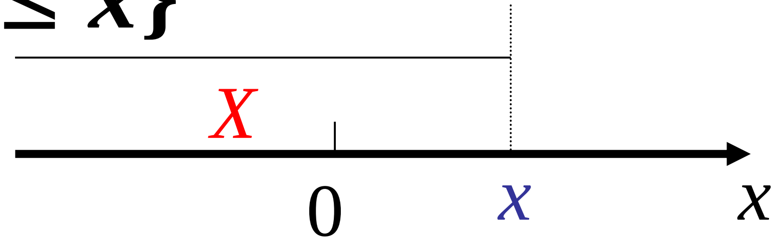
一、分布函数的定义

1）定义 设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数 $F(x)=P\{X\le x\}$

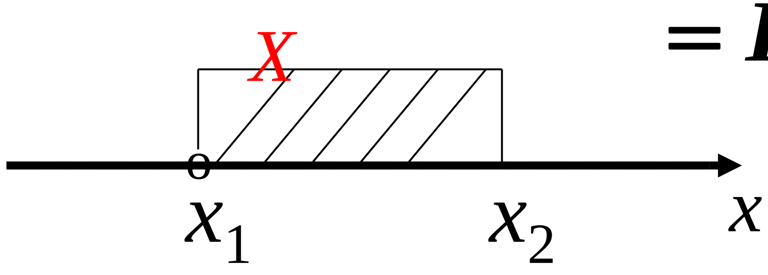
称为 X 的分布函数.



对于任意的实数 x_1，x_2（$x_1< x_2$），有：

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

$$= F(x_2) - F(x_1).$$



2）例　子

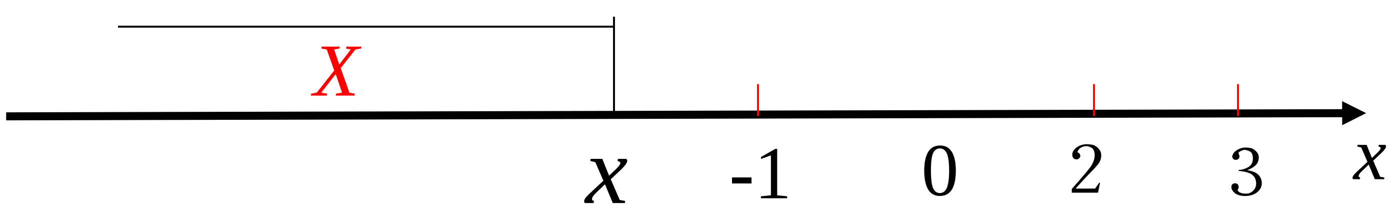
例1　设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数.

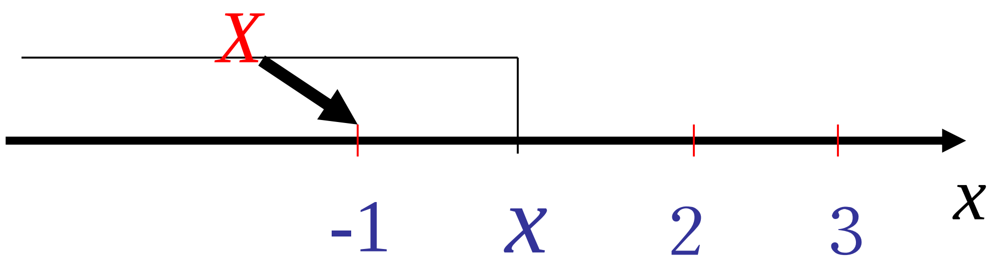
解：当 $x<-1$ 时，$\{X \le x\}$是不可能事件$\varnothing$，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\varnothing\} = 0.$$



当 $-1 \le x < 2$ 时，满足 $X \le x$ 的 X 取值为 $X=-1$，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$



