§4　独立性
independence

一、独立性的定义
二、事件独立性的性质
三、多个事件的独立性

例 1

袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，令：

A ={ 第一次取出白球 },

B ={ 第二次取出白球 },

分有放回和不放回情形讨论

$$P(A), P(B), P(B\mid A)$$

（1）有放回情形：

$$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

$$P(AB)=\frac{b^2}{(a+b)^2}$$

同理 $$P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)^2}$$

所以，由　$B = AB \cup \overline{A}B$

得：$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$

$$= \frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{b^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{b}{a+b}} = \dfrac{b}{a+b}$

（2）不放回情形：

$$P(A)=\frac{b}{a+b} \qquad P(AB)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

同理 $$P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

所以， $$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

$$=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}}{\dfrac{b}{a+b}}$

$$=\frac{b-1}{a+b-1}$$

说　　明

由例 1，可知，两种情形中都有 $P(A)=P(B)$

在有放回情形有：$P(B)=P(B|A)$

在不放回情形有：$P(B)\neq P(B|A)$

这表明，在有放回情形，事件 A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是没有影响的，即事件 A 与 B 呈现出某种独立性.

在不放回情形，事件 A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是有影响的，即事件 A 与 B 呈现出不独立性.

由此，我们引出事件独立性的概念

一、独立性(Independence)的定义

设 A、B 是两个随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件.

二、事件独立性的性质：

1）如果事件A 与 B 相互独立，而且 $P(A)>0$

则 $P(B|A)=P(B)$

推导：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$

2）必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件 $\varPhi$与任意随机事件A相互独立.

这个性质很重要！

3) 若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

证明：为方便起见，只证$\overline{A}$ 与 B 相互独立即可.

由于 $P(\overline{A}B)=P(B-AB)$

注意到 $AB\subset B$，由概率的可减性，得

$$P\left(\overline{A}B\right)=P(B)-P(AB)$$

$$=P(B)-P(A)P(B)\quad(\text{事件}A\text{与}B\text{的独立性})$$

$$=\left[1-P(A)\right]P(B)=P\left(\overline{A}\right)P(B)$$

所以，事件$\overline{A}$与B相互独立.

注意：在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的。具体的说，题目一般把独立性作为条件告诉我们，要求直接应用定义中的公式进行计算。

例 2 设事件 A 与 B 满足：$P(A)P(B)\neq 0$

（1）若事件 A 与 B 相互独立，则 $AB\neq\Phi$；

（2）若 $AB=\Phi$，则事件 A 与 B 不相互独立

证明： 由于事件 A 与 B 相互独立，故

$$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$$

所以，$AB\neq\Phi$

由于$AB=\Phi$，所以

$$P(AB)=P(\Phi)=0$$

但是，由题设 $P(A)P(B)\neq 0$

所以，$P(AB)\neq P(A)P(B)$

这表明，事件 A 与 B 不相互独立.

三、多个事件的独立性

1）三个事件的独立性：设A、B、C是三个随机事件，

如果
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

A,B,C这三个事件两两独立

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注意：在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即：前三个等式的成立推不出最后一个等式；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立.

例 3　袋中装有 4 个外形相同的球，其中三个球分别涂有红、白、黑色，另一个球涂有红、白、黑三种颜色．现从袋中任意取出一球，令：

A={ 取出的球涂有红色 }

B={ 取出的球涂有白色 }

C={ 取出的球涂有黑色 }

则：

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}$$

由此可见　$P(AB)=P(A)P(B),$

$P(BC)=P(B)P(C),\quad P(AC)=P(A)P(C).$

但是　$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$

这表明，A、B、C这三个事件是两两独立的，但不是相互独立的.

2）n个事件的相互独立性：

设 A_1，A_2，…，A_n 为n个随机事件，如果下列等式成立：

$$
\begin{cases}
P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & (1\le i<j\le n)\\
P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1\le i<j<k\le n)\\
\quad\cdots\cdots\cdots & \\
P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}) & (1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n)\\
\quad\cdots\cdots & \\
P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) &
\end{cases}
$$

则称 A_1，A_2，…，A_n 这n个随机事件相互独立.

