COMSOL Multiphysics®

计算流体力学（CFD）建模（在线课程）

Part I

COMSOL中国
张 照
应用工程师

COMSOL

COMSOL® 软件产品库

COMSOL MULTIPHYSICS®

借助数值仿真理解、预测和优化工程设计

COMSOL COMPILER™

编译、创建可独立执行的仿真 App

COMSOL SERVER™

在组织内高效分发、管理和部署仿真 App

附加产品

电磁

- AC/DC 模块
- RF 模块
- 波动光学模块
- 射线光学模块
- 等离子体模块
- 半导体模块

流体 & 传热

- CFD 模块
  - 搅拌器模块
- 地下水流模块
- 管道流模块
- 微流体模块
- 分子流模块
- 传热模块

结构 & 声学

- 结构力学模块
  - 非线性结构材料模块
  - 复合材料模块
  - 岩土力学模块
  - 疲劳模块
  - 多体动力学模块
  - 转子动力学模块
- MEMS 模块
- 声学模块

化工

- 化学反应工程模块
- 电池与燃料电池模块
- 电镀模块
- 腐蚀模块
- 电化学模块

多功能

- 优化模块
- 材料库
- 粒子追踪模块

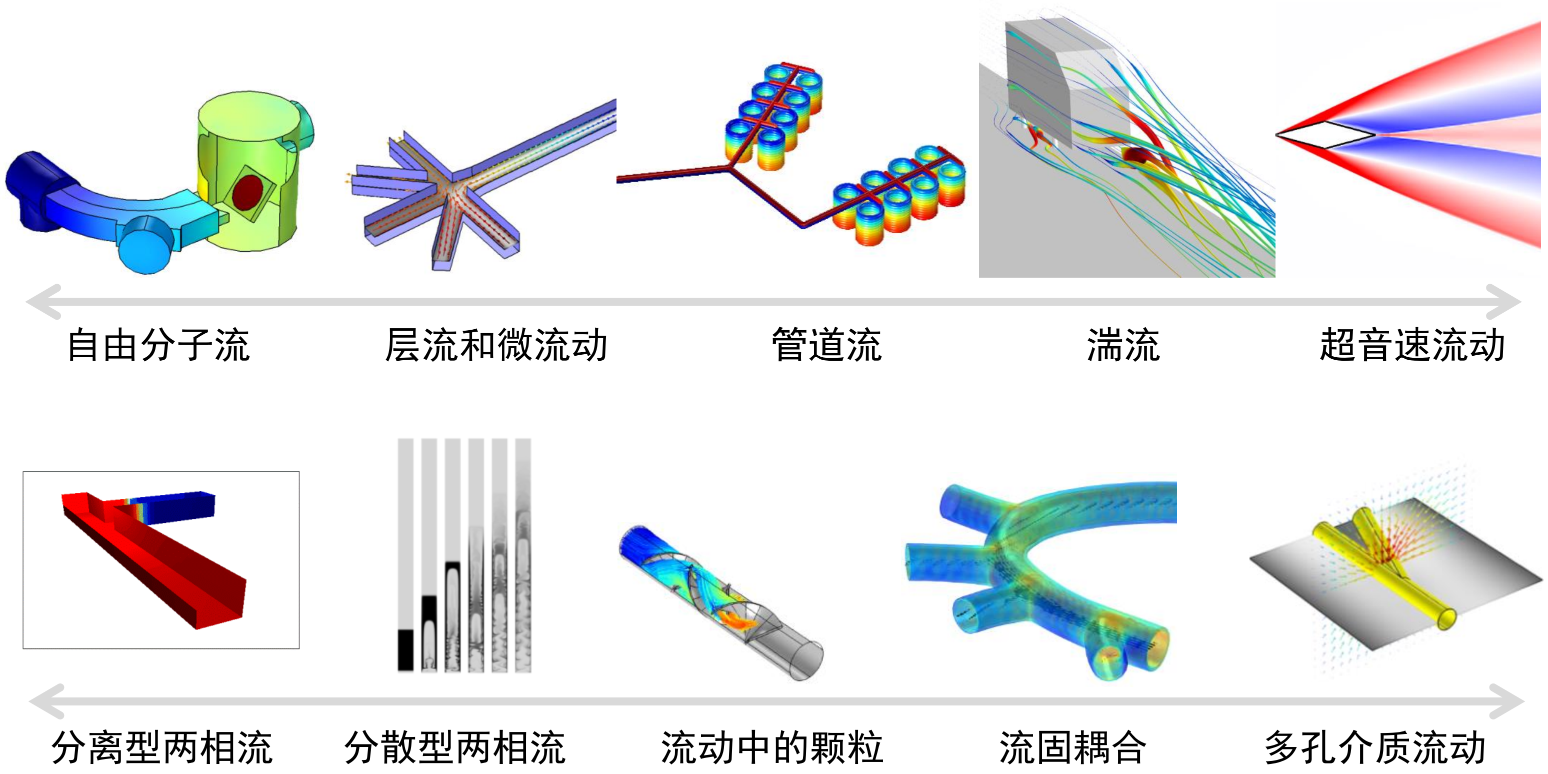
接口

- LiveLink™ *for* MATLAB®
- LiveLink™ *for* Excel®
- CAD 导入模块
- 设计模块
- ECAD 导入模块
- LiveLink™ *for* SOLIDWORKS®
- LiveLink™ *for* Inventor®
- LiveLink™ *for* AutoCAD®
- LiveLink™ *for* Revit®
- LiveLink™ *for* PTC® Creo® Parametric™
- LiveLink™ *for* PTC® Pro/ENGINEER®
- LiveLink™ *for* Solid Edge®
- File Import *for* CATIA® V5

COMSOL

主要内容

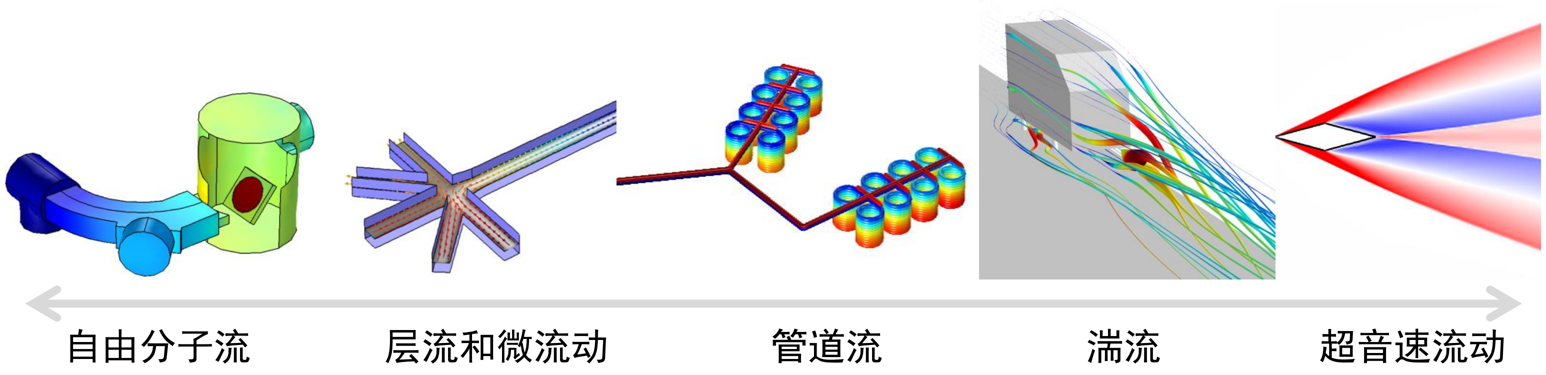
- 流体方程及边界条件
- 蠕动流、层流和非牛顿流体建模
- 湍流建模
- 旋转机械内流体流动
- 薄膜流与管道流
- 多孔介质与地下水流
- 多相流仿真
- 流体中的粒子追踪
- 非等温流建模
- 高马赫数流动
- 多物理场模型：反应流，流固耦合建模

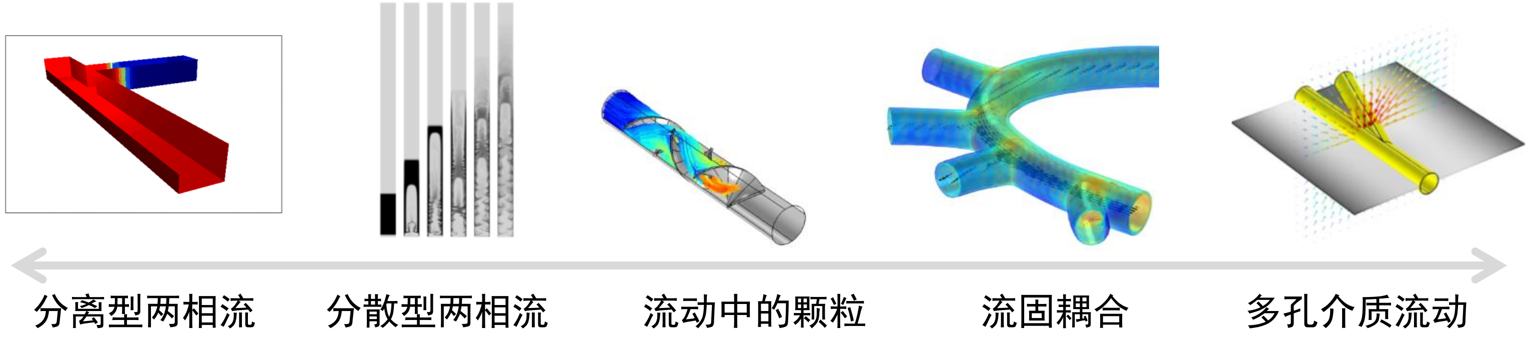


COMSOL

主要内容

- 流体方程及边界条件
- 蠕动流、层流和非牛顿流体建模
- 湍流建模
- 旋转机械内流体流动
- 薄膜流与管道流
- 多孔介质与地下水流
- 多相流仿真
- 流体中的粒子追踪
- 非等温流建模
- 高马赫数流动
- 多物理场模型：反应流，流固耦合建模





COMSOL

基本原理

- 流体是连续介质（液体、气体、等离子体），在剪切应力下发生相应的变形
- 流体力学：研究流体及其应力-应变响应
  - 流体静力学：　　研究静止状态的流体
  - 流体运动学：　　研究运动中的流体
  - 流体动力学：　　研究流体运动时的效应或力
- 流体力学是连续介质力学的一个分支
  - 从宏观的角度来模拟物质
  - 不考虑物质的原子结构信息
- 一般原理：质量、动量和能量守恒

计算流体力学（CFD）

- 流体力学的一个分支，使用数值方法和算法来求解和分析流体流动问题
  – 1910：手算（人力计算机： 2000 操作/周）
  – 1930：计算机开始用于进行计算
- 数值方法需要将问题在空间和时间上**离散**
  – 有限差分法（FDM）
  – 有限体积法（FVM）
  – 有限元法（FEM）
  – ...
- CFD 往往很复杂，需要大量计算资源
  – 非线性、耦合、离散、不同尺度、流动类型

平衡方程 – 质量守恒

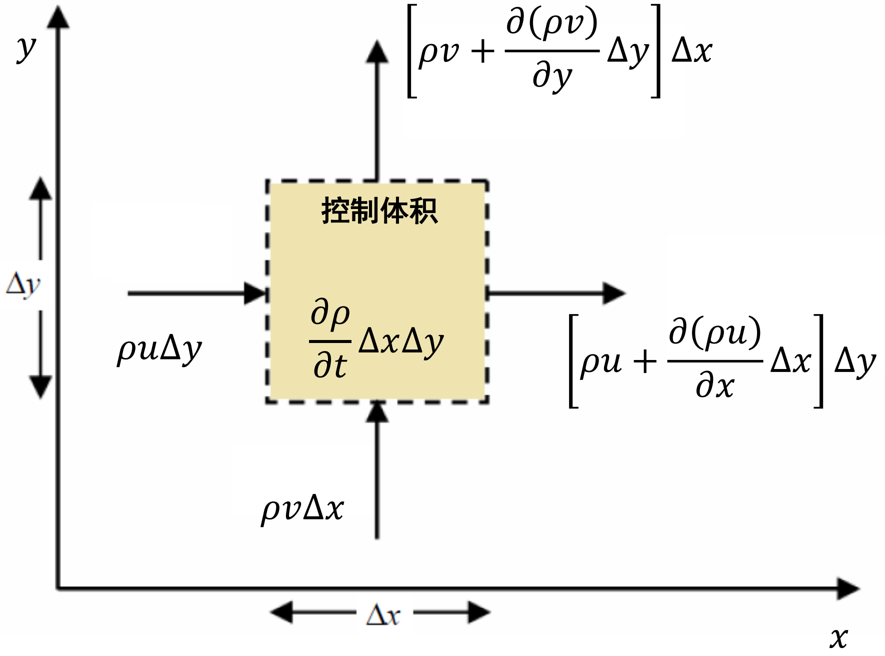
- 质量守恒（二维）：
  - 质量不能被创建，也不能被消灭

平衡： 质量变化 = ∑ 流入的质量 – ∑ 流出的质量

- 质量守恒（三维）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

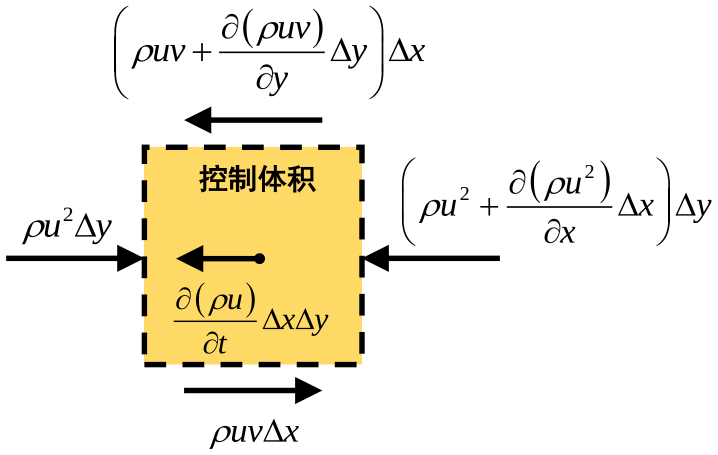
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$



