

### § 4 连续型随机变量及其概率密度

- 概率密度及其性质
- 均匀分布
- 指数分布
- 正态分布与标准正态分布

## 一、连续型随机变量的概念与性质

1) 定义 如果对于随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 存在非负函数  $f(x)$ , 使得对于任意实数  $x$ , 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

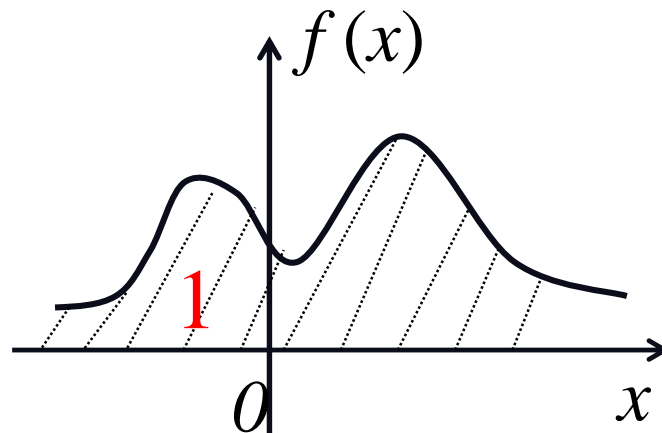
则称  $X$  为连续型随机变量, 其中函数  $f(x)$  称为  $X$  的概率密度函数, 简称概率密度.

连续型随机变量  $X$  由其密度函数唯一确定.

由定义知道, 概率密度  $f(x)$  具有以下性质:

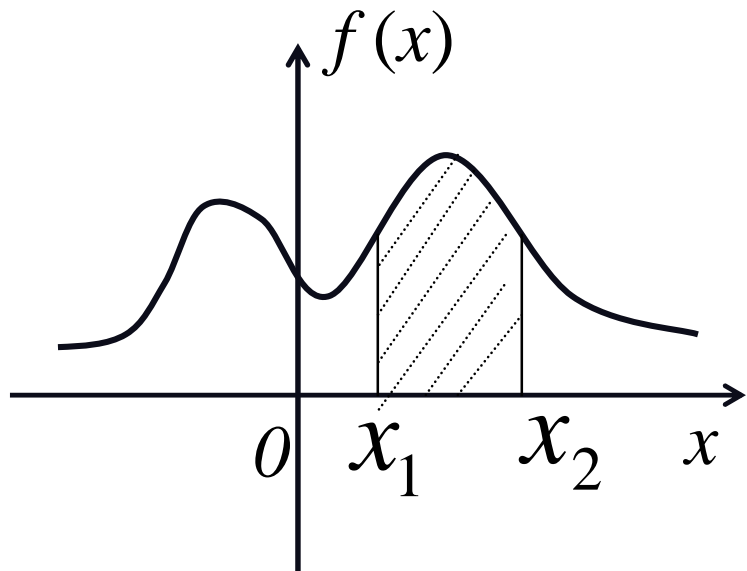
$$1^0 \quad f(x) \geq 0.$$

$$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$



$$3^0 \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (x_1 \leq x_2)$$



#### 注 意

连续型随机变量密度函数的性质与离散型随机变量分布律的性质非常相似，但是，**密度函数不是概率！**

我们不能认为： $P\{X = a\} = f(a)$ ！

连续型随机变量的一个重要特点：

设  $X$  是连续型随机变量，则对任意的实数  $a$ ，

有  $P\{X = a\} = 0$

若 $f(x)$ 在点 $x$ 处连续, 则有

$$F'(x) = f(x).$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

即

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} \end{aligned}$$

若不计高阶无穷小, 有

$$P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x.$$

#### 说 明

(1) 由上述性质可知，对于连续型随机变量，我们关心它在某一点取值的问题没有太大的意义；我们所关心的是它在某一区间上取值的问题。

若已知连续型随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$ ，则 $X$ 在任意区间 $G$ （ $G$ 可以是开区间，也可以是闭区间，或半开半闭区间；可以是有限区间，也可以是无穷区间）上取值的概率为，

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x) dx$$

此公式非常重要！

例 1 设  $X$  是连续型随机变量, 其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1) 常数  $c$ ; (2)  $P\{X > 1\}$ .

