第三章　　多维随机变量及其分布

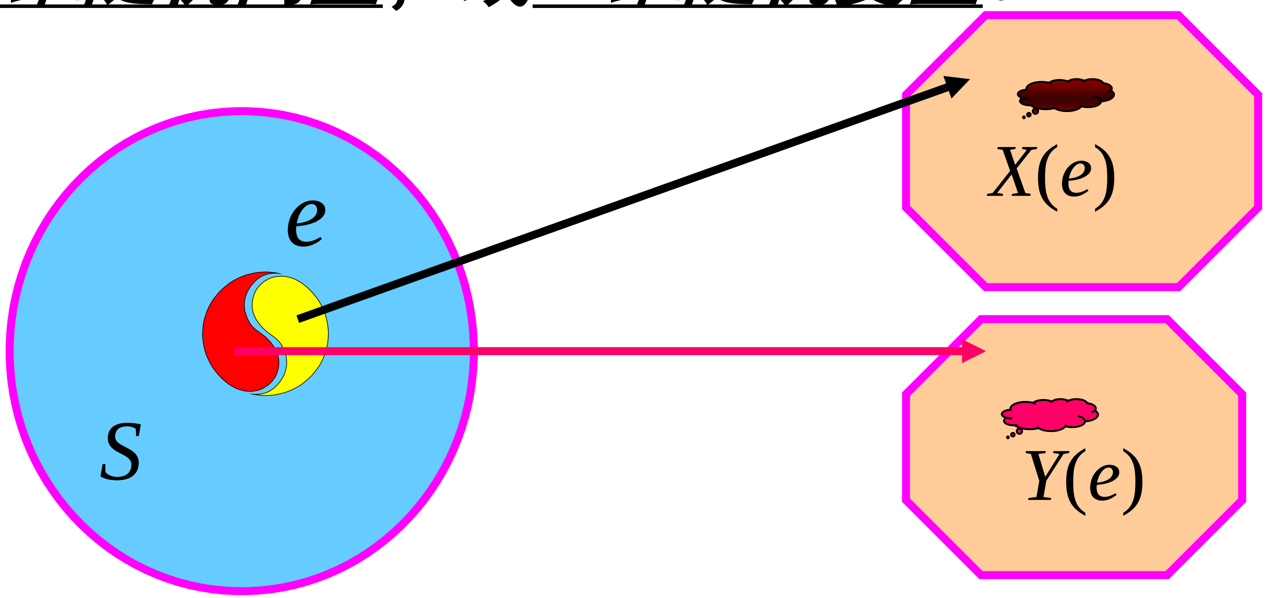
§1　二 维 随 机 变 量

1. 二维随机变量
2. 联合分布函数
3. 联合分布律
4. 联合概率密度

一、二维随机变量

1）<u>定义</u>：

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量。由它们构成的一个向量（X, Y），叫做<u>*二维随机向量*</u>，或<u>*二维随机变量*</u>。



注 意 事 项

(1) 二维随机变量也称为二维随机向量；

(2) 我们应把二维随机变量

$$(X,\ Y)=(X(e),\ Y(e)) \qquad (e \in S)$$

看作一个整体，因为X与Y之间是有联系的；

(3) 在几何上，二维随机变量(X ， Y)可看作平面上的随机点.

2）二维随机变量的例子

例1　考察某地区成年男子的身体状况，令

X：该地区成年男子的身高；

Y：该地区成年男子的体重.

则$(X, \quad Y)$就是一个二维随机变量

例2　对一目标进行射击，令

X：弹着点与目标的水平距离；

Y：弹着点与目标的垂直距离；

则$(X, \quad Y)$就是一个二维随机变量.

例3 考察某地区的气候状况　令

X：该地区的温度；

Y：该地区的湿度.

则$(X, \ Y)$就是一个二维随机变量

例4 考察某钢厂钢材的质量　令

X：钢材的含碳量；

Y：钢材的含硫量；

则$(X, \ Y)$就是一个二维随机变量

二、联合分布函数

1）定 义

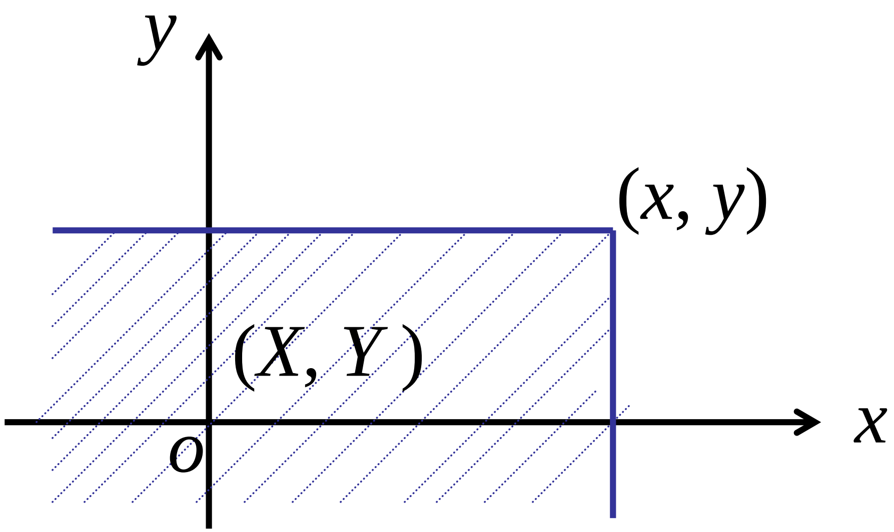
设(X, Y)是一个二维随机变量，则对于任意一对实数(x, y)，

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x, Y\le y\}$$

是(x, y)的函数．我们称此函数为二维随机变量(X, Y)的分布函数．

2）二元分布函数的几何意义

$F(x, \ y)$表示平面上的随机点$(X, \ Y)$落在以$(x, \ y)$为右上顶点的无穷矩形中的概率.

