概率论与数理统计

任课教师：　赵涌鑫　副教授
助教：　谢宛玲　博士生

华东师范大学
计算机科学与软件学院

2016.9.7

讲授内容

第一章 概率论的基本概念

第二章 随机变量及其分布

第三章 多维随机变量及其分布

第四章 随机变量的数字特征

第五章 大数定律及中心极限定理

第六章 样本及抽样分布

第七章 参数估计

第八章 假设检验

考核方式与评价比例

1. 平时成绩：10% 出勤+作业+课堂表现
2. 三次月考: 40% 闭卷
3. 期末考试： 50% 闭卷

答疑安排

1. 答疑时间：每周五14:30-16:30
2. 答疑地点: 理科楼B1110
3. 助教邮箱：mmrs_113_213@163.com

1) 随机试验（*E*xperiment ）

随机现象：在个别实验中其结果呈现不确定性，在大量重复实验中其结果又具有统计规律性的现象

- **这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察。**
- **其典型的例子有：**

***E*1：抛一枚硬币，观察正面H（Heads）、反面T（Tails）出现的情况。**

***E*2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。**

***E*3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。**

***E*4：抛一颗骰子，观察出现的点数。**

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

这些试验具有以下特点：

1. 可以在相同的条件下重复进行；
2. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现；
3. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果。

称具备上面三个特点的试验为随机试验。

2) 样本空间(Space)

定义　将随机试验E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，　记为 S 。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。

随机事件 ： 称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，记作 A, B, C 等等;

我们称一个随机事件发生当且仅当它所包含的一个样本点在试验中出现。

***E*1**：抛一枚硬币，观察正面**H**（**Heads**）、反面**T**（**Tails**）出现的情况。

***E*2**：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

***E*3**：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

***E*4**：抛一颗骰子，观察出现的点数

S_1: { H , T }

S_2: { HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }

S_3: { 0, 1, 2, 3 }

S_4: { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一个灯泡的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

$$S_5: \{0,1,2,3\ldots\ldots\}$$

$$S_6: \{\, t \mid t \geq 0 \,\}$$

$$S_7: \{\, (x, y) \mid T_0 \leq x, y \leq T_1 \,\}$$

要求：会写出随机试验的 样本空间。

例如：S_2 ={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}中

事件 A={TTT} 表示“正面出现0次”；

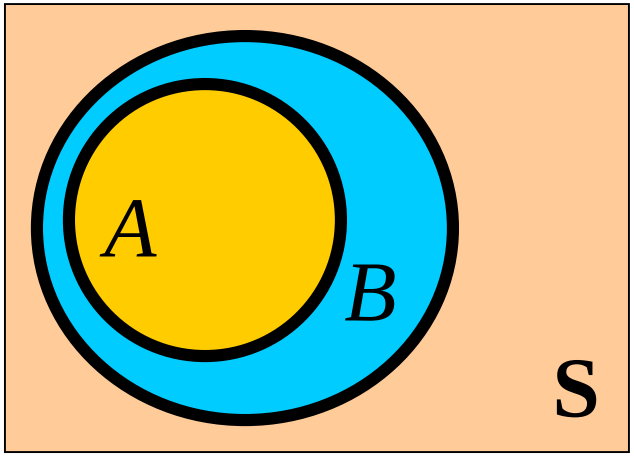
事件 B={HTT, THT, TTH} 表示“正面出现1次”.

事件 B={HHT, HTH, THH} 表示“正面出现2次”.

事件 B={HHH} 表示“正面出现3次”.

