§2　等可能概型

一、等可能概型（古典概型）

二、几何概型

排列组合公式

1）加法原理：完成某件事有两类方法，第一类有*n*种，第二类有*m*种，则完成这件事共有*n*+*m*种方法。

2）乘法原理：完成某件事有两个步骤，第一步有*n*种方法，第二步有*m*种方法，则完成这件事共有*nm*种方法。

3） 排列：

(1)有重复排列:在有放回选取中，从*n*个不同元素中取*r*个元素进行排列，称为有重复排列，其总数为n^r 。

（2）选排列：在无放回选取中，从 n 个不同元素中取 r 个元素进行排列，称为选排列，其总数为

$$P_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

4）组合：

（1）从 n 个不同元素中取 r 个元素组成一组，不考虑其顺序，称为组合，其总数为

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

说明：如果把 n 个不同元素分成两组，一组 r 个，另一组 $n-r$ 个，组内元素不考虑顺序，那么不同分法有 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 种。

（2）多组组合：把n个不同元素分成$k(1\leqslant k\leqslant n)$组，使第$i$组有$n_i$个元素，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，若组内元素不考虑顺序，那么不同分法有

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

种。

说明：熟练运用排列组合公式对求概率问题是很重要的。

一、等可能概型（古典概型）

生活中有这样一类试验，它们的共同特点是：

- 样本空间的元素只有有限个；
- 每个基本事件发生的可能性相同。

我们把这类实验称为等可能概型，考虑到它在概率论早期发展中的重要地位，又把它叫做古典概型。

古典概率公式

设$S=\{e_1, \ e_2, \ \dots e_n\}$，由古典概型的等可能性，得

$$P\{e_1\}=P\{e_2\}=\dots=P\{e_n\}.$$

又由于基本事件两两互不相容；所以

$$1=P\{S\}=P\{e_1\}+P\{e_2\}+\cdots P\{e_n\},$$

$$P\{e_i\}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即$A=\{e_1, e_2, \ \dots e_k\}$，则有：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}.$$

古典概型--例 1

将一枚硬币抛掷三次。设：

事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，

事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，

求 $P(A_1)$，$P(A_2)$

解：根据上一节的记号，E_2 的样本空间

$S_2=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH, TTT\}$，

$n=8$，即 S_2 中包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，属于古典概型。

A_1为“恰有一次出现正面”，

$A_1=\{HTT,\ THT,\ TTH\}$，

$$k=3, \qquad P(A_1)=\frac{k}{n}=\frac{3}{8},$$

事件 A_2为“至少有一次出现正面”，

A_2={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH }

$$k_2=7,\qquad P(A_2)=\frac{k_2}{n}=\frac{7}{8},$$

另解：由于$\overline{A}_2$={TTT}, $k_{\overline{A}_2}=1$，$P(\overline{A}_2)=\frac{k_{\overline{A}_2}}{n}=\frac{1}{8}$,

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

古典概型--例 2

一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球。从袋中取球两次，每次随机的取一只。考虑两种取球方式：

放回抽样:第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。

不放回抽样:第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球。

分别就上面两种方式求：

1）取到的两只都是白球的概率；

2）取到的两只球颜色相同的概率；

3）取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

解：从袋中取两球，每一种取法就是一个基本事件。

设　A=“　取到的两只都是白球　”，

B=“　取到的两只球颜色相同　”，

C=“　取到的两只球中至少有一只是白球”。

有放回抽取：

$$P(A)=\frac{4^2}{6^2}=0.444 \qquad P(B)=\frac{4^2+2^2}{6^2}=0.556$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2^2}{6^2}=0.889$$

无放回抽取:

$$P(A)=\frac{4\times 3}{6\times 5}=\frac{C_4^2}{C_6^2}$$

$$P(B)=\frac{4\times 3+2\times 1}{6\times 5}=\frac{C_4^2+C_2^2}{C_6^2}$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2\times 1}{6\times 5}=1-\frac{C_2^2}{C_6^2}$$

例 3　将 n 只球随机的放入 N（$N \geq n$）个盒子中去，求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子的容量不限）。

解：　将 n 只球放入 N 个盒子中去, 共有

$$N * N * \dots * N = N^{n}$$ 种放法，

而每个盒子中至多放一只球，共有

$$N*(N-1)*\dots*[N-(n-1)] = P_N^n$$ 种放法，

故 $$p = \frac{N*(N-1)*\dots*[N-(n-1)]}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n}.$$

思考：某指定的n 个盒子中各有一球的概率。

例4　设有 N 件产品，其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k（$k \le D$）件次品的概率是多少?

