§1　随机变量

例 1　袋中有3只黑球，2只白球，从中任意取出3只球．我们将3只黑球分别记作1，2，3号，2只白球分别记作4，5号，则该试验的样本空间为

$$S=\left\{\begin{matrix}(1,&2,&3) & (1,&2,&4) & (1,&2,&5)\\(1,&3,&4) & (1,&3,&5) & (1,&4,&5)\\(2,&3,&4) & (2,&3,&5) & (2,&4,&5)\\(3,&4,&5) & & & & & & & \end{matrix}\right\}$$

考察取出的3只球中的*黑球的个数*。

我们记取出的*黑球数为X*，则 X 的可能取值为1，2，3．因此， X 是一个变量．但是， X 取什么值依赖于试验结果，即 X 的取值带有随机性，所以，我们称 X 为随机变量．X 的取值情况可由下表给出：

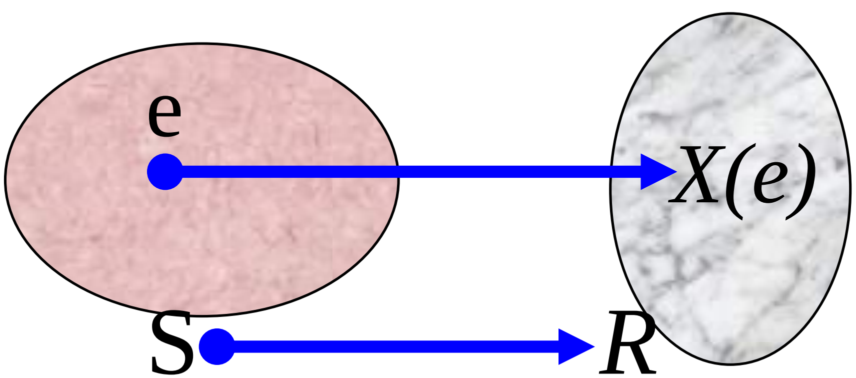
样本点	黑球数 X	样本点	黑球数 X
$(1,\ 2,\ 3)$	3	$(1,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 2,\ 4)$	2	$(2,\ 3,\ 4)$	2
$(1,\ 2,\ 5)$	2	$(2,\ 3,\ 5)$	2
$(1,\ 3,\ 4)$	2	$(2,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 3,\ 5)$	2	$(3,\ 4,\ 5)$	1

随机变量的定义

设E 是一个随机试验，S 是其样本空间．我们称样本空间上的函数

$$X = X(e) \qquad (e \in S)$$

为一个随机变量.



掷一枚硬币，令：

$$X=\begin{cases}1 & \text{掷硬币出现正面;}\\ 0 & \text{掷硬币出现反面.}\end{cases}$$

则*X*是一个随机变量.

说 明：在同一个样本空间上可以定义不同的随机变量.

说 明

(1)随机变量常用大写的英文字母

$X, Y, Z\ldots$

或希腊字母

ξ, η, ς

等来表示.

(2) 我们设立随机变量，是要用随机变量的取值来描述随机事件.

(3) 对于随机变量，我们关心的是它的取值及取相应值的概率.

例2　掷一颗骰子，令　X：出现的点数．则 X 就是一个随机变量．

它的取值为1，2，3，4，5，6．

$$\{X \le 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{X\text{ 取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件．

例3 一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品．现从中取出 6 件，令：

X：取出 6 件产品中的次品数．

则X 就是一个随机变量它的取值为0, 1, 2, ..., 6

$$\{X = 0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X \geq 1\}$$

表示取出的产品至少有一件次品这一随机事件．

例4 上午 8:00～9:00 在某路口观察，令：

Y：该时间间隔内通过的汽车数.

则 Y 就是一个随机变量, 它的取值为0，1，...

$$\{Y < 100\}$$

表示通过的汽车数小于100辆这一随机事件；

$$\{50 < Y \leq 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件.

例5 观察某生物的寿命（单位：小时），令

Z：该生物的寿命.

则Z 就是一个随机变量. 它的取值为所有非负实数.

$$\{Z \le 1500\}$$

表示该生物的寿命不超过1500小时这一随机事件.

$$\{Z > 3000\}$$

表示该生物的寿命大于 3000小时这一随机事件.

例 7 掷一枚骰子，我们可以定义：

$$Y=\begin{cases}1 & \text{出现偶数点;}\\ 0 & \text{出现奇数点.}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1 & \text{点数为6;}\\ 0 & \text{点数不为6.}\end{cases}$$

等等.