X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

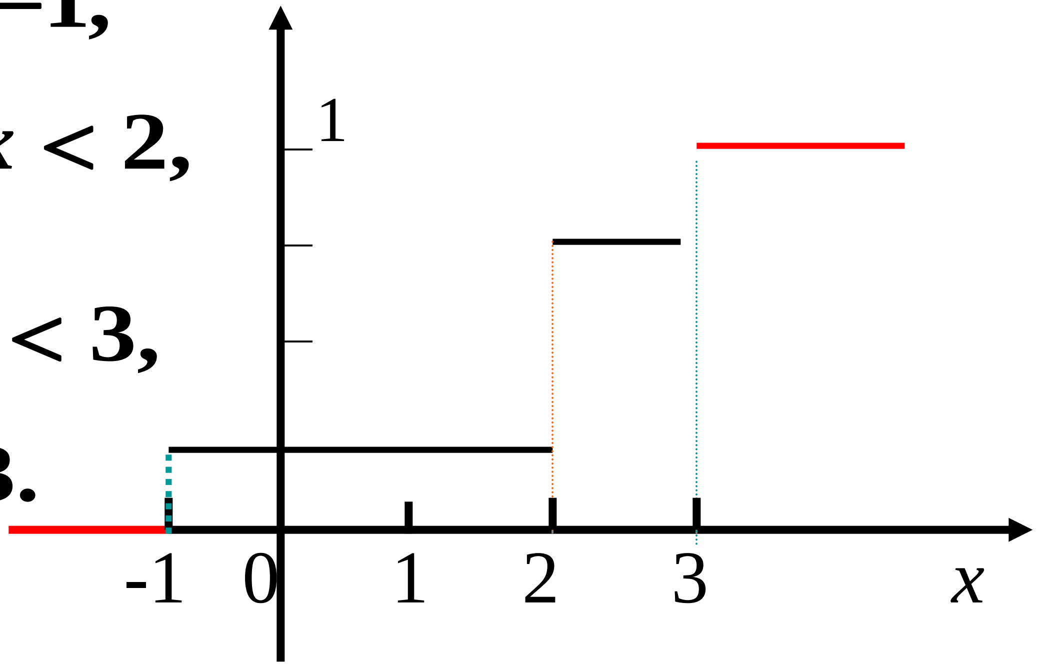
当 $2 \le x < 3$ 时，满足 $X \le x$ 的 X 取值为 $X=-1$，或 2，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1 \text{或} X = 2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

同理当$3 \le x$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\text{或}X = 2\text{或}X = 3\} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{4}, & -1 \le x < 2, \\ \dfrac{3}{4}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$



$$P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

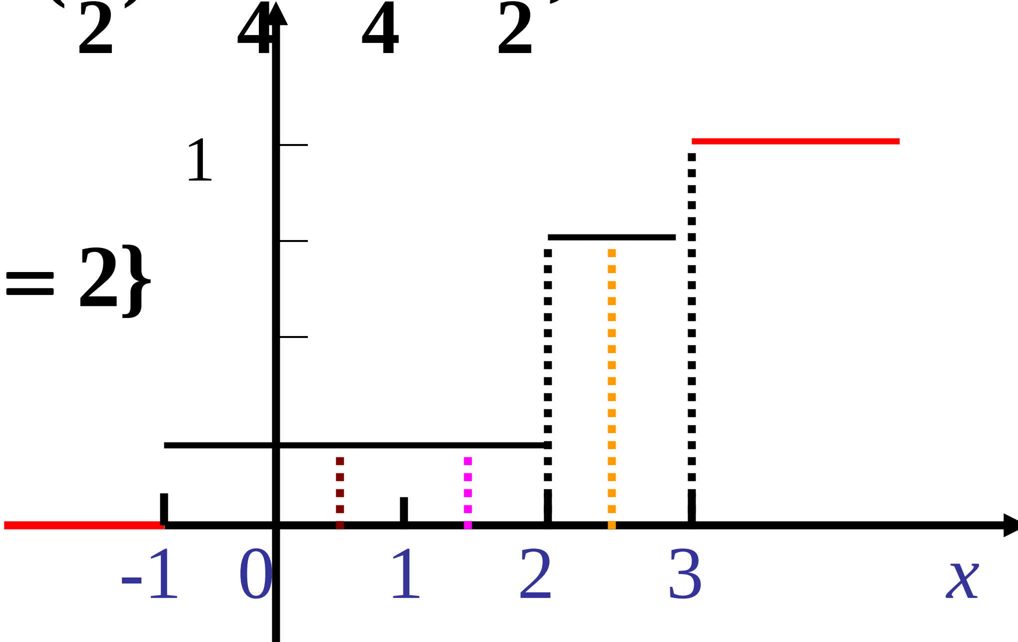
$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\}$$

