§3 区间估计

- 置信区间与置信度
- 一个正态总体未知参数的置信区间
- 两个正态总体中未知参数的置信区间

在统计推断中，未知参数 θ 的点估计 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 是一种有用的形式，一旦得到了样本观测值 $(x_1, \cdots, x_n)$，估计值 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 能使我们对未知参数 θ 的值有一个明确的数量概念.

但是，点估计值 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 仅仅是未知参数 θ 的一个近似值，没有反映出这个近似值的误差范围，这在应用上是非常不方便的.

区间估计就是根据样本给出未知参数的一个范围，并希望知道这个范围包含该参数的可信程度。

一、 置信区间与置信度

所谓区间估计就是构造两个统计量

$$\hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n) \text{ 与 } \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)$$

由它们组成一个区间

$$\left[\hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)\right]$$

对于一个具体问题，当得到样本观测值$(x_1, \cdots, x_n)$后，我们便得到一个具体的区间：

$$\left[\hat{\theta}_1(x_1, \cdots, x_n), \hat{\theta}_2(x_1, \cdots, x_n)\right]$$

于是可以认为未知参数θ就落在这个区间内.

定义: 设总体X含一待估参数θ；对于样本$X_1,\cdots,X_n$，找出统计量$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)(i=1,2),\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2$，使得：对固定的$\alpha(0<\alpha<1)$有

$$P\{\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$$

称区间$[\hat{\theta}_1，\hat{\theta}_2]$为$\theta$的置信度(水平)为$1-\alpha$的置信区间.

区间$[\hat{\theta}_1，\hat{\theta}_2]$是一个随机区间，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限。

$1-\alpha$给出该区间含真值θ的可靠程度.

α表示该区间不包含真值θ的可能性.

例如：若$\alpha=5\%$，即置信度为$1-\alpha=95\%$.
这时重复抽样100次，则在得到的100个区间中包含θ真值的有95个左右，不包含θ真值的有5个左右.

通常，采用95%的置信度，有时也取99%或90%.

求置信区间的步骤：

(1) 找一个样本的函数$Z=Z(X_1,\cdots,X_n;\theta)$，
它包含待估参数θ，而不包含其它未知参数。且Z的分布是已知的，不依赖于未知参数θ.

(2) 对给定的置信度$1-\alpha$，确定常数a,b,使

$$P\{a<Z<b\}=1-\alpha.$$

(3) 从不等式$a<Z(X_1,\cdots X_n;\theta)<b$得到等价的不等式
$\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2$,其中$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots X_n)$
都是统计量.

(4) 随机区间$[\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2]$是置信度为$1-\alpha$的置信区间.

二、一个正态总体未知参数的置信区间

1） 均值的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，在置信度$1-\alpha$下，来确定μ的置信区间$[\theta_1, \theta_2]$.

(1) 方差已知时，估计均值

设已知方差$\sigma^2=\sigma_0^2$,

构造样本的函数 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

对于给定的置信度 $1-\alpha$，查正态分布表，找出 λ_1，λ_2，使得：

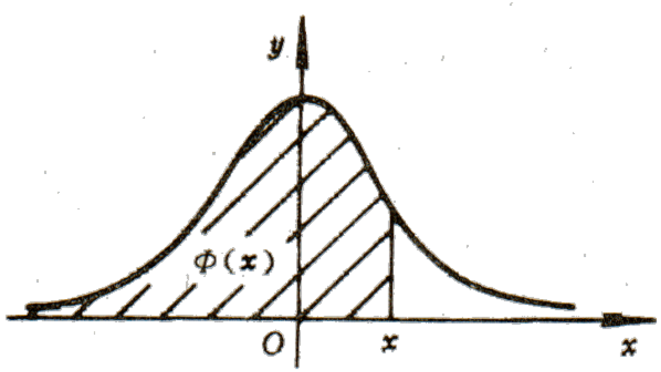
$$P\{\lambda_1 \le U \le \lambda_2\} = 1-\alpha.$$