§2离散型随机变量

一、离散型随机变量的分布律与性质

1) 离散型随机变量的定义

如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量.

2)离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为

$$x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_n,\quad \cdots$$

并设 $P\{X = x_n\} = p_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$

则称上式或

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

为离散型随机变量 X 的分布律.

3)离散型随机变量分布律的性质:

(1)　对任意的自然数 n，有 $p_n \geq 0$;

(2) $\sum_n p_n = 1.$

例 1 从1～10这10个数字中随机取出5个数字，令 X：取出的5个数字中的最大值．试求X的分布律．

解： X 的可能取值为5，6，7，8，9，10．并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}} \quad k=5, \quad 6, \quad \dots, \quad 10.$$

求分布律一定要说明k的取值范围！

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例 2 将 1 枚硬币掷 3 次，令

X：出现的正面次数与反面次数之差.

试求 X 的分布律.

解： X 的可能取值为−3，−1，1，3.

并且分布律为

X	-3	-1	1	3
P_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 3　设离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则 $$P\{X \le 2\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

例 3（续）

$$P\{X>3\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16}$$

$$P\{0.5\le X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$$

例 4　设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$ 试求常数 c.

解：由分布率的性质，得

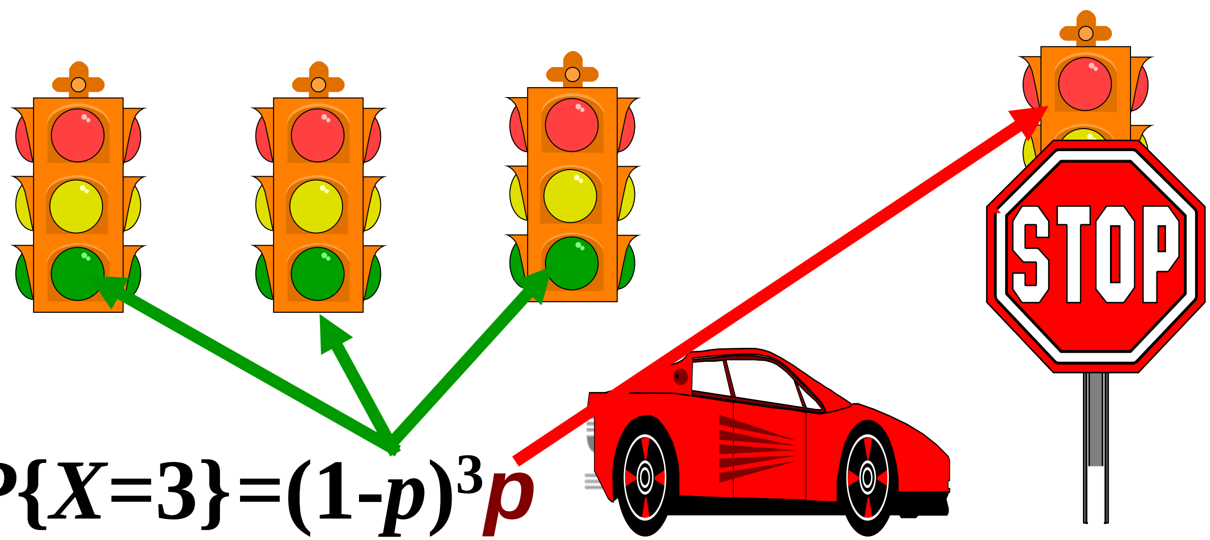
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数，故有

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{c}{3}$$

得 $c=3$.

例 5　设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以概率p 禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律.（信号灯的工作是相互独立的）.



$$P\{X=3\}=(1-p)^3p$$

例 5(续)

解： 以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则X 的分布律为：

X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成 $P\{X=k\}=(1-p)^k p,\quad k=0,1,2,3$

$P\{X=4\}=(1-p)^4$

以 $p=1/2$ 代入得：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

二、一些常用的离散型随机变量分布

1） Bernoulli分布(伯努利分布)

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$$

或

X	0	1
P	1-p	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的Bernoulli分布.

记作 $X\sim B(1,\ p)$ （其中 $0\le p\le 1$ 为参数）

Bernoulli分布也称作 0-1 分布或二点分布.

