§1 数学期望

- 数学期望的定义
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质

分布函数能够完整地描述随机变量的统计特性，但在一些实际问题中，只需知道随机变量的某些特征，因而不需要求出它的分布函数.

评定某企业的经营能力时，只要知道该企业年均赢利水平；

研究水稻品种优劣时，我们关心的是稻穗的平均粒数及每粒的平均重量；

检验棉花的质量时，既要注意纤维的平均长度，又要注意 纤维长度与平均长度的偏离程度，平均长度越长、偏离程度越小，质量就越好；

例2　甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

X：甲击中的环数；　　Y：乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

试问哪一个人的射击水平较高？

解：

甲、乙的平均环数可写为

$$E(X)=8\times 0.1+9\times 0.3+10\times 0.6=9.5$$

$$E(Y)=8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1$$

因此，从平均环数上看，甲的射击水平要比乙的好.

一、数学期望定义

1） 离散型

设离散型随机变量X的分布律为：

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称***随机变量 X 的数学期望(Expectation)存在***，记作 E(X)；

即 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$$

数学期望也称为均值。

2）连续型

设连续型随机变量X的概率密度为 $f(x)$，

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

的值为X的*数学期望*。

记为 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

说 明

(1) 若 X 的数学期望刻划了 X 变化的平均值.

(2) 若由于随机变量 X 的数学期望表示的是随机变量 X 变化的平均值。

因此，只有当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 绝对收敛时，才能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的和与其级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的求和顺序无关.

例 4

按规定，火车站每天8:00~9:00, 9:00~10:00都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立，其规律为：

到站时间	8:10, 9:10	8:30, 9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(1) 旅客8:00到站，求他候车时间的数学期望。

(2) 旅客8:20到站，求他候车时间的数学期望。

解： 设旅客的候车时间为X（以分记）

(1) 旅客8：00到达

X 的分布律为

X	10	30	50
P	1/6	3/6	2/6

$$E(X)=10\times(1/6)+30\times(3/6)+50\times(2/6)=33.33$$

（2）旅客8：20到达

X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
P	3/6	2/6	(1/6)×(1/6)	(3/6)×(1/6)	(2/6)×(1/6)

$$E(X)=10\times(3/6)+30\times(2/6)+50\times(1/36)$$

$$+70\times(3/36)+90\times(2/36)=27.22(\text{分})$$

二、随机变量函数的数学期望

定理 1： 设 $Y=g(X)$，　$g(x)$ 是连续函数，

（1）若 X 的分布律为 $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1,2,\cdots$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k g(x_k)$ 绝对收敛，　则 $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g(x_k)$

(2)若 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛，

则 $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

定理 2: 若(X, Y)是二维随机变量，

$g(x, y)$ 是二元连续函数，$Z = g(X, Y)$

(1) 若 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

且 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛，则 $E(Z) = \sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$

(2) 若(X, Y)的概率密度为 $f(x, y)$，且

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$ 绝对收敛，

则 $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$

例 5 设风速V在 $(0,a)$上服从均匀分布，又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数：

$$W = kV^2 \ (k > 0),$$

求$E(W)$.

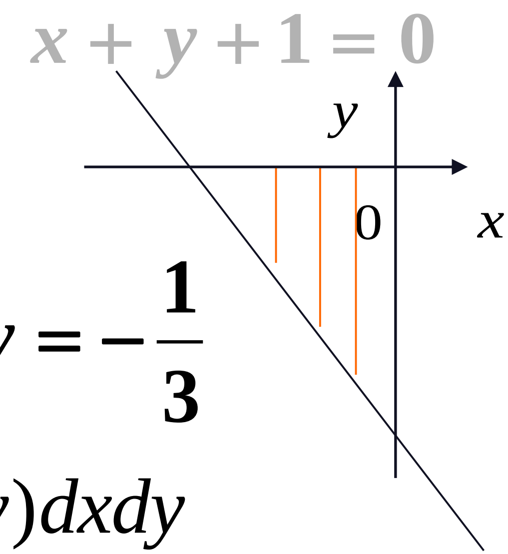
解：

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{a}, 0 < v < a; \\ 0, \text{其它}; \end{cases}$$

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} k v^2 f_V(v) dv$$

$$= k\int_0^a v^2 \frac{1}{a} dv = \frac{1}{3}ka^2$$

例 6 设(*X*,*Y*)在区域A上服从均匀分布，其中*A*为*x*轴，*y*轴和直线*x*+*y*+1=0所围成的区域。求*E*(*X*)，*E*(-3*X*+2*Y*)，*E*(*XY*)。



解：$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\ 0,\text{其它};\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+4Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-3x+4y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

例7　国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X（吨），$X \sim U[2000,4000]$，每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇3万元，但销售不出而囤积在仓库，则每吨需浪费保养费1万元。问需要组织多少货源，才能使国家收益最大。

解:

设 y 为预备出口的该商品的数量，则 $2000 \le y \le 4000.$

用 Z 表示国家的收益（万元）

$$Z = \begin{cases} 3y, & X \ge y \\ 3X - (y - X), & X < y \end{cases}$$

$$z = g(x) = \begin{cases} 3y, & x \geq y \\ 3x - (y - x), & x < y \end{cases} \qquad 2000 \leq y \leq 4000$$

下面求 $E(Z)$，并求 y 使 $E(Z)$ 达到最大 值，

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{2000}^{y} \frac{3x - (y - x)}{2000} dx + \int_{y}^{4000} \frac{3y}{2000} dx$$

$$= -\frac{1}{1000}[y^2 - 7000y + 4 \times 10^6]$$

$$= -\frac{1}{1000}[(y - 3500)^2 - 3500^2 - 4 \times 10^4]$$

$$= -\frac{1}{1000}(y - 3500)^2 + 8250$$

即，组织3500吨此种商品是最佳的决策。

三、数学期望的性质

1) $E(c)=c$ c是常数.

