = r\sin\theta$

$$= \pi - \iint_D r^2 \cdot r \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\,\theta = \pi - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}\, r = \frac{\pi}{2}$$

例2. 求半径为*a* 的球面与半顶角为α 的内接锥面所围成的立体的体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases} 0\le r\le 2a\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\alpha \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

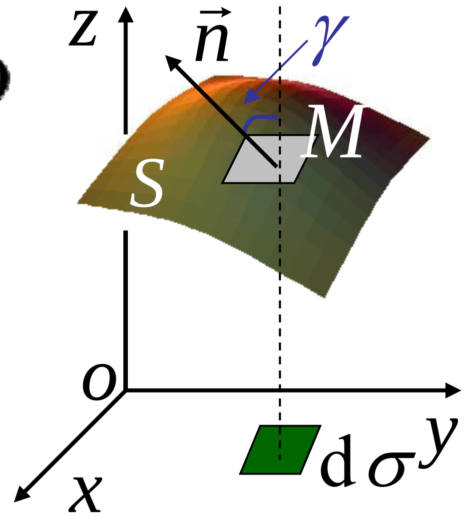
则立体体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$

二、曲面的面积

设光滑曲面 $S: z = f(x,y),\ (x,y)\in D$



则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

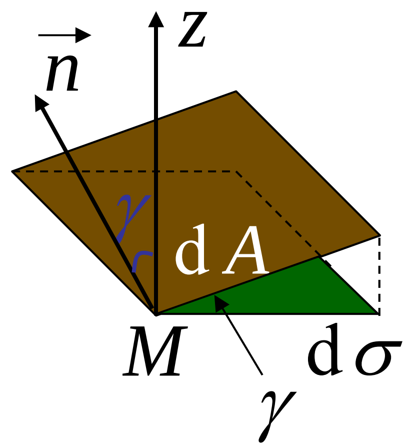
设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)



故有曲面面积公式

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x{}^2(x,y) + f_y{}^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若光滑曲面方程为 $x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$,则有

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y=h(z,x)$, $(z,x)\in D_{zx}$,则有

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\quad A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例3. 计算双曲抛物面$z = xy$被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A .

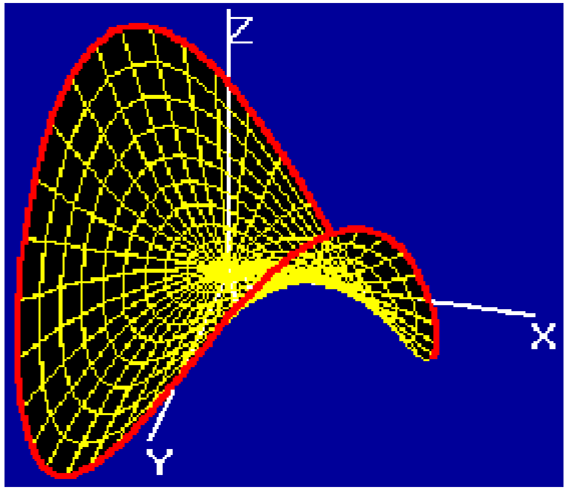
解: 曲面在 xoy 面上投影为$D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

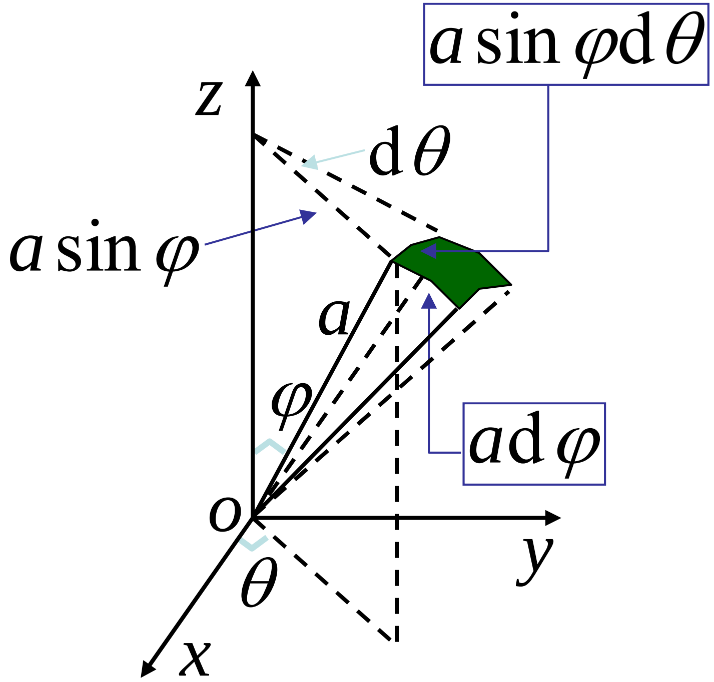
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1 + R^2)^{3/2} - 1)]$$



例4. 计算半径为 a 的球的表面积.