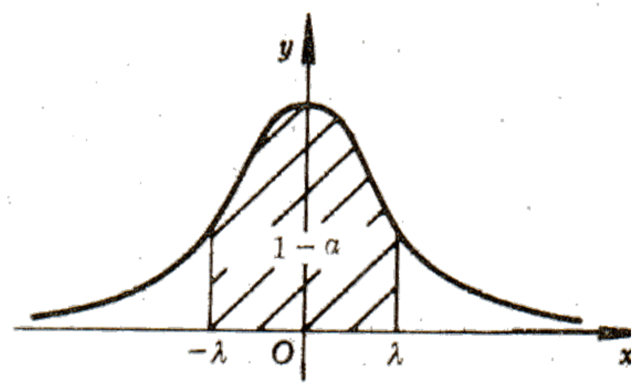
由此可找出无穷多组 λ_1，λ_2；通常我们取对称区间 $[-\lambda,\lambda]$，使：

$$P\{|U| \le \lambda\} = 1-\alpha$$

即：
$$P\{-\lambda \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0\sqrt{n}} \le \lambda\} = 1-\alpha$$

由正态分布表的构造，由$P\{|U|\le\lambda\}=1-\alpha$，可知：





查正态分布表$\Phi(\lambda)=1-\alpha/2,\lambda=z_{\frac{\alpha}{2}}$，得：

$$-z_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}\le z_{\frac{\alpha}{2}}$$

推得，随机区间：$[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$

是μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

说明：

（1）置信区间不唯一，在置信度固定的条件下，置信区间越短，估计精度越高。

（2）在置信度固定的条件下，n 越大，置信区间越短，估计精度越高。

（3）在样本量 n 固定时，置信度越大，置信区间越长，估计精度越低。

例1 已知幼儿身高服从正态分布，现从5~6岁的幼儿中随机地抽查了9人，其高度分别为：115,120,131,115,109,115,115,105,110（cm）；假设标准差 $\sigma_0=7$，置信度为 95%；试求总体均值 μ 的置信区间.

解： 已知 $\sigma_0=7, n=9, \alpha=0.05.$ 由样本值算得：

$$\bar{x}=\frac{1}{9}(115+120+\cdots+110)=115$$

查正态分布表得临界值 $z_{0.025}=1.96$，由此得置信区间：

$$\left[115-1.96\times 7/\sqrt{9}\,,\,115+1.96\times 7/\sqrt{9}\right]$$

$$=\left[110.43\,,\,119.57\right]$$

$$[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$$

(2) 方差未知时，估计均值

由于方差σ^2未知，

而选取样本函数： $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查t分布表，找λ_1与λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1 \le T \le \lambda_2\} = 1-\alpha,$$