若 $\boldsymbol{a \le X \le b}$, 则 $a \le E(X) \le b.$

2) $E(cX)=cE(X)$ c是常数.

3) $\boldsymbol{E\ (aX+bY)} = aE(X)+bE(Y)$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

4) 若 X, Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y).$

例 8 对N个人进行验血，有两种方案：

（1）对每人的血液逐个化验，共需 N 次化验；

（2）将采集的每个人的血分成两份，然后取其中的一份，按k个人一组混合后进行化验（设N是k的倍数），若呈阴性反应，则认为k个人的血都是阴性反应，这时k个人的血只要化验一次；如果混合血液呈阳性反应，则需对k个人的另一份血液逐一进行化验，这时k个人的血要化验$k+1$次；

假设所有人的血液呈阳性反应的概率都是p，且各次化验结果是相互独立的。

试说明适当选取 k 可使第二个方案减少化验次数。

解：设 X 表示第二个方案下的总化验次数，

X_i 表示第 i 个组的化验次数，则

$$X=\sum_{i=1}^{N/k} X_i\ ,\ \text{且}\ E(X)=\sum_{i=1}^{N/k} E(X_i)$$

$E(X)$表示第二种方案下总的平均化验次数，$E(X_i)$表示第i个组的平均化验次数。

X_i 只可能取两个值1 或 $k+1$,

$$P\{X_i = 1\} = q^k, \quad P\{X_i = k+1\} = 1-q^k,$$

$$E(X_i) = q^k + (k+1)(1-q^k) = k+1-kq^k$$

$q = 1-p$

$$i = 1,2,\cdots, N/k.$$

所以$E(X) = \dfrac{N}{k}(k+1-kq^k) = N(1+\dfrac{1}{k}-q^k)$

只要选 k 使 $1+\dfrac{1}{k}-q^k < 1,$ 即 $\dfrac{1}{k} < q^k$

就可使第二个方案减少化验次数；当q已知时，

若选 k 使 $f(k) = 1+\dfrac{1}{k}-q^k$ 取最小值，

就可使化验次数最少。

例如：当p=0.1，q=0.9时，可证明k=4可使最小；这时，

$$E(X)=N(1+1/4-0.9^4)=0.5939N$$

工作量将减少40%.

例9 一民航送客载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以X表示停车的次数。求$E(X)$（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

解：设 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第}i\text{站没人下车}, \\ 1, & \text{第}i\text{站有人下车}. \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,10.$

则 $X = X_1 + \cdots + X_{10}$，$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i)$,

$$P\{X_i = 0\} = (9/10)^{20}, P\{X_i = 1\} = 1 - (9/10)^{20},$$

$$E(X_i) = 1 - (9/10)^{20}, \quad i = 1,\cdots,10,$$

思考：X_i，$i = 1,2,\cdots,10$，是否独立同分布.

例10 对产品进行抽样，只要发现废品就认为这批产品不合格，并结束抽样。若抽样到第 n 件仍未发现废品则认为这批产品合格。假设产品数量很大，抽查到废品的概率是 p，试求平均需抽查的件数。

解：设X为停止检查时，抽样的件数，

则 X 的可能取值为1, 2, … , n，且

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2.\cdots,n-1, \\ q^{n-1}p+q^{n}=q^{n-1}, & k=n. \end{cases}$$

其中$q=1-p$，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}p+nq^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}(1-q)+nq^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k}+nq^{n-1}$$

$$=[1+2q+3q^{2}+\cdots+(n-1)q^{n-2}]$$

$$-[q+2q^{2}+\cdots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1}]$$

$$+nq^{n-1}$$

$$=1+q+q^{2}+\cdots+q^{n-1}$$

$$=\frac{1-q^{n}}{1-q}=\frac{1-(1-p)^{n}}{p}$$

例11　用某台机器生产某种产品，已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降，即

$$P\{\text{第}k\text{次生产出的产品是正品}\} = e^{-\lambda k}, k = 1,2,\cdots, \lambda > 0.$$

假设每次生产100件产品，试求这台机器前10次生产中平均生产的正品总数。

解：设X是前10次生产的产品中的正品数，并设

$$X_{ki} = \begin{cases} 1, \text{第}k\text{次生产的第}i\text{件产品是正品}; \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$$

$$k = 1,2,\cdots,10,\ i = 1,2,\cdots,100,$$

则

$$X = \sum_{k=1}^{10} \sum_{i=1}^{100} X_{ki}.$$

而X_{ki}服从 $p=e^{-\lambda k}$ 的(0 — 1)分布，

$$E(X_{ki})=e^{-\lambda k}\quad i=1,2,\cdots,100,$$

所以

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}E(X_{ki})=\sum_{k=1}^{10}100e^{-k\lambda}$$

$$=100\sum_{k=1}^{10}e^{-k\lambda}=\frac{100\mathrm{e}^{-\lambda}(1-e^{-10\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$$

本节小结：

1）数学期望的定义。

2）随机变量函数的数学期望。

3）数学期望的性质。