解: (1) 由密度函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\text{得 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 c(4x - 2x^2)dx = c \left( 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3}c$$

$$\text{所以, } c = \frac{3}{8}$$

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P\{X > 1\} &= \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx \\ &= \frac{3}{8} \left( 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



## 例 2

某电子元件的寿命  $X$  (单位: 小时) 是以

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量. 求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率.

解: 设  $A = \{ \text{某元件在使用的前 150 小时内需要更换} \}$

## 例 2 (续)

$$\text{则 } P(A) = P\{X \leq 150\} = \int_{-\infty}^{150} f(x) dx = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2} dx = \frac{1}{3}$$

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个 5 重 *Bernoulli* 试验.

设  $Y$  表示 5 个元件中使用寿命不超过 150 小时的元件数则  $Y \sim B(5, 1/3)$ .

故所求概率为

$$P\{Y = 2\} = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

## 例3

设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

试求 $X$ 的密度函数.

**解：** 设 $X$ 的密度函数为 $f(x)$ , 则

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

**例 4** 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求 $X$ 的分布函数.

**解：**

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

## 例 4 (续)

$$= \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

当  $1 < x < 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

## 例 4 (续)

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 2 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

## 例 4 (续)

综上所述, 可得随机变量  $X$  的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

## 二、一些常用的连续型随机变量

### 1) 均匀分布

若随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称随机变量  $X$  服从区间  $[a, b]$  上的均匀分布.

记作  $X \sim U[a, b]$



## 密度函数的验证

设  $X \sim U[a, b]$ ,  $f(x)$  是其密度函数, 则有:

(1) 对任意的  $x$ , 有  $f(x) \geq 0$ ;

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1. \end{aligned}$$

由此可知,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$  确是密度函数.

### 说 明

(1) 类似地，我们可以定义

区间 $(a, b)$ 上的均匀分布；

区间 $[a, b)$ 上的均匀分布；

区间 $(a, b]$ 上的均匀分布.

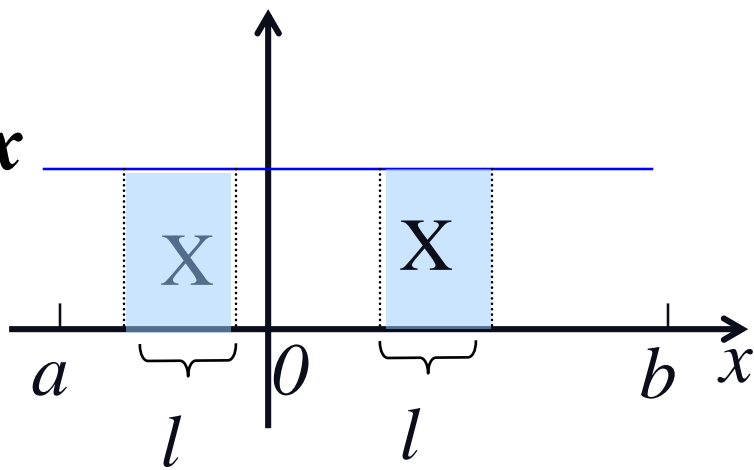
## 均匀分布的概率背景

如果随机变量 $X$ 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 则随机变量 $X$ 在区间 $[a, b]$ 上的任意一个子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比, 而与该子区间的位置无关.

这时, 可以认为随机变量 $X$ 在区间 $[a, b]$ 上取值是等可能的.

$$P\{c < X \leq c + l\} = \int_c^{c+l} f(x)dx$$

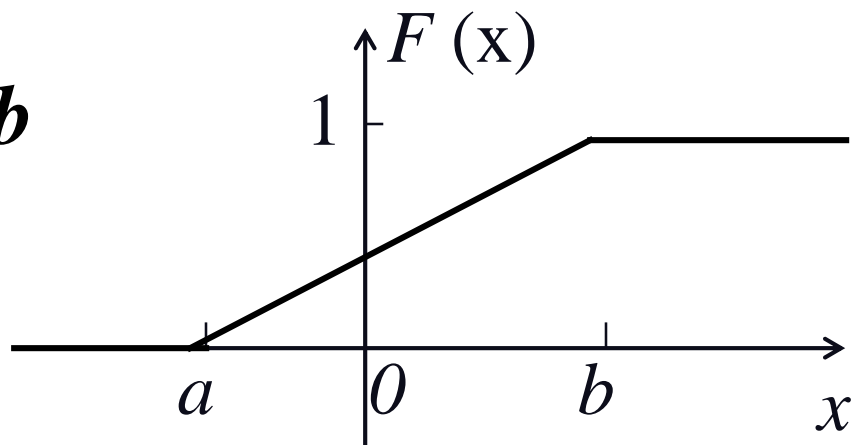
$$= \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}.$$



