§4　随机变量的独立性

- 随机变量的独立性
- 离散型随机变量的独立性
- 连续型随机变量的独立性

§5 二维随机变量函数的分布

- 一般情形求随机变量函数分布的方法
- 和的分布
- 积的分布
- 极值分布

§4　随机变量的独立性

- 随机变量的独立性
- 离散型随机变量的独立性
- 连续型随机变量的独立性

一、随机变量的独立性

设(X, Y)是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x, y)$，又随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$.

如果对于任意的x，y，有

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称X，Y是相互独立的随机变量

说 明

由于 $F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$

以及 $F_X(x)=P\{X\le x\}$, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

可知，随机变量X与Y相互独立，实际上是指

对于任意的x，y，随机事件

$$\{X\le x\} \quad 与 \quad \{Y\le y\}$$

相互独立.

结论：在独立的条件下有 $F(x,\ y)=F_X(x)F_Y(y)$

二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布函数 $F(x,\ y)$ 可由其边缘分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 唯一确定.

例 1 设二维随机变量 (X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty)$$

试判断 X 与 Y 是否相互独立?

解： X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, \infty)$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(x\in(-\infty, +\infty) \right)$$

例1 (续) Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = F(\infty, \quad y)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right) \quad \left(y \in (-\infty, \quad +\infty) \right)$$

所以，对于任意的实数 x， y，有

$$F(x, \quad y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right) = F_X(x)F_Y(y)$$

所以 X 与 Y 是相互独立的随机变量 .

二、离散型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维离散型随机变量，其联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i,\ Y = y_j\} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots)$$

又随机变量X的分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots)$$

随机变量Y的分布律为

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots)$$

如果对于任意的i, j,有 $p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$

则称X，Y是相互独立的随机变量.

例 2

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

试确定常数 α，β 使得随机变量 X 与 Y 相互独立.

解：由表，可得随机变量 X 与 Y 的边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \quad (i=1,\ 2;\ \ j=1,\ 2,\ 3)$$

由此得

$$\frac{1}{9}=P\{X=1,\quad Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)$$

由此得 $\alpha=\dfrac{2}{9}$；

又由 $$\frac{1}{18}=P\{X=1,\quad Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{18}+\beta\right)$$

由此得 $\beta=\dfrac{1}{9}$.

而当$\alpha=\dfrac{2}{9}$，$\beta=\dfrac{1}{9}$ 时，联合分布律及边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

可以验证，此时有

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j} \qquad (i=1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3)$$

因此当$\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$时，X与Y相互独立.

例 3

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中.

令 X：放入1号盒中的球数;

Y：放入2号盒中的球数.

试判断随机变量X与Y是否相互独立?

解:

X的可能取值为0，1，2;Y的可能取值为0，1，2.

由 §3.1知X与Y的联合分布律及边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$P\{X=1,\ Y=2\}=0 \neq P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$$

随机变量X与Y不独立.

三、连续型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$，又随机变量X的边缘密度函数为$f_X(x)$，随机变量Y的边缘密度函数为$f_Y(y)$，

如果对于几乎所有的x，y有，

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称X，Y是相互独立的随机变量.

特别地，上式对$f(x, y)$的所有连续点(x, y)必须成立.

说　　明

这里所谓的“对几乎所有的x，y”是指：

那些使得等式

$$f(x,\quad y)=f_X(x)f_Y(y)$$

不成立的全体点$(x,\quad y)$所成集合的“面积”为0 .

例 4

设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

解：当 $0\le x\le 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy=2x^2+\frac{2}{3}x$$

所以，随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当$0\le y\le 2$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

所以，随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由于当$0<x<1$，$0<y<2$时，

$$f(x,\ y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

所以，随机变量X与Y不独立.