我们仍然取成对称区间$[-\lambda, \lambda]$,使得：

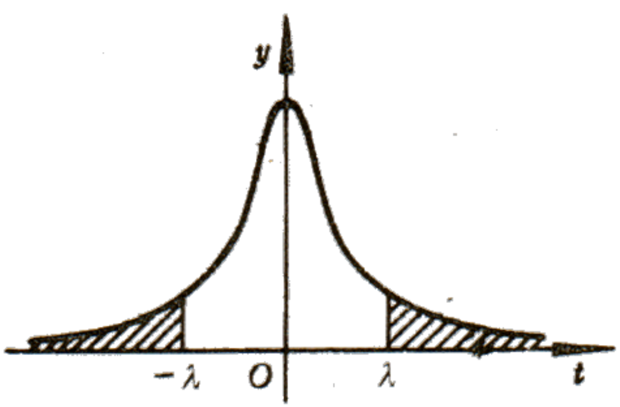
$$P\{|T| \le \lambda\} = 1-\alpha,$$

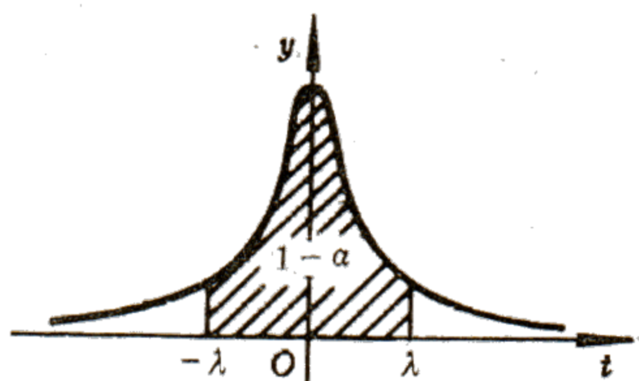
即 $P\{-\lambda \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le \lambda\} = 1-\alpha$,

由t分布表的构造及$P\{|T| \le \lambda\} = 1-\alpha$，可知：

$\lambda = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 由此得：

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$





推得，置信区间为：

$$[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

例2 用仪器测量温度，重复测量7次，测得温度分别为：120,113.4,111.2,114.5,112.0,112.9,113.6度；设温度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$。

在置信度为95%时，试求温度的均值μ的所在范围。

解： 已知$n=7, \alpha=0.05$. 由样本值算得：

$$\overline{x} = 112.8, \quad s^2 = 1.29.$$

查表得$t_{0.025}(6)=2.447$.由此得置信区间:

$$\left[112.8-2.447\sqrt{\frac{1.29}{7}},\quad 112.8+2.447\sqrt{\frac{1.29}{7}}\right]$$

$$=\left[111.75,\quad 113.85\right]$$

$$[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

2）方差的区间估计

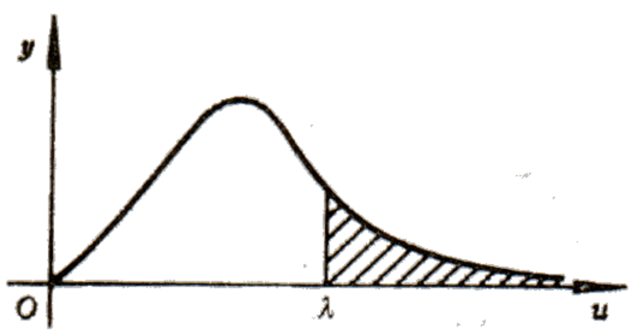
设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

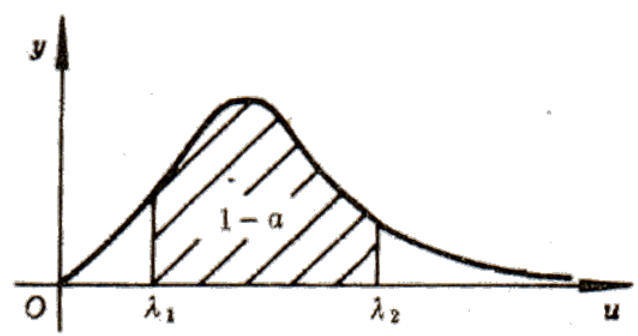
样本函数：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查χ^2分布表，得λ_1与λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1 \le \chi^2 \le \lambda_2\} = 1-\alpha,$$

虽然χ^2分布密度函数无对称性，我们仍采用使概率对称的区间：$P\{\chi^2 < \lambda_1\} = P\{\chi^2 > \lambda_2\} = \alpha/2,$





查$\chi^2(n-1)$分布表，得

$$\lambda_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\qquad \lambda_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)。$$

由此得：
$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

推得：
$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

这就是说，置信区间为：
$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

例3 设某机床加工的零件长度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，

今抽查16个零件，测得长度（单位：mm）如下：

12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06，

在置信度为95%时，试求总体方差 σ^2 的置信区间.

解： 已知 $n=16, \alpha=0.05$. 由样本值算得：$s^2=0.00244$.