1）不放回抽样

解：在 N 件产品中抽取 n 件，取法共有 C_N^n 种，

又在 D 件次品中取 k 件，所有可能的取法有

C_D^k 种，

在 N-D 件正品中取 n-k 件，所有可能的取法有

C_{N-D}^{n-k} 种，

由乘法原理知：在 N 件产品中取 n 件，其中恰有 k件次品的取法共有

$$C_D^k C_{N-D}^{n-k} \text{ 种},$$

于是所求的概率为：

$$p = \frac{C_D^k \, C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

此式即为*<u>超几何分布</u>*的概率公式。

解法二：样本数目： $N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)$

***k*件次品的取法为：**

$$C_n^k D\cdot\ldots\cdot(D-k+1)\cdot(N-D)\cdot\ldots\cdot(N-D-(n-k)+1)$$

于是所求的概率为：

$$p=\frac{C_D^k\ C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

2） 有放回抽样

从 N 件产品中有放回地抽取n 件产品进行排列，可能的排列数为 N^n 个，将每一排列看作基本事件，总数为 N^n 。

而在 N 件产品 中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有 $D^k(N-D)^{n-k}$

于是所求的概率为：

$$P=\frac{C_n^k D^k(N-D)^{n-k}}{N^n}=C_n^k(\frac{D}{N})^k(1-\frac{D}{N})^{n-k}$$

此式即为<u>*二项分布*</u>的概率公式。

例 5 将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班中去，这15 名新生中有 3 名是优秀生。问：

（1） 每个班各分配到一 名优秀生的概率是多少？

（2） 3 名优秀生分配到同一个班级的概率是多少？

解：15名新生平均分配到 3 个班级中去的分法总数为：

$$C_{15}^{5} * C_{10}^{5} * C_{5}^{5} = \frac{15!}{5!*5!*5!}$$

（1）将 3 名优秀生分配到 3 个班级，使每个班级都有一名优秀生的分法共有 3！ 种。其余 12 名新生平均分配到 3 个班级中的分法共有

$$12!/(4!\,4!\,4!)\text{ 种，}$$

每个班各分配到一 名优秀生的分法总数为：

$$3!*[12!/(4!\,4!\,4!)]$$

于是所求的概率为：

$$p_1=\frac{3!\times 12!}{4!4!4!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{3!\times 12!\times 4!4!4!}{15!\times 5!5!5!}=\frac{25}{91}=0.2747.$$

（2）　3 名优秀生分配到同一个班级的概率为：

$$p_2 = 3 \times \frac{12!}{2!5!5!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{3 \times 12! \times 5!}{2! \times 15!} = \frac{6}{91} = 0.0659 \ .$$

三名优秀生分配在同一班级内

其余12名新生，一个班级分2名，另外两班各分5名

例 6　某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12　次接待都是在周二和周四进行的。问是否可以推断接待时间是有规定的？

解：假设接待站的接待时间没有规定，各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12 次接待来访者都在周二、周四的概率为：

$$2^{12}/7^{12}=0.0000003,$$

即千万分之三。

实际推断原理

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次实验中几乎是不发生的”（称之为实际推断原理）。现在概率很小的事件在一次实验中竟然发生了，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

例 7 袋中有 a 只白球，b 只黑球．从中将球取出依次排成一列，问第 k 次取出的球是黑球的概率．

解：设 A=“第 k 次取出的球是黑球”

从 $a+b$ 个球中将球取出依次排成一列共有 $(a+b)!$ 种排法（样本点总数）.

第 k 次取出黑球，有取法 $b(a+b-1)!$ 种，因此事件 A 所含样本点数为 $b(a+b-1)!$.