$$= F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

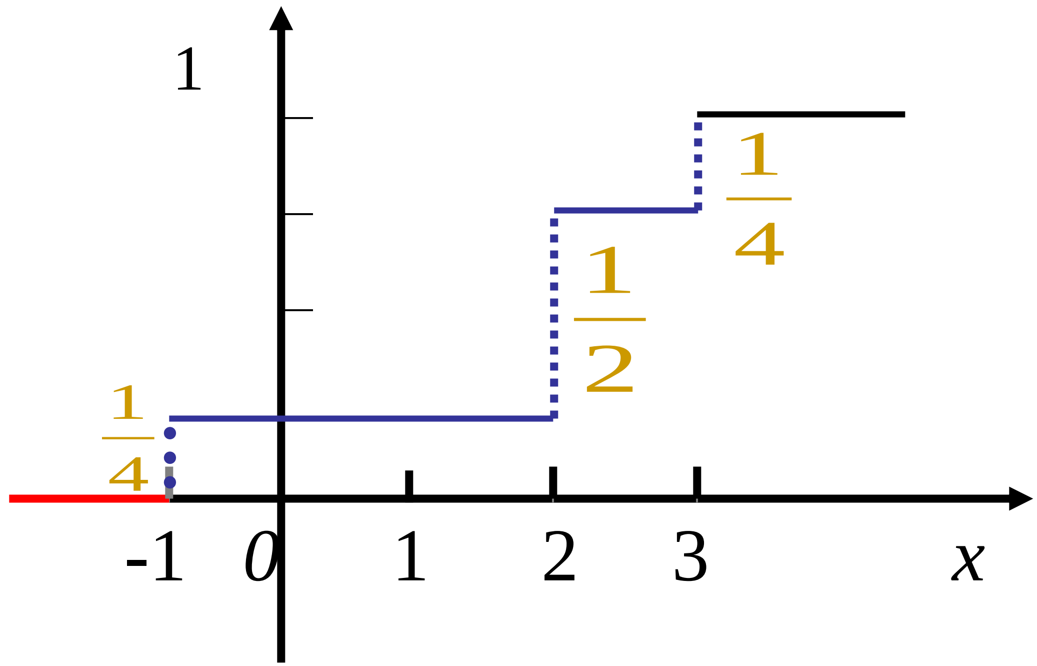
$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$



说　明:

分布函数 $F(x)$ 在 $x = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

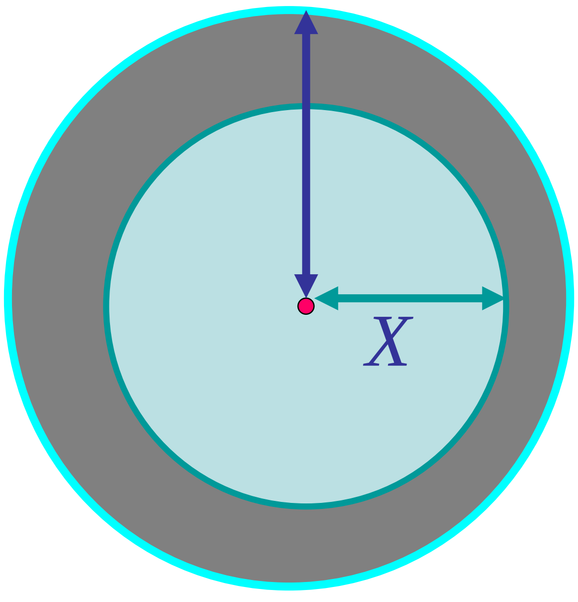


例 2　一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.