例 5

甲、乙两人约定在某地相会，假定每人的到达时间是相互独立的，且均服从中午12时到下午1时的均匀分布．试求先到者需等待10分钟以内的概率．

解:

设甲于12时 X 分到达，设乙于12时 Y 分到达．

则随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,\ 60]$ 上的均匀分布．

所以，$(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3600} & 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设$A=\{$先到者等待时间不超过10分钟$\}$

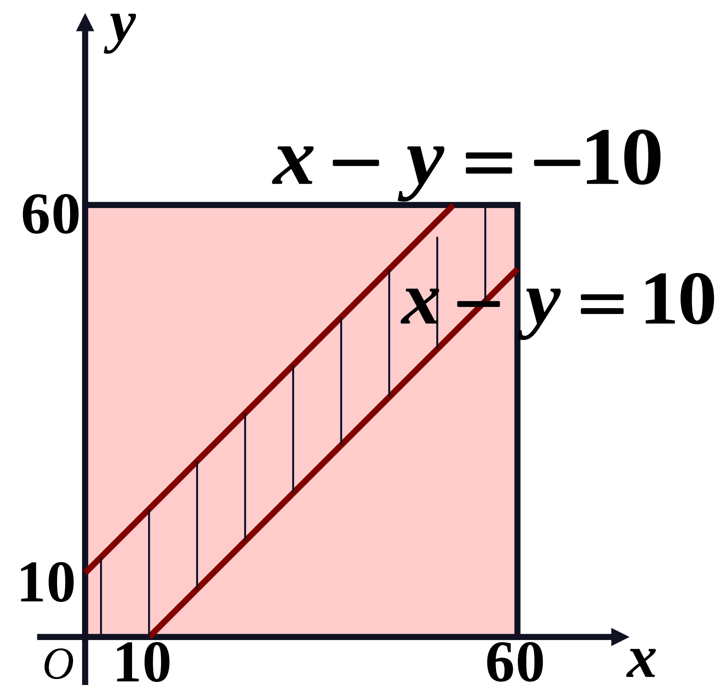
则有，$A=\{|X-Y|\le 10\}$.

所以，所求概率为

$$P(A)=P\{|X-Y|\le 10\}$$

$$=\iint\limits_{|x-y|\le 10} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\frac{3600-50\times 50}{3600}=\frac{11}{36}$$



例 7（正态随机变量的独立性）

设二维随机变量 $(X,\ Y) \sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$

则 $(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

又随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

所以，当 $\rho=0$ 时，$(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

这表明，随机变量 X 与 Y 相互独立；

反之，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则对任意的实数 x， y，有

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

特别地，我们有

$$f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1) \cdot f_Y(\mu_2)$$

即，$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}$$

由此得， $\rho = 0$.

结论：对于 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，$X$ 与 Y 相互独立的充分必要条件为： $\rho = 0$.

四、n 维随机变量的独立性

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是n维随机变量，其联合分布函数为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，又随机变量 X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$，$(i=1, 2, \cdots, n)$.

如果对于任意的n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots; X_n$是相互独立的随机变量 .

注意：若 X, Y 独立，$f(x)$ ，$g(y)$ 是连续函数，则 $f(X)$，$g(Y)$ 也独立。

小结：

1 二维随机变量独立的充分必要条件：

联合分布等于边缘分布的乘积。

2 对于 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$,

X与Y相互独立的充分必要条件为：$\rho=0.$

思考题：

1）填空。已知 X，Y 独立，联合分布率与边缘分布率如下

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$1/8$		
x_2	$1/8$			
$p_{\cdot j}$	$1/6$			1

2）已知 X,Y 的分布率如下

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

且 $P\{XY=0\}=1$

求：（1）X ,Y 的联合分布率；（2） X 与 Y 是否独立。

3)(X,Y) 在区域 $D=\{(x,y): 0<x<2, 0<y<1\}$

服从均匀分布，

令：

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y.\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

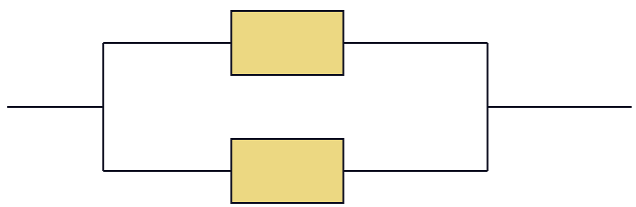
问 U,V 是否独立.

