§3 条件概率
Conditional Probability

一　条件概率

二　乘法定理

三　全概率公式和贝叶斯公式

一、条 件 概 率
Conditional Probability

1）条件概率的定义：

设A、B是某随机试验中的两个事件，且$P(B)>0$，则称事件A在“事件B肯定（已）发生”这一附加条件下的概率为在事件B必定已发生的条件下事件A的条件概率，简称为A在B之下的条件概率，记为$P(A|B)$

例 1 两台车床加工同一种零件共100个，结果如下

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工数	35	5	40
第二台车床加工数	50	10	60
总 计	85	15	100

设A={从100个零件中任取一个是合格品}

B={从100个零件中任取一个是第一台车床加工的 }

求：$P(A)$， $P(B)$， $P(AB)$， $P(A|B)$.

解：$P(A)=\dfrac{85}{100}$， $P(B)=\dfrac{40}{100}$， $P(AB)=\dfrac{35}{100}$，

$$P(A|B)=\frac{35}{40}\neq P(A)=\frac{85}{100},$$

注：由例1可以看出，事件A在“事件B已发生” 这附加条件的概率与不附加这个条件的概率是不同的.

但有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

因此，有下面的定义：

设A、B是某随机试验中的两个事件，且P(B)>0

则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为在事件B已发生的条件下事件A的条件概率，简称为A在B之下的条件概率。

2）条件概率的性质：

(1）非负性：对任意事件 A，有 $P(A|B)\geq 0$

(2）规范性：$P(S|B)=1$；

(3) 可列可加性：如果随机事件A_1，$A_2,\cdots,A_n,\ldots,$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\middle|B\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|B)$$

例 2　已知某家庭有2个小孩，且至少有一个是女孩，求该家庭至少有一个是男孩的概率.

解：设 A={ 2个小孩至少有一个女孩 }

B={ 2个小孩至少有一个男孩 }

所求概率为　$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

而　$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\qquad P(AB)=\frac{1}{2}$$

所以　$$P(B|A)=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$

二、乘法公式Multiplication Rule

1）两个事件的乘法公式：

由条件概率的定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

我们得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

这就是两个事件的乘法公式.

2）多个事件的乘法公式

设 A_1，A_2，…，A_n为n个随机事件，

则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

这就是n个事件的乘法公式.

例3 袋中有一个白球与一个黑球，现每次从中取出一球，若取出白球，则除把白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止．求取了n 次都未取出黑球的概率．

解：设 $B=\{$取了n次都未取出黑球$\}$

$A_i=\{$第 i 次取出白球$\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

则
$$B=A_1A_2\cdots A_n$$

由乘法公式，我们有

$$P(B)=P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)$$

$$=P(A_1)P\left(A_2\,|\,A_1\right)P\left(A_3\,|\,A_1A_2\right)\cdots P\left(A_n\,|\,A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

例 4　设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 1/2 ，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 7/10 ,若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 9/10 。求透镜落下三次而未打破的概率。

解： A_i (i=1,2,3) ={透镜第 i 次落下打破},

B ={透镜落下三次而未打破}

则有：

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\ =P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{3}{200}\ .$$

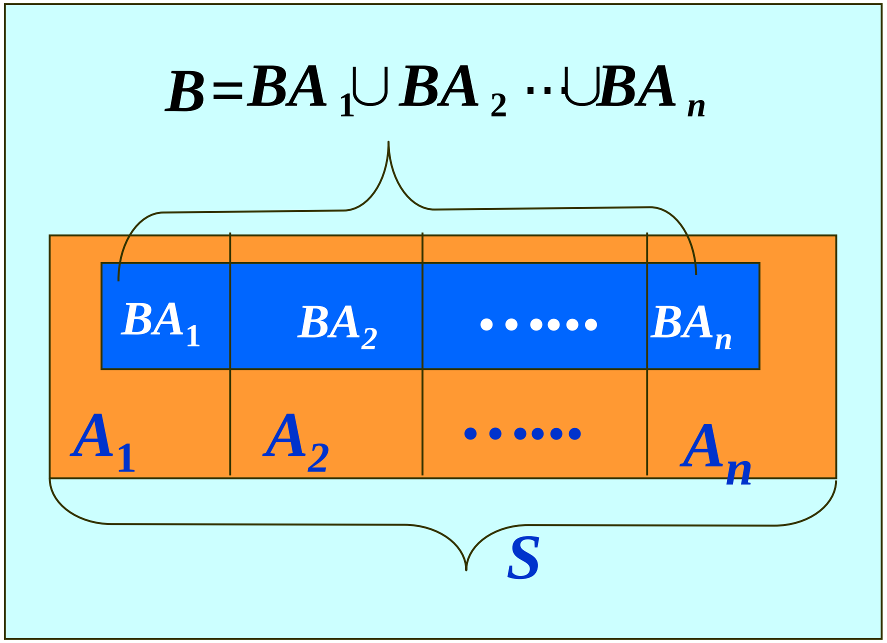
三、全概率公式和贝叶斯公式

定义　设 S 为试验 E 的样本空间，$A_1, A_2, \cdots A_n$ 为 E 的一组事件。若满足

(1) $A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n;$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S.$