Bernoulli分布的概率背景

进行一次*Bernoulli*试验， *A*是随机事件。设：

$$P(A)=p\,,\qquad P(\bar{A})=1-p=q$$

$$X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则 $X\sim B(1,p)$

例6　15 件产品中有4件次品，11件正品．从中取出1件．令 X：取出的一件产品中的次品数．则 X 的取值为 0 或者 1，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15},\quad P\{X=1\}=\frac{4}{15}$$

即：$$X \sim B\left(1,\ \frac{4}{15}\right).$$

2）二 项 分 布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \dots,\ n)$$

则称随机变量X服从参数为(n,p)的二项分布，

记作 $X \sim B(n,\ p)$

（其中n为自然数，$0 \le p \le 1$为参数）

分布律的验证

(1). 由于 $0 \le p \le 1$ 以及 n 为自然数，可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ge 0 \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

(2). 又由二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

所以 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$

是分布律.

说　　明

显然，当 n=1 时

$$X \sim B(1,\quad p)$$

此时，X 服从 *Bernoulli* 分布.

这说明，*Bernoulli*分布是二项分布的一个特例.

二项分布的概率背景

进行n重独立的 *Bernoulli* 试验，A是随机事件。设在每次试验中

$$P(A)=p\,,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

令 X 表示这 n 次 *Bernoulli* 试验中事件A发生的次数.

则
$$X\sim B(n,\ p)$$

说明：

设 $A_i=\{$第 i 次试验 A 出现$\}$,则

$$\{X=k\}=A_1\dots A_k\overline{A}_{k+1}\dots\overline{A}_n\cup\overline{A}_1A_2\dots A_{k+1}\overline{A}_{k+2}\dots\overline{A}_n\cup\cup\dots\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\dots A_n$$

在 n 次试验中，指定 k 次出现 A (成功)，其余 $n-k$ 次出现 $\overline{A}$ (失败)，这种指定的方法共有 C_n^k 种.

所以

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}\qquad (q=1-p)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

例 7 一大批产品的次品率为0. 05，现从中取出10件. 试求下列事件的概率：

B={ 取出的10件产品中恰有4件次品 }

C={ 取出的10件产品中至少有2件次品 }

D={ 取出的10件产品中没有次品 }

解：取10件产品可看作是一10重*Bernoulli*试验.

$$\boldsymbol{A} = \{\text{取出一件产品为次品}\}$$

则 $P(A) = 0.05$

B={ 取出的10件产品中恰有4件次品 }
C={ 取出的10件产品中至少有2件次品 }
D={ 取出的10件产品中没有次品 }

所以，

$$P(B) = P(X = 4) = C_{10}^{4} \times 0.05^{4} \times 0.95^{10-4} = 9.648 \times 10^{-4}$$

$$P(C) = P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{C})$$

$$= 1 - C_{10}^{0} \times 0.05^{0} \times 0.95^{10} - C_{10}^{1} \times 0.05^{1} \times 0.95^{9}$$

$$= 0.08614$$

$$P(D) = P(X = 0) = 0.95^{10} = 0.5987$$

例 8　对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为0.23，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95？

解： 设需进行n次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95.

B={ n次射击至少命中一次目标 }

进行n次射击，可看成是一n重Bernoulli试验.

令：$A=\{命中目标\}$　则 $P(A)=0.23$

则有　$P(B)=1-P(\overline{B})\quad=1-0.77^n$

由题意，得　$P(B)=1-0.77^n\geq 0.95$

所以，有　$0.77^n\leq 0.05$

取对数，得　$n\ln 0.77\leq \ln 0.05$

所以，有　$n\geq\dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.77}\quad=11.46$

故　$n=12.$

例 9　一张考卷上有5道选择题，每道题列出4个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对4道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次*Bernoulli*试验，

$A=\{答对一道题\}$，　则　$P(A)=\dfrac{1}{4}$

则答5道题相当于做5重Bernoulli试验．

设X表示该学生靠猜测能答对的题数，

则 $X \sim B\left(5,\ \dfrac{1}{4}\right)$

所以

$$P\{\text{至少能答对4道题}\} = P\{X \geq 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$

二项分布的分布形态

若 $X \sim B(n, p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq} \quad (q = 1-p)$$

由此可知，二项分布的分布率 $P\{X=k\}$

先是随着 k 的增大而增大，达到其最大值后再随着k 的增大而减少．这个使得

$$P\{X=k\}$$

达到其最大值的k_0 称为该二项分布的最可能次数．

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}\quad (q=1-p)$$

可以证明:

如果$(n+1)p$不是整数，则$k_0=[(n+1)p]$;

如果$(n+1)p$是整数，则$k_0=(n+1)p$或$(n+1)p-1$;

例 10 对同一目标进行300次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.44，试求300次射击最可能命中几次？其相应的概率是多少？

解： 对目标进行300次射击相当于做300重*Bernoulli*试验．令：

X 表示300射击中命中目标的次数.