## 均匀分布的分布函数

若随机变量  $X$  服从区间  $[a, b]$  上的均匀分布,  
则  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$



## 例 5

设公共汽车站从上午7时起每隔15分钟来一班车，如果某乘客到达此站的时间是 7:00 到7:30之间的均匀随机变量．试求该乘客候车时间不超过5分钟的概率．

解：

设该乘客于7时  $X$  分到达此站．

则  $X$  服从区间  $[0, 30]$  上的均匀分布．

其密度函数为 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

#### 例 5 (续)

令:  $B = \{ \text{候车时间不超过5分钟} \}$

则 
$$P(B) = P\{10 \leq X \leq 15\} + P\{25 \leq X \leq 30\}$$
$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

## 例 6

设随机变量 $\xi$ 服从区间 $[-3, 6]$ 上的均匀分布, 试求方程

$$4x^2 + 4\xi x + (\xi + 2) = 0$$

有实根的概率.

**解:** 随机变量 $\xi$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & -3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

## 例 6 (续)

设:  $A = \{ \text{方程 } 4x^2 + 4\xi x + (\xi + 2) = 0 \text{ 有实根} \}$

则  $P(A) = P\{(4\xi)^2 - 4 \times 4 \times (\xi + 2) \geq 0\}$

$$= P\{(\xi + 1)(\xi - 2) \geq 0\}$$

$$= P\{\xi \leq -1 \text{ 或 } \xi \geq 2\}$$

$$= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{9} dx + \int_2^6 \frac{1}{9} dx$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & -3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## 2) 指数分布

如果随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\lambda > 0$  为常数，则称随机变量服从参数为  $\lambda$  的指数分布。

## 指数分布的分布函数

若随机变量 $X$ 服从参数 $\lambda$ 指数分布, 则 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

## 例 7

设打一次电话所用的时间  $X$ （单位：分钟）是以  $\lambda = \frac{1}{10}$  为参数的指数随机变量。如果某人刚好在你前面走进公用电话间，求你需等待10分钟到20分钟之间的概率。

**解：**  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

## 例 7 (续)

令:  $B = \{ \text{等待时间为} 10 \sim 20 \text{分钟} \}$

则  $P(B) = P\{10 \leq X \leq 20\}$

$$\begin{aligned} &= \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \Big|_{10}^{20} \\ &= e^{-1} - e^{-2} = 0.2325 \end{aligned}$$

## 3) 正 态 分 布

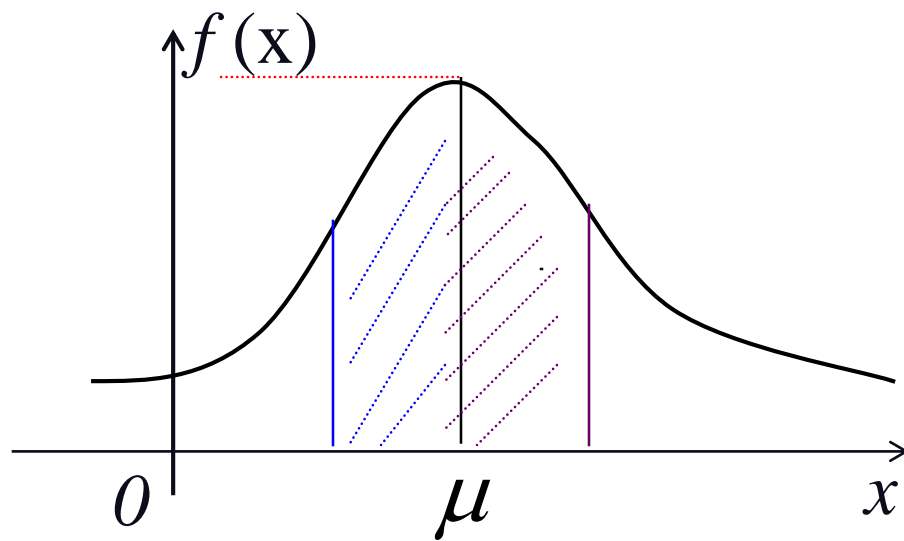
如果连续型随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(其中  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$  为参数)