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表，得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.5$, $\chi^2_{0.975}(15)=6.26$.

由此得置信区间：

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

$$\left[\frac{15\times 0.00244}{27.5}, \quad \frac{15\times 0.00244}{6.26}\right]=[0.0013, 0.0058]$$

一个正态总体未知参数的置信区间

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
μ	σ^2已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,\ 1)$	$\overline{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\overline{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	μ已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$
	μ未知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$\chi^2(n-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

三、两个正态总体中未知参数的置信区间

设$(X_1, \cdots, X_m)$是从正态总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$中抽取的样本，

$(Y_1, \cdots, Y_n)$是从正态总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$中抽取的样本，

下表给出了置信水平为$1-\alpha$的各种置信区间：

两个正态总体未知参数的置信区间（一）

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\mu_1-\mu_2$	σ^2、σ_2^2 均已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,\ 1)$	$(\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$(\bar{X}-\bar{Y})\pm$ $t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

两个正态总体未知参数的置信区间（二）

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1、μ_2 均已知	$\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2/\sigma_1^2}{m\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\mu_2\right)^2/\sigma_2^2}$	$F(m,\ n)$	$\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{m\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\mu_2\right)^2}$， $\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{m\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\mu_2\right)^2}$
	μ_1、μ_2 均未知	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,\ n-1)$	$\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$， $\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

例4 为比较甲乙两类试验田的收获量，随机抽取甲类试验田8块，乙类试验田10块，分别测得其收获量如下（单位：kg）：

甲类：12.6， 10.2， 11.7， 12.3， 11.1， 10.5， 10.6， 12.2，

乙类：8.6， 7.9， 9.3， 10.7， 11.2， 11.4， 9.8， 9.5， 10.1， 8.5，

假设两类试验田的收获量都服从正态分布，且方差相同．试在置信度$1-\alpha=0.95$下，求两个总体期望差$\mu_1-\mu_2$的置信区间．

解： 由上表，取随机变量

$$T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

由样本观测值 $m=8$， $\bar{x}=11.4$， $s_1^2=0.851$，

$n=10$， $\bar{y}=9.7$， $s_2^2=1.387$，

又由$1-\alpha=0.95$，得 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025$

查表，得$t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.025}(16)=2.12$

将上面各数代入置信区间端点得计算公式，得

$$(\bar{x}-\bar{y})-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(11.4-9.7)-2.12\times0.508\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=0.6$$

$$(\bar{x}-\bar{y})+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(11.4-9.7)+2.12\times0.508\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=2.8$$

所求置信区间为$[0.6, \quad 2.8]$. 其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

例5 研究由机器 A 与机器 B 生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的产品18只，测得其样本方差为 $s_1^2=0.34\,(\mathrm{mm}^2)$；随机抽取机器 B 生产的产品13只，测得其样本方差为 $s_2^2=0.29\,(\mathrm{mm}^2)$．假设两个机器生产的钢管的内径均服从正态分布，其总体期望与总体方差均未知．又设两个样本相互独立．试在置信度 $1-\alpha=0.90$ 下求两总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间.

解： 由上表，取随机变量

$$F=\frac{S_1^2\big/\sigma_1^2}{S_2^2\big/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1),$$

由 $$P\left\{a<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<b\right\}=1-\alpha$$

得 $a=F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\quad n-1)$，$b=F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\quad n-1)$,

因此，得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\quad n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2},\quad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\quad n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2},\right]$$

由样本观测值 $m=18,\quad s_1^2=0.34,$

$n=13,\quad s_2^2=0.29,$

又由$1-\alpha=0.90$，得 $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.95,\quad \dfrac{\alpha}{2}=0.05$

查表，得$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)=F_{0.05}(17,\ 12)=2.59$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)=F_{0.95}(17,\ 12)=\frac{1}{F_{0.05}(12,\ 17)}=\frac{1}{2.38}$$

将上面各数代入置信区间端点得计算公式，得

$$\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.45,\quad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=2.79,$$

所求置信区间为$[0.45,\ 2.79]$.