说　明

在上面的公式中,

第一行有C_n^2个等式，第二行有C_n^3个等式,…　，最后一行共有C_n^n个等式

因此共有

$$C_n^2+C_n^3+\dots+C_n^n=2^n-C_n^0-C_n^1$$

$$=2^n-1-n \text{ 个等式}$$

3）独立随机事件的性质：

如果 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 这 n 个随机事件相互独立，则

（1）其中任意 $m(2 \le m \le n)$ 个随机事件也相互独立；

(2) $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, \overline{A}_{i_{m+1}}, \ldots, \overline{A}_{i_n}$ 这 n 个随机事件也相互独立，其中 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的任意一个排列.

4）相互独立事件至少发生其一的概率的计算：

在本章第2节介绍了下面这个公式

对任意n个事件A_1，A_2，…，A_n，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)$$
$$+\dots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

在独立的条件下有：

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n})$$
$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

特别地，如果

$$P(A_1)=P(A_2)=\dots=P(A_n)=p$$

则有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n$$

注 意

当 $n\to\infty$ 时，$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n\to 1$

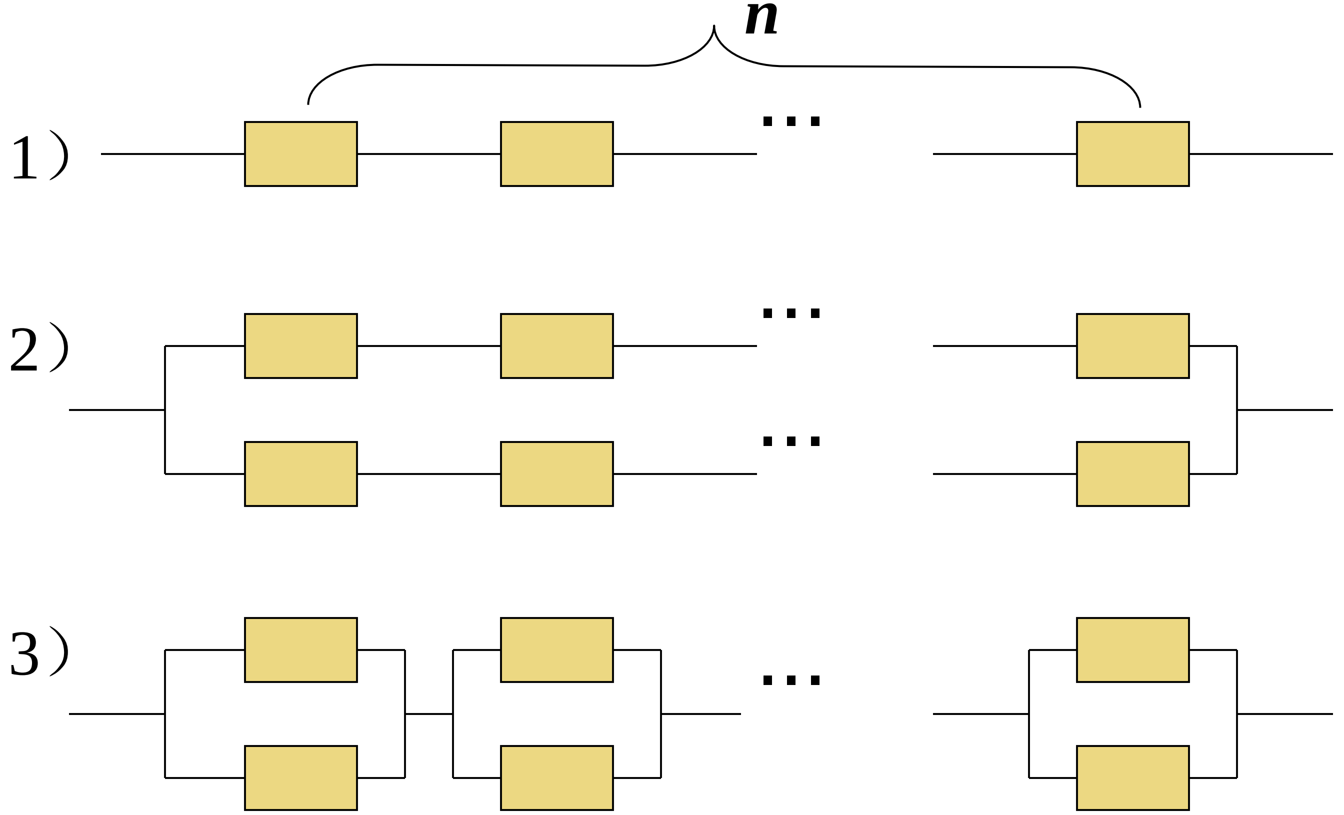
假设独立重复地做n次某一试验E，A是某一随机事件，$P(A)=p$，A_i表示第i次试验中A出现，则前n次试验中A至少出现一次的概率为