则称随机变量  $X$  服从参数为  $(\mu, \sigma^2)$  的正态分布. 记作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



## 标准正态分布

若  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ , 我们称  $N(0, 1)$  为标准正态分布.

标准正态分布的密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

## 正态分布密度函数的图形性质

对于正态分布的密度函数

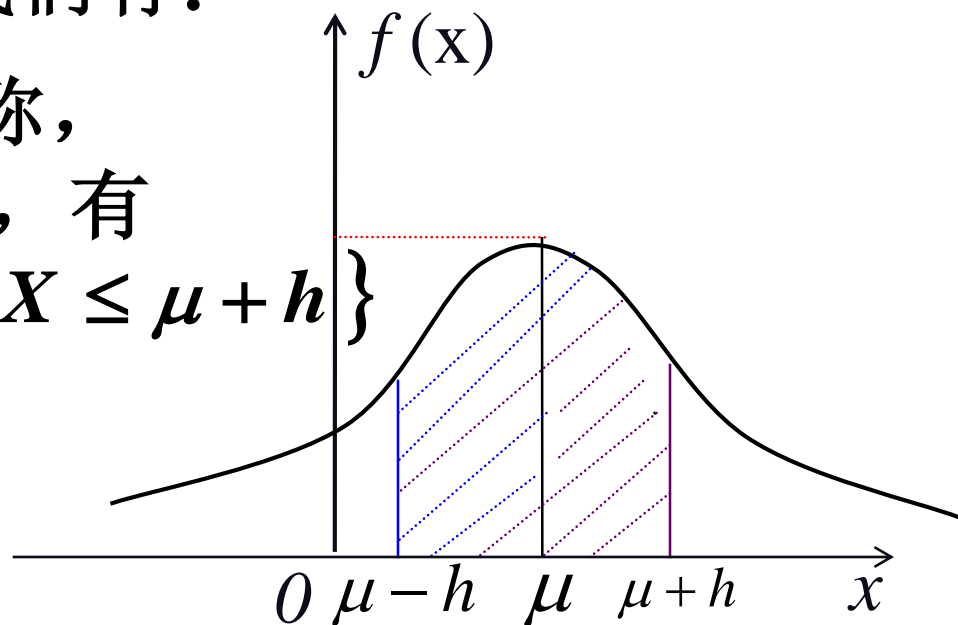
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