平衡方程 – 动量守恒

- 基于牛顿第二定律：

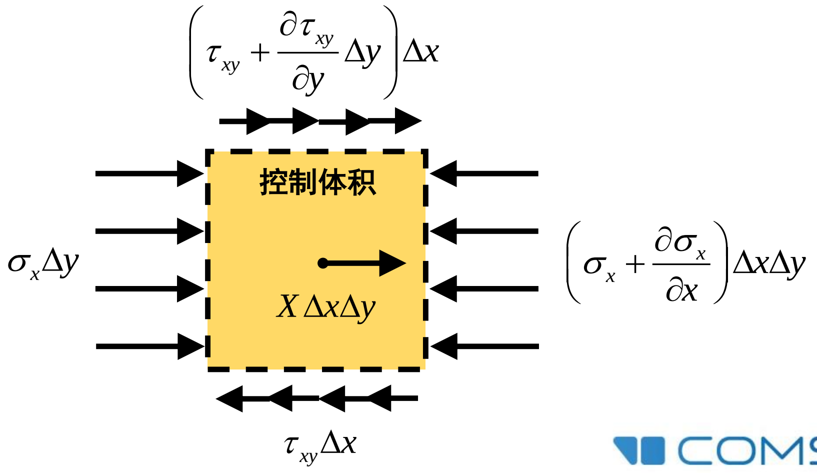
$$
\begin{aligned}
[\text{动量的变化}] \quad &= \sum \text{流入的动量} \\
&- \sum \text{流出的动量} \\
&+ \sum \text{外部作用力} \\
&+ \sum \text{内部作用力}
\end{aligned}
$$



- 动量守恒（二维）：

$$\boxed{\rho\frac{\partial t}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial t}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y}$$



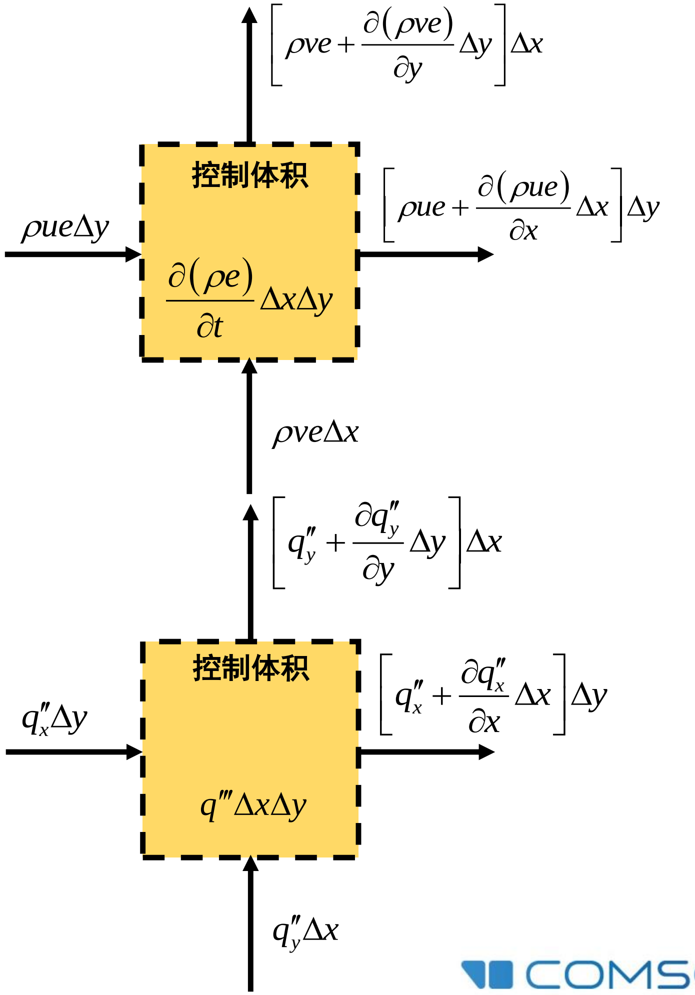
平衡方程 – 能量守恒

- 能量守恒

$$\begin{pmatrix}\text{能量}\\ \text{累积速率}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{流体传递的}\\ \text{净能量}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{热传导传递的}\\ \text{净能量}\end{pmatrix} + (\text{内部发热}) - \begin{pmatrix}\text{从流体传递到}\\ \text{周围的净功}\end{pmatrix}$$

→ 能量守恒 ⇔ 广义传热方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}\Delta x\Delta y = & -\left[\frac{\partial(\rho ue)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho ve)}{\partial y}\right]\Delta x\Delta y \\ & -\left[\frac{\partial q_x''}{\partial x}+\frac{\partial q_y''}{\partial y}\right]\Delta x\Delta y + q'''\Delta x\Delta y \\ & -\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}-\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}-\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y \\ & -\left[u\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}-u\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+v\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}-v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y\end{aligned}$$



COMSOL

Navier-Stokes 方程

- 质量守恒：

连续性： $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \boldsymbol{u}) = 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$

$p = p(\boldsymbol{x}, t)$

- 动量守恒：

冲量： $\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nabla \cdot [-p \cdot \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}] + \boldsymbol{F}$

- 能量守恒（只用于非等温流）：

能量：

$$\rho \cdot C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)T\right)$$
$$= -(\nabla \cdot \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\tau}{:}\boldsymbol{S} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\bigg|_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)p\right) + \boldsymbol{Q}$$

$T = T(\boldsymbol{x}, t)$

Navier-Stokes 方程特征

- 非线性偏微分方程（二阶）组的耦合体系
- 存在一些确定的解（简单情况下）
  - 压力（Poiseuille）流，拖曳（Couette）流，Stokes 边界层，Taylor-Green涡流
- 一般存在并有唯一的解析解，三维情况未知
  - 克莱数学研究所（Clay Mathematics Institute）：Millenium Prize Problem (1’000’000 $)

Navier-Stokes 方程变量

- 方程个数：　质量 (1), 动量 (3), 能量 (1)　= 5　**= 5**

  未知变量：　p (1), $\boldsymbol{u}$ (3), ~~$\boldsymbol{\tau}$ (6)~~, T (1)　= 11

- 本构关系：　$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})$
  - 例，牛顿流体（Newtonian Fluid）：

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{S} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

密度（SI单位：kg/m³）

速度矢量（SI单位：m/s）

压力（SI单位：Pa）

粘性应力张量（SI单位：Pa）

体积力矢量（SI单位：N/m³）

常压比热容（SI单位：J/(kg·K)）

绝对温度（SI单位：K）

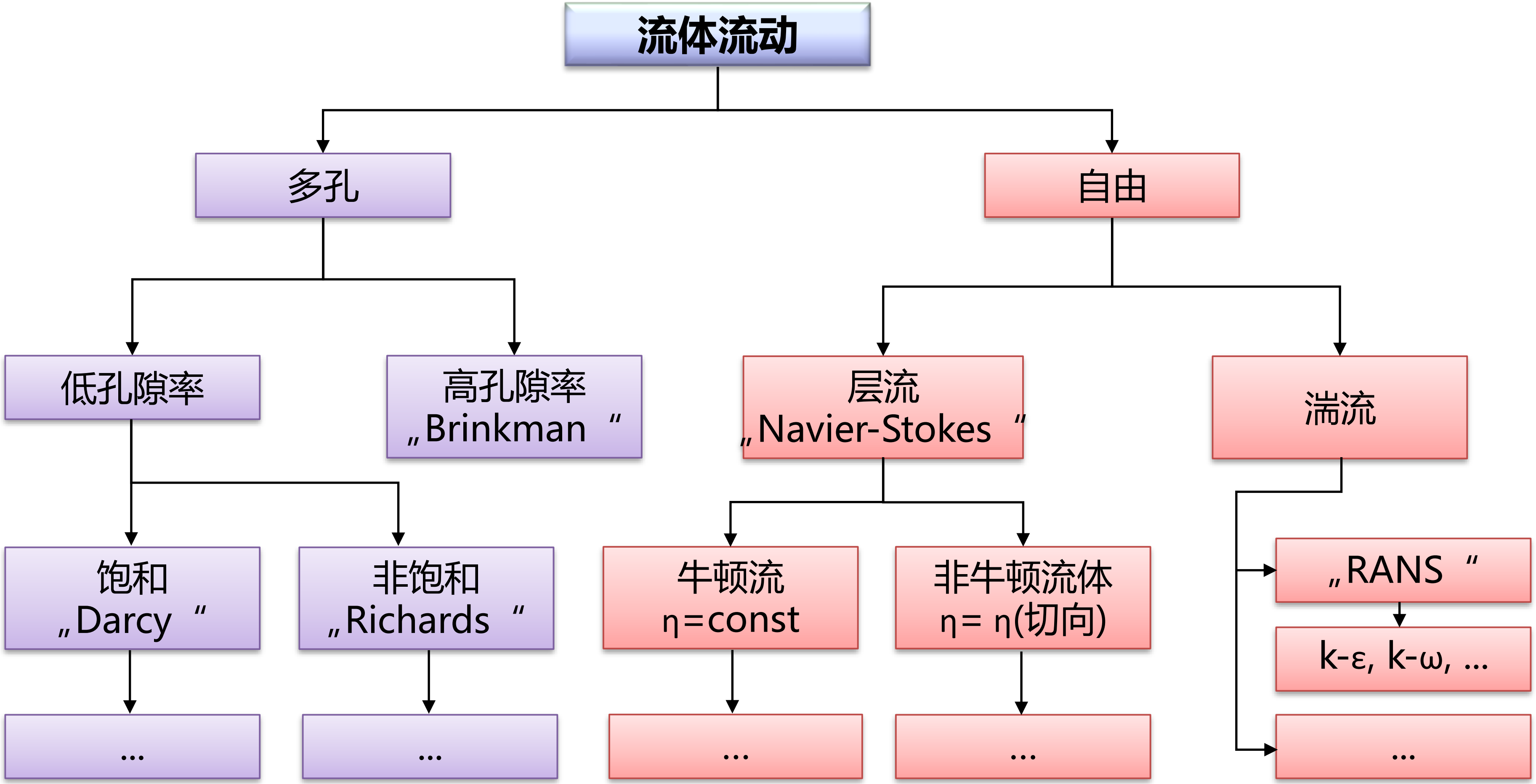
热通量矢量（SI单位：W/m²）

热源（SI单位：W/m²）

应变速率张量：

COMSOL

流体流动分类



其他分类

COMSOL

其它分类—特征参数

- 空间维度和时间：$\boldsymbol{x}, t$
  - 三维、二维、一维、稳态、准静态（周期性）、瞬态
- 域和边界
  - 内部（有界），外部（自由）
- 介质种类
  - 单相, 多相, 混合
- 密度: ρ
  - 不可压缩, 弱可压缩，可压缩

- 雷诺数: Re
  - 层流, 湍流, 蠕动流
- 马赫数: Ma
  - 亚音速，跨音速，音速，超音速，高超音速
- 温度: T ⟺ 热：q 绝热，非绝热
  - 等温, 非等温 ⟺ 熵：S 可逆，不可逆
- 内摩擦, 剪切应立阻
  - 粘性, 非粘性

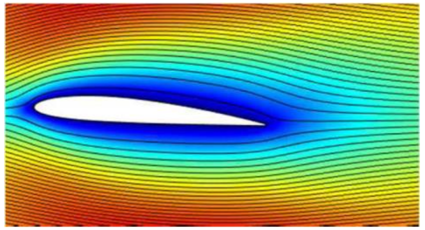
COMSOL

单相流

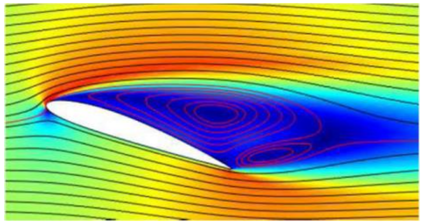
使用雷诺数确定流型

$$\boxed{Re_L \equiv \frac{\rho \cdot U \cdot L}{\mu}} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

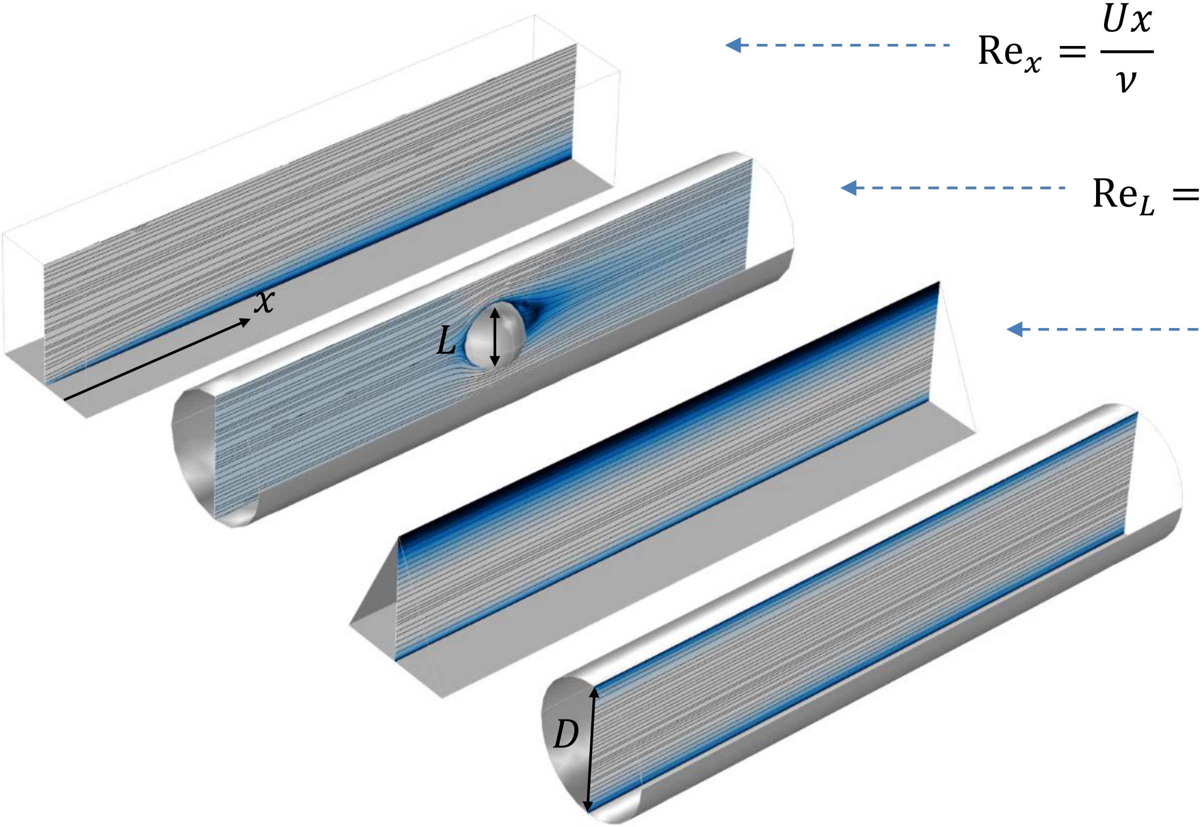
- 低 Re 数(<< 1)：蠕动流
  - 粘性力阻碍了所有流体脉动的产生
  - 可逆的平滑流型
- 中等 Re 数 (~1–2000)：层流
  - 惯性力的重要性逐渐增加
  - 粘性力被限制在边界层、剪切层和尾迹内
  - 规则，平滑流型