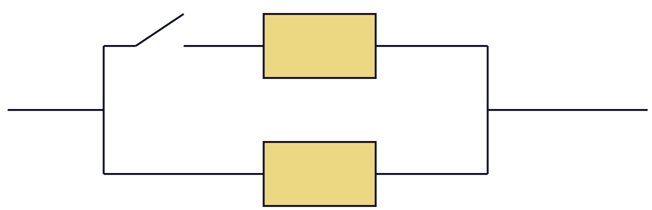
§5 多维随机变量函数的分布

- 一般情形求随机变量函数分布的方法
- 和的分布
- 极值分布

在实际问题中，常常会遇到需要求随机变量函数的分布问题。例如：在下列系统中，每个元件的寿命分别为随机变量 X, Y，它们相互独立同分布。我们想知道系统寿命 Z 的分布。

1） $Z = \min(X, Y)$

2） $Z = \max(X, Y)$

3） $Z = X + Y$

这就是求随机变量函数的分布问题。

一、一般情形问题

已知二维随机变量（X,Y）的联合密度为 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 是二元连续函数，欲求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

解题步骤：

先求随机变量函数$Z=g(X, Y)$的分布函数$F_Z(z)$，

再求随机变量函数$Z=g(X, Y)$的密度函数

$f_Z(z)=F_Z'(z)$，

例1 设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ ，试求随机变量Z的密度函数.

解： 由题意，可知

$$f_X(x)=f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

由于X与Y是相互独立的，所以$(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (-\infty<x,\ y<+\infty)$$

例 1（续）

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

若 $Z\le 0$，则 $F_Z(z)=0$

若 $Z>0$，则 $F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,\ y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

例 1（续）

作极坐标变换 $x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$，　则有

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \quad = \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r dr & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

所以，$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z e^{-\frac{z^2}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

二、和的分布

1）离散型随机变量和的分布

例 2 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

令：$Z = X + Y$，试求随机变量Z的分布律.

解： 由于 X 与 Y 的取值都是1，2，3，4，可知随机变量 $Z=X+Y$ 的取值为

2，3，4，5，6，7，8.

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,\quad Y=1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,\quad Y=2\}+P\{X=2,\quad Y=1\}$$
$$=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8};$$

$$P\{Z=4\}=P\{X=1,\quad Y=3\}+P\{X=2,\quad Y=2\}$$
$$+P\{X=3,\quad Y=1\}$$

$$=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24};$$

$$P\{Z=5\}=P\{X=1,\quad Y=4\}+P\{X=2,\quad Y=3\}+P\{X=3,\quad Y=2\}+P\{X=4,\quad Y=1\}$$

$$=0+0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=6\}=P\{X=2,\quad Y=4\}+P\{X=3,\quad Y=3\}+P\{X=4,\quad Y=2\}$$

$$=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=7\}=P\{X=3,\quad Y=4\}+P\{X=4,\quad Y=3\}$$

$$=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16};$$

$$P\{Z=8\} = P\{X=4,\quad Y=4\} = \frac{1}{16}.$$

由此得$Z=X+Y$的分布律为

Z	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从 参数为 λ_1 与 λ_2 的Poisson分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的分布律.

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都是0，1，2，$\cdots$，

可知随机变量 $Z=X+Y$ 的取值也是0，1，2，$\cdots$，

而且，

$$P\{Z=n\}=P\{X+Y=n\}=P\left\{\bigcup_{k=0}^{n}(X=k,\ Y=n-k)\right\}$$

例 3（续）

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k,\quad Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

例 3（续）

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

即，

$$P\{Z=n\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$(n=0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots)$$

结论：

若随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从 参数为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson分布，则

$Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson分布.