由高等数学中的知识，我们有：

(1) 曲线关于直线  $x = \mu$  对称，

这表明：对于任意的  $h > 0$ ，有

$$P\{\mu - h < X \leq \mu\} = P\{\mu < X \leq \mu + h\}$$

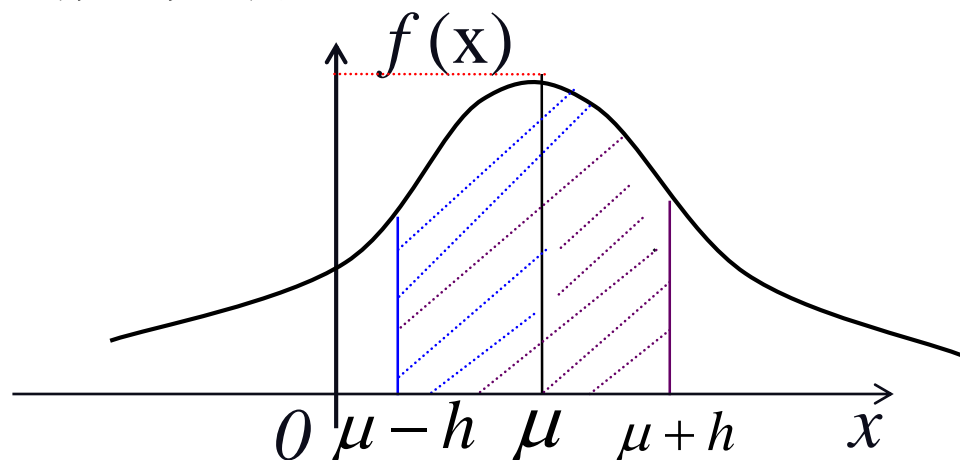


## 正态分布密度函数的图形性质（续）

(2) 当  $x = \mu$  时,  $f(x)$  取到最大值

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$x$  离  $\mu$  越远,  $f(x)$  的值就越小. 这表明, 对于同样长度的区间, 当区间离  $\mu$  越远时, 随机变量  $X$  落在该区间中的概率就越小.

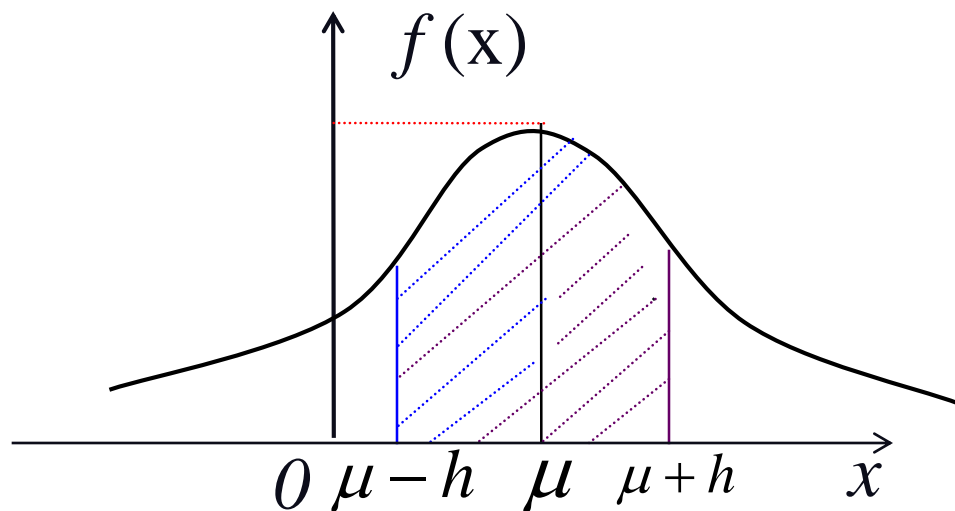




## 正态分布密度函数的图形性质（续）

(3) 曲线  $y = f(x)$  在  $x = \mu \pm \sigma$  处有拐点；  
曲线  $y = f(x)$  以  $Ox$  轴为渐近线.

(4) 若  $\sigma$  固定，而改变  $\mu$  的值，则  $f(x)$  的图形沿  $x$  轴平行移动，但不改变其形状. 因此  $y = f(x)$  图形的位置完全由参数  $\mu$  所确定.