- 高 Re 数 (> 4000)：湍流
  - 不同尺度的脉动和涡之间的非线性作用导致流体脉动的产生
  - 处处存在粘性阻尼，但只对小尺度的涡有重要影响
  - 无序（混沌）的流型



雷诺数计算



$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$$ 平板流

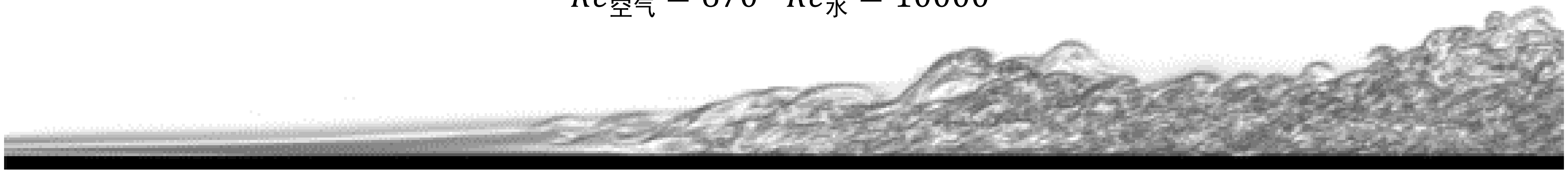
$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu}$$ 圆球扰流

$$\mathrm{Re}_{D_h} = \frac{UD_h}{\nu}, D_h \equiv \frac{4A}{P}$$ 管流

$$\mathrm{Re}_D = \frac{UD}{\nu}$$ 圆管流

雷诺数示例

- 雷诺数: $$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$
- 过渡层/湍流管道 $l = \emptyset$:
  $$Re_{krit} \approx 2300$$
- 示例（20° C）：
  $$Re_{空气} = 6.7 \cdot 10^4 \cdot v \cdot l$$
  $$Re_{水} = 1 \cdot 10^6 \cdot v \cdot l$$
- 管道流 $v = 0.1\ m/s$ 和 $l = \emptyset = 10cm$：
  $$Re_{空气} = 670 \quad Re_{水} = 10000$$



马赫数

- **马赫数：**

$$\boxed{Ma \equiv \frac{|\boldsymbol{u}|}{a}} = \frac{\text{流速}}{\text{音速}}$$

- $Ma = 0$： 正规的不可压缩流动
  - 音速无限大（假设），扰动瞬时传播
  - 抛物型 Navier-Stokes 方程
- $0 < Ma < 0.3$： “弱”可压缩流动
  - 小和中等梯度的亚音速流
  - 密度变化不超过 5%
- $0.3 < \mathrm{Ma} < 1$： “中等”可压缩流动
  - 大梯度（数值）的亚音速流
  - 不能忽略热力学效应
- $Ma \geq 1$： “高度”可压缩流动
  - 音速、超音速流，带激波/膨胀波
  - 椭圆和双曲型 Navier-Stokes 方程
  - 不同类型的边界条件（例如，喷嘴）

- 可压缩流动并不总是等于可压缩流体；可压缩流体有可能是不可压缩流动。
- 低马赫数情况下的密度变化通常由于温度依赖性引起。

COMSOL

马赫数示例

- 马赫数:

$$Ma = \frac{v}{c}$$

不可压缩：$Ma \leq 0.3$

可压缩：$Ma > 0.3$

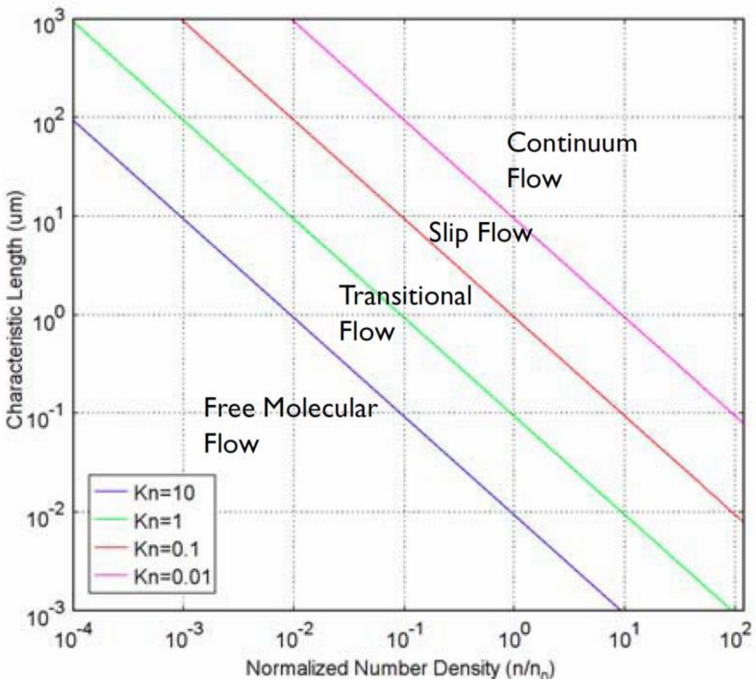
- 例（20°C）：

$$c_{空气} = 343m/s$$
$$c_{水} = 1484\ m/s$$

- 接口 $Ma > 0.3$:　　高马赫数流动

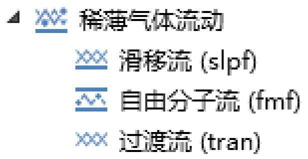
克努森数 Knudsen Number

$$\boxed{Kn \equiv \frac{\lambda}{L}} = \frac{\text{平均自由程}}{\text{物理长度尺度}}$$



稀薄气体流动 → 微流体模块 & 分子流模块

- $Kn < 0.01$： 连续流
- $0.01 < Kn < 0.1$： 滑动流
  - 靠近壁面的 Maxwell 滑移边界层条件的克努森层（稀薄效应）
- $0.1 < Kn < 10$： 过渡流
  - 克努森层占流动域的很大分数
  - 修正格子布尔兹曼方法（Modified Lattice Boltzmann method）
- $Kn > 10$： 自由分子流
  - 分子碰撞壁的概率远高于相互碰撞
  - 通过角系数方法来模拟流动



COMSOL

克努森数示例

- 克努森（Knudsen）数： $Kn = \frac{\lambda}{l}$
- 分子自由： λ
- 特征尺寸： l
- 例：

气室的边长 $l = 10cm$:

$$p = 1\,mbar \;\Rightarrow\; \lambda \approx 100\mu m$$

$$\Rightarrow Kn \approx 0.001$$

选择合适的流动接口

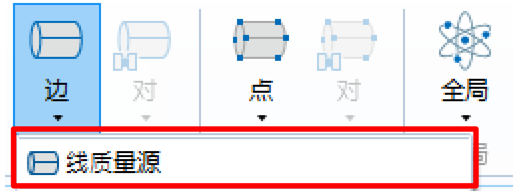
- 单相流 ← $Ma < 0.3$
  - 蠕动流 (spf) ← $Re \ll 1$
  - 层流 (spf) ← $Re \sim 1 - 2000$
  - 湍流 ← $Re > 4000$
  - 旋转机械，流体流动
- 薄膜流动
- 多相流
- 多孔介质和地下水流
- 非等温流动
- 高马赫数流动 ← $Ma > 0.3$
  - 高马赫数流动，层流 (hmnf) ← $Re < 2000$
  - 湍流 ← $Re > 4000$

层流

层流的物理场特征

- 域条件

- 边条件



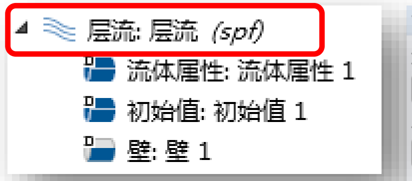
- 边界条件

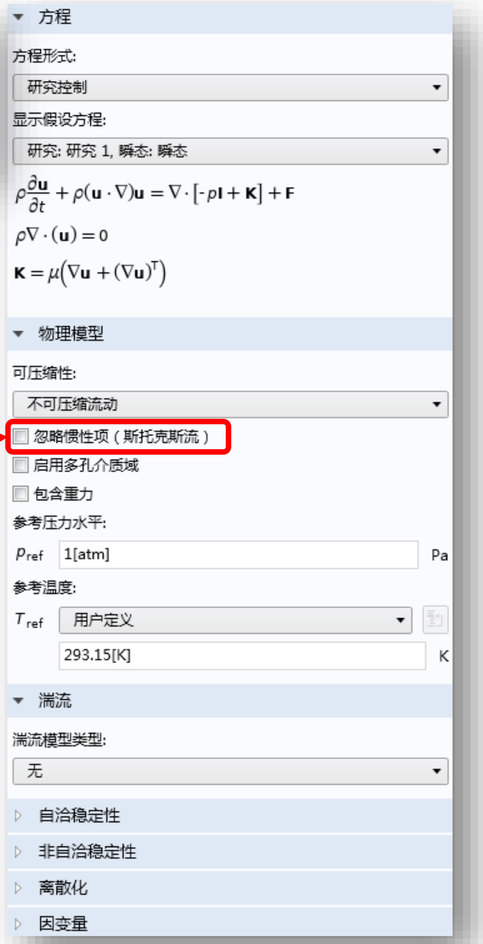
- 点条件

COMSOL

层流

- 求解NS方程
  - 针对低雷诺数（层流）情况
  - 瞬态或稳态求解器
  - 不可压缩或可压缩 ($Ma < 0.3$)
- 可以切换到湍流模型
- 可以切换到Stokes流（蠕动流）
  - 忽略惯性项（适用于$Re << 1$）
- 定义参考压力水平（默认：1[atm]）
- 因变量（“未知量”）
  - Velocity $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$
  - Pressure p

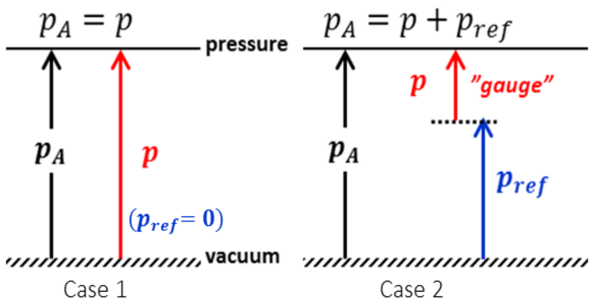




COMSOL

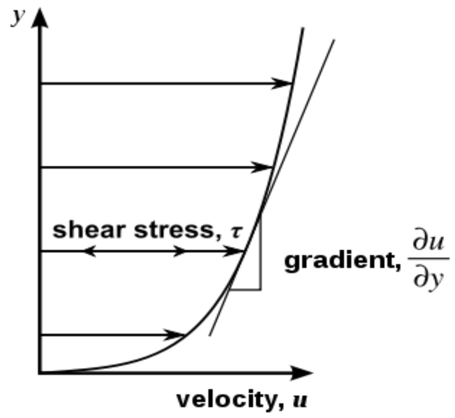
流动压力

- 压力驱动流体运动
  - NS方程只计算压力梯度，不计算绝对值
  - 需要使用绝对压力材料属性计算，e.g., $\rho(p_A, T)$
- 通过两种办法计算压力：
  - 方法1：$\Delta p \sim p_A$ → 直接求解绝对压力 $p_A = p$
    - 管道流和高马赫数流
  - 方法2：$\Delta p \ll p_A$ → 参考压力p_{ref}接近系统压力，求解表压 $p_A = p_{ref} + p$
    - 其它流场
- 为什么重要？ → 稳定性和收敛性



流体属性

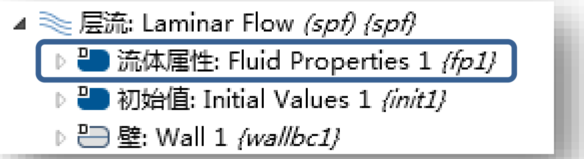
- 流体属性
  - 密度
  - 动力粘性
    - 牛顿流体：应力与应变成正比
    - 非牛顿流体：应力与应变之间为非线性关系
      - 幂律模型
      - Carreau模型

