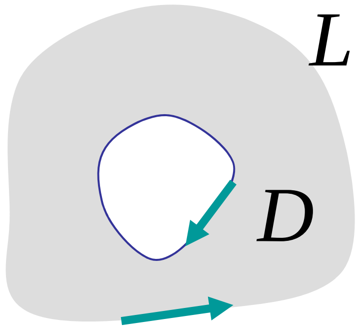
第三节 格林公式及其应用

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases}\text{单连通区域 (无“洞”区域)}\\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)}\end{cases}$



域 D 边界L 的正向: **域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y),\ Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(格林公式)

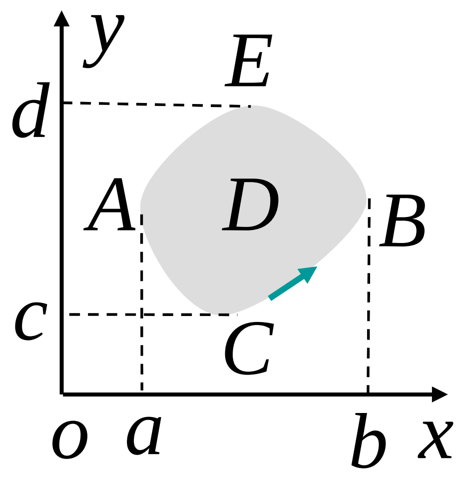
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证明：1) 若D既是X-型区域，又是Y-型区域，且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

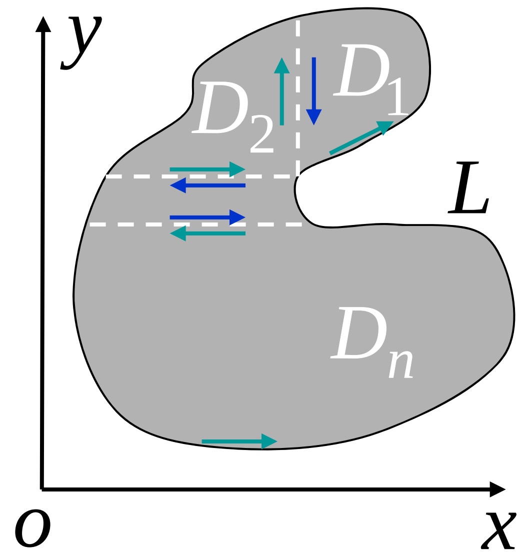
同理可证

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件, 则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域, 如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ (∂D_k表示D_k的正向边界)

$$= \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证毕

格林公式 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 *L* 所围区域 *D* 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}, \ 0 \le \theta \le 2\pi$ 所围面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\,ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

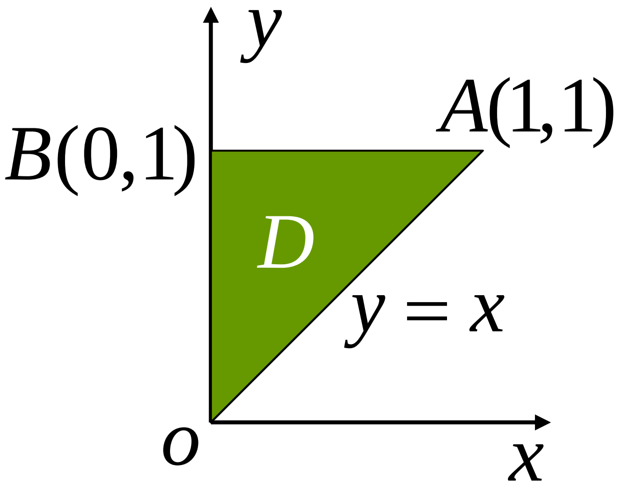
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2,$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .



解: 令$P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} xe^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} xe^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

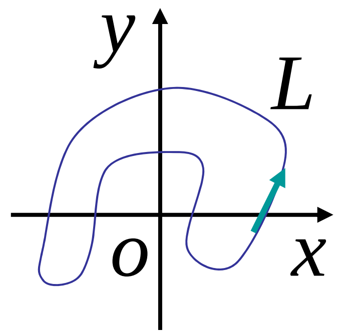
例3. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