所以，
$$P(A)=\frac{b\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b}.$$

注意：此结果与次数 k 无关.

例8 同时掷 5 颗骰子，试求下列事件的概率：

A ={ 5 颗骰子不同点 }；

B ={ 5 颗骰子恰有 2 颗同点 }；

C ={ 5 颗骰子中有 2 颗同点，另外 3 颗同是另一个点数}.

解：同时掷5颗骰子，所有可能结果共有6^5个

所以 $$P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}$$

事件B所含样本点数为$C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3$，

所以 $$P(B)=\frac{C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3}{6^5}=0.4630;$$

事件C所含样本点数为$C_5^2 \cdot P_6^2$，

所以，
$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot P_6^2}{6^5} = 0.03858$$

例 9 从 1～9 这 9 个数中有放回地取出 n 个.

试求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：A ={取出的 n 个数的乘积能被 10 整除}；

B ={ 取出的 n 个数至少有一个偶数 }；

C ={取出的 n 个数至少有一个 5 } .

则 $A = B \cap C$.

$$P(A) = P(BC) = 1 - P(\overline{BC}) = 1 - P(\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$= 1 - \left[P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{B}\,\overline{C})\right]$$

$$= 1 - \frac{5^n}{9^n} - \frac{8^n}{9^n} + \frac{4^n}{9^n}$$

二、几何概型

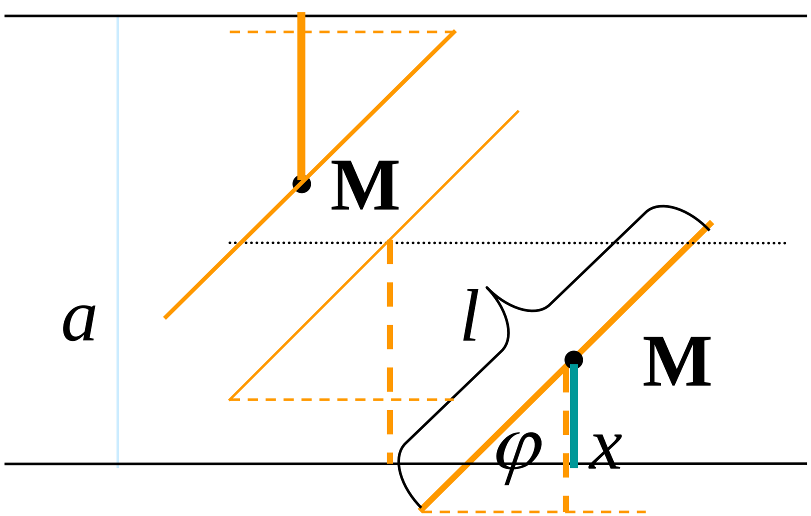
几何概型考虑的是有无穷多个等可能结果的随机试验。

一般，设某个区域 D（线段，平面区域，空间区域），具有测度 m_D(长度，面积，体积)。如果随机实验 E 相当于向区域内任意地取点，且取到每一点都是等可能的，则称此类试验为几何概型。

