

3.3 常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

↓ 转化

求特征方程(代数方程)之根

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad ①$$

因为 r 为常数时,函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子,所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数),代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$
$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \quad ②$$

称②为微分方程①的特征方程,其根称为特征根.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时,②有两个相异实根 r_1, r_2 ,则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$ ($u(x)$ 待定)
代入方程得:

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0$$

↓ 注意 r_1 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = x e^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

小结:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i \beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程.

推广:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

$$\text{特征方程: } r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i\beta$, 则其通解中必含
对应项

$$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + \\ + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根: $r_1 = -1, r_2 = 3$,
因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例2. 求解初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \\ \underline{s|_{t=0} = 4}, \quad \underline{\frac{ds}{dt}|_{t=0} = -2} \end{cases}$$

解: 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t) e^{-t}$

例3. 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_{3,4} = 1 \pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y = C_1 + C_2x + e^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

例4. 解方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

解: 特征方程: $r^5 - r^4 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, \quad r_5 = 1$$

原方程通解: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, e^x$)

例5. 解方程 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0 \quad (\beta > 0).$

解: 特征方程: $r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2\beta^2 r^2 = 0$

即 $(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0$

其根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

方程通解:

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) \\ + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right)$$

例6. 解方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

解: 特征方程: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + 1)^2 = 0$$

特征根为 $r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$

则方程通解:

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$$

内容小结

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: r_1, r_2

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时, 通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解.

思考与练习

1. 求方程 $y'' + a y = 0$ 的通解 .

答案: $a = 0$: 通解为 $y = C_1 + C_2 x$

$a > 0$: 通解为 $y = C_1 \cos \sqrt{a} x + C_2 \sin \sqrt{a} x$

$a < 0$: 通解为 $y = C_1 e^{\sqrt{-a} x} + C_2 e^{-\sqrt{-a} x}$

2. 求一个以 $y_1 = e^x$, $y_2 = 2xe^x$, $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解.

解: 根据给定的特解知特征方程有根:

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm 2i$$

因此特征方程为 $(r-1)^2 (r^2 + 4) = 0$

即 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$

故所求方程为 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$

其通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$