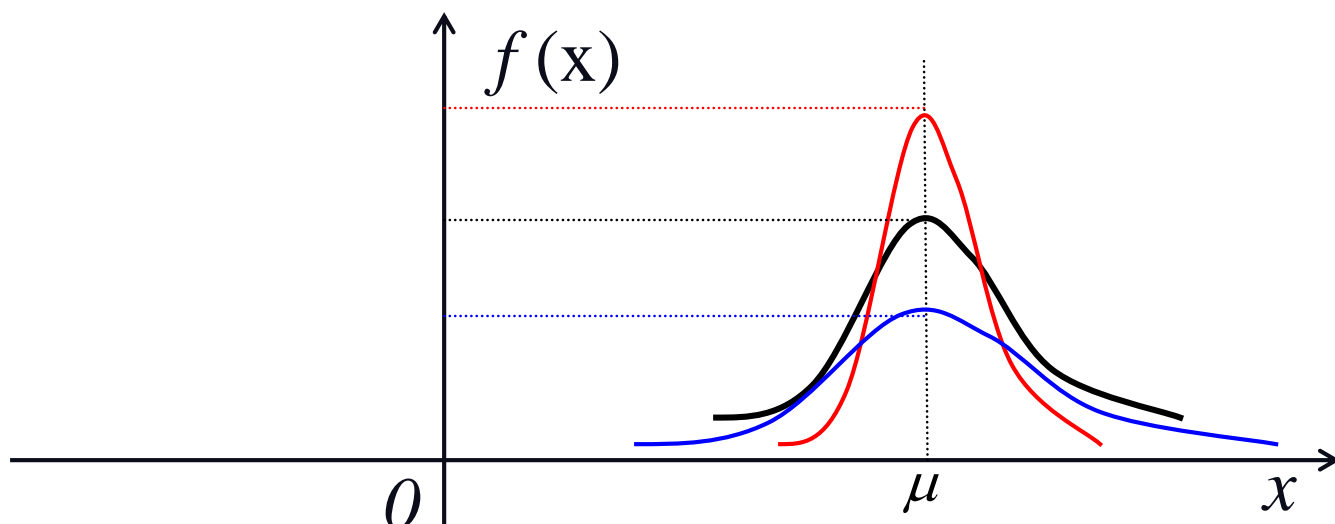


## 正态分布密度函数的图形性质（续）

(5) 若 $\mu$ 固定，而改变 $\sigma$ 的值，由于 $f(x)$ 的最大值为

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

可知，当 $\sigma$ 越小时， $y = f(x)$ 图形越陡，因而 $X$ 落在 $\mu$ 附近的概率越大；反之，当 $\sigma$ 越大时， $y = f(x)$ 的图形越平坦，这表明 $X$ 的取值越分散。



标准正态分布的计算：

如果随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ，则其密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty, +\infty)$$

其分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty)$$

教科书上第 382 页列出了标准正态分布表，

## 标准正态分布的计算 (续)

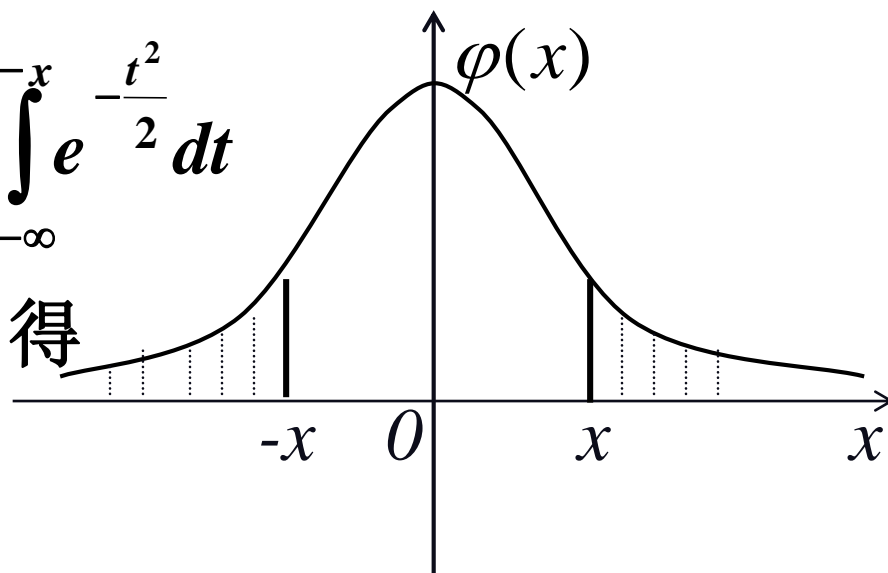
对于  $x \geq 0$  我们可直接查表求出  $\Phi(x) = P\{X \leq x\}$

如果  $x < 0$ , 我们可由公式

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

作变换  $t = -u$ ,  $dt = -du$ , 得

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$



## 一般正态分布的计算

设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq y\right\} \\ &= P\{X \leq \mu + \sigma y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma y} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \end{aligned}$$

作变换  $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$ , 则  $du = \frac{dt}{\sigma}$ , 代入上式, 得

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(y)$$

$$\therefore F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

### 一般正态分布的计算 (续)

其中,  $\Phi(x)$  是标准正态分布

该公式给出了一般正态分布分布函数值的求法

$$\therefore F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

故对任意的  $a < b$ , 有

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

## 例 8

设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 试求:

(1)  $P\{1 \leq X < 2\}$ ; (2)  $P\{-1 < X < 2\}$ .