不论 p 多么小

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n \to 1$$

此例说明：小概率事件虽然在一次试验中几乎是不发生的，但是迟早要发生。

例4 如果构成系统的每个元件的可靠性均为 r，$0<r<1$. 且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：



解：1）每条通路要能正常工作，当且仅当该通路上的各元件都正常工作，故可靠性为 $R_c = r^n$

2）一条通路发生故障的概率为 $1-r^n$，两条通路同时发生故障的概率为 $(1-r^n)^2$.故系统的可靠性为

$$R_s = 1-(1-r^n)^2 = r^n(2-r^n) = R_c(2-R_c)$$

$R_c \le R_s \le 1$. 即附加通路可使系统可靠性增加。

3）每对并联元件的可靠性为 $R' = 1-(1-r)^2 = r(2-r)$

系统由每对并联的元件串联组成，故可靠性为

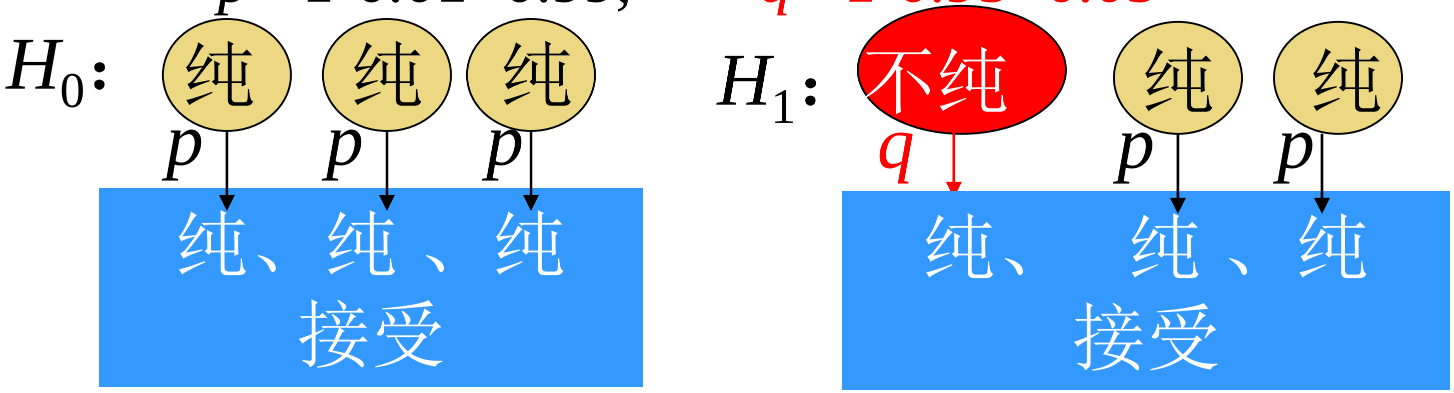
$$R_s' = (R')^n = r^n(2-r)^n = R_c(2-r)^n.$$ 显然 $R_s' \geqslant R_c$.