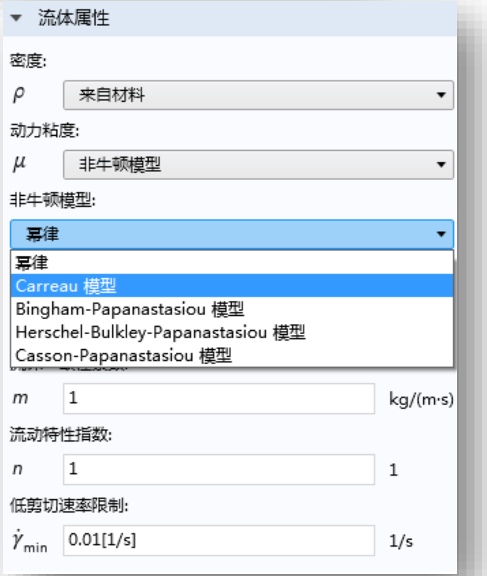


$$\mu = m\dot{\gamma}^{\,n-1}$$

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{inf})[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{(n-1)}{2}}$$

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

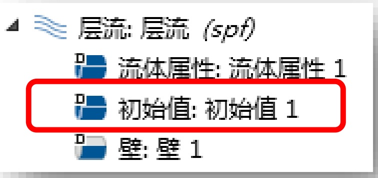




初始值

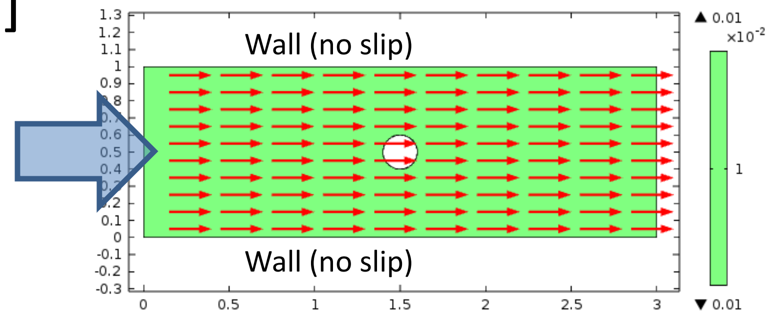
- 稳态：初始值=数值上的初始猜测
  - 仅仅是数值算法的要求（迭代的起始点），而没有物理意义
    - 任意的初始值都能使线性或弱非线性问题收敛
    - 对于非线性问题（例如CFD），初始值超出“收敛半径”可能导致不收敛 → 有时需要一个接近收敛解的初始值，帮助求解器找到“搜索正确的方向”
  - 边界条件不需要与初始值一致

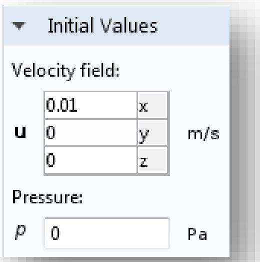
- 瞬态：初始值=物理上的初始状态
  - 瞬态问题t0时刻的物理解（例如速度和压力）(velocity & pressure field)
  - 所有的边界条件必须与初始值一致
  - 初始值没有清晰的表达式或根本不知道
  - 流程：
    - 使用收敛的稳态解作为初始值
    - 或者，使用常规的初始值（零速度和零压力）和边界条件

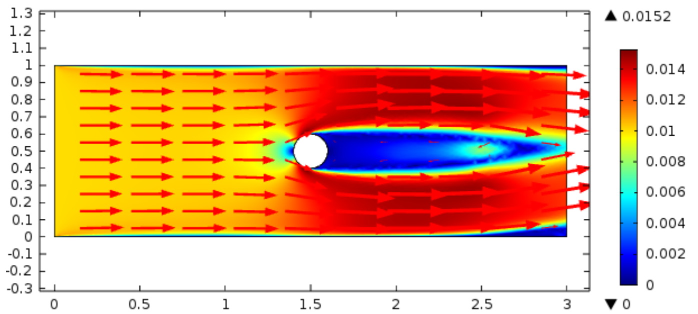


初始值—举例

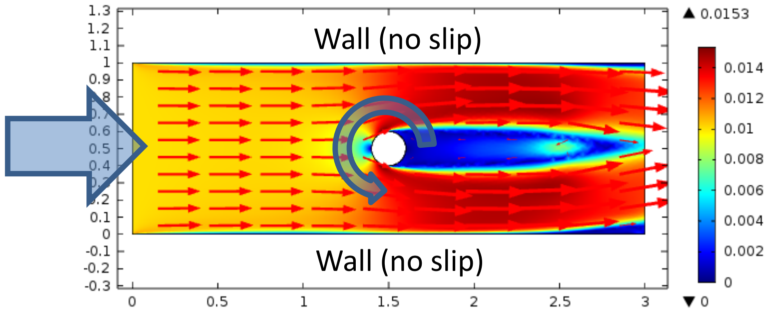
- 稳态圆柱扰流，网格尺寸：较细化，进口速度：0.01[m/s]，出口压力：0[Pa]

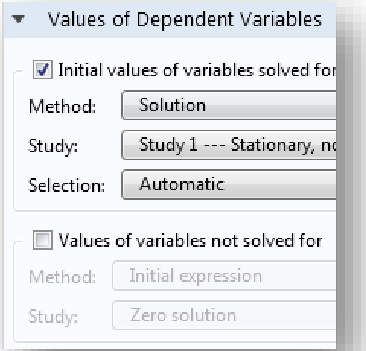


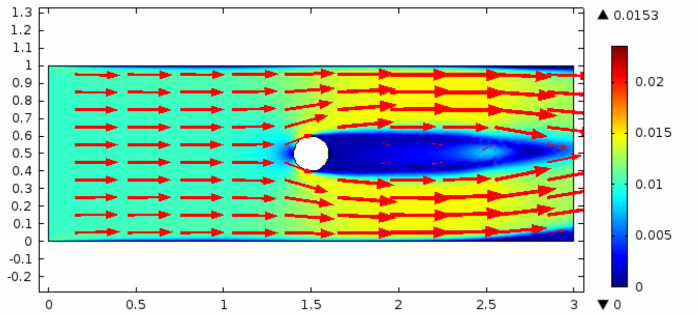




- 瞬态：圆柱从0s开始以0.01[m/s]的速度旋转



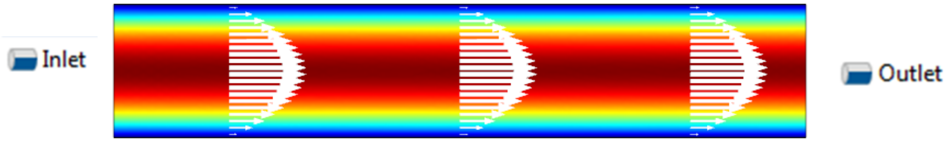




将稳态解作为瞬态计算的初始值

进出口边界条件的组合

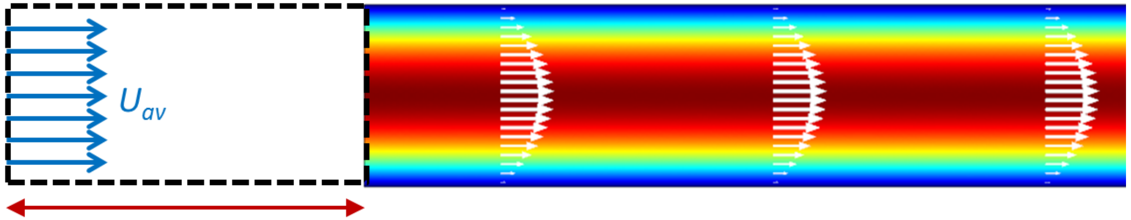
- 适定条件：
  - 速度进口，压力出口
  - 压力进口，速度出口
- 稍微有“难度”条件：
  - 压力进口，压力出口
- 病态条件：
  - 速度进口，速度出口(+ pressure level)



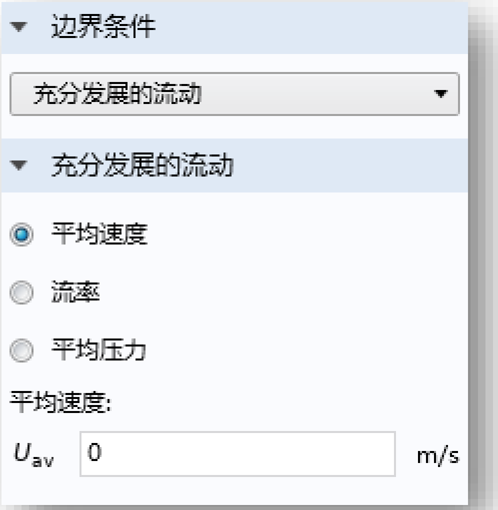
管道流，包含一个进口、一个出口和无滑移壁条件

充分发展的流动

- 可以在任意形状的进出口定义层流/湍流的速度分布
  - 假设进口的上游存在一个虚拟的计算域
  - 内部，求解1维NS方程并投影到边界上
  - 该条件与内部壁冲突

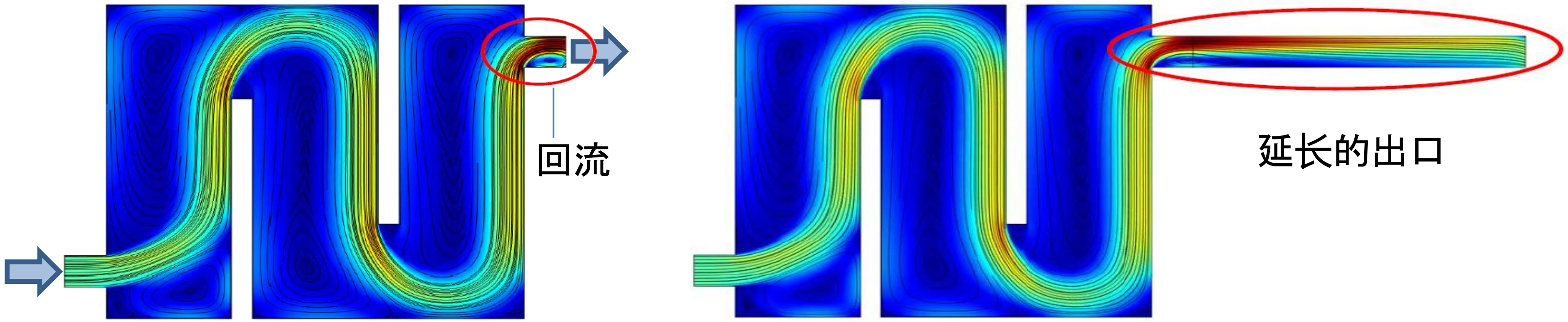


L_{entr} 虚拟区域的长度，进口特征长度的10倍（内部设置）



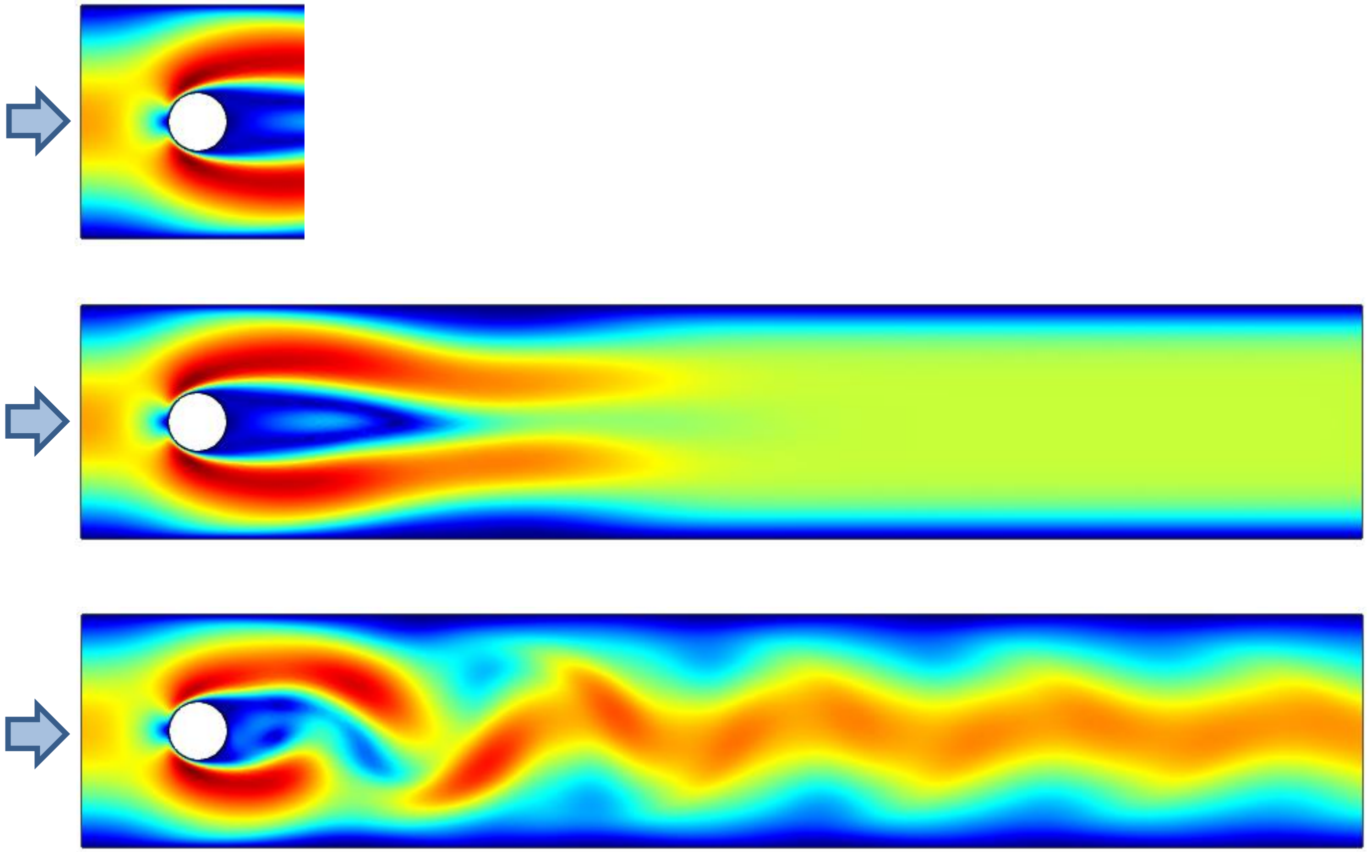
出口位置

- 选择合适的出口条件不是一件简单的工作
  - 如果在出口附近存在特定的流动结构（尾迹、回流），需要将出口延长至完全包含该流动结构



出口位置

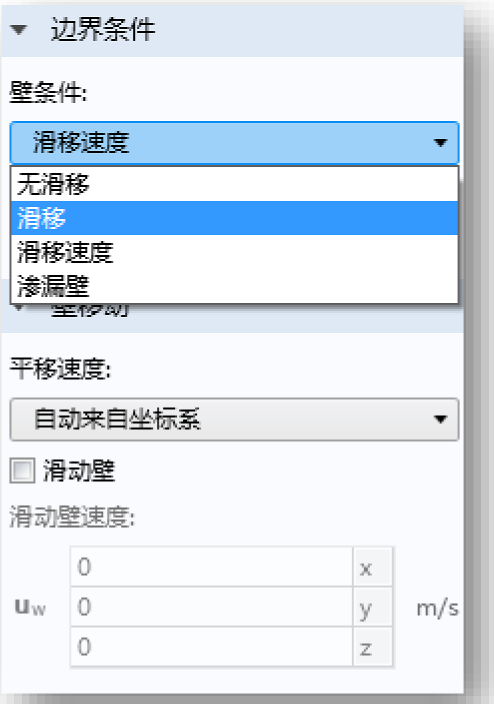
- 出口处经常定义均匀压力分布
- 如果出口出现复杂的流动结构（如，回流、速度变化），均匀压力不是一个好的选择
- 低雷诺数（稳定）
  - 可能存在稳态解
- 高雷诺数（不稳定）
  - 不存在稳态解