则称 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为样本空间 S 的一个有限划分



1）全概率公式（The Law of Total Probability）

设随机事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ 是样本空间S的一个有限划分，即

(1) $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ 两两互不相容；

(2) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = S$ ；

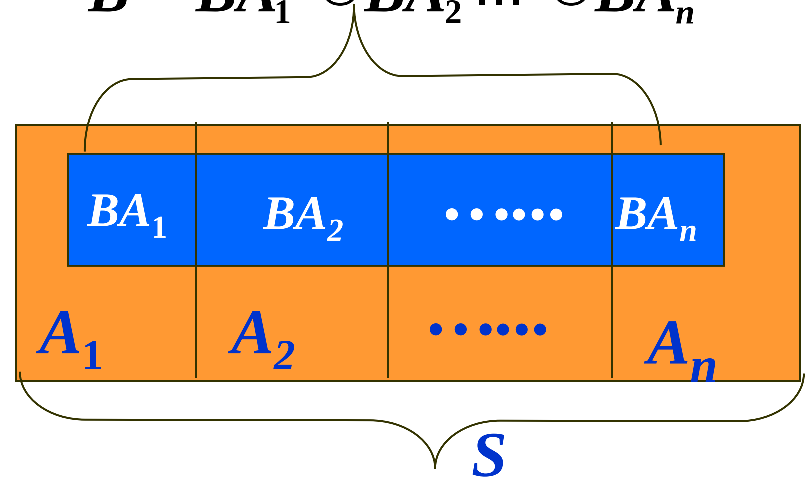
(3) $P(A_k) > 0 \ (k = 1, \ 2, \ \cdots, n)$;

则有 $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k).$$

全概率公式的证明：

由条件：$B \subset S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

$$B = BA_1 \cup BA_2 \cdots \cup BA_n$$



得 $B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k B)$

而且由 $A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n$ 两两互不相容，

得 $A_1B, \quad A_2B, \quad \ldots, \quad A_nB$ 也两两互不相容；

全概率公式的证明（续）

所以由概率的可加性，得

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_kB)$$

再由条件 $P(A_k)>0\ (k=1,\ 2,\ ...,n)$，得

$$P(A_kB)=P(A_k)P(B|A_k)$$

得 $$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_kB)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)$$

全概率公式的理解：

我们把事件B看作某一过程的结果，

把 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 看作该过程的若干个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

$$\left(\text{即 } P(A_k)\text{已知}\right)$$

而且每一原因对结果的影响程度已知，

$$\left(\text{即 } P(B|A_k)\text{已知}\right)$$

则我们可用全概率公式计算结果发生的概率.

$$\left(\text{即求 } P(B)\right)$$

例5　某小组有20名射手，其中一、二、三、四　　级射手分别为2、6、9、3名．又若选一、二、三、四级射手参加比赛，则在比赛中射中目标　的概率分别为0.85、0.64、0.45、0.32，今随机选一人参加比赛，试求该小组在比赛中射中目标的概率．

解：

$$设\ B=\{该小组在比赛中射中目标\}$$

$$A_i=\{选i级射手参加比赛\}(i=1,\ 2,\ 3\ \ 4)$$

由全概率公式，有 $$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{2}{20}\times 0.85+\frac{6}{20}\times 0.64+\frac{9}{20}\times 0.45+\frac{3}{20}\times 0.32$$

$$=0.5275$$

2）贝叶斯公式（Bayes' Theorem）

设随机事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ 是样本空间*S*的一个有限划分，即

(1) $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ 两两互不相容；

(2) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = S$ ；

(3) $P(A_k) > 0 \quad (k = 1, \quad 2, \quad \cdots, n)$； 则有：

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

Bayes公式的理解

我们把事件B看作某一过程的结果，

把 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 看作该过程的若干个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

$$\left(\text{即 } P(A_k) \text{已知}\right)$$

而且每一原因对结果的影响程度已知，

$$\left(\text{即 } P(B|A_k) \text{已知}\right)$$

如果已知事件B已经发生，要求此时是由第 i 个原因引起的概率，则用Bayes公式

$$\left(\text{即求 } P(A_i|B)\right)$$

例 6 用某种方法普查肝癌，设：

A={ 用此方法判断被检查者患有肝癌 },

D={ 被检查者确实患有肝癌 },

已知 $P(A|D)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{D})=0.90$

而且已知：$P(D)=0.0004$

现有一人用此法检验患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率.

