1 某电子元件的寿命 X（单位：小时）密度函数是

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1000 \\ \dfrac{1000}{x^2} & x>1000 \end{cases}$$

求 5 个同类型的元件在使用的前 1500 小时内至少有1个需要更换的概率.

2 设F(x),G(x)分别是分布函数,若aF(x)-bG(x)仍是一个分布函数,则a,b的满足什么条件?

3 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则随σ增大P{|X- μ| <σ}应增大还是减少或不变?

4 *f(x)*,*F(x)*分别是密度和分布函数,且f(x)=f(-x)。验证:

$$F(-x)=1-F(x)=1/2-\int_0^x f(t)\,dt$$

5 设X服从指数分布,Y=min(X,2),求Y的分布函数,并说明它在y=2处不连续.

6 设X的密度函数是 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

若Y表示对X的三次独立重复观察中事件{X≤1/2}出现的次数,求P{Y=2}.

7 设X~N(2,σ²)分布,且P(2<X<4)=0.3,求P(X<0).

8 设一电子元件无故障时间服从指数分布.现有一电路用三个该元件串联而成,试求该电路正常工作时间T的概率分布.

9 某保险公司有2500个同一年龄和阶层的人参加了人寿保险.已知一年里该人群的死亡率为0.002,每个参加保险的人在年初付1200元保险费,而当年出险的赔偿金为200000. 问(1)保险公司亏本的概率?(2)保险公司获利不少于1000000的概率?

10 设某种电子元件在三种电源电压V≤200、200<V≤240、V>240下的损坏概率分别为0.1、0.001和0.2，并假设电源电压服从N（220，25^2）。试求：

（1）该电子元件损坏的概率

（2）已知该电子元件损坏时，电压在200~240的概率。

11. 假设电子显示牌上有3个灯泡在第一排, 5个灯泡在第二排. 令ξ,η分别表示在某一规定时间内第一排和第二排烧坏的灯泡数. 若ξ与η的联合分布如下表所示:

ξ \ η	0	1	2	3	4	5
0	0.01	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.01	0.04	0.06	0.06	0.05

试计算在规定时间内下列事件的概率:

(1) 第一排烧坏的灯泡数不超过一个;

(2) 第一排与第二排烧坏的灯泡数相等;

(3) 第一排烧坏的灯泡数不超过第二排烧坏的灯泡数.

12. 袋中装有标上号码1,2,2的3个球, 从中任取一个并且不再放回, 然后再从袋中任取一球, 以ξ, η分别记为第一, 二次取到球上的号码数, 求(ξ,η)的分布律(袋中各球被取机会相同).

13. 已知(ξ,η)的联合密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c\sin(x+y) & 0\le x,y\le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试确定常数c并求η的边缘概率密度.

14. 已知ξ服从参数 p = 0.6的0-1分布, 在ξ=0及ξ=1条件下, 关于η的条件分布分别如下二表所示:

η	1	2	3
$P\{\eta\|\xi=0\}$	1/4	1/2	1/4

η	1	2	3
$P\{\eta\|\xi=1\}$	1/2	1/6	1/3

求二元随机变量(ξ,η)的联合概率分布, 以及在$\eta\neq1$时关于ξ的条件分布.

15.ξ与η相互独立, 其概率分布如下二表所示

ξ	-2	-1	0	1/2
P	1/4	1/3	1/12	1/3

η	-1/2	1	3
P	1/2	1/4	1/4

求(ξ,η)的联合分布, $P(\xi+\eta=1)$, $P(\xi+\eta\neq 0)$.

16. 已知ξ服从区间[0,1]上的均匀分布, 求ξ的函数η=3ξ+1的概率分布.

17. 已知ξ～ $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ ，$\eta=\ln\xi$ 求η的概率密度.