二、　事件间的关系与运算

1）　**包含关系**　$A \subset B$



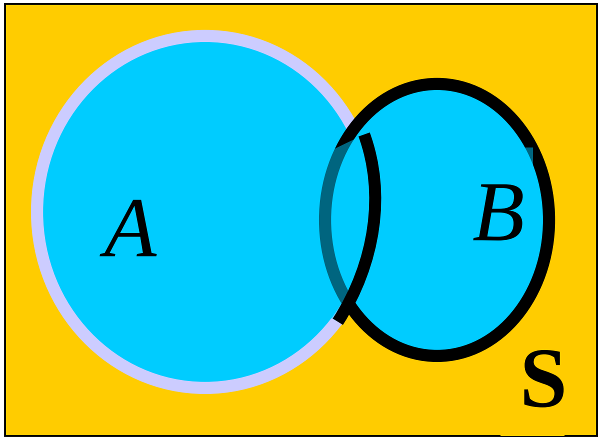
如果A发生必导致B发生，则

$$A \subset B$$

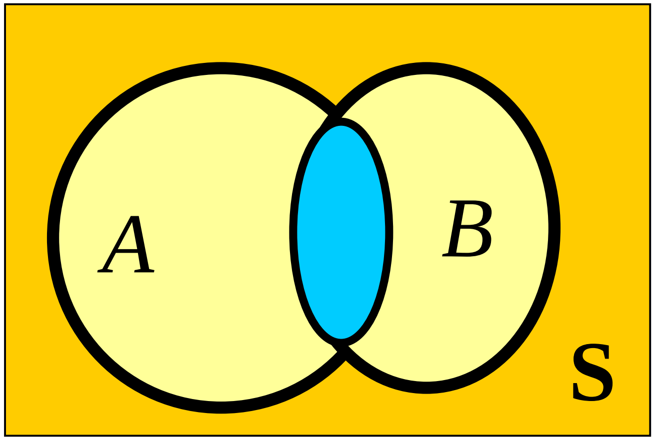
2) 和（并）事件A∪B

事件 A∪B 发生当且仅当 A, B 至少发生一个 .

$\bigcup_{a} A_a$ 表示 A_a 中至少发生一个 .



3) 积（交）事件A∩B



事件A∩B发生当且仅当A，B 同时发生.

$\bigcap_{\alpha} A_\alpha$ 表示所有 A_α同时发生。

S_2 中事件

A={HHH,HHT,HTH,HTT}, B={HHH,TTT}

A∪B=?　　　　A∩B=?