解：方法1 利用球坐标方程.



设球面方程为 $r = a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$

方法2 利用直角坐标方程.

上半球面的方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

投影区域D $: x^2+y^2 \le a^2$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$$

$$A=2\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma=2a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$$

$$=4\pi a^2$$

三、物体的重心

设空间有n个质点, 分别位于(x_k, y_k, z_k), 其质量分别为m_k $(k=1,2,\cdots,n)$, 由力学知, 该质点系的重心坐标为

$$x_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad y_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad z_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}$$

设物体占有空间域Ω, 有连续密度函数$\rho(x,y,z)$, 则采用 “大化小, 常代变, 近似和, 取极限” 可导出其重心公式, 即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k, η_k, ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k, η_k, ζ_k) 的质点, 此质点系的重心坐标就近似该物体的重心坐标. 例如,

$$x_G \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$x_G = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $$y_G=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_G=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$x_G=\frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad y_G=\frac{\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$z_G=\frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$$ （$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为$\Omega$的体积）

若物体为占有xoy 面上区域 D 的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的重心坐标为

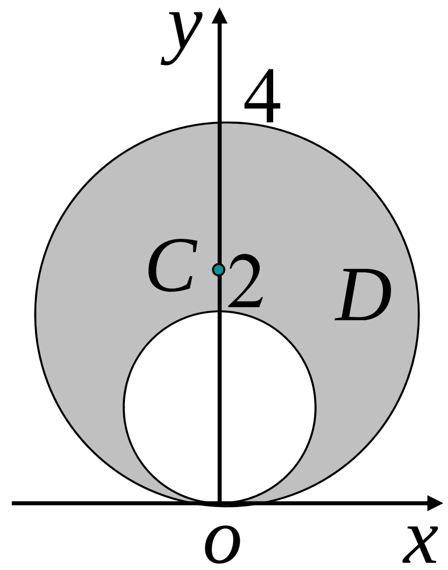
$$x_G = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$y_G = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$\rho =$ 常数时, 得D 的形心坐标:

$$x_G = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}, \; y_G = \frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A} \quad (A \text{ 为 } D \text{ 的面积})$$

例5. 求位于两圆 $r = 2\sin\theta$ 和 $r = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的重心.



解: 利用对称性可知 $x_G = 0$

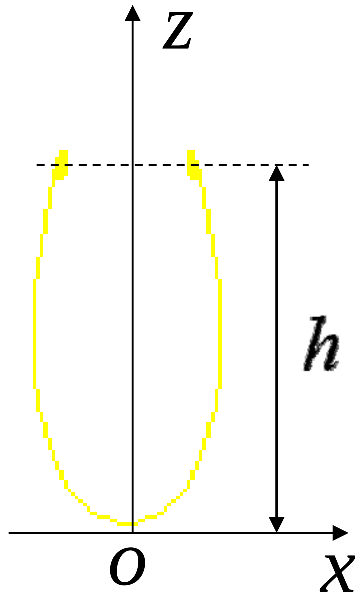
而 $$y_G = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$

例6. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的重心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上，故其坐标为

$$x_G = y_G = 0,\ z_G = \frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱坐标, 则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$, 因此

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$V = \frac{\pi}{9} h^3 \left(\frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4} h^2\right)$$

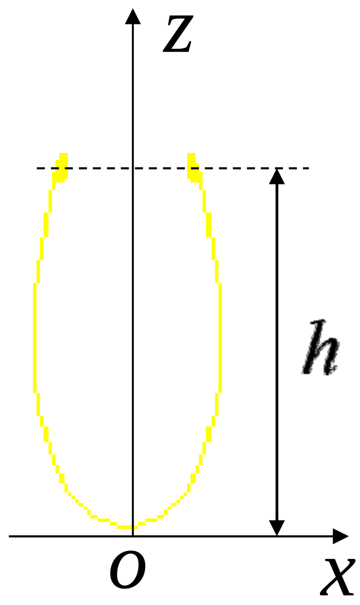
$$\iiint_{\Omega} z d x \mathrm{d} y \mathrm{d} z$$

$$= \int_0^h z \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

$$= \int_0^h \frac{\pi}{9} z^2 (3 - z)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{9} h^3 \left(3 - \frac{3}{2} h + \frac{1}{5} h^2\right)$$