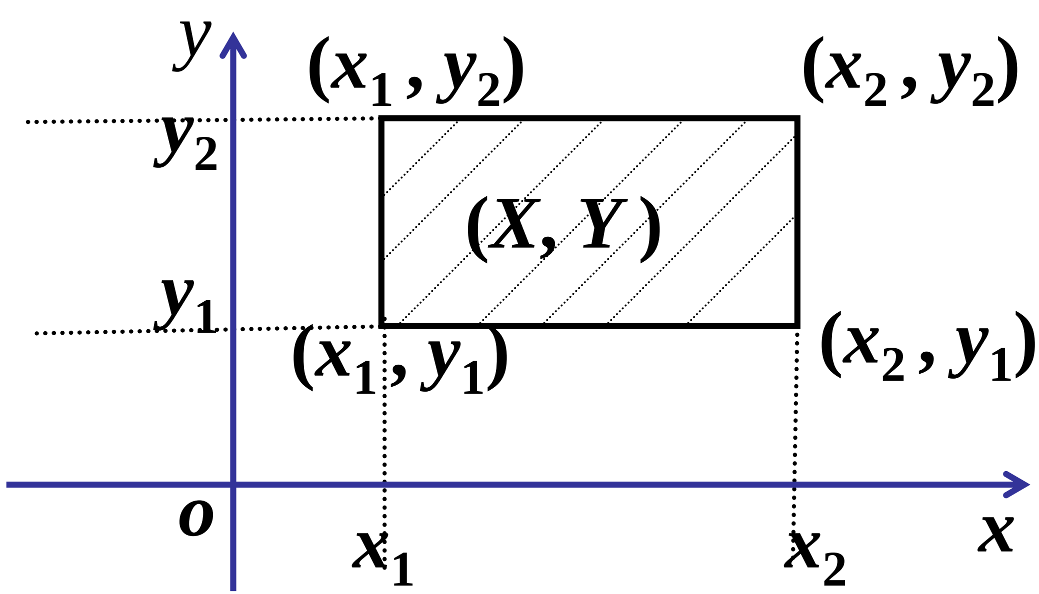


3）一个重要的公式

设：$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则

$$P\{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$



4）分布函数具有以下的基本性质：

（1）$F(x,y)$是变量 x,y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_1<x_2$时，$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$;

对于任意固定的x，当 $y_1<y_2$时，$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$;

(2) $0\le F(x,y)\le 1$, 且

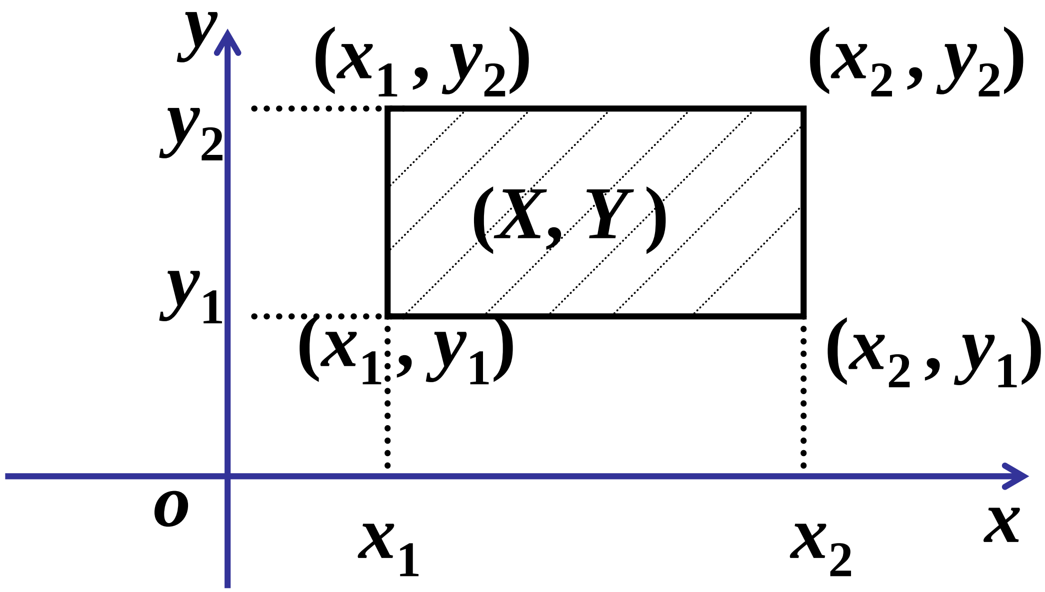
对于任意固定的 y，$F(-\infty,y)=0$;
对于任意固定的 x，$F(x,-\infty)=0$;

$$F(-\infty,-\infty)=0;\qquad F(+\infty,+\infty)=1.$$

（3）$F(x,y)=F(x+0,y)$，$F(x,y)=F(x,y+0)$，
即　$F(x,y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

(4) $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq 0.$

(当 $x1< x2$, $y1< y2$时)



说　　明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

更进一步地，我们还可以证明：如果某一个二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）.