四、（0-1）分布中未知参数的置信区间

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim B(1,p)$的一个样本, p未知,

在置信度$1-\alpha$下，来确定p的置信区间$[\theta_1,\ \theta_2]$.

当n较大时，由中心极限定理知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{npq}}$$

近似地服从$N(0,1)$分布，于是有

$$P\{-\lambda \le \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{npq}} \le \lambda\} = 1-\alpha$$

查正态分布表$\Phi(\lambda)=1-\alpha/2, \lambda = z_{\alpha/2}$，得：

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{(n\bar{X} - np)}{\sqrt{npq}} \le z_{\alpha/2}$$

上面不等式等价于

$$(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\bar{X}^2<0.$$

记

$$p_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}),$$

$$p_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}),$$

这里 $a = n + z_{\alpha/2}^2,\ b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2),\ c = n\overline{X}^2.$

于是p的近似的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$[p_1, p_2].$$

例6 设从一大批产品中抽取100件产品，得到一级品60件，求这批产品的一级品率 p 的置信度为0.95的置信区间.

解: 设 $X_i = \begin{cases} 1, 第i件是一等品, \\ 0,\ 否则, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,100.$

则 $X_1,\cdots,X_{100}$ 是总体$X \sim B(1,p)$的样本,其中p是一级品率

此处 $n = 100,\ 1-\alpha = 0.95,\ \alpha/2 = 0.025,\ z_{\alpha/2} = 1.96,$

运用上面分析的公式求 p 的置信区间，其中

$$a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\overline{X}^2 = 36.$$

而 $p_1 = 0.50, \quad p_2 = 0.69.$

故得 p 的置信度为0.95的置信区间为 [0.50,0.69].

五、单侧置信区间

定义: 设总体X含一待估参数θ; 对于样本$X_1,\cdots,X_n$,

找出统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$,使得:

对固定的$\alpha(0<\alpha<1)$有 $P\{\theta>\hat{\theta}_1\}\ge 1-\alpha$

称区间$[\hat{\theta}_1,\ \infty]$为$\theta$的置信度(水平)为$1-\alpha$的单侧置信区间,$\hat{\theta}_1$称为置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间的置信下限。

对于样本$X_1,\cdots,X_n$,找出统计量$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$,使得:

对固定的$\alpha(0<\alpha<1)$有 $P\{\theta<\hat{\theta}_2\}\ge 1-\alpha$

称区间$[-\infty,\hat{\theta}_2]$为θ的置信度(水平)为$1-\alpha$的单侧置信区间,$\hat{\theta}_2$称为置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间的置信上限。

1）方差未知，估计均值

由于方差σ^2未知，而选取样本函数： $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查t分布表，找$t_\alpha(n-1)$，使得：

$$P\{T<t_\alpha(n-1)\}=1-\alpha,$$

即$P\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha(n-1)\}=1-\alpha,$

$$P\{\mu>\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\}=1-\alpha,$$

我们得到μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限：

$$\hat{\mu}_1=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$$

2）均值未知，估计方差

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本.

样本函数：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查χ^2分布表，得$\chi^2{}_{1-\alpha}(n-1)$，使得：

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2{}_{1-\alpha}(n-1)\} = 1-\alpha,$$

$$\text{即} P\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{1-\alpha}(n-1)}\} = 1-\alpha,$$

我们得到σ^2的置信度为$1-\alpha$的单侧置信上限：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{1-\alpha}(n-1)}$$

第七章 小　　结

1 给出了点估计的概念，要掌握矩估计法、极大似然估计法。

2 了解估计量的评选标准（无偏性、有效性、一致性）。

3 会求正态总体均值和方差的置信区间及（0-1）分布参数的置信区间。