则由题意 $X \sim B(300,\ 0.44)$.

由于 $(300+1)\times 0.44 = 132.44$，它不是整数

因此，最可能射击的命中次数为

$$k_0 = [132.44] = 132$$

其相应的概率为

$$P\{X = 132\} = C_{300}^{132} * 0.44^{132} * 0.56^{168}$$

$$= 0.04636$$

3）泊松（Poisson）分布

如果随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(其中$\lambda>0$为常数)

则称随机变量 X 服从参数为λ的Poisson 分布.

分布律的验证

(1) 由于 $\lambda > 0$ 可知对任意的自然数 k，有

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$$

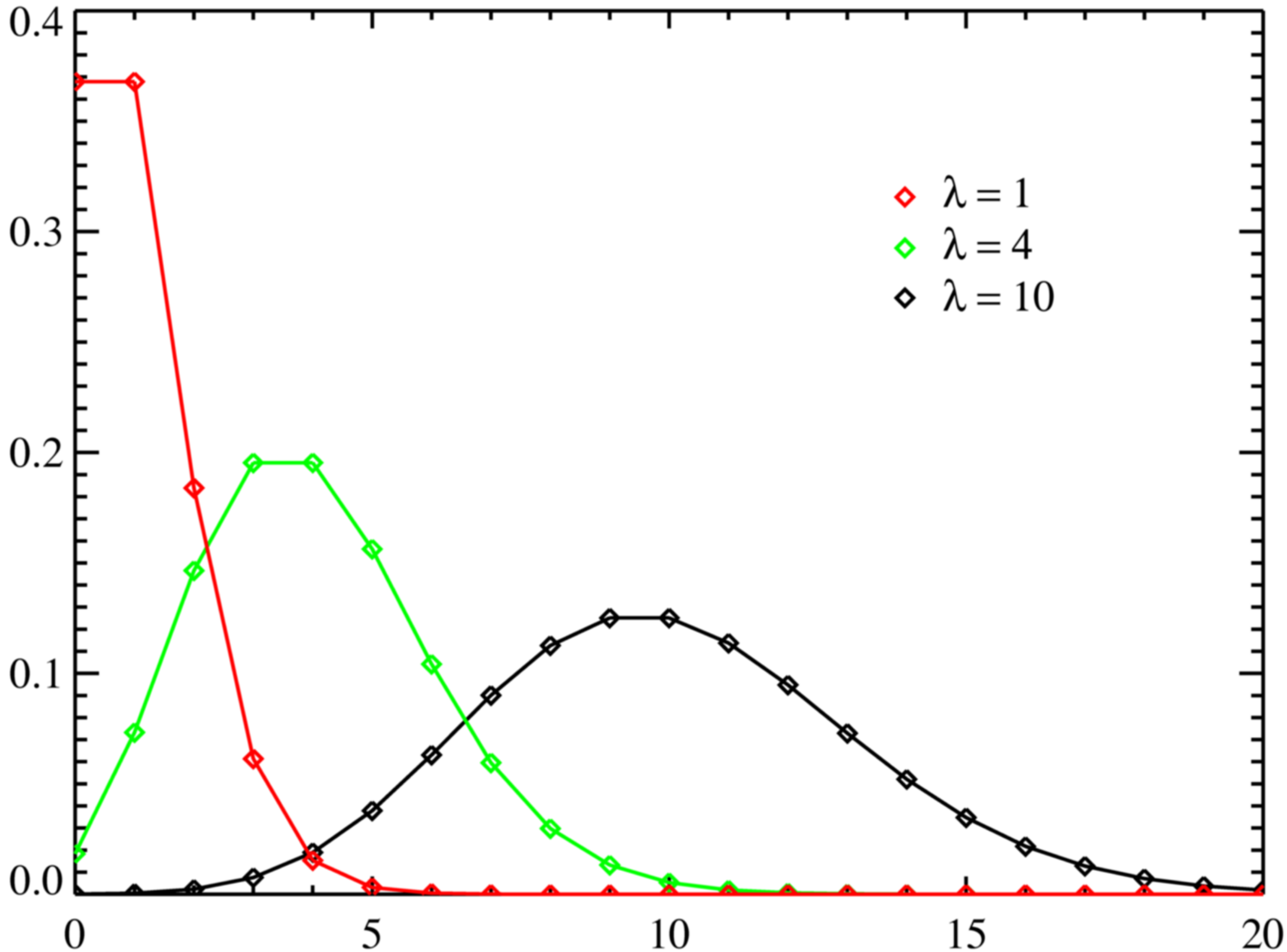
(2) 又由幂级数的展开式，可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

是分布律.