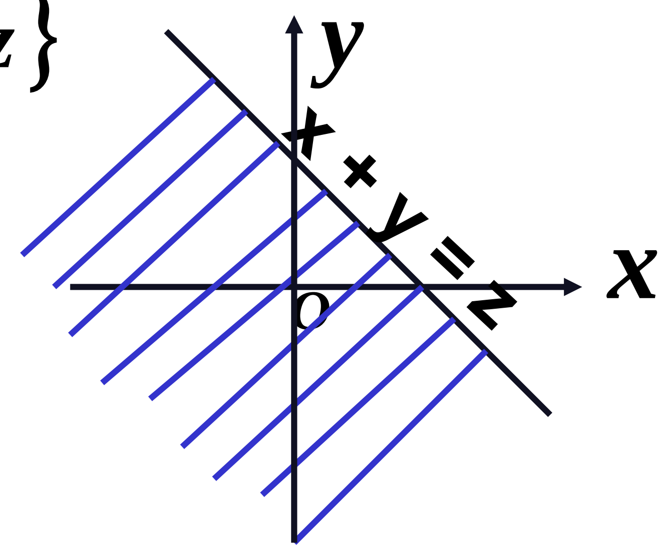
2）连续型随机变量和的分布

设$(X,\ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,\ y)$，令：$Z = X + Y$，

下面计算随机变量$Z = X + Y$的密度函数$f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z = X + Y$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$



$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,\ y)dy$$

作变换：$y = u - x$，则有

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x,\ u - x)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ u - x)\,dx$$

由分布函数与密度函数之间的关系，上式对z求导，可得$Z = X + Y$的密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z - x)\,dx$$

由于 X，Y 的对称性可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\ y)\,dy$$

特别地，如果随机变量X与Y相互独立，则有

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y).$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

或者 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,dy$$

我们称上式为函数 $f_X(x)$与 $f_Y(y)$的*卷积*，记作

$$f_X(x) * f_Y(y)$$

因此，我们有以下结论：

如果随机变量X与Y相互独立，则它们的和 $Z = X + Y$的密度函数等于X与Y密度函数的卷积：

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

例 4

设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

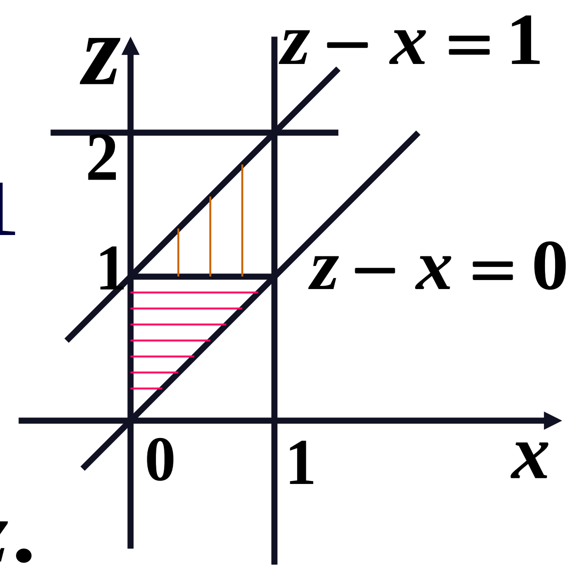
由题意，可知

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 4（续） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$



$$0<x<1,\quad 0<z-x<1$$

(1) 若$z\le 0$，或 $z\ge 2$, $f_Z(z)=0.$

(2) 若$0<z\le 1$, $f_Z(z)=\int_0^z 1dx=z.$

(3) 若$1<z<2$, $f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 1dx=2-z.$

综上所述，我们可得

$Z=X+Y$的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z\le 1, \\ 2-z, & 1<z<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

例 6

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解： 由题意，可知

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

例6（续）

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作积分变换 $\frac{u}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}$，则有 $\frac{du}{\sqrt{2}}=dx$，代入上式，有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

这表明，$Z\sim N\left(0,\ 2\right)$.