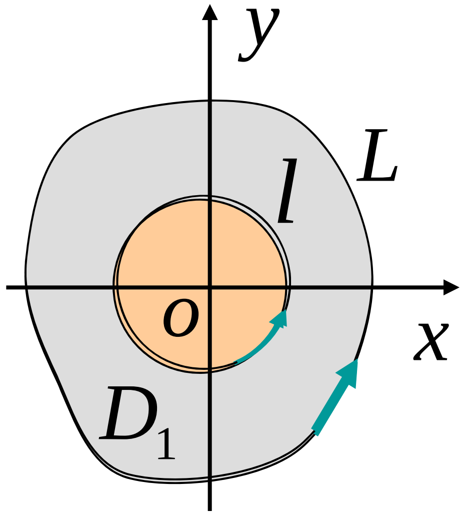
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时, 在D 内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^-所围的区域为 D_1, 对区域D_1 应用格林公式, 得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore\quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D 是单连通域 , 函数 $P(x,y), Q(x,y)$在D 内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$

(2) 对D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

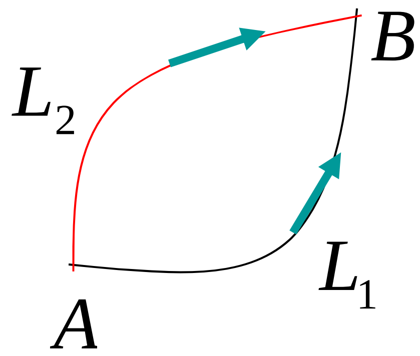
(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分,

即 $$\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为D 内任意两条由A 到B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$

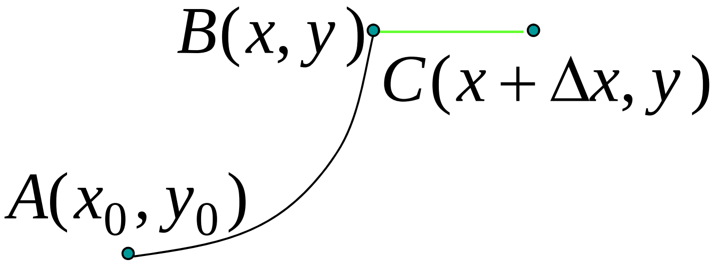
$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数



$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则 $$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$$

$$= \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x,\, y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 因此有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,\ y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

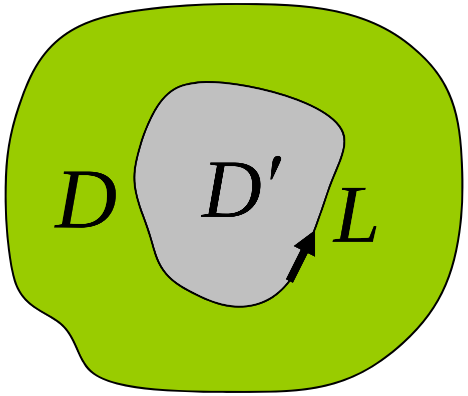
P, Q 在 D 内具有连续的偏导数，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为 $D' \subset D$ (如图), 因此在 D'上



$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0$$

证毕

说明: 根据定理2 , 若在某区域内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则

1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,

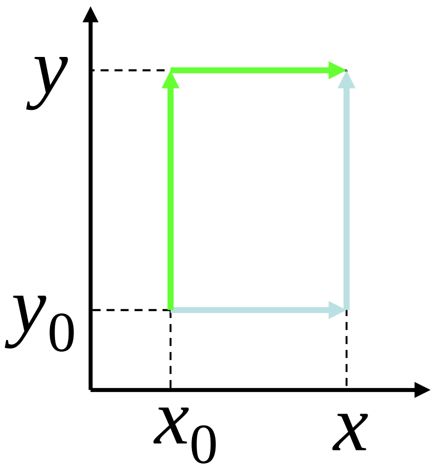
若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线;

3) 可用积分法求d $u = P$ dx + Q dy在域 D 内的原函数:

取定点$(x_0, y_0)\in D$及动点$(x, y)\in D$, 则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$

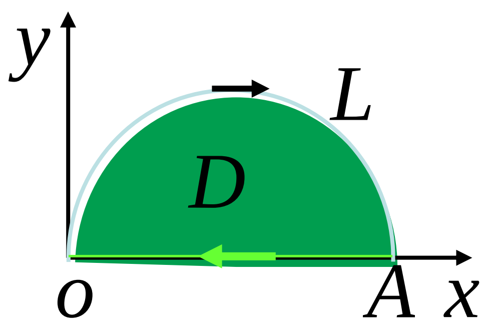
例4. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 O (0, 0) 到 A (4, 0).

