## 随机变量的函数

设 $X$ 是一随机变量，$Y$ 是 $X$ 的函数，$Y=g(X)$，则 $Y$ 也是一个随机变量．当 $X$ 取值 $x$ 时，$Y$ 取值 $y=g(x)$．

本节的任务就是：

已知随机变量 $X$ 的分布，并且已知 $Y=g(X)$，要求随机变量 $Y$ 的分布．

## 一、离散型随机变量的函数

设 $X$ 是离散型随机变量，其 分布律为

$$P\{X = x_n\} = p_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$$

或

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ……, | $x_n$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | …… , | $p_n$ | …… |

$Y$是$X$的函数： $Y = g(X)$，则$Y$也是离散型随机变量，它的取值为

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots\ldots,\ y_n,\quad \ldots\ldots$$

其中 $y_n = g(x_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$

## 第一种情形

如果 $y_1, \quad y_2, \ldots\ldots, y_n, \ \ldots\ldots$ 两两不相同，则由

$$P\{Y = y_n\} = P\{X = x_n\} \qquad (n = 1, \ 2, \ \ldots\ldots)$$

可知随机变量 $Y$ 的分布律为

$$P\{Y = y_n\} = p_n \qquad (n = 1, \ 2, \ \ldots\ldots)$$

或

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots,$ | $y_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots,$ | $p_n$ | $\cdots$ |

## 第 二 种 情 形

如果 $y_1$， $y_2$，……， $y_n$， …… 有相同的项，

则把这些相同的项合并（看作是一项），并把相应的概率相加，即可得随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律.

**例 1** 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | -3 | -1 | 0 | 2 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{5}{252}$ | $\frac{15}{252}$ | $\frac{35}{252}$ | $\frac{70}{252}$ | $\frac{126}{252}$ |

随机变量 $Y = 2X - 3$，试求 $Y$ 的分布律.

**解：** 随机变量 $Y = 2X - 3$ 的取值为

$$-9,\quad -5,\quad -3,\quad 1,\quad 9,\quad 15,$$

**例 1（续）**

**这些取值两两互不相同, 由此得随机变量**

$$Y = 2X - 3$$

**的分布律为**

| $Y$ | -9 | -5 | -3 | 1 | 9 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{252}$ | $\frac{5}{252}$ | $\frac{15}{252}$ | $\frac{35}{252}$ | $\frac{70}{252}$ | $\frac{126}{252}$ |

**例 2　设随机变量 $X$ 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.**

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | **0.2** | **0.3** | **0.1** | **0.4** |

**解：　$Y$ 有可能取的值为　0，1，4.**

**且 $Y=0$ 对应于（$X-1)^2=0$，　解得 $X=1$，**

**所以，$P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1$，**

例 2（续）

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |

$Y=(X-1)^2$

同理,

$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7,$

$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2,$

所以，$Y=(X-1)^2$ 的分布律为：

| $Y$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.1 | 0.7 | 0.2 |

**例 3** 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2^n}$ | $\cdots$ |

$$Y = g(X) = \begin{cases} -1 & \text{若}X\text{为奇数;} \\ 1 & \text{若}X\text{为偶数.} \end{cases}$$

试求随机变量 $Y$ 的分布律.

**例 3（续）解:**

$$P\{Y=-1\}=\sum_{n\text{为奇数}}P\{X=n\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=2k+1\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{2}{3}$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{n\text{为偶数}}P\{X=n\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{3}$$

**所以，随机变量 $Y$ 的分布律为**

| Y | -1 | 1 |
|---|---|---|
| P | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

## 二、连续型随机变量函数的分布

设 $X$ 是一连续型随机变量，其密度函数为 $f_X(x)$，

我们要求的是 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

**解 题 思 路**

(1) 先求 $Y=g(X)$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

(2) 利用 $Y=g(X)$ 的分布函数与密度函数之间的关系求 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