5）n 维随机变量

设E是一个随机试验，S是其样本空间，

$$X_i = X_i(e) \quad (e \in S) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是该样本空间上的n个随机变量.

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$= (X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)) \quad (e \in S)$$

为样本空间S上的n维随机变量.

6）n维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任意一n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

我们称此函数为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数.

三、二维离散型随机变量

1）定义：

若二维随机变量(X, Y)的取值是有限个或可列无穷个数对，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

设(X, Y)二维离散型随机变量，

X的取值为 $x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_i, \quad \cdots$

Y的取值为 $y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_j, \quad \cdots$

则称 $p_{ij} = P\left\{X = x_i, \; Y = y_j\right\} \; (i, \; j = 1, \; 2, \; \cdots)$

为二维离散型随机变量(X, Y)的(联合)分布律.

2）二维离散型随机变量的联合分布律

(X, Y)的联合分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$					
x_i	p_{i1}			$\boldsymbol{p_{ij}}$	$\cdots$
$\vdots$					

3) 二维离散型随机变量联合分布律的性质

性质1 ：

对任意的$(i,\ j)$，$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$

有　$$p_{ij}=P\left\{X=x_i,\ Y=y_j\right\}\geq 0$$

性质 2 ：　$$\sum_{i,\ j} p_{ij}=1$$

例 1

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中．令

X：放入1号盒中的球数；

Y：放入2号盒中的球数.

试求(X, Y)的联合分布律.

解： X的可能取值为0，1，2；

Y的可能取值为0，1，2.

$$P\{X=0, \; Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=0,\ Y=1\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=1,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=0,\ Y=2\}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=2,\ Y=0\}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=2,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

由此得(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

例 2 将一枚均匀的硬币掷 3 次，令

X： 3 次抛掷中正面出现的次数；

Y： 3 次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值.

试求 (X, Y) 的联合分布律.

解： X 的可能取值为0，1，2，3；

Y 的可能取值为1，3 .

$$P\{X=0, \ Y=1\}=0; \quad P\{X=0, \ Y=3\}=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1, \ Y=1\}=\frac{3}{8}; \quad P\{X=1, \ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=2, \ Y=1\}=\frac{3}{8}; \quad P\{X=2, \ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=3, \ Y=1\}=0; \quad P\{X=3, \ Y=3\}=\frac{1}{8}.$$

由此得随机变量$(X, \ Y)$的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

四、二维连续型随机变量

1）定义：

对于二维随机变量 (*X*,*Y*) 分布函数 *F* (*x* , *y*)，如果存在非负函数 *f* (*x* , *y*)，使得对于任意的 *x*，*y*有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv,$$

则称 (*X*,*Y*) 是*<u>连续型的二维随机变量</u>*，函数 *f* (*x* , *y*)

称为二维随机变量 (*X*,*Y*)的概率密度，或称为 *X* 和 *Y* 的*<u>联合概率密度</u>*。

2) **概率密度的性质：**

1^0 $f(x,y)\geq 0$;

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$;

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G 内 的概率为：$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy.$$

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，上式即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$ 的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体体积.

例 3　设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求(X, Y)的联合分布函数;

(3) 求$P\{0<X<1,\ 0<Y<2\}$.

解: (1) 由密度函数的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad y)dxdy$$

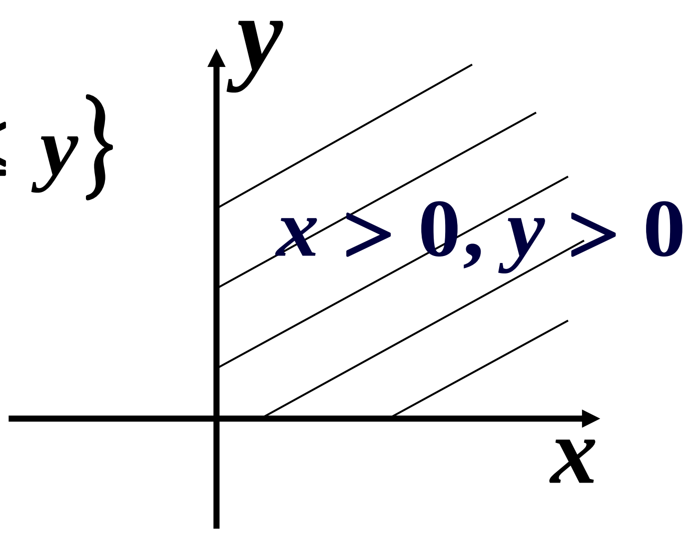
$$f(x,\quad y)=\begin{cases}ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$=c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dxdy \quad =c\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty}e^{-4y}\,dy=\frac{c}{12}$$

所以，$c=12.$

$$(2)\quad F(x,\quad y)=P\{X\le x,\quad Y\le y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,\quad v)dvdu$$