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$,它与L 所围区域为D , 则

$$原式 =\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$



$$=8\pi+\frac{64}{3}$$

例5. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

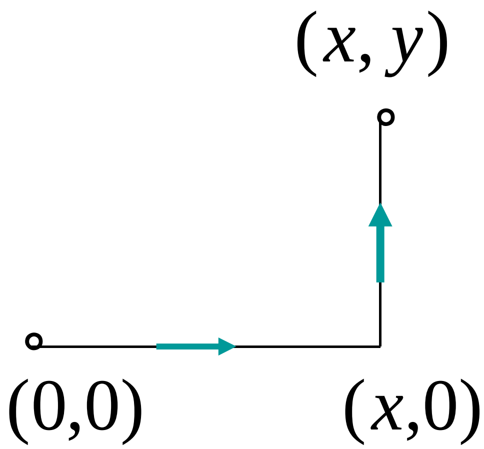
证: 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y,$ 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由定理2 可知, 存在函数 $u\,(x\,,y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

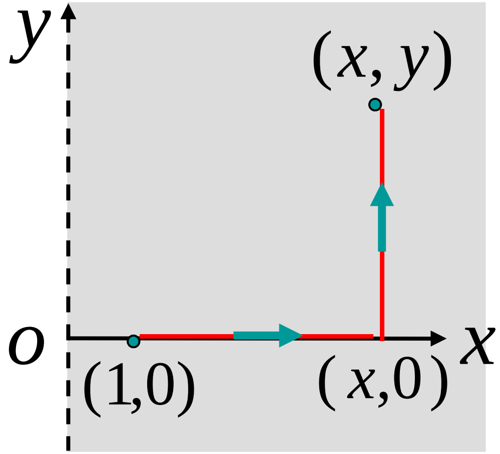
$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$



$$= \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y^2$$

例6. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x>0$) 内存在原函数 , 并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad (x>0)$

由**定理 2** 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_1^x 0\cdot\mathrm{d}x + x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x} \quad (x>0)$$

或

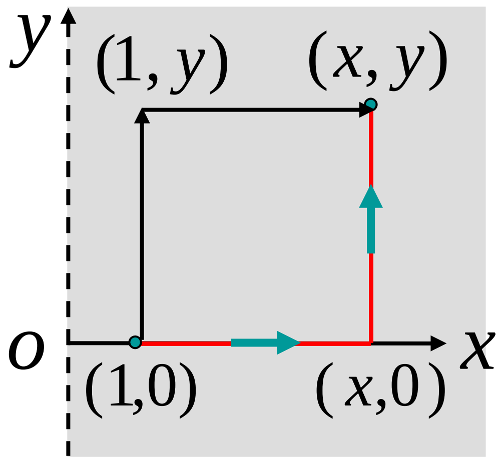
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

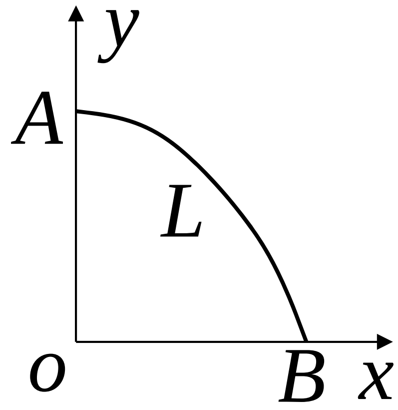
$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x>0)$$



例7. 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L：$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$，求力场所作的功 W (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解: $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \dfrac{k}{r^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$

令 $P=\dfrac{ky}{r^2}$, $Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

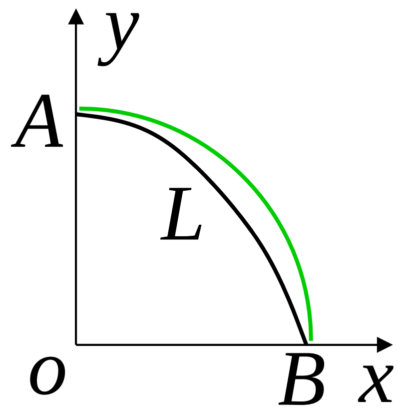
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\widehat{AB}$: $x=\frac{\pi}{2}\cos\theta, y=\frac{\pi}{2}\sin\theta \ (\theta: \frac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\widehat{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关!