**例 4　设随机变量 $X$ 具有概率密度：**

$$f_X(X)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

**试求 $Y=2X+8$ 的概率密度.**

**解：（1）先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$：**

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

$$=P\{2X+8\le y\}=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}$$

**例 4（续）得到**

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)dx.$$

(2) 利用 $F_Y'(y)=f_Y(y)$ 可以求得：

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\times\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$

$$f_X(X)=\begin{cases}\frac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\times\frac{1}{2}, & 0<\frac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

# 例 4（续）

整理得 $Y=2X+8$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

本例用到变限的定积分的求导公式

如果 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt,$

则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$

**例 5** 设随机变量 $X$ 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$,

求 $Y = X^2$ 的概率密度.

**解:** (1) 先求 $Y = X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$:

$1^0$ 由于 $Y = X^2 \geq 0$, 故当 $y \leq 0$ 时 $F_Y(y) = 0$.

$2^0$ 当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

## 例　5（续）

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

⑵利用 $F_Y'(y)=f_Y(y)$及变限定积分求导公式得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

**例如,设 $X\sim N(0,1)$,其概率密度为:**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

**则 $Y=X^2$ 的概率密度为:**

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

**此时称 $Y$ 服从自由度为1的 $\chi^2$ 分布。**

**定理** 设随机变量 $X$ 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$,
又设函数 $g(x)$ 处处可导，且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$).
则 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，即

$$x = g^{-1}(y) = h(y)$$

$$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\},$$
$$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}.$$

## 定理（续）

若 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 以外等于零，则只须假设在 $[a,b]$ 上恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），此时仍有：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

这里 $\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$, $\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

证明：

设随机变量 $Y=g(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)$,

则有 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

由题设，不妨假设 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 是严格增加的函数.

因此，$F_Y(y)=P\{X\le g^{-1}(y)\}=P\{X\le h(y)\}$

$$=\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

由题设，当随机变量$X$在区间$(-\infty,\ +\infty)$上变化时，随机变量$Y$在区间$(\alpha,\ \beta)$上变化.

其中，

$$\alpha=\min\{g(-\infty),\ g(+\infty)\},\quad \beta=\max\{g(-\infty),\ g(+\infty)\}$$

因此，当$y\in(\alpha,\ \beta)$时，

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

所以，$f(y)=F_Y'(y)=\dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx\right)$

$$= f_X(h(y)) \cdot h'(y) \quad = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

若 $g'(x) < 0$，则 $g(x)$ 是严格减少的函数.

因此，当 $y \in (\alpha，\beta)$ 时，

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$= P\left\{X \ge g^{-1}(y)\right\} = P\{X \ge h(y)\} = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx$$

所以，$f(y) = F_Y'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx\right)$

$$=-f_X(h(y))\cdot h'(y) \quad = f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$$

综上所述，得$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

**例 6**

设随机变量 $X \sim N\left(\mu, \ \sigma^2\right)$, $Y = e^X$，试求随机变量 $Y$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解：由题设，知 $X$ 的密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

因为函数 $y = e^x$ 是严格增加的，它的反函数为 $x = \ln y$.

**例 6（续）**

并且当随机变量$X$在区间$(-\infty, +\infty)$上变化时，$Y=e^X$在区间$(0, +\infty)$上变化. 所以，当$y\in(0, +\infty)$时，

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\left|(\ln y)'\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{1}{y}$$

由此得随机变量$Y=e^X$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

**例 7** 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，试证明$X$的线性函数$Y=aX+b(a\neq 0)$也服从正态分布.

**证：** $X$ 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

$y=g(x)=ax+b, g'(x)=a$，满足定理的条件，

$y=g(x)$的反函数为：$x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$，且$h'(y)=\dfrac{1}{a}$.

**由定理的结论得：**

$$f_Y(y)=f_X[h(y)]\,|h'(y)|=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

例 7(续)

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

即有 $Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right).$