壁边界条件

- 滑移
  - 法向速度为0 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$
- 无滑移：
  - 壁上速度为零 $\mathbf{u}=0$
- 滑动壁：
  - 指定切向速度 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{w,proj}=\dfrac{\mathbf{u}_w-(\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{\|\mathbf{u}_w-(\mathbf{u}_w\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\|}\cdot\|\mathbf{u}_w\|$
- 移动壁：
  - 指定壁运动速度 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_w$

- 渗漏壁：
  - 流体渗漏进或通过多孔壁离开求解域



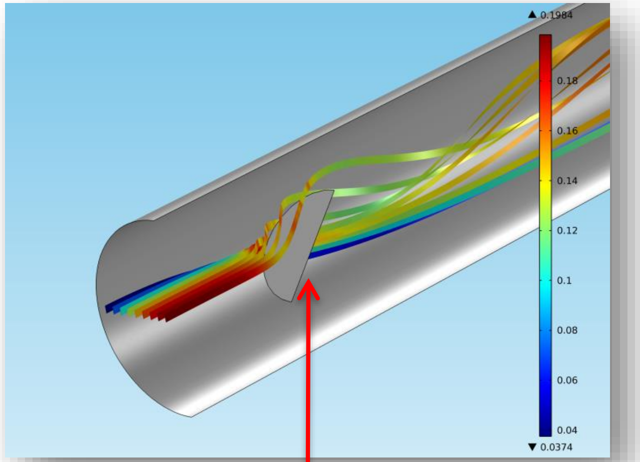
COMSOL

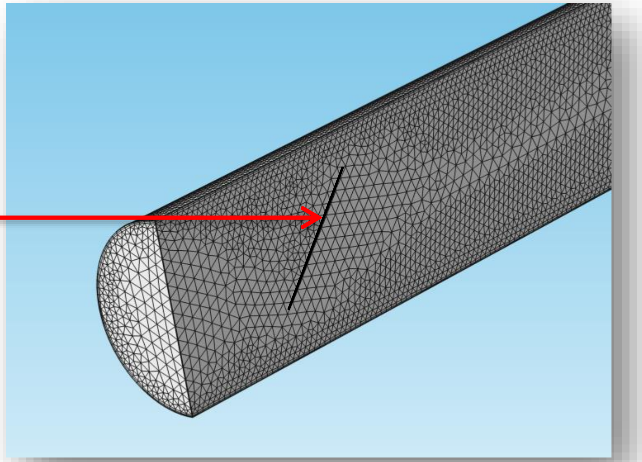
壁边界条件

- 滑移速度
  - 从微观尺度的视角，很少存在严格“无滑移”或“滑移”，往往是界于这两者之间 → 滑移速度
- 两种现象：
  - 粘度的非连续效应（粘性诱导滑移）
  - 热梯度（热蠕变）

内部壁

- 使用内部壁条件可以避免对薄结构划分网格
- 滑移、无滑移、移动壁
- 变量（速度、压力、湍流变量）在跨越该边界时不连续



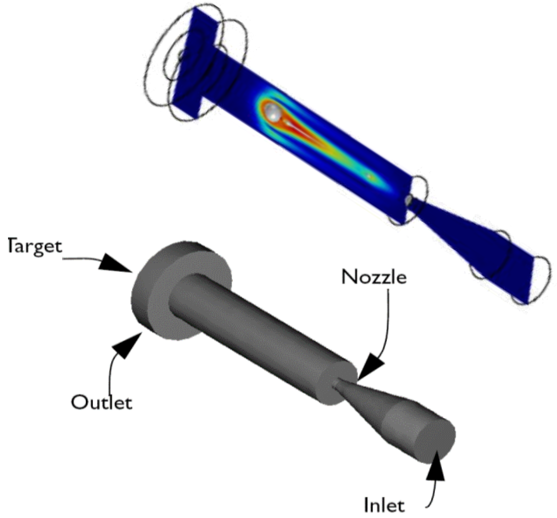


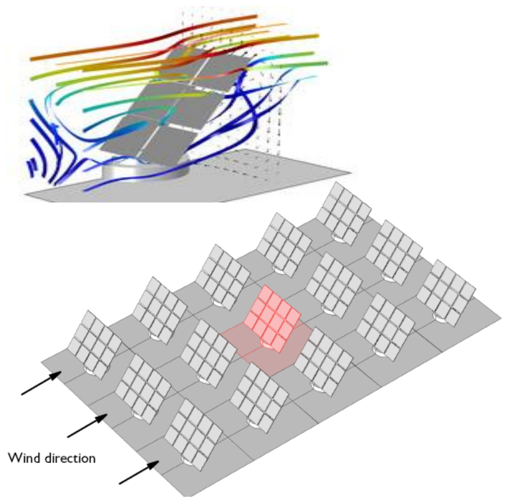
无几何厚度的内部壁

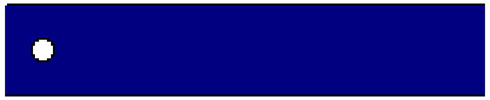
COMSOL

对称、轴对称和周期性

- 极大地减少内存需求和计算时间
- 流场和几何必须为对称/轴对称/周期性



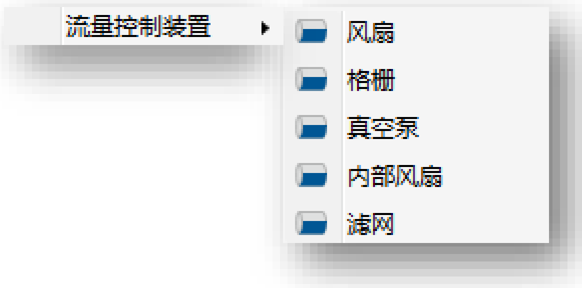


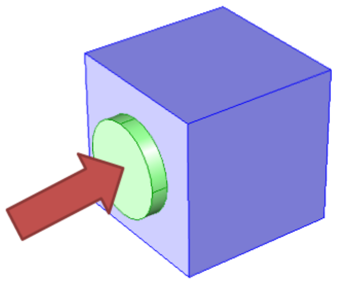


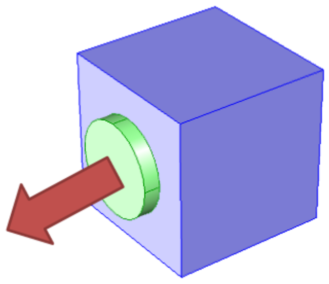
对称几何和边界条件，但是流场可能是非对称（Re数！）

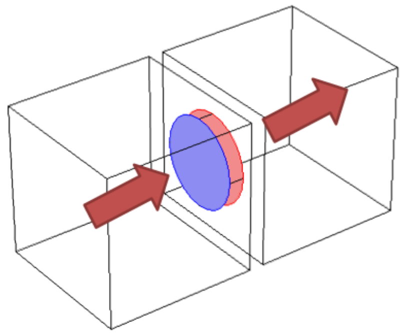
流量控制装置

- 将装置作为边界而不是域的一部分
- 压力边界
- 风扇和格栅可以作为出口或入口
- 真空泵为出口
- 内部风扇和滤网为内部边界



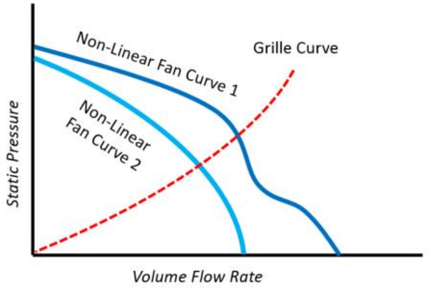




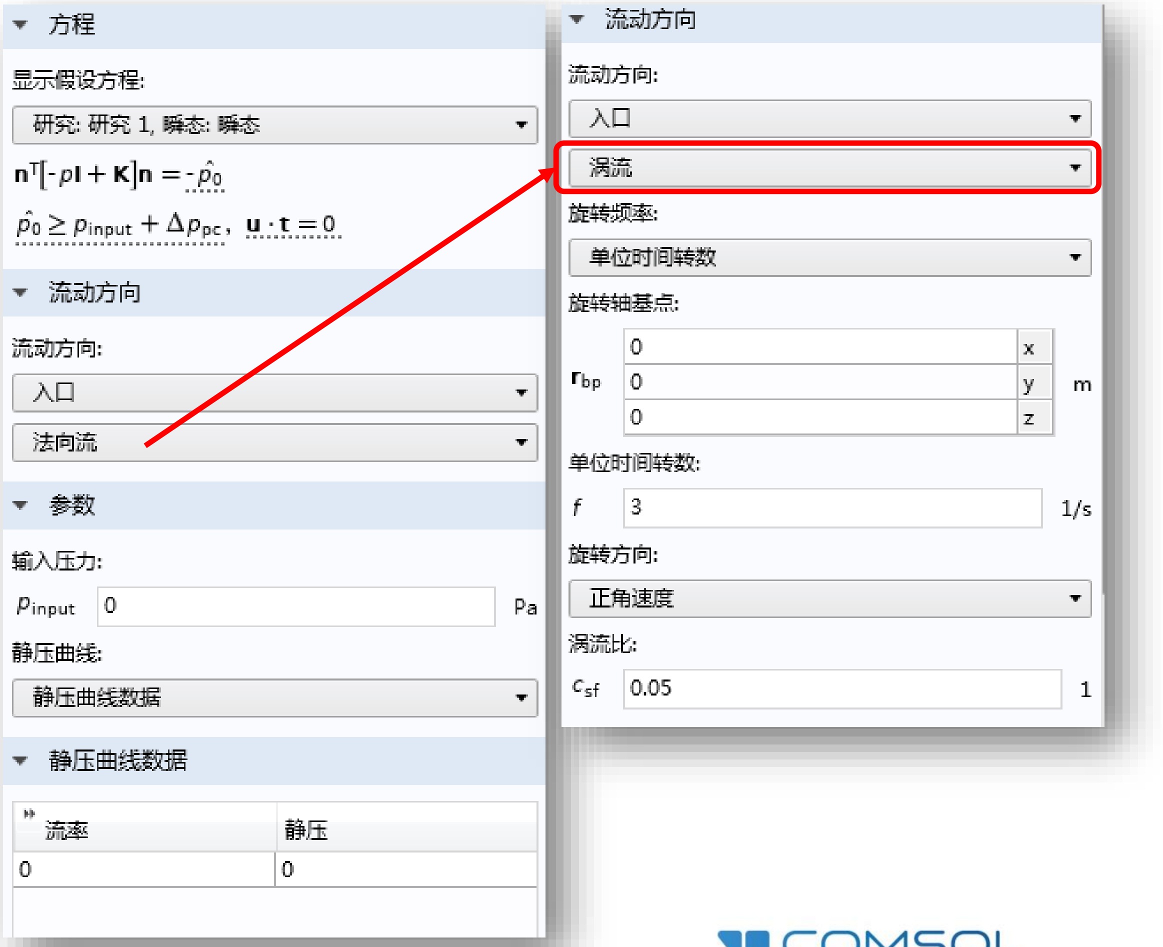


风扇和格栅

- 风扇曲线：集总的曲线，给出流速与静压的函数关系
  - 使用 spf.V0 作为流速
  - 使用 spf.p0 作为静压



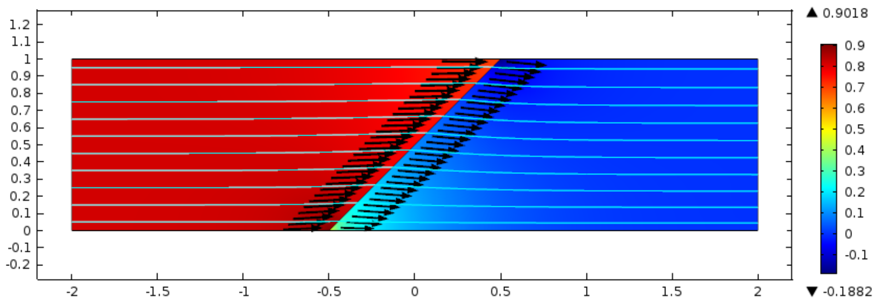
- 二维中，第三个方向的厚度 Dz 用来定义流率，风扇可看作矩形
- 可以定义风扇导致的旋流效应