解:（1） 若 $x < 0$, 则 $\{X \le x\}$是不可能事件，于是

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0.$$

（2） 若$0 \le x \le 2$,由题意，



$$P\{0 \le X \le x\} = k x^2,$$

取$x=2$,由已知得$P\{0\le X\le 2\}=1$,与上式对比

得k=1/4,即 $P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}$

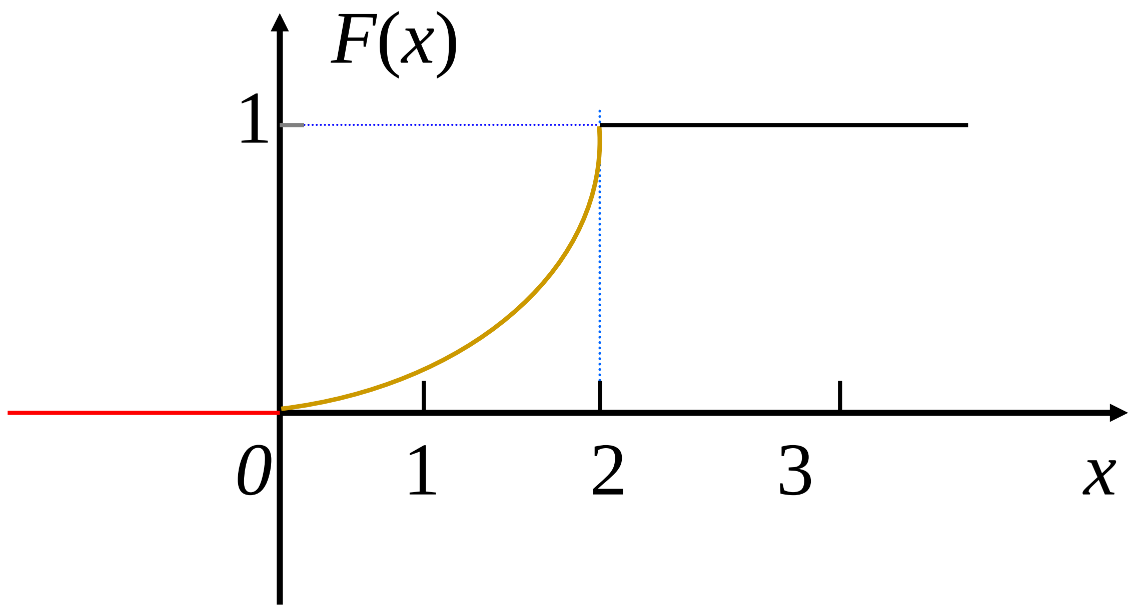
于是，$0\le x\le 2$时

$$F(X)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

（3）若 $x\ge 2$ 则$\{X\le x\}$是必然事件，于是

$$F(x)=P\{X\le x\}=1.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$



二、 分 布 函 数 的 性 质

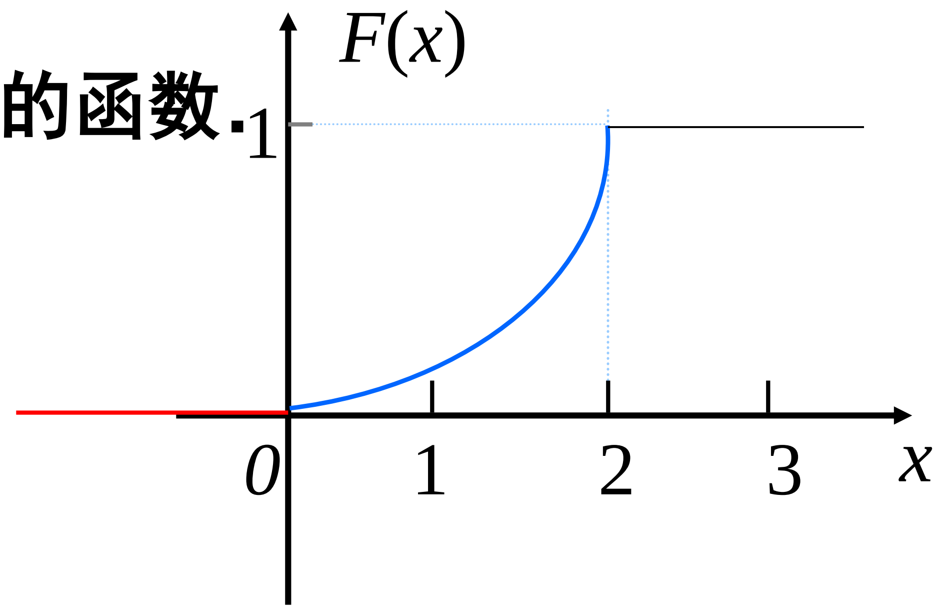
1）性质：

分别观察离散型、连续型分布函数的图象，可以看出，分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

（1）F（x）是一个单调不减的函数.

即当$x_2 > x_1$时，

$F(x_2) \geq F(x_1)$.



（2）$0 \le F(x) \le 1$, 且 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

（3）$F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$是右连续的

2）用分布函数计算某些事件的概率

设 $F(x)=P\{X\le x\}$ 是随机变量 X 的分布函数，则

$$P\{X<a\}=\lim_{n\to\infty}P\{X\le a-\frac{1}{n}\}=\lim_{n\to\infty}F(a-\frac{1}{n})=F(a-0)$$

$$P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$$

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$$

$$P\{a\le X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$$

用分布函数计算某些事件的概率（续）

$$P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \le a\}$$
$$= F(b-0) - F(a)$$

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$$
$$= F(b-0) - F(a-0)$$

$$P\{X \ge b\} = 1 - P\{X < b\} = 1 - F(b-0)$$

例 3 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{2} & 0\le x<1\\ \dfrac{2}{3} & 1\le x<2\\ \dfrac{11}{12} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