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
5
10
15
20
λ = 1
λ = 4
λ = 10

Poisson 定理

设在 Bernoulli 试验中，以 p_n 代表事件 A 在试验中发生的概率，它与试 验总数 n 有关．如果

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

则 $$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明： 令：$np_n = \lambda_n$

则 $$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

对于固定的 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=e^{-\lambda}$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}C_n^k p_n^k\left(1-p_n\right)^{n-k}$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\lambda_n^k\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Poisson定理的应用

由 *Poisson* 定理，可知

若随机变量 $X \sim B(n,\ p)$,

则当n比较大，p比较小时，

令：　$\lambda = np$

则有　$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Poisson 分布的应用

Poisson分布是概率论中重要的分布之一.

自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布.

例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从Poisson分布的.

例 12 设随机变量 X 服从参数为λ的*Poisson*分布，且已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}$$

试求 $P\{X=4\}$.

解： 随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

由已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}$$

得
$$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$$

由此得方程　$\lambda^2-2\lambda=0$

得解　$\lambda=2.$

(另一个解$\lambda=0$不合题意，舍去)

所以，
$$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$$
$$=0.09022$$

例 13　设一个人在一年内的感冒次数服从参数$\lambda=5$的*Poisson*分布，现有一种预防感冒的药，它对30 %的人来讲，可将上述参数λ降为$\lambda=1$（疗效显著）；对另45 %的人来讲，可将参数λ降为$\lambda=4$（疗效一般）；而对其余25 %的人来讲，则是无效的．现某人服用此药一年，在这一年中，他得了3次感冒，试求此药对他“疗效显著”的概率．

解：设 B={ 此人在一年中得3次感冒 }

$A_1=\{$该药疗效显著$\}$　$A_2=\{$该药疗效一般$\}$

A_3={该药无效}，则所求概率为 $P\left(A_1\middle|B\right)$

由Bayes公式，得

$$P\left(A_1\middle|B\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B\middle|A_1\right)}{P\left(A_1\right)P\left(B\middle|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B\middle|A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B\middle|A_3\right)}$$

$$=\frac{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}}{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}+0.45\times\frac{4^3}{3!}e^{-4}+0.25\times\frac{5^3}{3!}e^{-5}}=0.1301$$

例 14 设每次射击命中目标的概率为0.012，现射击600次，求至少命中3次目标的概率（用*Poisson*分布近似计算）.

解：设 B={ 600次射击至少命中3次目标 }

进行600次射击可看作是一600重*Bernoulli*试验.

X：600次射击命中目标的次数 .

则 $X \sim B(600,\ 0.012)$.

用 *Poisson*分布近似计算，

取 $\lambda = 600 \times 0.012 = 7.2$.

例 14（续）

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

所以，

$$P(B)=P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}$$

$$=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}$$

$$=1-e^{-7.2}-7.2e^{-7.2}-\frac{7.2^2}{2}e^{-7.2}$$

$$=0.9745$$

4）几 何 分 布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$(\text{其中 } p\geq 0,\ q\geq 0,\ p+q=1)$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布.

分布律的验证

(1)由条件 $p \geq 0$, $q \geq 0$, 可知对任意的自然数k,

有 $q^{k-1}p \geq 0$

(2) 由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

综上所述，可知

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p \quad (k = 1, \ 2, \ \ldots)$$

是一分布律.

几何分布的概率背景

在*Bernoulli*试验中，

$$P(A)=p,\quad P(\overline{A})=q=1-p$$

试验进行到 A 首次出现为止.

令：X表示所需试验次数.

则 X 服从参数为 p的几何分布.

即 $P\{X=k\}=q^{k-1}p\quad (k=1,\quad 2,\quad \ldots)$

例17 对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为0.64，射击进行到击中目标时为止，令 X：所需射击次数.

试求随机变量 X 的分布律，并求至少进行2次射击才能击中目标的概率.

解：X 的取值为 $1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots$

$$P\{X=n\}=0.36^{n-1}*0.64 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$P\{\text{至少射击 2次才命中}\}=P\{X\geq 2\}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}0.36^{k-1}*0.64=0.64*\frac{0.36}{1-0.36}=0.36$$