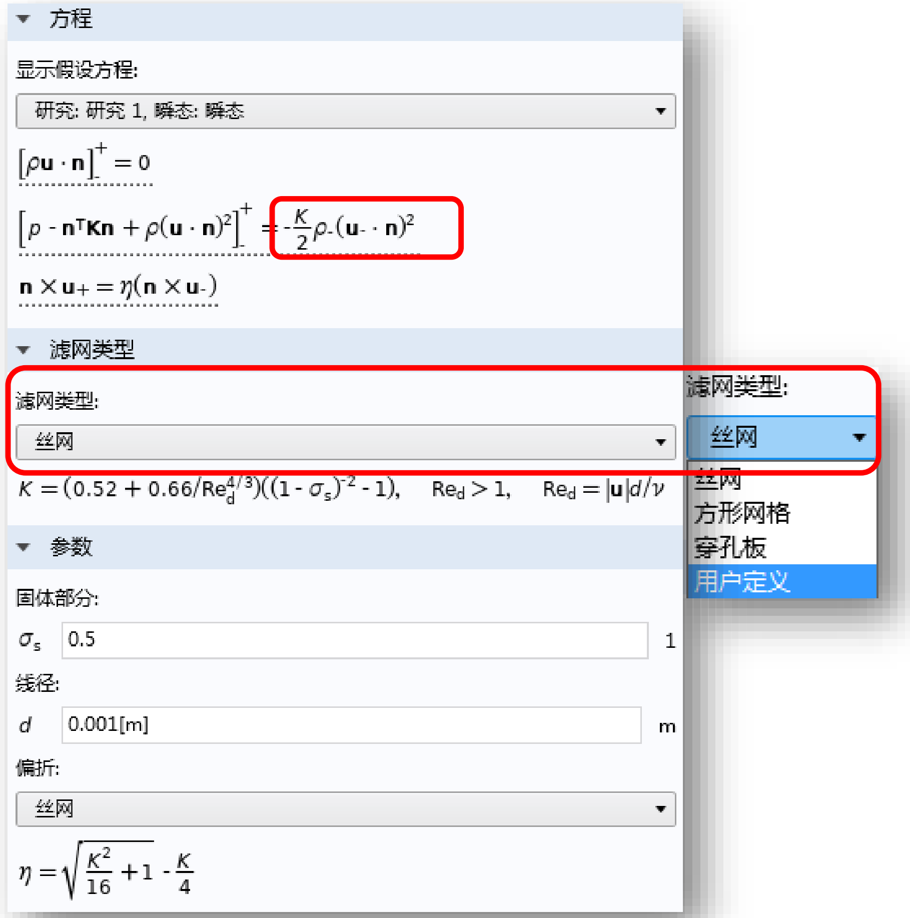


COMSOL

滤网

- 滤网指代具有分布式孔道的障碍物，例如金属丝网、格栅和孔板
- 孔道尺寸远小于流场尺寸（可计算尺寸），器件被简化为内部边（ 2D）或面（3D）
- 与实际的孔道模型相比，可以大大减小计算量

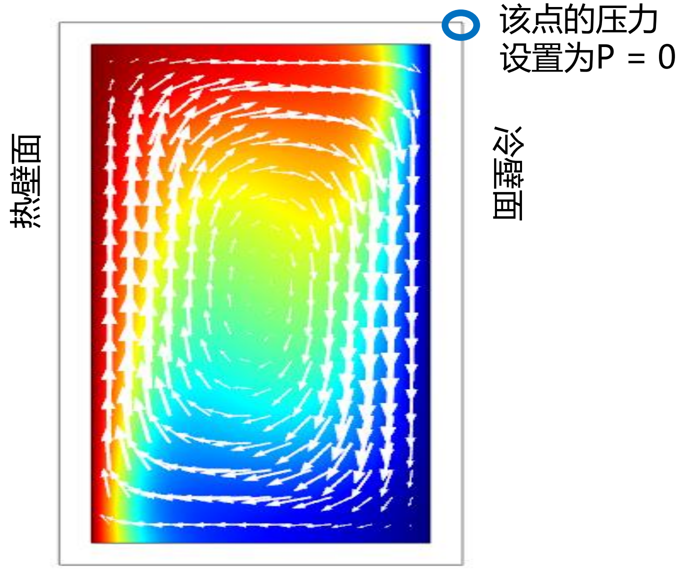




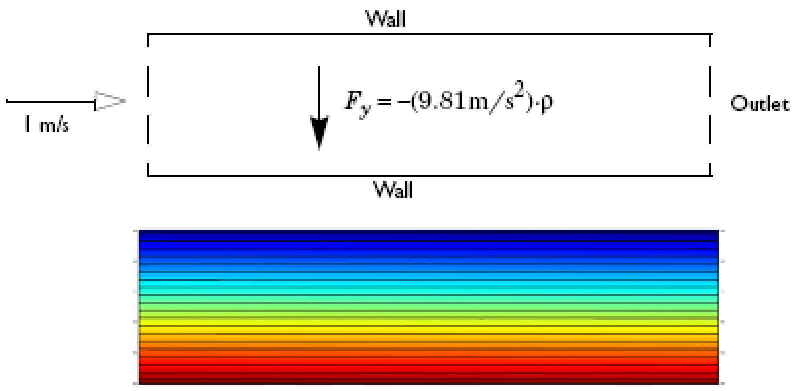
COMSOL

压力点约束

- 如果没有边界条件限定系统压力，需要使用其它方式来限定
  - 压力点约束

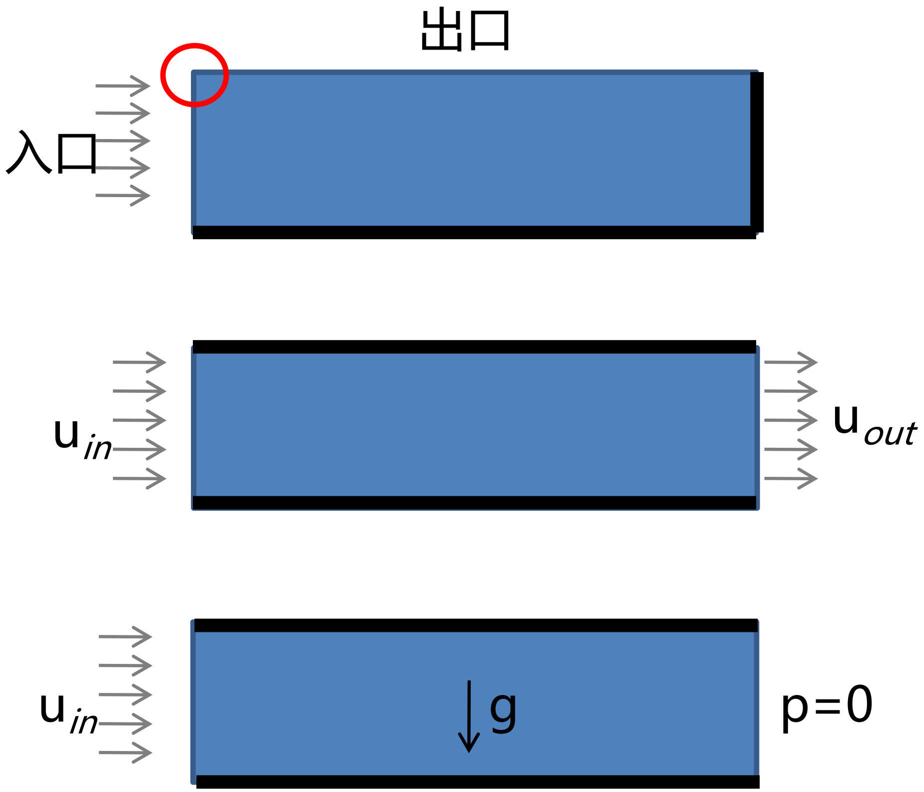


- 当考虑重力时，出口压力不能设定为常数
  - 要考虑静水压力的影响



冲突的边界条件

- 入口与出口相邻
- 同时指定入口和出口速度
  - 没有唯一解 → 需要固定压力
  - 即使质量通量守恒，还是会存在数值计算的困难
- 边界条件与载荷冲突
- …

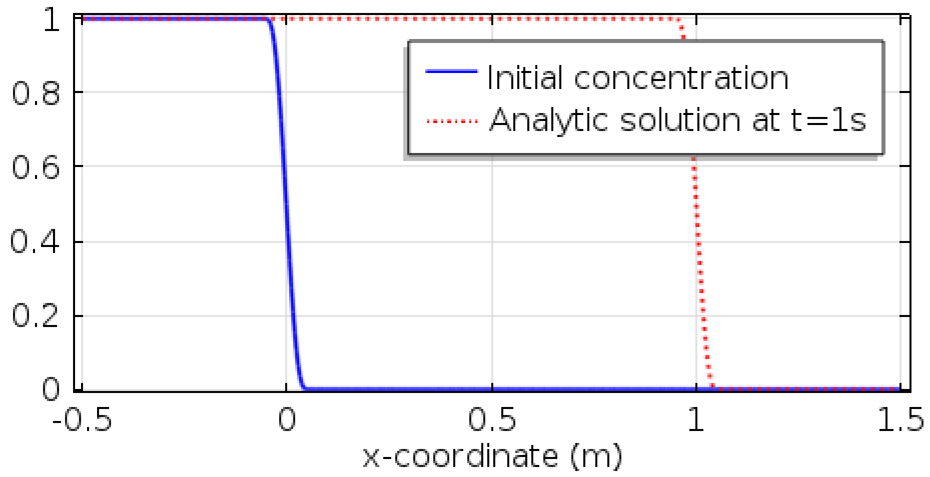


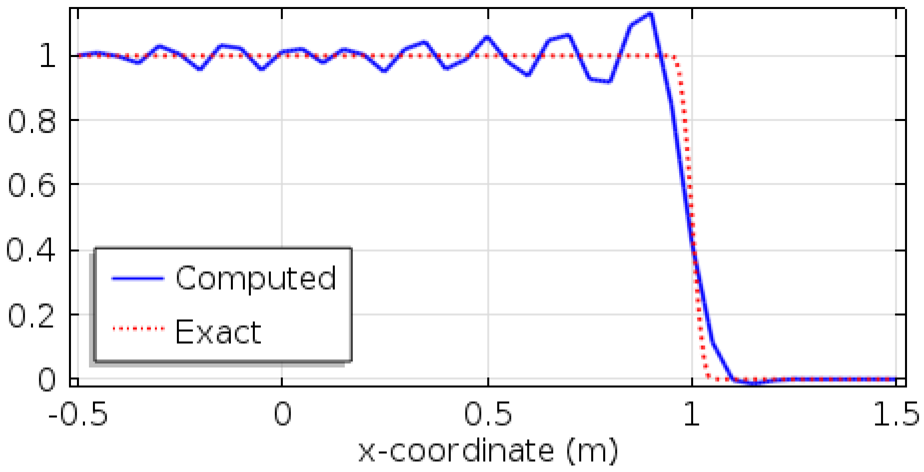
CFD 数值稳定技术

- 对于非线性的对流扩散方程，使用Galerkin 有限元方法离散，会具有非稳定性，可以通过对流与扩散项的比值判定

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \cdot \nabla u = \nabla \cdot (c \nabla u) + F$$

不稳定判据： $\mathrm{Pe} := \frac{\|\beta\| h}{2c} > 1$





https://www.comsol.com/blogs/understanding-stabilization-methods/

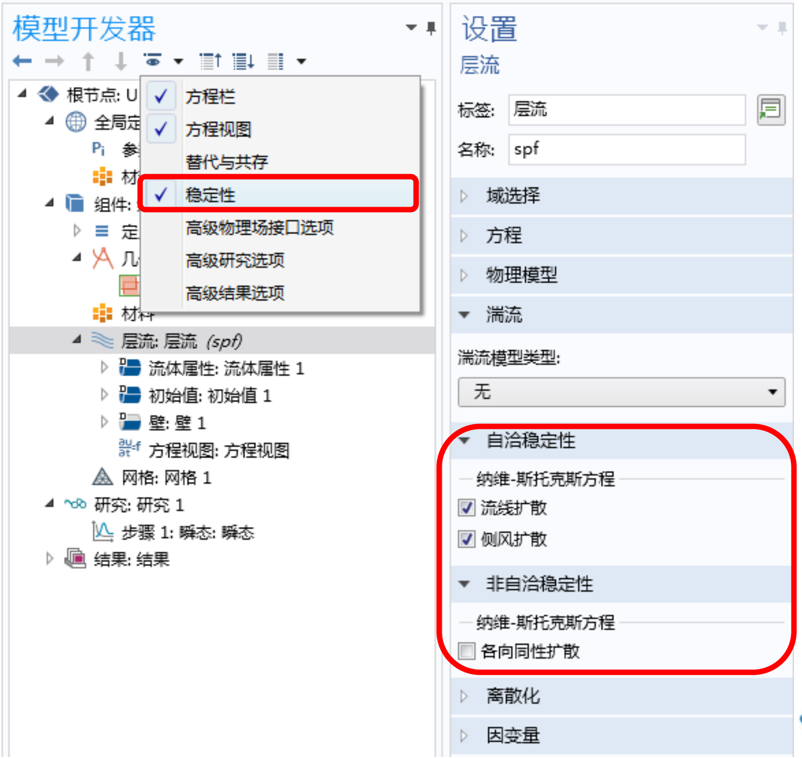
CFD 数值稳定技术

- 为了使Peclet数小于1，在给定的对流和扩散参数，需要较小的网格，导致计算量增加
- 如果流速为1m/s，扩散系数为1e-9m^2/s，则网格尺寸要求

$$h \leq \frac{2c}{\|\beta\|} = 2 \cdot 10^{-9}$$

- 数值稳定计算可以保证在粗糙网格上进行计算

- 自洽稳定性：流线和侧风扩散
- 非自洽稳定性：各向同性扩散



COMSOL

非自洽稳定性

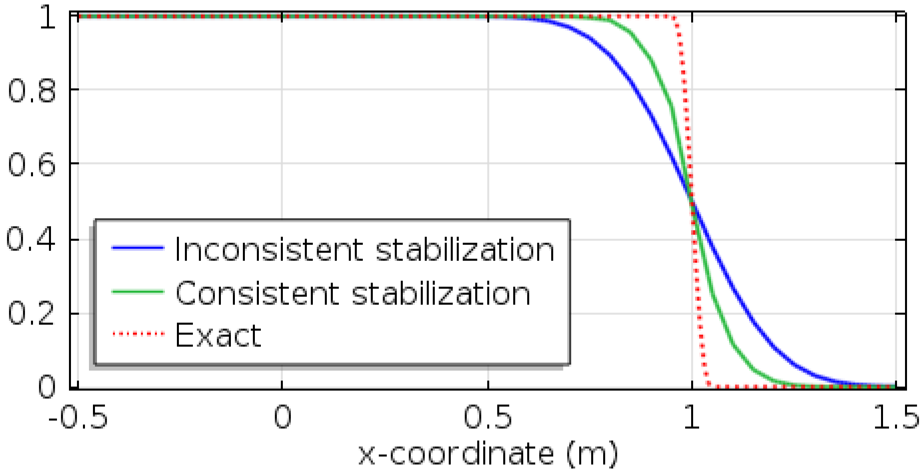
- 定义人工扩散系数

$$c_{\text{art}} = \delta h \|\beta\|$$

- Peclet数变形为

$$\text{Pe} = \frac{h\|\beta\|}{2(c + c_{\text{art}})} = \frac{h\|\beta\|}{2c + 2\delta h\|\beta\|}$$