例 6解：

由已知，得 $P(A|D)=0.95,\quad P(\overline{A}|\overline{D})=0.90$

$P(D)=0.0004$

所以，由Bayes公式，得

$$P(D|A)=\frac{P(DA)}{P(A)}=\frac{P(D)P(A|D)}{P(D)P(A|D)+P(\overline{D})P(A|\overline{D})}$$

$$=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.10}$$

$$=0.0038$$

例 8 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件厂提供的。根据以往的记录有以下的数据。

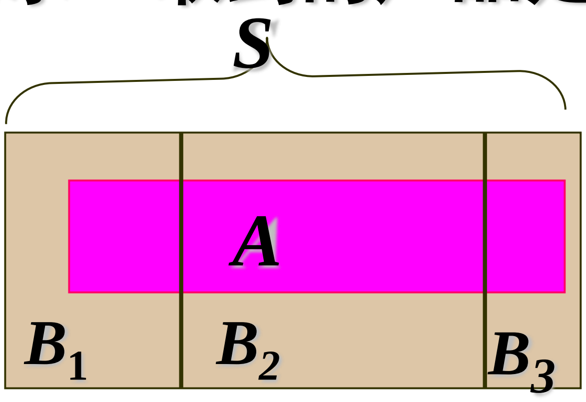
元件制造厂	次品率	提供晶体管的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志。

（1）在仓库中随机的取一只晶体管，求它是次品的概率。

（2）在仓库中随机的取一只晶体管，若已知取到的是次品试分析此次品出自那家工厂的可能性最大。

解：设 A 表示“取到的是一只次品”，B_i（$i=1,2,3$）表示“取到的产品是由第 i 家工厂提供的”，



	$P(A\mid B_i)$	$P(B_i)$
元件制造厂	次品率	提供晶体管的份额
1	0. 02	0. 15
2	0. 01	0. 80
3	0. 03	0. 05

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)$$

$$=0.0125$$

例８（续）

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$$

元件制造厂	$P(A \mid B_i)$	$P(B_i)$
1	0. 02	0. 15
2	0. 01	0. 80
3	0. 03	0. 05

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24$$

例８（续）

$$P(B_1 \mid A) = \frac{3}{12.5} = 24\% ,$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{8}{12.5} = 64\% ,$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{1.5}{12.5} = 12\% .$$

次品出自第二家工厂的可能性最大。

例９　对以往的数据分析结果表明当机器调整得良好时，产品的合格率为 90% ，而当机器发生某一故障时，其合格率为 30% 。每天早上机器开动时机器调整良好的概率为 75% 。已知某天早上第一件产品是合格品，试求机器调整得良好的概率是多少？

B　机器调整得良好　$P(A|B)=90\%$

$\overline{B}$　机器发生某一故障　$P(A|\overline{B})=30\%$

A　产品合格

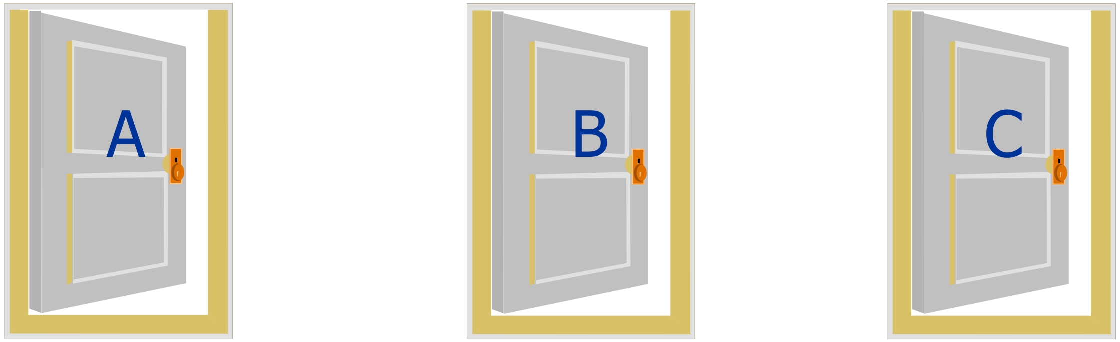
解：

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

$$=\frac{0.75\times 0.9}{0.75\times 0.9+0.25\times 0.3}=0.9.$$

说明：乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式非常重要。

思考题：在一著名的电视节目里，台上有三扇门，记为*A*，*B*，*C*，其中有两扇门后没有奖品，而第三扇门后有大奖。



请你猜哪扇门后有奖。

若你选择了*A*，在门*A*被打开之前，主持人从另外两扇门中随便找一扇没有奖品的门并打开，比方说是B。 问你是否改变决定（从*A*门到*C*门）？