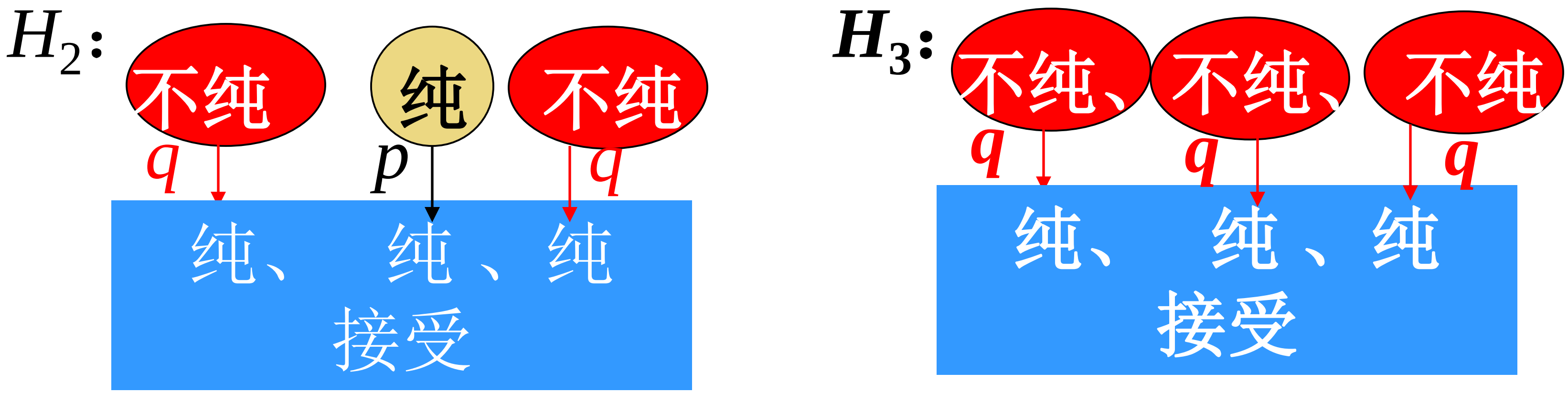
由数学归纳法可证明当 $n \ge 2$时，$(2-r)^n \geqslant 2-r^n$,即 $R_s' \geqslant R_s$.

例5 要验收一批（100件）乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地抽取 3 件测试（设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果至少有一件被测试为音色不纯，则拒绝接受这批乐器。

设一件音色不纯的乐器被测试出来的概率为 0.95，而一件音色纯的乐器被误测为不纯的概率为 0.01。如果这件乐器中恰有 4 件是音色不纯的，问这批乐器被接受的概率是多少？

$p=1-0.01=0.99$,　　$q=1-0.95=0.05$





p =1-0.01=0.99,　　q =1-0.95=0.05

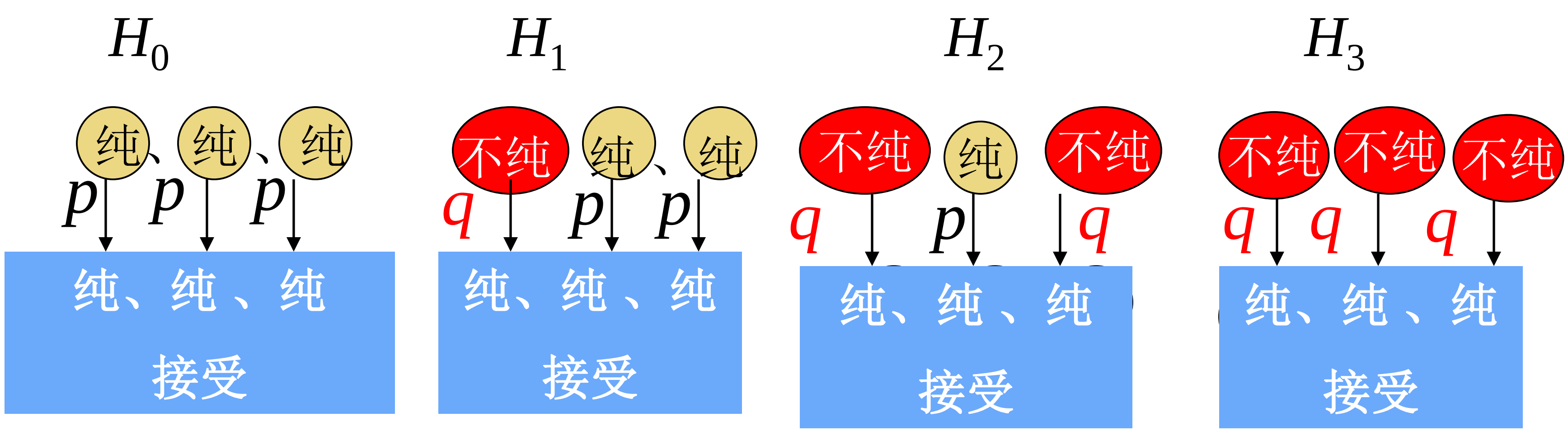
解： 以 H_i （i=0, 1, 2, 3 ）表示事件"随机取出的 3 件乐器中恰有 i 件音色不纯"，以 A 表示事件"这批乐器被接受"，即 3 件都被测试为音色纯的乐器。