18.设随机变量X的分布函数$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$,
其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，请计算E(X)和D(X) 。

1:设Y表示5个元件中在使用的前1500小时需更换的元件个数,则Y~B(5,p),其中p表示每个元件在1500小时前损坏的概率,由题目知,

$$p = P(X < 1500) = \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

因此,所求概率为

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$$

2: $\because F(\infty) = 1, G(\infty) = 1, aF(\infty) - bG(\infty) = 1,$

$\therefore a - b = 1$

3:不变.因为

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\{|\frac{X-\mu}{\sigma}|<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$$

4:

$$F(-x)=\int_{-\infty}^{-x} f(t)dt=1-\int_{-x}^{\infty} f(t)dt \underline{\underline{s=-t}} 1-\int_{x}^{-\infty} f(-s)d(-s)$$

$$=1-\int_{-\infty}^{x} f(s)ds=1-F(x)$$

令$x=0, F(0)=1-F(0), F(0)=\frac{1}{2}$

$$F(-x)=1-\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=1-\int_{-\infty}^{0} f(s)ds-\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=1-F(0)-\int_{0}^{x} f(t)dt=1/2-\int_{0}^{x} f(t)dt$$

5:先求Y的分布函数:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min(X,2)\le y\}$$

$$=1-P\{\min(X,2)>y\}=1-P\{X>y,2>y\}$$

当y≥2时，$$F_Y(y)=1-P\{X>y,2>y\}=1-P(\varnothing)=1$$

当0<y<2时，$$F_Y(y)=1-P\{X>y,2>y\}=1-P(X>y)$$

$$=1-\int_y^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=1-e^{-\frac{y}{\theta}}$$

当y≤0时，$$F_Y(y)=1-P\{X>y,2>y\}=1-P(X>y)$$

$$=1-\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=0$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{\frac{y}{\theta}}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

因为，$\lim\limits_{y\to 2-0}F_Y(y)=1-e^{-\frac{2}{\theta}}\ne 1=F_Y(2)$ ，$F_Y(y)$在y=2处间断.

6:由题意Y~B(3,p),其中p是事件{X≤1/2}的概率,故

$$\because p = P\{X \le 1/2\} = \int_0^{1/2} 2x\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P\{Y = 2\} = C_3^2 (\frac{1}{4})^2 (\frac{3}{4}) = 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

7:

$$P\{2 < X < 4\} = P\{\frac{2-2}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{4-2}{\sigma}\} = \Phi(\frac{2}{\sigma}) - \Phi(0) = 0.3$$

$$\therefore \Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$\therefore P\{X < 0\} = P\{\frac{X-2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\} = \Phi(-\frac{2}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.2$$

8:设X_i(i=1,2,3)表示第i个元件无故障工作时间,则 X_1,X_2,X_3独立同分布,分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

设T的分布函数为$F_T(t)$,由题意, T=min(X_1,X_2,X_3)

当t≤0时, $F_T(t)=0$,

当t>0时, $F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}$

$$=1-P\{X_1\ge t, X_2\ge t, X_3\ge t\}=1-[1-F(t)]^3$$

$$=1-e^{-3\lambda t}$$

$$\therefore F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, t>0\\ 0, t\le 0\end{cases}$$

9:设随机变量X为该保险年中死亡的人数,则

X~B(2500,0.002).

(1)设A={保险公司亏本}

A={2500*1200-200000*X<0}={X>15},所以

$$P(A)=P\{X>15\}=\sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^{k}\, 0.002^{k}\, 0.998^{2500-k}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{15} C_{2500}^{k}\, 0.002^{k}\, 0.998^{2500-k}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{15}\frac{e^{-5}5^{k}}{k!}=0.000069$$

(2)设B={保险公司获利不少于1,000,000}

B={2500*1200-200000*X>1000000}={X≤10}, 所以

$$P(B)=P\{X\le 10\}=\sum_{k=0}^{10}C_{2500}^{k}0.002^{k}0.998^{2500-k}$$

$$\approx\sum_{k=0}^{10}\frac{e^{-5}5^{k}}{k!}=0.98305$$

10:设X表示电压读数

$$A_1 = \{X \le 200V\}, A_2 = \{200 < X \le 240V\}, A_1 = \{X > 240V\},$$

B={电子元件损坏},所求概率为

(1) $$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)$$

(2) $$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)}$$