解:

$$\begin{aligned} (1) \quad P\{1 \leq X < 2\} &= \Phi(2) - \Phi(1) \\ &= 0.97725 - 0.84134 = 0.13591 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P\{-1 \leq X < 2\} &= \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 0.97725 - 1 + 0.84134 = 0.81859 \end{aligned}$$

## 例9

设随机变量  $X \sim N(2, 9)$ , 试求: (1)  $P\{1 \leq X < 5\}$ ;  
(2)  $P\{|X - 2| > 6\}$ ; (3)  $P\{X > 0\}$ .

解:

$$(1) \quad P\{1 \leq X < 5\} = F(5) - F(1)$$

$$= \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0.84134 + 0.62930 - 1$$
$$= 0.47064$$



$$\begin{aligned}(2) \quad & P\{|X - 2| > 6\} = 1 - P\{|X - 2| \leq 6\} \\& = 1 - P\{-6 \leq X - 2 \leq 6\} \\& = 1 - P\{-4 \leq X \leq 8\} \\& = 1 - [\Phi(\frac{8-2}{3}) - \Phi(\frac{-4-2}{3})] \\& = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] \\& = 2 \times [1 - \Phi(2)] \\& = 2 \times (1 - 0.97725) = 0.0455\end{aligned}$$

$$(3) \quad P\{X > 0\} = 1 - P\{X \leq 0\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0.7486$$

## 例 10

某地区的月降水量服从 $\mu = 40$ ,  $\sigma = 4$  (单位:  $cm$ ) 的正态分布. 求从某月起连续10个月的月降水量都不超过 $50cm$ 的概率.

解:

设 $X$ 表示该地区的月降水量 则  $X \sim N(40, 4^2)$

再设:  $A = \{\text{月降水量不超过} 50cm\}$ .

$$\text{则: } P(A) = P\{X \leq 50\} = \Phi\left(\frac{50 - 40}{4}\right)$$

#### 例 10 (续)

$$= \Phi(2.5) = 0.99379$$

所以,  $P\{\text{连续10个月降水量都不超过}50cm\}$

$$= 0.99379^{10}$$

$$= 0.9396$$

设  $X \sim N(0, 1)$ , 若  $z_\alpha$  满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

则称点  $z_\alpha$  为标准正态分布的上 $\alpha$ 分位点。

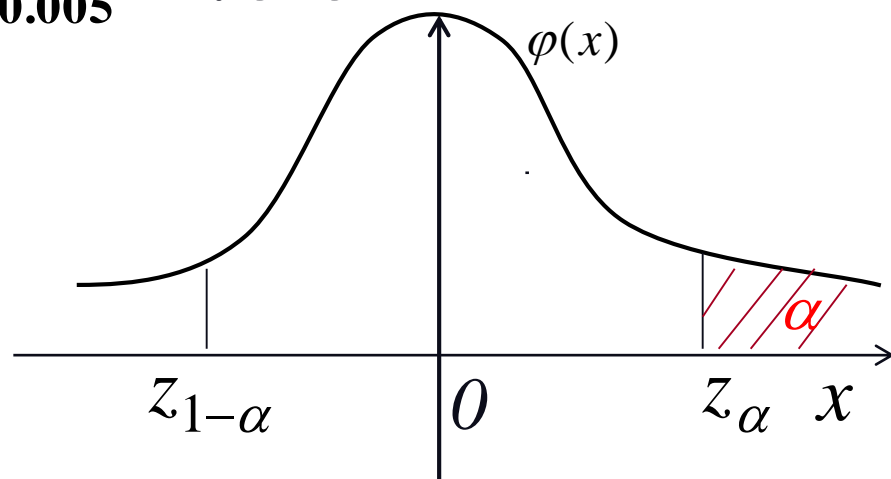
查表可知

$$z_{0.05} = 1.645 \quad z_{0.005} = 2.575$$

注:  $z_{1-\alpha} = -z_\alpha,$

$$z_{0.95} = -1.645$$

$$z_{0.995} = -2.575$$



小结:

1 连续型随机变量的密度函数的定义和性质。

特别是 
$$P\{X \in G\} = \int_G f(x) dx$$

2 均匀分布的定义及性质。

3 指数分布的定义。

4 正态分布的密度函数及几何性质。

5 一般正态分布函数与标准正态分布函数的关系。

6 会利用正态分布密度函数的性质求积分。