当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\quad y)=0$；

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,\ v)dvdu=12\int_{0}^{x}du\int_{0}^{y}e^{-(3u+4v)}dv$$

$$=12\int_{0}^{x}e^{-3u}du\cdot\int_{0}^{y}e^{-4v}\,dv=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x,\ y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) $P\{0<X<1，\ 0<Y<2\}$

$$= \iint\limits_{0<x<1,\ 0<y<2} f(x,\ y)dxdy$$

$$= 12\int_0^1 dx\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dy$$

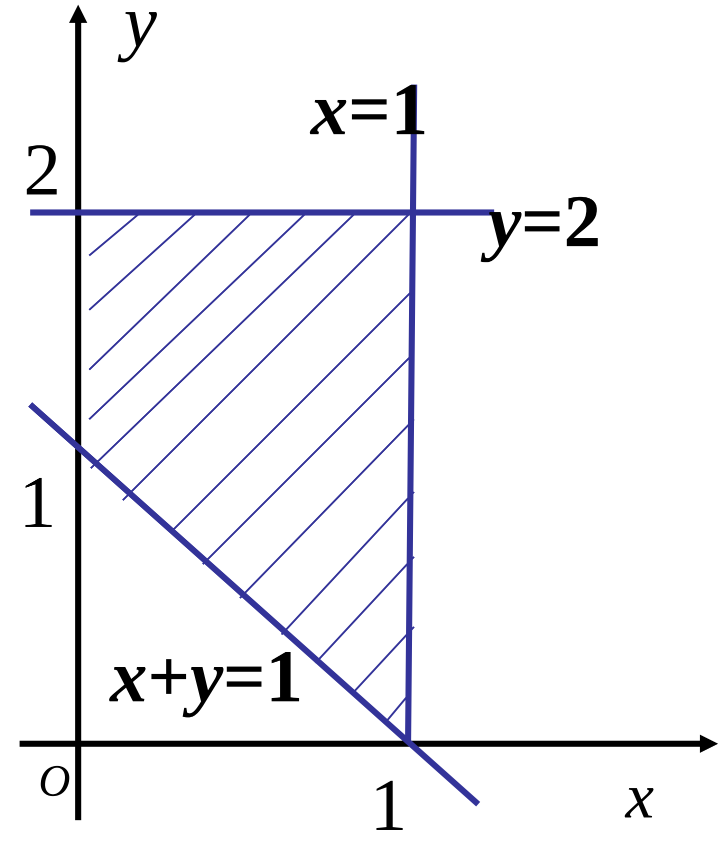
$$= 12\int_0^1 e^{-3x}dx \cdot \int_0^2 e^{-4y}\, dy = \left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

例 4 设二维随机变量（X， Y）的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求概率 $P\{X+Y \ge 1\}$.

解： 积分区域如图所示，



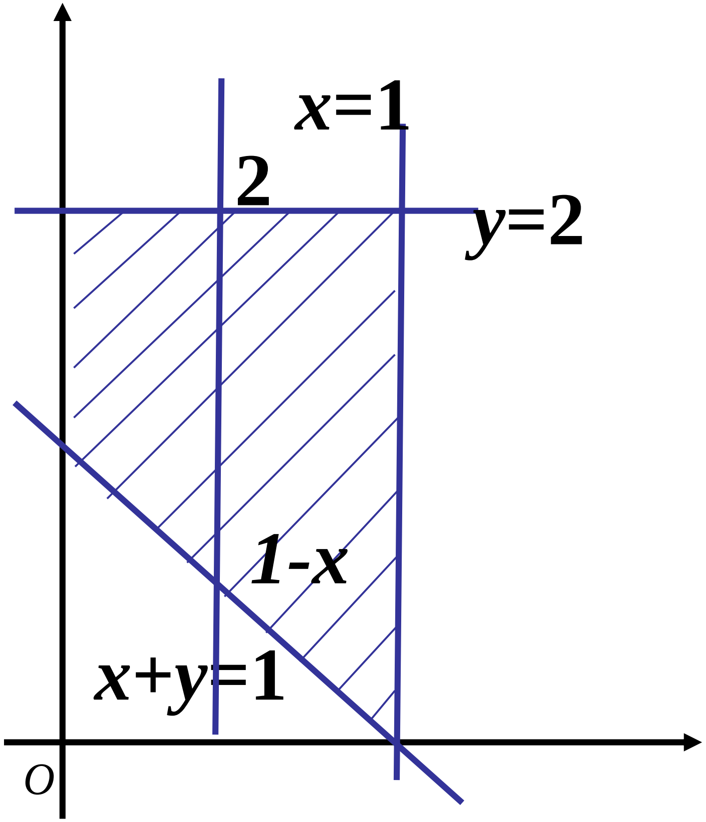
例 4（续）

$$P\{X+Y\geq 1\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,\quad y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{65}{72}$$