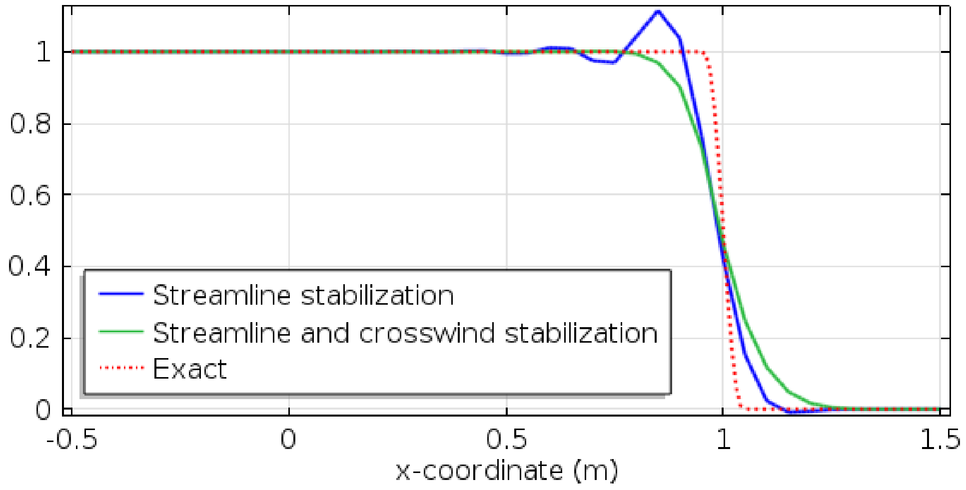
- 则δ=0.5，可以保证Pe小于1，默认值为0.25已经足够 。
- 该方法在各个方向上都施加人工粘性，所以称为“各向同性扩散”
- 直接施加人工扩散系数，会导致数值解与精确解之间的差异，所以称为“非自洽”方法
- 增大δ取值会增加误差



COMSOL

自洽稳定性

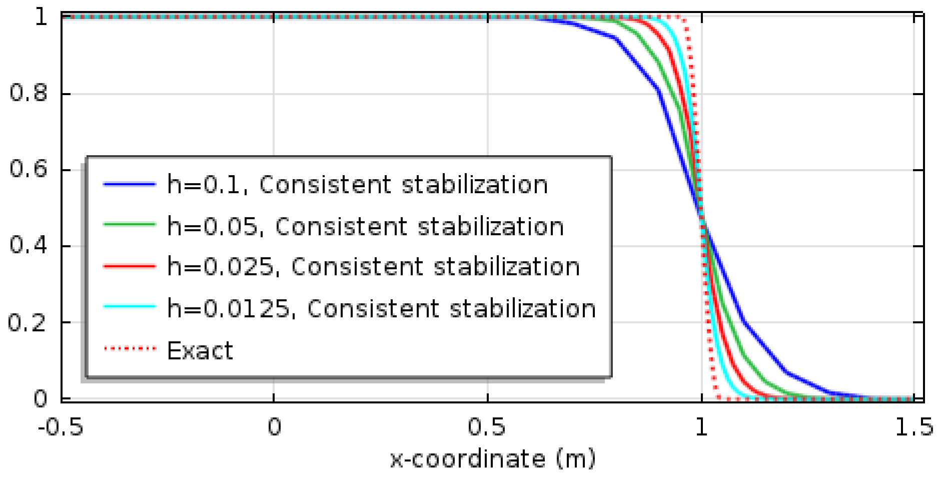
- 在网格足够精细的区域不使用人工扩散系数
- 流线扩散：只在流线方向添加人工扩散系数



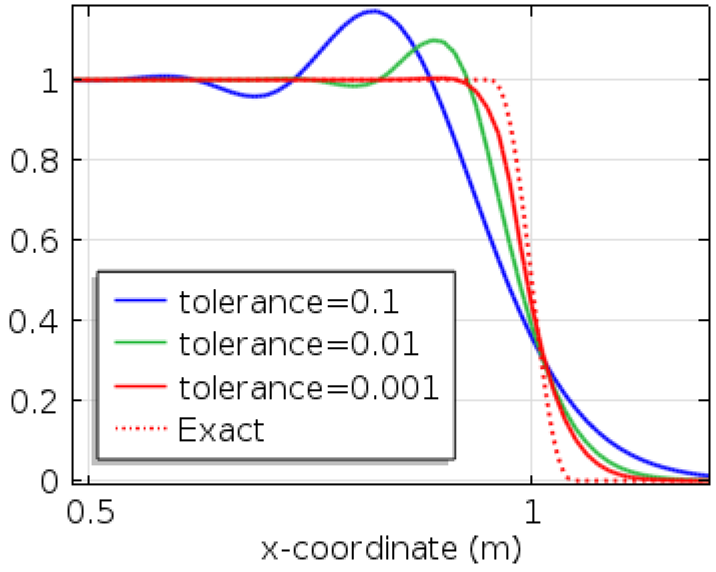
- 使用流线扩散后，可以抑制平滑区域的不稳定；但梯度大的位置还会出现不稳定；
- 添加侧线扩散后可以消除梯度位置的不稳定，同时保证梯度部分的精度（通过背后的数值方法，在该区域不施加人工扩散系数）

稳定性技术的影响因素

- 网格



- 容差



适用性

- 流线扩散
  - 作用于整个方程系统
  - 对流作用占主导时，流线扩散必须使用
  - 对于不可压缩NS方程，如果通过该设置方程稳定，则压力基函数的阶次可以与速度基函数的阶次相同，否则压力基函数的阶次要小于速度基函数的阶次（ Babuska-Brezzi 条件）
  - 对于不可压缩NS方程，当使用一阶单元时，必须使用流线扩散使用几何多重格点（求解器，或预条件器）进行求解，且至少一个层级的多重格点使用线性 Lagrange 单元时，同样需要使用流线扩散
- 侧风扩散
  - 作用于整个方程系统
  - 用于可压缩Navier-Stokes方程时，它变成捕获激波的算子
  - 不可压缩流动不包含激波，但是侧风扩散仍然很有用，可用于在尖端边界和剪切层引入额外的扩散，否则就应该使用非常密的网格来进行解析
  - 缺省激活侧风扩散，当问题可以完全被网格解析时很容易获得结果。

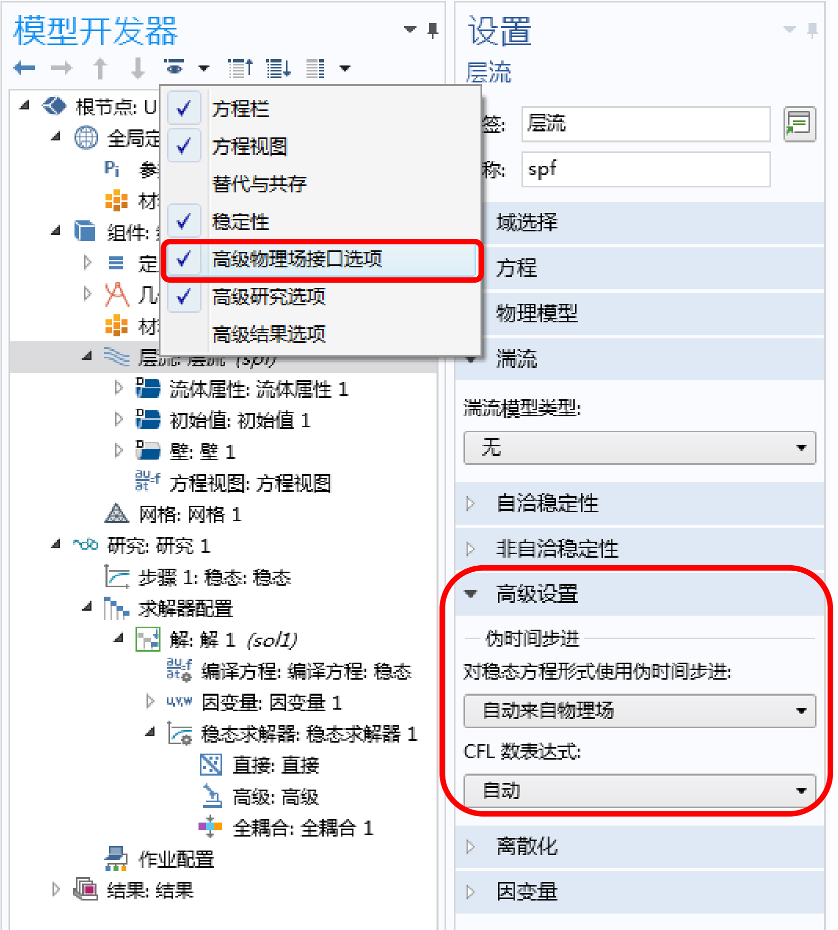
COMSOL

适用性

- 自洽稳定性：
  - 通过内部稳定性提高收敛性
  - 符合质量和动量守恒
  - 通常情况下不需要禁用（默认启用）
- 非自洽稳定性：
  - 各向同性扩散不符合质量和动量守恒的自洽性
  - 结果为近似解（不一定物理正确）
  - 方程稳定，所以收敛简单得多
  - 因子定义扩散项厚度δ，0 代表没有
  - 可用于生成流场的初始值
  - 连续性方程的稳定性并未得到改善

高级设定

- 伪时间步进：
  - 对于稳态问题，如果无法给出合理的初始值，可以转化为瞬态问题
  - 湍流模型缺省勾选
  - 可以用于层流，提高收敛性
  - CFL数表达式“自动”带 PID 算法
  - 可以手动指定 CFL 数
- 湍流变量尺度参数：
  - 为基于时间的解的可变缩放绝对容差



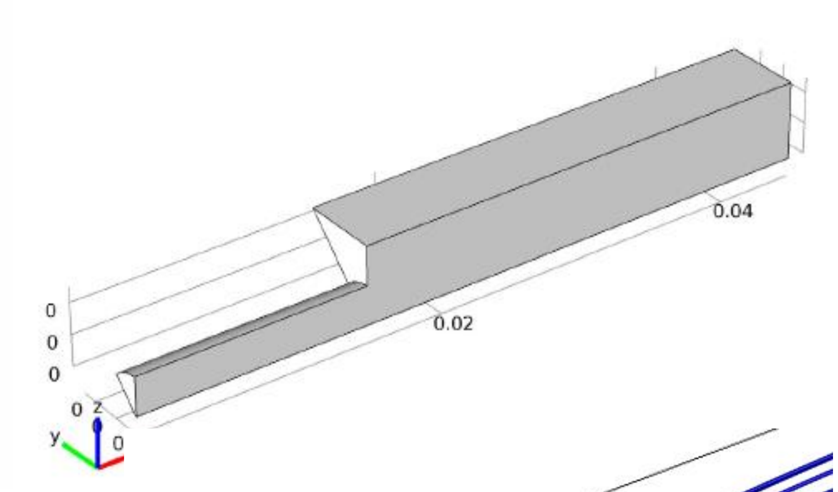
离散化

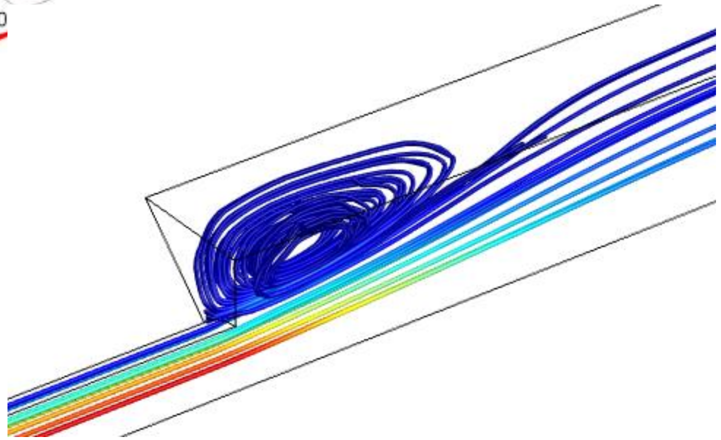
- 流体的离散格式
  - 有限元形函数阶次
  - P1 + P1：速度和压力都为线性
  - 对于湍流推荐使用 P1+P1
  - P2+P1：速度为二阶，压力为一阶，则常用于:
    - 周期性边界条件
    - 两相流

案例介绍及演示

后台阶流

- 后台阶几何内的不可压缩NS方程
- 依据几何对称性（区别镜像对称、旋转对称与轴对称），取1/8建模
- 流体离开狭窄区域后形成回流区，是需要考察的主要特征
- 本模型演示了回流区的形成，并使用流线使回流区可视化