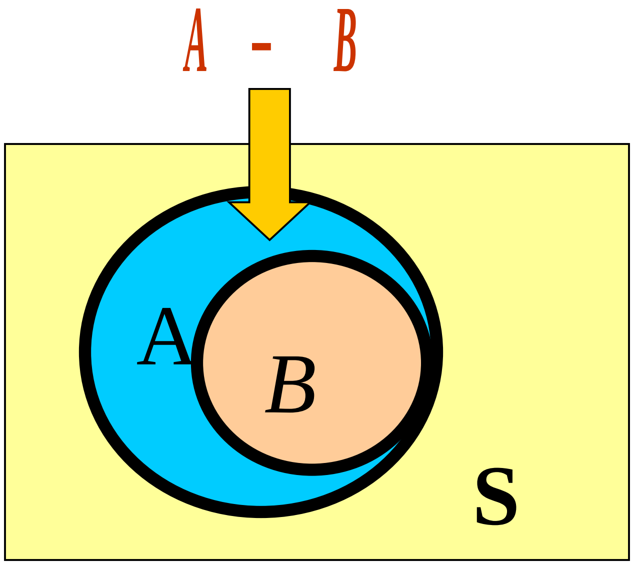
考察下列事件间的包含关系：

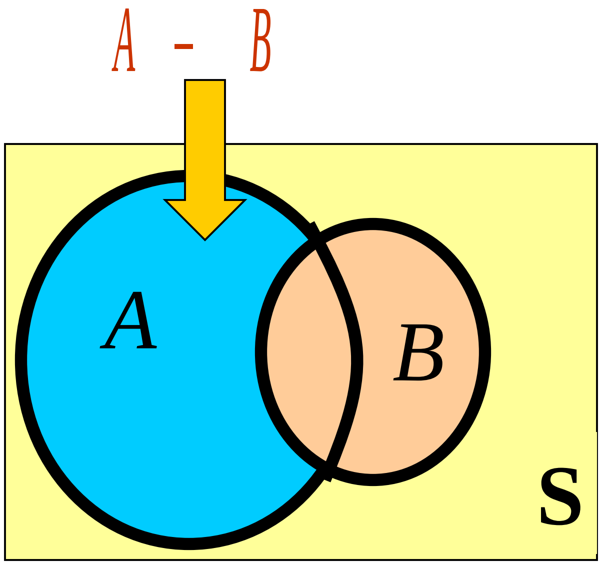
AB　　A　　B　　$A\cup B$

$AB \subset A \subset A\cup B$

$AB \subset B \subset A\cup B$

4) 差事件 $A-B=A-AB=A\overline{B}$

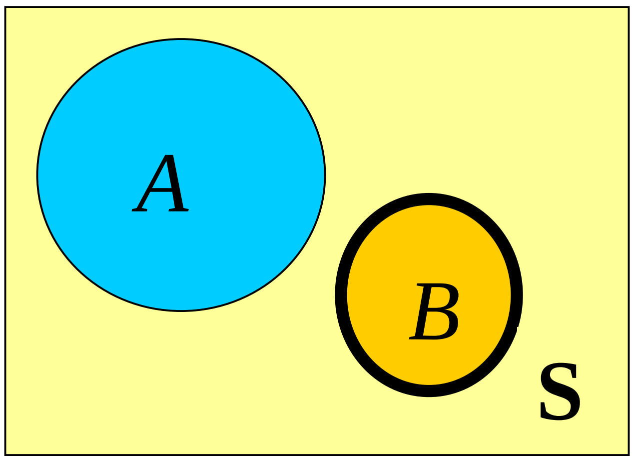




$A-B$ 发生当且仅当 A 发生 B 不发生.

5) 互不相容 (互斥)

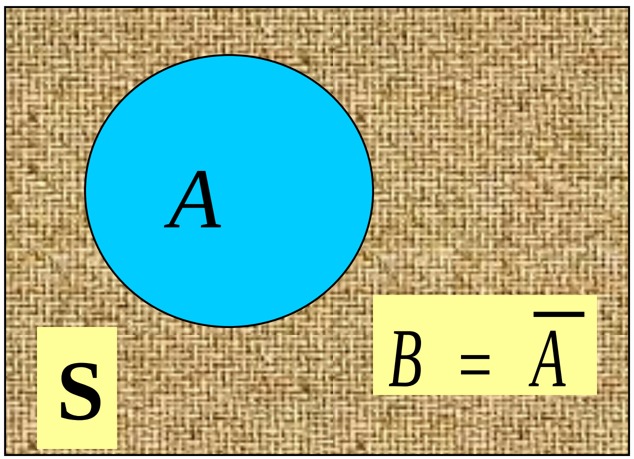
$A \cap B = \varnothing$



6) 对立事件 (互逆)

$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = S$



请注意互不相容与对立事件的区别！

例如，在S_6 中

事件 $A=\{t|t<1000\}$ 表示“灯泡是次品”

事件 $B=\{t|t \geq 1000\}$ 表示“灯泡是合格品”

事件 $C=\{t|t\geq 1500\}$ 表示“灯泡是一级品”

则 A与B是 互 为 对 立 事 件 ;

A与C是 互 不 相 容 事 件 ;

$B-C$ 表示“灯泡是合格品但不是一级品”；

BC 表示“灯泡是一级品”；

$B\cup C$ 表示“灯泡是合格品”.

7）随机事件的运算规律

幂等律：　$A\cup A=A$, $A\cap A=A$

交换律：　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

结合律：　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律：　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

De Morgan（德摩根）定律：

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_\alpha}=\bigcap_{\alpha}\overline{A}_\alpha,\quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_\alpha}=\bigcup_{\alpha}\overline{A}_\alpha$$

设 A, B, C 为三个随机事件

（1）A 发生.

$$A = ABC \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup A\overline{B}\,\overline{C}.$$

(2) A 发生，B 与 C 都不发生.

$$A\overline{B}\,\overline{C}.$$

(3) A, B, C 都发生.

$$ABC.$$

(4) A，B, C 至少有一个发生.

$$A \cup B \cup C.$$

(5) A，B, C 都不发生.