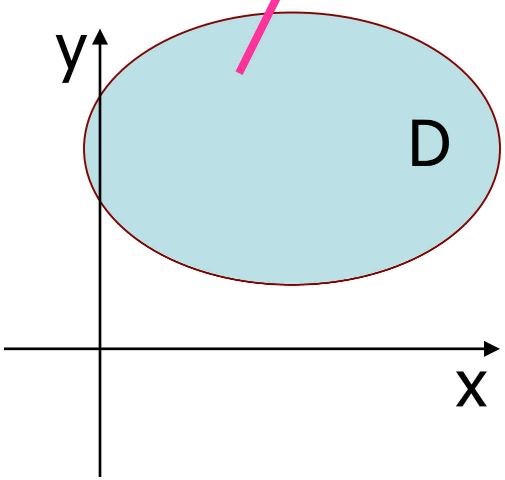
3）二维均匀分布

设 D 是平面上的有界区域，其面积为 A

A=面积$_D$

如果二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$



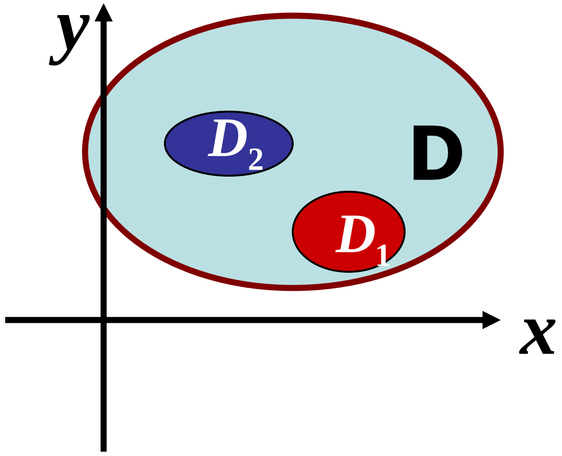
则称二维随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

二维均匀分布几何意义

如果二维随机变量(X, Y)服从区域 D上的均匀分布，则:

1) 我们可以认为随机点(X, Y)只落在区域D内；

2) 落在D内任一个子区域D_1内的概率与D_1的面积成正比，而与D_1的形状以及D_1在D中的位置无关。



§2　边缘分布

边缘分布函数

边缘分布律

边缘概率密度

一、边缘分布函数

1）边缘分布的定义：

如果(X, Y)是一个二维随机变量，

称 X（或者Y）的分布为X（或者Y）

关于二维随机变量(X, Y)的边缘分布.

<u>边缘分布也称为边沿分布或边际分布.</u>

二、已知联合分布律求边缘分布律

随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

现求随机变量 X 的分布律：

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, \bigcup_j (Y = y_j)\}$$

$$= P\{\bigcup_j (X = x_i, Y = y_j)\} = \sum_j P\{X = x_i, \quad Y = y_j\}$$

$$= \sum_j p_{ij}$$

同理，随机变量 Y 的分布律为：

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

X以及Y的边缘分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

例 2　从 1, 2, 3, 4 这4个数中随机取出一个，记为 X，再从 1到 X 中随机地取出一个数，记为 Y，试求 (X，Y)的联合分布律与 X 及Y 各自的边缘分布律.

解：　X 与Y 的可能取值都是 1, 2, 3, 4, 而且 X ≥ Y,

当 $i < j$ 时，$p_{ij} = P\{X = i,\ Y = j\} = 0$

当 $i \geq j$ 时，由乘法公式，得

$$p_{ij} = P\{X = i,\ Y = j\}$$

$$= P\{X = i\}\, P\{Y = j \mid X = i\} = \frac{1}{4} * \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}$$

例 2（续）

再由 $p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$ 及 $p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

可得（X， Y）与 X 及 Y 的边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

例3　掷一枚骰子，直到出现小于5点为止。X 表示最后一次掷出的点数，Y 为掷骰子的次数。求：随机变量（X,Y) 的联合分布律及 X、Y 的边缘分布律。

解：

X 的可能取值为1，2，3，4

Y 的可能取值为1，2，3，　・・・

(X,Y)的联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1},$$

$$i=1,2,3,4.\quad j=1,2,\cdots$$

例3（续）

$$p_{ij}=(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}, i=1,\cdots,4; j=1,2,\cdots$$

X 的边缘分布律为

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$i=1,2,3,4.$$

Y 的边缘分布律为

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{4}P_{ij}=\sum_{i=1}^{4}(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}$$

$$j=1,2,\cdots$$

2）已知联合分布函数求边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$,

则分量 X 的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\}$$
$$= P\{X \le x, Y < +\infty\}$$
$$= F(x, +\infty)$$

同理，分量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\}$$
$$= F(+\infty, y)$$

例1 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty)$$

试求：(1) 常数 A、B、C；(2) X 及 Y 的边缘分布函数.

解： (1) 由分布函数的性质，得

$$1 = F(+\infty, +\infty) = A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 = F(x, -\infty) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 = F(-\infty, y) = A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

由以上三式可得，　$A=\dfrac{1}{\pi^2},\quad B=\dfrac{\pi}{2},\quad C=\dfrac{\pi}{2}.$

则　$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty)$$

(2) X 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,\ \infty)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\qquad (x\in(-\infty,\ +\infty))$$

同理，　Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(\infty,\quad y)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$\left(y\in(-\infty,\quad+\infty)\right)$$

三、已知联合密度函数求边缘密度函数

二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，

求随机变量 X 的边缘密度函数： $f_X(x)$

由 $$F_X(x)=P\{X\le x\}=F(x, +\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u, y)dy\right]du$$