由全概率公式有　$P(A)=\sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A \mid H_i)$

由测试的相互独立性得：

$$P(A \mid H_0)=(0.99)^3,\quad P(A \mid H_1)=(0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A \mid H_2)=0.99 \times (0.05)^2,\quad P(A \mid H_3)=(0.05)^3.$$



$p=1-0.01=0.99$,　$q=1-0.95=0.05$

另外，按照超几何分布的概率计算公式得：

$$P(H_0)=C_{96}^{3}/C_{100}^{3},\quad P(H_1)=C_4^1C_{96}^{2}/C_{100}^{3},$$

$$P(H_2)=C_4^2C_{96}^{1}/C_{100}^{3},\quad P(H_3)=C_4^3/C_{100}^{3}.$$

代入公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A\mid H_i)=0.8629.$$

本节要点：

1）两个事件的独立性及多个事件的独立性定义；

2）两个事件的独立性及多个事件的独立性的性质；

3）在独立性条件下，求n个事件至少发生一个的概率公式：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_n})$$

注意：独立事件与互不相容事件的区别与关系；

两两独立与相互独立的区别。

思考题：

1）一架长机和两架僚机一同飞往某地进行轰炸，但要到达目的地，非要有无线电导航不可，而只有长机具有此项设备。一旦到达目的地，各机将独立地进行轰炸且炸毁目标的概率为0.3。在到达目的地之前，必须经过敌军的高射炮阵地上空，此时任一飞机被击落的概率为0.2，求目标被炸毁的概率？(0.4765)

2）（赌徒破产问题）设某赌徒有赌本m元($m>1$)，其对手有$N-m$(>0)元，每赌一次该赌徒均以概率p赢一元。赌博一直到两赌徒中有一人破产才告结束，求该赌徒破产的概率.(答案：$p=1/2$ 时概率 $1-m/N$

总结:知识结构网络图

- 随机现象—随机试验—随机事件
  - 表达方式
    - 语言叙述
    - 点集—基本事件,样本空间,事件,必然事件,不可能事件
    - 关系
      - 包含、相等、互不相容、对立、完备事件组
      - 相互独立
        - 定义(描述性定义与严格定义)
        - 性质
    - 运算
      - 形式—加(并)、交(积)、减、逆
      - 法则—交换、结合、分配、对偶、吸收、分解
    - 随机变量取值范围*
  - 概率
    - 定义—描述性定义,统计定义,古典定义,几何定义,公理化定义
    - 性质
      - 非负,有界,单调不减,有限可加
      - 加法公式,减法公式,求逆公式
    - 条件概率
      - 定义
      - 三公式—乘法公式,全概公式,贝叶斯(*Bayes*)公式
    - 概型
      - 等可能概型
        - 古典概型
        - 几何概型
      - 独立试验序列概型(n 重贝努利概型)