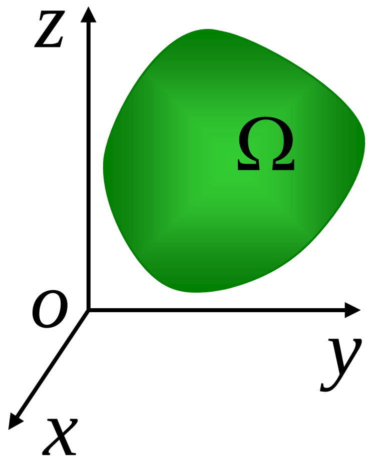
$$\therefore \quad z_G = h \frac{60 - 30h + 4h^2}{90 - 40h + 5h^2}$$



四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x, y, z)$. 该物体位于(x, y, z) 处的微元对 z 轴的转动惯量为



$$\mathrm{d}I_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

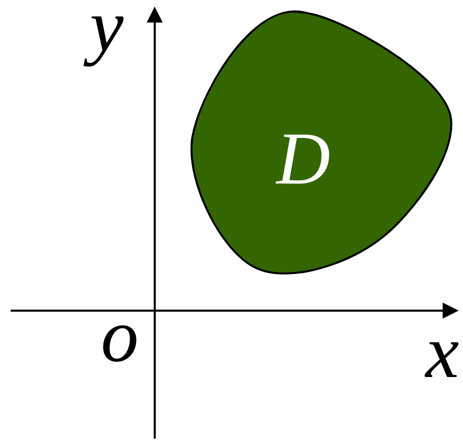
如果物体是平面薄片, 面密度为 $\mu(x, y), (x, y) \in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

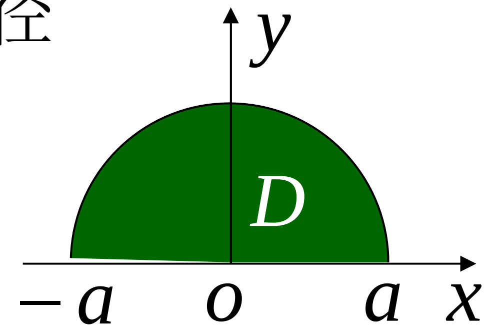
$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例7.求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x=\iint_D \mu\, y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

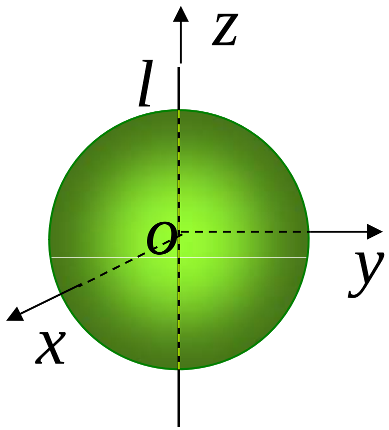
$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\dfrac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}M a^2$$

例8. 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (\text{用球坐标})$$

$$= \rho \iiint_{\Omega} (r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta) \cdot r^2\sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^4 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量

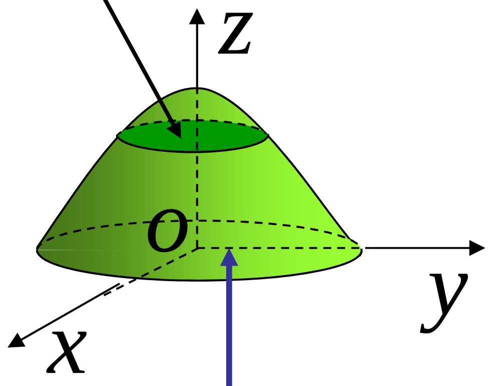
$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

备用题

1.设有一高度为$h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? **(2001考研)**

提示:

$D_z: x^2+y^2 \le [\frac{1}{2}h^2(t)-h(t)z]$



$D_0: x^2+y^2 \le \frac{1}{2}h^2(t)$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint_{D_0}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(用极坐标)}$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

$$V=\frac{\pi}{4}h^3(t)\,,\qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10}\\ h(0)=130\end{cases}\Longrightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

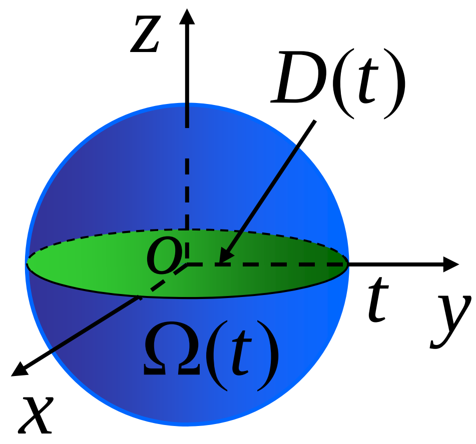
令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100$ (小时)

因此高度为130cm的雪堆全部融化所需的时间为100小时.

2. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$. (03考研)

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t\,f(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$, 故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r]^2>0$

因 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$$g(t)>g(0)=0 \qquad (t>0)$$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0.$