得 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)dy$$

同理，由

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(+\infty,\ y)$$

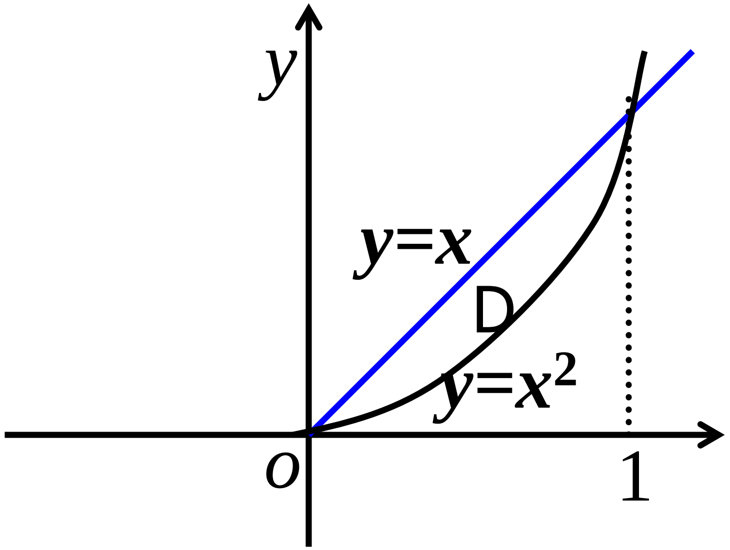
$$=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ v)dx\right]dv$$

得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx$$

例 4

区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围，随机变量 $(X,\ Y)$ 服从区域 D 上的均匀分布. 试求随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数及 X、Y 各自的边缘密度函数.



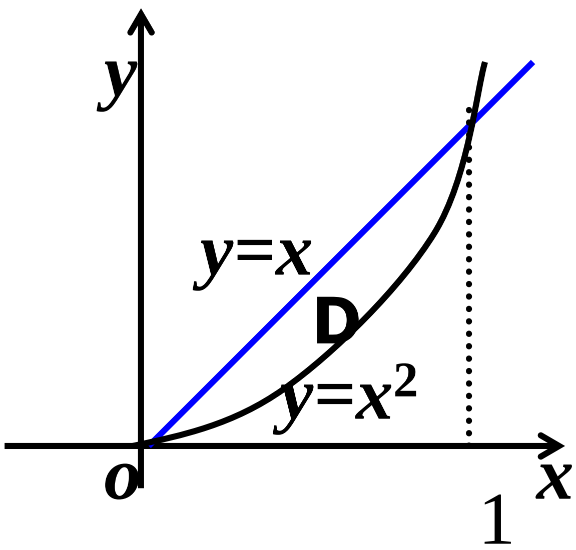
例 4（续）

解：（1）　区域D的面积为

$$A=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以，二维随机变量(X， Y)的联合密度函数为

$$f(x,\quad y)=\begin{cases}6 & (x,\quad y)\in D\\ 0 & (x,\quad y)\notin D\end{cases}$$



例 4（续）

(2) 随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6 & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

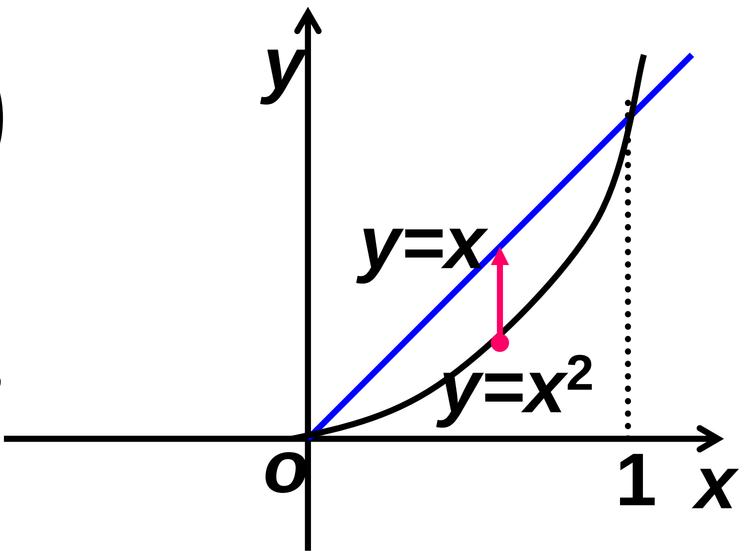
当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dy$$

$$=\int_{x^2}^{x} 6dy = 6\left(x-x^2\right)$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}6\left(x-x^2\right) & 0<x<1,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$



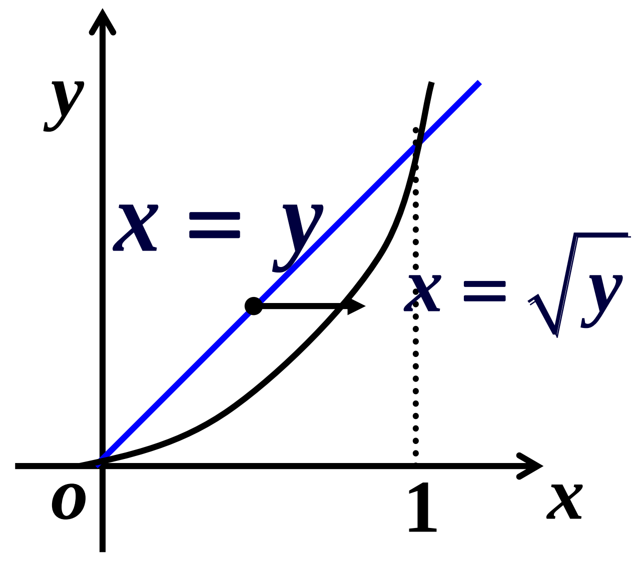
例 4（续）

同理，随机变量 Y 的边缘密度函数为

当 $0 < y < 1$ 时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6\left(\sqrt{y} - y\right)$$