结 论:

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1, \ \sigma_1^2), \ Y \sim N(\mu_2, \ \sigma_2^2)$$

$$Z = X + Y,$$ **则**

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

更一般地，我们有如下 结论：

如果随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

又$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实常数，

令： $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，

$$Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Γ－函数

$\Gamma-$函数的定义：

$$\Gamma(r)=\int_{0}^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$$

$\Gamma-$函数的定义域：$(0,\ +\infty)$.

$\Gamma-$函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$.

$$\Gamma(1)=1,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ .$$

如果n为自然数，则$\Gamma(n)=(n-1)!$.

Γ-分布.

如果连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$(其中 r>0, \lambda>0 为参数)$

则称随机变量X服从参数为(r, λ)的Γ-分布.

记作： $X\sim\Gamma(r, \lambda)$

说明：

如果 $r=1$，则由$\Gamma(1)=1$，得 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

这正是参数为λ的指数分布.

这说明指数分布是$\Gamma-$分布的一个特例.

如果$r=n$，由$\Gamma(n)=(n-1)!$ 得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为*Erlang*分布，它是排队论中重要的分布之一.

例 7

设随机变量X与Y相互独立，$X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，令$Z = X + Y$，试求随机变量Z的密度函数.

解： 由题意，可知

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

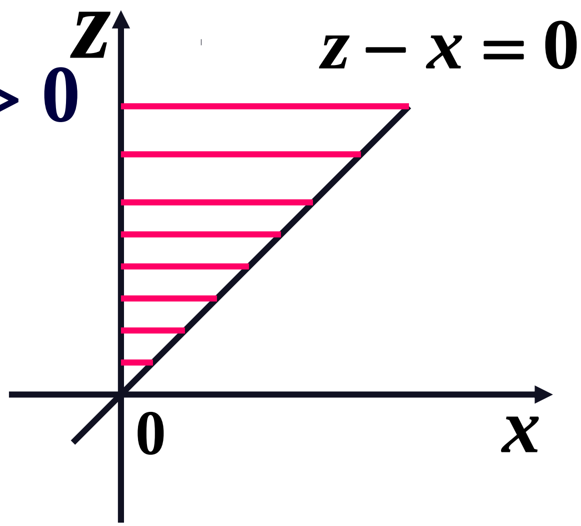
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

例 7（续）

设随机变量$Z=X+Y$的密度函数为$f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$x>0,\ z-x>0$



(1) 当 $z\le 0$, $f_z(z)=0$.

(2) 当 $z>0$, $f_z(z)=$

$$=\int_0^z \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z-x}{2}}\,dx$$

例 7（续）

$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}(z-x)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

作积分变换 $t=\frac{x}{z}$，$dt=\frac{dx}{z}$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=z$ 时，$t=1$.

例 7（续）

$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 (tz)^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}zdt$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}dt$$

由数学中$B-$函数的定义：

$$B(s,\ t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx \quad (s>0,\ t>0)$$

以及$B-$函数与$\Gamma-$函数之间的关系：$B(s,\ t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

例7（续）

可知，
$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

综上所述，我们有

例 7（续）

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

由此，我们得

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim\chi^2(m),\ Y\sim\chi^2(n),$$