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

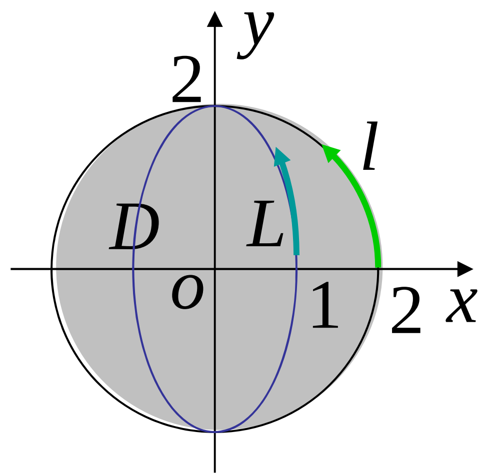
$\rightleftharpoons$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\rightleftharpoons$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\rightleftharpoons$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

思考与练习

1. 设 $L: x^2+\frac{1}{4}y^2=1,\ l: x^2+y^2=4$，且都取正向，问下列计算是否正确？



(1) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \cancel{=} \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\pi$$

(2) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\pi$$

提示: $x^2+y^2\neq 0$ 时

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}$

(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

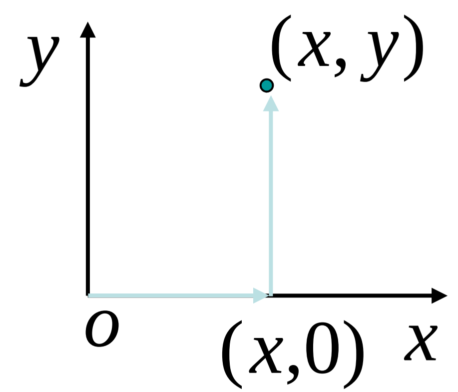
2. 设 $\mathrm{grad}\, u(x,y)=(x^4+4xy^3, 6x^2y^2-5y^4)$，求 $u(x,y)$.

提示: $\mathrm{d}\,u(x,y)=(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y+C$$

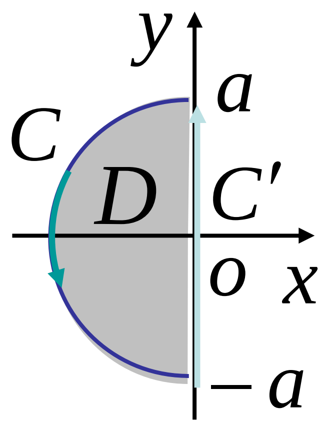
$$=\int_0^x x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5+C$$



3. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+\left[ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]\mathrm{d}y$$



解: 添加辅助线如图, 利用格林公式.

$$原式=\int_{C+C'}-\int_{C'}$$

$$=\iint_D\left[a+\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}-\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\cancel{\int_{-a}^{a}(2y\ln a)\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

4. 质点M 沿着以AB为直径的半圆, 从 $A(1,2)$ 运动到点$B(3, 4)$, 在此过程中受力 $\vec{F}$ 作用, $\vec{F}$ 的大小等于点 M 到原点的距离, 其方向垂直于OM, 且与y 轴正向夹角为锐角, 求变力 $\vec{F}$ 对质点M 所作的功. (90考研)

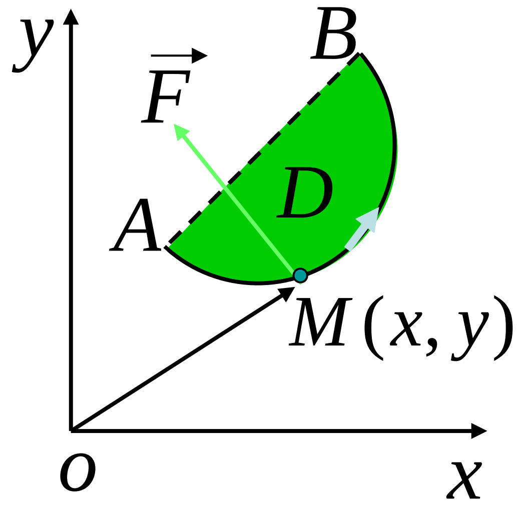
解: 由图知 $\vec{F}=(-y, x)$, 故所求功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$

$$=\Big(\int_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}\Big)(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

$$=2\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_1^3[-(x+1)+x]\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi-2$$



$\overline{AB}$的方程

$$y=2+\frac{4-3}{3-1}(x-1)$$