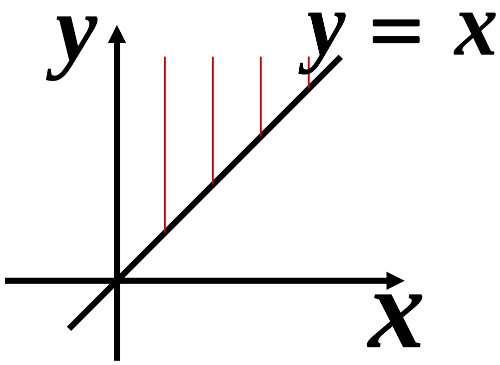


所以，

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6\left(\sqrt{y} - y\right) & 0 < y < 1, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

例 5　设二维连续型随机变量 (X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



试求：(1) 常数c；

(2) X 及 Y 的边缘密度函数.

解： (1) 由密度函数的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy=\int_{0}^{+\infty} dy\int_{0}^{y} cxe^{-y}dx$$

例 5（续）

$$=\frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}dy=\frac{c}{2}\times 2=c.$$ 所以， $c=1.$

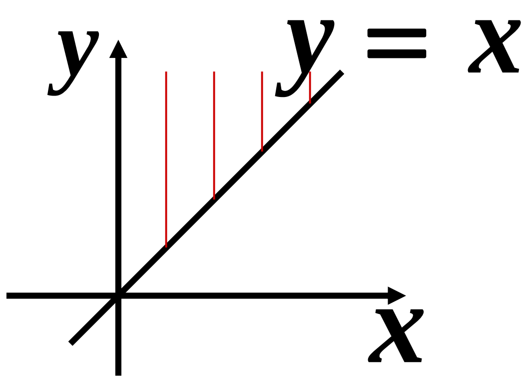
$$f(x,\ y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dy=\int_x^{+\infty} xe^{-y}dy=xe^{-x}$$

所以， X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$



例5（续）

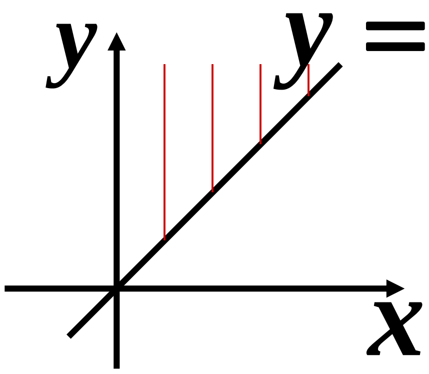
$$f(x, y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) 当y>0时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx=\int_0^y xe^{-y}dx=\frac{1}{2}y^2e^{-y}$$

所以， Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$



§3 条件分布

条件分布律

条件分布函数

条件概率密度

一、离散型随机变量的条件分布律

设 (X ,Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

(X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为：

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots$$

由条件概率公式 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

自然地引出如下定义：

定义：设(X ,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，　若P{Y= y_j }>0, 则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$$i=1,2,\cdots$$

为在Y= y_j 条件下随机变量 X 的条件分布律。

同样对于固定的 i, 若P{X= x_i}>0, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j=1,2,\cdots$$

为在 X= x_i 条件下随机变量Y 的条件分布律。

条件分布律具有分布律的以下特性：

1^0 $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$;

2^0 $$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=\frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}}=1.$$

即条件分布率是分布率。

例1 一射手进行射击，击中目标的概率为 p，射击到击中目标两次为止。设以 X 表示首次击 中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行 的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律以及条件分布律。

解： Y 的取值是 2, 3, 4, … ;

X 的取值是 1, 2, …, 并且 $X < Y$.

X, Y 的联合分布律为

$$P\{X=m, \ Y=n\} = q^{m-1} \cdot p \cdot q^{n-m-1} \cdot p$$

$$= q^{n-2} \cdot p^{2} \quad \left(\text{其中} q = 1 - p\right)$$

$$n = 2, 3, \cdots; m = 1, 2, \cdots, n-1.$$

例1（续）

X 的边缘分布律为

$$P\{X=m\}=\sum_{n} P\{X=m,\ Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2\cdot q^{n-2}$$

$$=p^2\cdot\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},\qquad m=1,2,\cdots$$

Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=n\}=\sum_{m} P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1} p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

$$\boxed{P\{X=m,\ \ Y=n\}=q^{n-2}p^2,n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots n-1}$$

在Y=n 条件下随机变量 X 的条件分布律为

当 n=2,3,… 时,

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{q^{n-2}p^2}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1;$$

$$P\{Y=n\}=(n-1)p^2q^{n-2},n=2,3,$$

$$P\{X=m,\ Y=n\}=q^{n-2}p^2,n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots n-1$$

在 X= m 条件下随机变量Y 的条件分布律为

当m=1,2,3,… 时,

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}, \quad n=m+1,m+2,\cdots$$

$$\boxed{P\{X=m\}=pq^{m-1}, m=1,2,\cdots}$$

$$\boxed{P\{X=m, \quad Y=n\}=q^{n-2}p^2, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots n-1}$$

例2 设某班车起点站上车人数 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda > 0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0 < p < 1)$，且中途下车与否相互独立。以 Y 表示在中途下车的人数，求：

（1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有m个人下车的概率；

（2）二维随机变量（X, Y）的概率分布。

解：

$$(1)\quad P\{Y = m \mid X = n\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

$$m = 0,1,\cdots,n, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

(2) 联合分布率为

$$P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m\mid X=n\}P\{X=n\}$$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ m=0,1,\cdots n,\ n=0,1,2,\cdots$$

二、条件分布函数

设（ X , Y ）是二维连续型随机变量，由于 $P\{Y=y\}=0$, 所以 $P\{X\le x\mid Y=y\}$ 无意义.