$$Z=X+Y,$$

则 $Z\sim\chi^2(m+n)$

三、商的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$，

令：$Z=\dfrac{X}{Y}$，

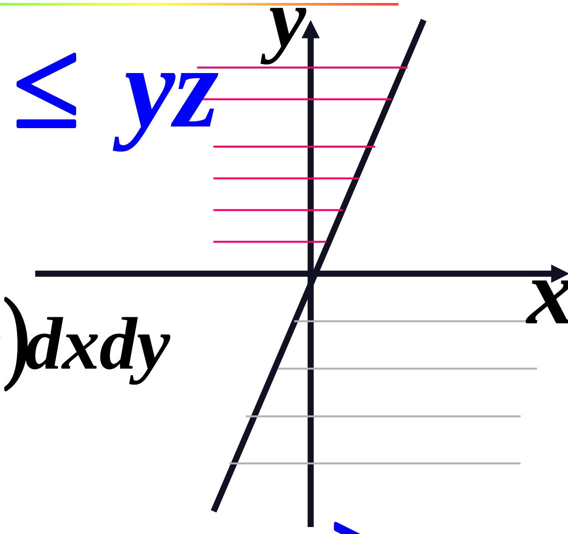
下面计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数$f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z} f(x,\ y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y>0} f(x,\ y)dxdy + \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y<0} f(x,\ y)dxdy$$



$$= \iint\limits_{x \le zy,\ y>0} f(x,\ y)dxdy + \iint\limits_{x \ge zy,\ y<0} f(x,\ y)dxdy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,\ y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,\ y)dx$$

在第一个积分$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \quad y) dx$中，作变换$x = uy$，

则$dx = ydu$，当$x = zy$时，$u = z$；

当$x \to -\infty$时，注意到$y > 0$，因而有$u \to -\infty$；

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \quad y) dx = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(uy, \quad y) ydu$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} yf(uy, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} |y| f(uy, \quad y) dy$$

同理，在第二个积分$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \ y) dx$中，作变换$x = uy$，

则$dx = ydu$，当$x = zy$时，$u = z$；

当$x \to +\infty$时，注意到$y < 0$，因而有$u \to -\infty$；

$$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \ y) dx = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{-\infty} f(uy, \ y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-y) f(uy, \ y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(uy, \ y) dy$$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}|y|\,f(uy,\quad y)dy+\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}|y|\,f(uy,\quad y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(uy,\quad y)dy\right)du$$

所以，由密度函数的定义有

故 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,\quad y)dy$$

特别地，如果随机变量X与Y相互独立，则有

$$f(x, \quad y) = f_X(x) f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy$$

补充结论:

（1）设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, \ y)$，令：$Z = X - Y$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, \ y)\,dy$$

（2）设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, \ y)$，令：$Z = XY$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \ \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y}, \ y\right)\frac{1}{|y|}dy$$

例 8

设随机变量X与Y相互独立，分别服从参数为λ_1与λ_2的指数分布，令$Z=\dfrac{X}{Y}$，试求随机变量Z的密度函数.

解： 由题意，可知:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例 8（续）

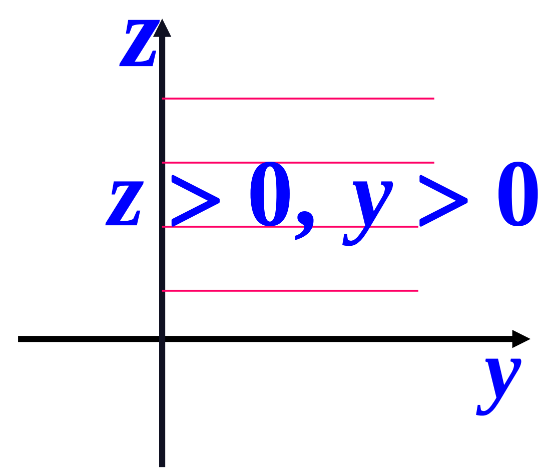
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

设： $Z=\dfrac{X}{Y}$ 由随机变量X与Y相互独立性，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)f_Y(y)dy \qquad yz>0,\ y>0$$

(1) 若$z\le 0$， $f_Z(z)=0$.