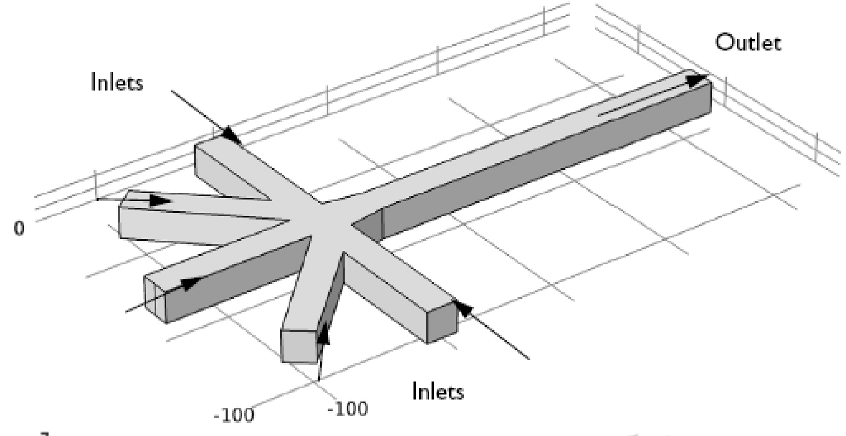


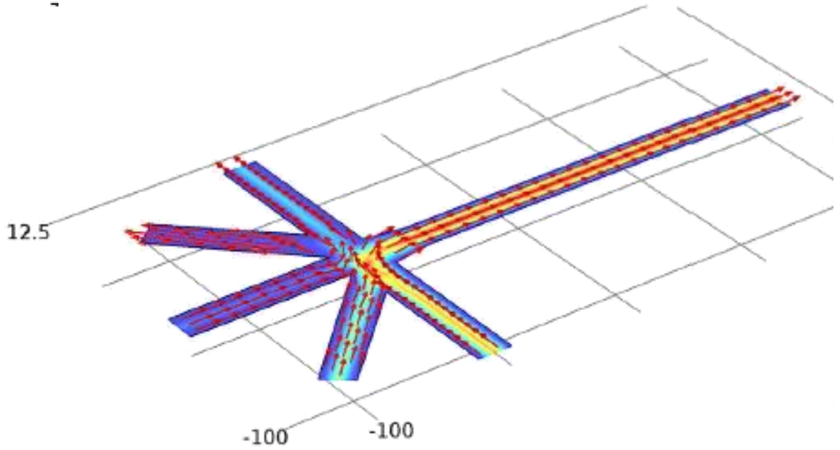


https://cn.comsol.com/model/stationary-incompressible-flow-over-a-backstep-94

星型微流道芯片

- 该芯片装置是一个注射器，定量地向反应器注射流体
- 通过压力精确控制流体流量和速度
- 边界条件随时间变化导致流场的瞬态效应，需要使用瞬态求解器建模
- 使用扫掠方法剖分网格（注意网格类型的使用）



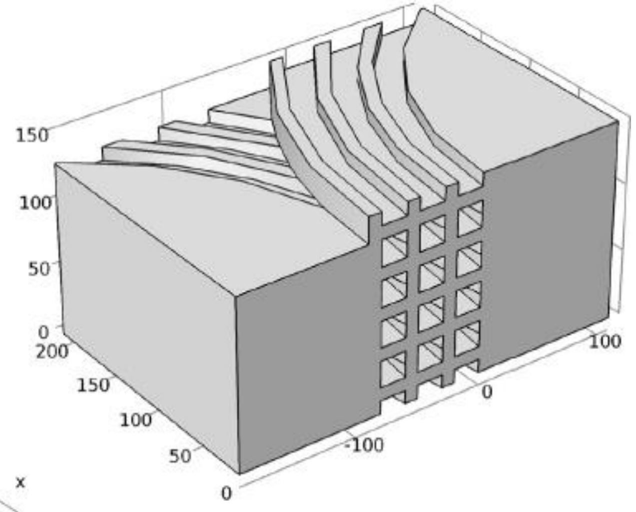


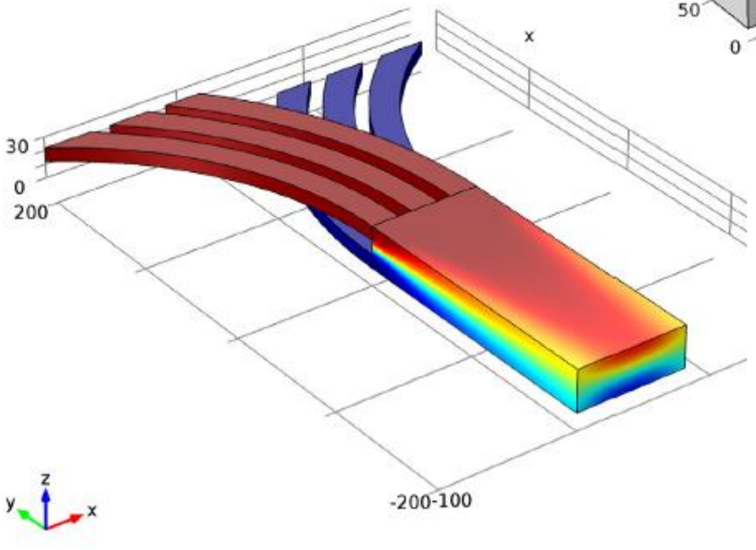
https://cn.comsol.com/model/star-shaped-microchannel-480

COMSOL

薄板混合器

- 微流动尺度下的流体混合与大尺度下的混合有很大不同（旋转机械，3D湍流）
- MEMS器件中的流体混合是典型的层流
- 对称条件
- 多物理场：层流与稀物质传递（对流&扩散问题）



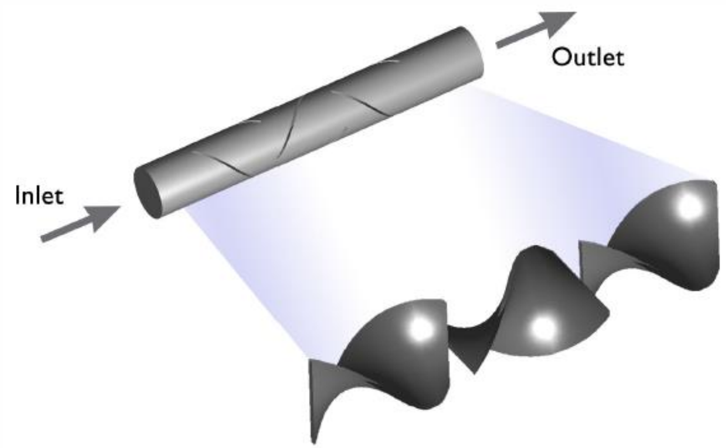


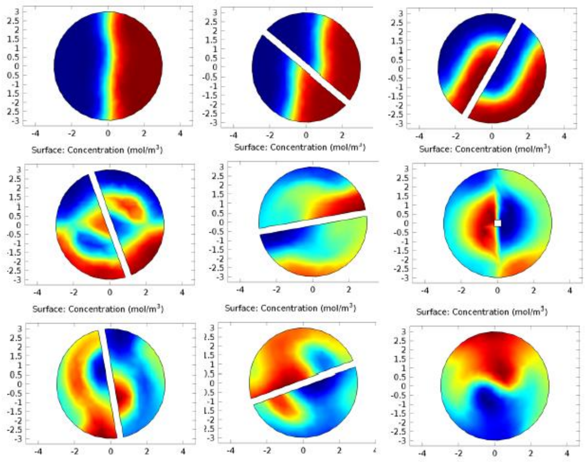
https://cn.comsol.com/model/lamella-mixer-466

COMSOL

层流静态混合器

- 研究管道内的螺带（静态结构）对流体的混合
- 由于较小的压降（对生物流体和精细化工至关重要），该混合技术适用于层流混合
- 多物理场：分两段求解层流与稀物质传递
- 定义阶跃函数

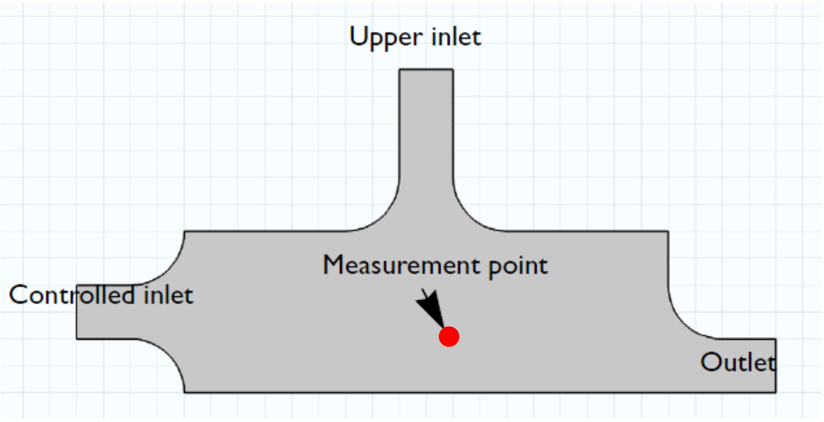


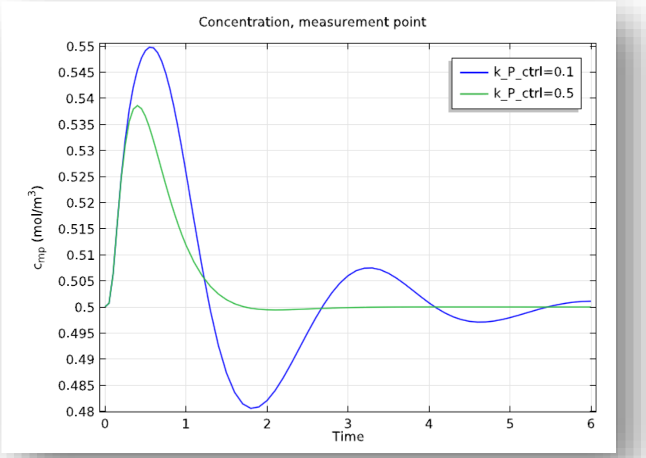


通过PID控制器控制反应器

- 两股流体在燃烧室内混合
- 起燃点处的物质浓度至关重要
- 左侧进口速度需要使用控制器控制，同时，需要对控制器参数进行优化
- PID控制律：

$$u_{in} = \underbrace{k_P(c - c_{set})}_{\mathrm{P}} + \underbrace{k_I \int_0^t (c - c_{set})dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{k_D \frac{\partial}{\partial t}(c - c_{set})}_{\mathrm{D}}$$

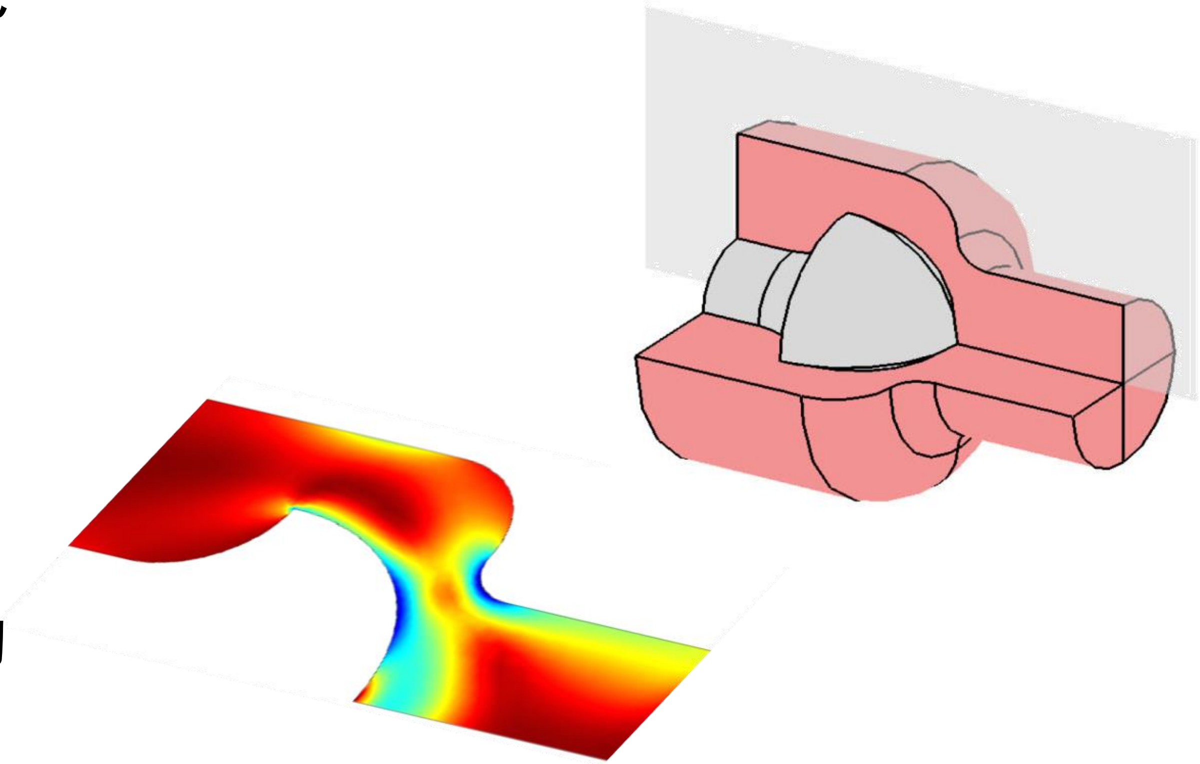




https://cn.comsol.com/model/process-control-using-a-pid-controller-866

案例演示：非牛顿流体

- 与剪切速率相关的粘度系数对线性聚苯乙烯溶液流动的影响
- 使用非牛顿流的Carreau粘性模型
- 轴对称→将3D模型简化为2D轴对称
- 通过参数化扫描研究进口压力的影响



https://cn.comsol.com/model/non-newtonian-flow-171