因此我们利用极限的方法来引入条件分布函数的概念。

定义：给定 y，设对于任意固定的正数ε，

$P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}>0$，若对于任意实数 x，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}$$

存在，则称为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数，

写成 $P\{X\le x \mid Y=y\}$，或记为 $F_{X|Y}(x|y)$.

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{X \le x, y - \varepsilon < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y - \varepsilon < Y \le y + \varepsilon\}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} [F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)]/2\varepsilon}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} [F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)]/2\varepsilon} = \frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{d}{dy} F_Y(y)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u, y)du}{f_Y(y)}.$$

$$F_{X|Y}(x \mid y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du,$$

称为在条件Y= y下X的条件分布函数.

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称为随机变量 X 在 $Y = y$ 的条件下的条件密度函数.

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x, \quad y\right)}{f_X\left(x\right)}$$

称为随机变量 Y 在 $X = x$ 的条件下的条件密度函数.

条件密度函数的性质

性质 1　对任意的 x，有　$f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

性质2　$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$

简言之，$f_{X|Y}(x|y)$ 是密度函数.

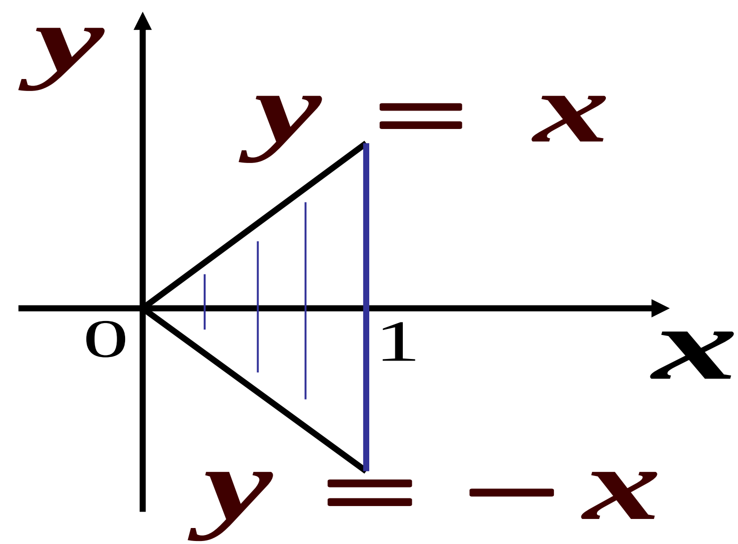
对于条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 也有类似的性质.

例 3 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

试求:(1) $f_X(x),\ f_Y(y)$; (2) $f_{X|Y}(x\mid y),\ f_{Y|X}(y\mid x)$;

(3) $P\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\}$.

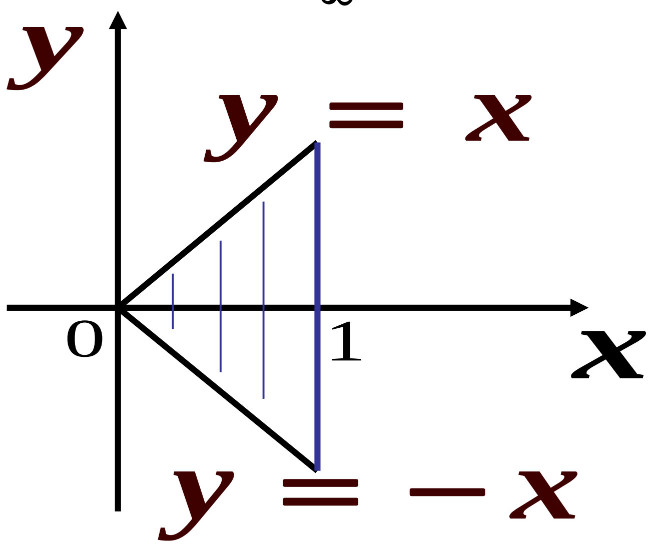


解: (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy=2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

例 3（续）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{1} dx = 1-y, & 0\le y<1,\\ \int_{-y}^{1} dx = 1+y, & -1\le y<0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$



$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

(2) 当 $|y|<1$, $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, \text{其它.}\end{cases}$$

例 3（续）

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, 其它.\end{cases}\quad f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

当$0<x<1$, $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & -x<y<x,\\ 0, & 其它。\end{cases}$

(3) $$P\{X>\frac{1}{2}\,|\,Y>0\}=\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}$$

$$=\frac{(1+\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\div 2}{\frac{1}{2}\times 1\times 1}=\frac{3}{4}$$