如果试验 E 是向区域内任意取点，事件 A 对应于点落在 D 内的某区域 A，则

$$P(A) = \frac{m_A}{m_D}.$$

例 1（蒲丰投针问题）平面上有一族平行线。其中任何相邻的两线距离都是 a（a>0）。向平面任意投一长为 l（l<a）的针，试求针与一条平行线相交的概率。



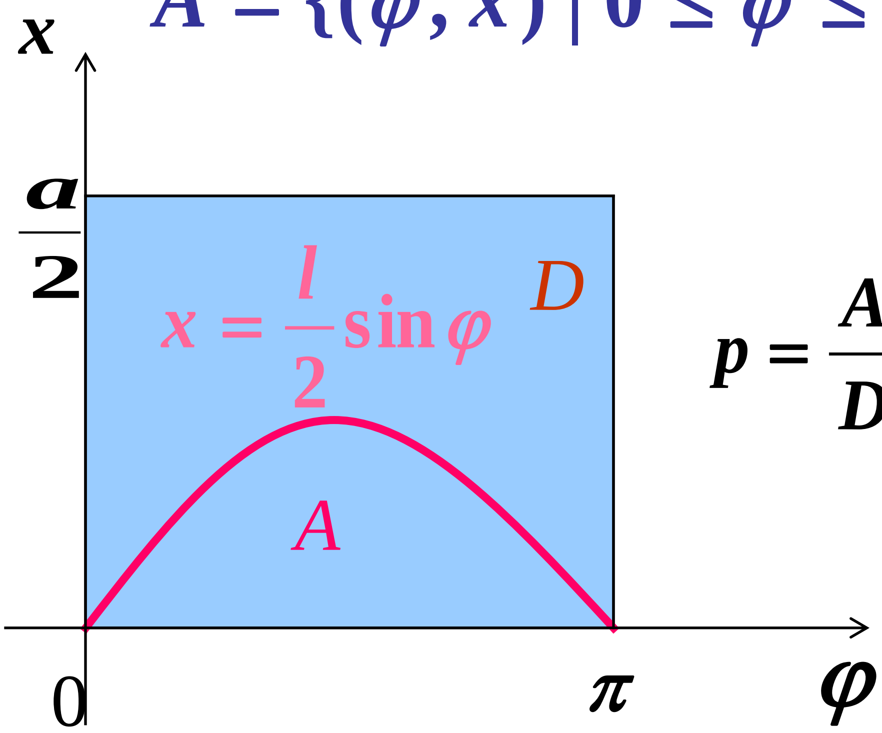
解：设 x 是针的中点 M 到最近的平行线的距离，φ是针与此平行线的交角，投针问题就相当于向平面区域 D 取点的几何概型。

$$D=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

几何概型

$$D=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

$$A=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$

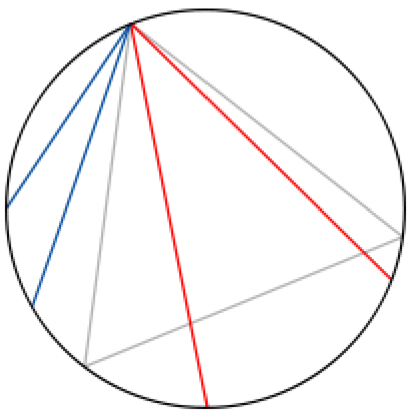


$$p=\frac{A\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

几何概型

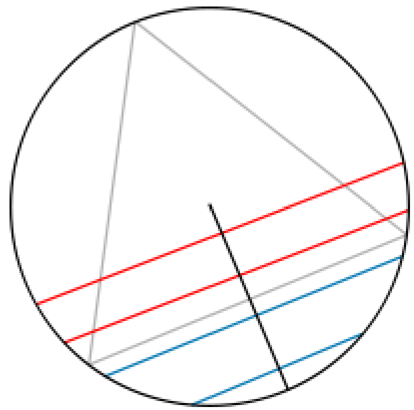
例题2：Bertrand’s paradox (贝特朗悖论)