(2) 若$z>0$，



$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} y\lambda_1 e^{-\lambda_1 yz}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy$$

例 8（续）

$$=\lambda_1\lambda_2\int_0^{+\infty} ye^{-(\lambda_2+\lambda_1 z)y}dy=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2}$$

所以，$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

四、极值分布

例 9

设随机变量X与Y相互独立，$X \sim B(1,\ p)$，$Y \sim B(1,\ p)(0 < p < 1)$，令$\xi = \min(X,\ Y)$，$\eta = \max(X,\ Y)$，试求随机变量$\xi$与$\eta$的联合分布律及$\xi$与$\eta$各自的边缘分布律，并判断$\xi$与$\eta$是否相互独立？

解：由随机变量X与Y的取值都为0与1，知

$$\xi = \min(X,\ Y),\ \eta = \max(X,\ Y)$$

的取值也为0与1.

例 9（续）$\xi=\min(X,\ Y),\ \eta=\max(X,\ Y)$

$$P\{\xi=0,\ \eta=0\}=P\{X=0,\ Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$$

$$P\{\xi=0,\ \eta=1\}=P\{X=0,\ Y=1\}+P\{X=1,\ Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$=2p(1-p)$$

$$P\{\xi=1,\ \eta=0\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{\xi=1,\ \eta=1\}=P\{X=1,\ Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$$=p^2$$

例 9（续）

随机变量ξ与η的联合分布律及ξ与η各自的边缘分布律为：

$\xi \backslash \eta$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$1-p^2$
1	0	p^2	p^2
$p_{\cdot j}$	$(1-p)^2$	$1-(1-p)^2$	

由于 $0<p<1$，所以，

$$P\{\xi=1,\ \ \eta=0\}=0\neq P\{\xi=1\}P\{\eta=0\}=p^2\cdot(1-p)^2$$

这表明，随机变量 ξ 与 η 不独立.

例 10

设 $X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n$ 是独立的连续型随机变量，X_i 的分布函数为 $F_i(x)$．令：

$$X_{(1)} = \min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$
$$X_{(n)} = \max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$

试求随机变量 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的分布函数.

解： 设随机变量 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x)$，

随机变量 $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x)$.

例 10（续）

则 $$F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \le x\}$$

$$= P\{\max(X_1, \ X_2, \ \cdots, \ X_n) \le x\}$$

$$= P\{ X_1 \le x, \ X_2 \le x, \ \cdots, \ X_n \le x \}$$

$$= P\{X_1 \le x\}P\{X_2 \le x\}\cdots P\{X_n \le x\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

例 10（续）

$$
\begin{aligned}
F_{(1)}(x) &= P\{X_{(1)} \le x\} \\
&= P\{\min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) \le x\} \\
&= 1 - P\{\min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) > x\} \\
&= 1 - P\{ X_1 > x, \quad X_2 > x, \quad \cdots, \quad X_n > x \} \\
&= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}\cdots P\{X_n > x\} \\
&= 1 - [1 - P\{X_1 \le x\}][1 - P\{X_2 \le x\}]\cdots[1 - P\{X_n \le x\}] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(x)]
\end{aligned}
$$

例 11

设系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 L_1，L_2，$\cdots$，L_n 并联而成，并且 L_i 的寿命为 X_i，它们都服从参数为 λ 的指数分布，试求系统 L 的寿命 Z 的密度函数.

解:

由于系统L是由n个相互独立的子系统L_1，L_2，$\cdots$，L_n 并联而成，故有

$$Z=\max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$

又因为子系统L_i的寿命X_i服从参数为λ的指数分布，因此X_i的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

例 11（续）

X_i 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

所以，由例9知，$Z=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

的分布函数为

$$F_{(n)}(x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x)=F(x)^n=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})^n & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

小结:

1 一般情形求随机变量函数的分布方法。

2 和的分布。

4 极值分布。

难点：确定积分区域。

第三章　小　结

本章要求：

1 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质。
2 要理解二维随机变量的边缘分布以及与联合分布的关系，理解条件分布。
3 掌握二维均匀分布和二维正态分布。
4 要理解随机变量的独立性。
5 要会求二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布和函数的分布。

重点：边缘分布；随机变量的独立性；二维随机变量的和、极值分布及多维随机变量的极值分布函数的分布。