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$$

(6) A，B, C 不多于一个发生.

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C.$$

(7) A，B, C 不多于两个发生.

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$$

$$= \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

(8) A，B, C 至少有两个发生.

$$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC = AB \cup AC \cup BC.$$

三、频率与概率

1）　频率的定义和性质

定义：在相同的条件下，进行了n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 n_A/n 称为事件A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$ 。

它具有下述性质:

1° $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

2° $f_n(S) = 1$;

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互不相容事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

事件发生
的频繁程度

事件发生
的可能性的大小

频　率 ⟶ 稳 定 值 ⟶ 概率

3）　概率的定义

定义　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，要求集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1^0　非负性：$0 \le P(A)$

2^0　规范性：$P(S)=1$

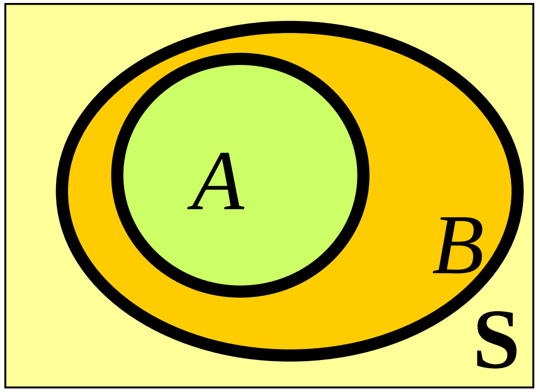
3^0　可列可加性：若$A_1, A_2, \ldots$是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

4）　概率的性质与推广

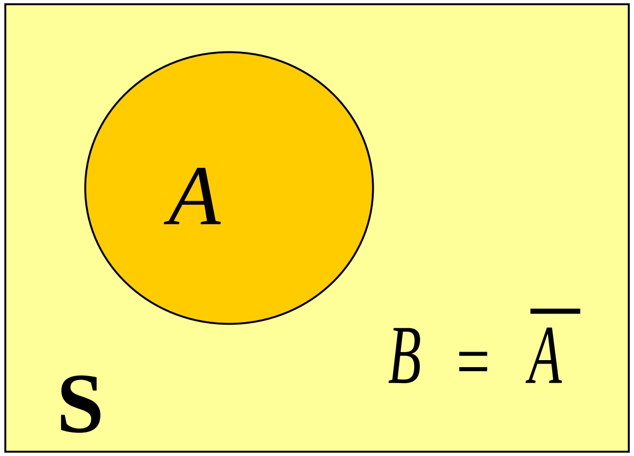
因为事件A与B－A互不相容，所以

$$P(B)=P(AB)+P(B-A)$$

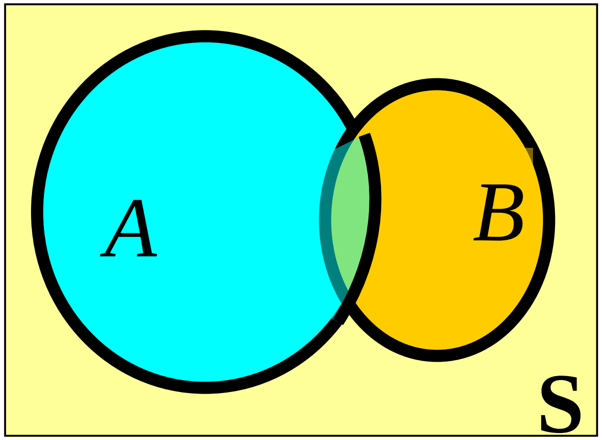


性质 1　$P(\varnothing)=0$;

性质 2　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;



性质 3　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。



性质4　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

性质 9 对任意 n 个事件 A_1， A_2， $\cdots$， A_n ，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

要求：熟练掌握概率的性质。