在半径为1的圆内的所有弦中任选一条弦，求该弦的长度长于圆的内接正三角形边长的概率。



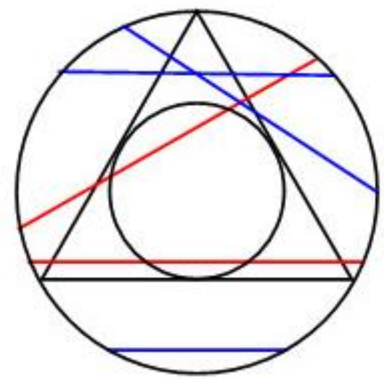
I

P=1/3



II

P=1/2



III

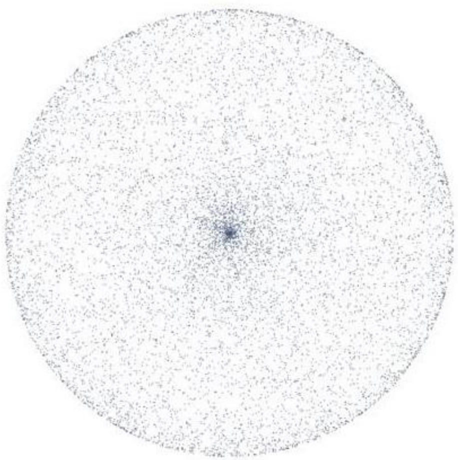
P=1/4

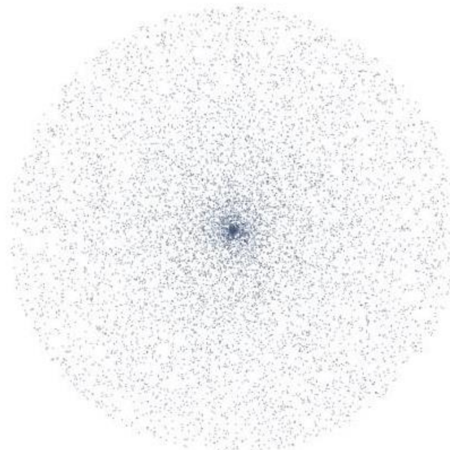
几何概型

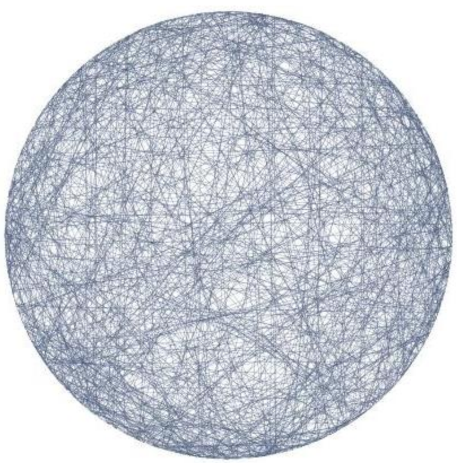
假设端点在圆上均匀分布

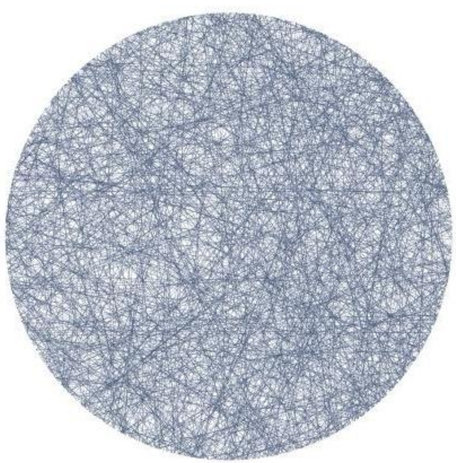
假设半径在圆内均匀分布以及弦的中点在半径上均匀分布

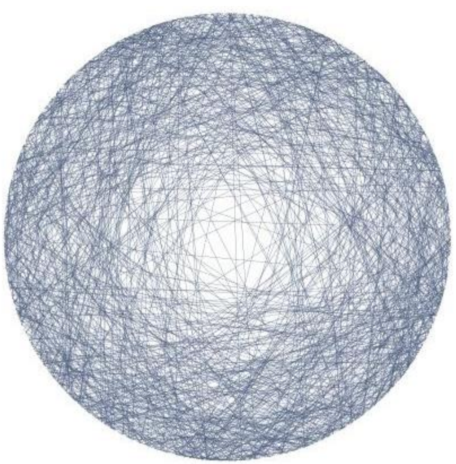
假设弦的中点在圆内均匀分布











思考题 ：

几何概型

1）　某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电台报时，求他等待的时间不超过10分钟的概率。　（1/6）

2 ）在线段*AD*上任意取两个点 *B*、*C*，在 *B*、*C* 处折断此线段而得三折线，求此三折线能构成三角形的概率。（1/4）

3　）甲、乙两船停靠同一码头，各自独立地到达，且每艘船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船。试求其中一艘船要等待码头空出的概率.（0. 121）

4) 在区间 (0, 1) 中随机地取两个数，求下列事件的概率：

(1) 两个数中较小(大)的小于 1/2；　(3/4, 1/4)

(2) 两数之和小于 3/2；　(7/8)

(3) 两数之积小于 1/4 。　(0.5966)