试求：(1) $P\{X\le 3\}$

(2) $P\{X<3\}$

(3) $P\{X=1\}$

(4) $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$

(5) $P\{2<X<4\}$

(6) $P\{1\le X<3\}$

$$P\{X < a\} = F(a-0)$$

$$P\{X = a\} = F(a) - F(a-0)$$

解：

(1) $P\{X \le 3\} = F(3) = 1$

(2) $P\{X < 3\} = F(3-0) = \frac{11}{12}$

(3) $P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(4) $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(5) $P\{2 < X < 4\} = F(4-0) - F(2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

(6) $P\{1 \le X < 3\} = F(3-0) - F(1-0) = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

例4　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\operatorname{arctg}x \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

试求常数A、B.

解：

由分布函数的性质，我们有

$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(A + B\operatorname{arctg}x) = A - \frac{\pi}{2}B$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(A + B\operatorname{arctg}x) = A + \frac{\pi}{2}B$$

例 4（续）

解方程组

$$\begin{cases} A - \dfrac{\pi}{2}B = 0 \\ A + \dfrac{\pi}{2}B = 1 \end{cases}$$

得解

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}.$$

例5 设有均匀陀螺，圆周半圆上标有刻度1，另半圆周上均匀刻[0，1）诸数字，求陀螺旋转后停下时触及桌面上的点的刻度 X 的分布函数。

解：$A=$“触点落在刻度为1的半圆上”，

$\overline{A}=$“触点落在另外半圆上”，

$$P(A)=1/2,\quad P(\overline{A})=1/2,$$

$$P\{X\le x\mid A\}=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}\qquad P\{X\le x\mid \overline{A}\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=P(A)P\{X\le x\mid A\}+P(\overline{A})P\{X\le x\mid \overline{A}\}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x/2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$