

**声明：**© 2019, COMSOL Co. Ltd. 本课程包含的所有内容版权为 COMSOL 公司所有。  
课程内容仅供参加本课程的用户学习使用，严禁个人或组织擅自以任何形式盗录、翻拍及转载。所有未经 COMSOL 公司授权而使用本课程内容的行为均视为侵权行为，COMSOL 公司将保留追究其法律责任的权利。

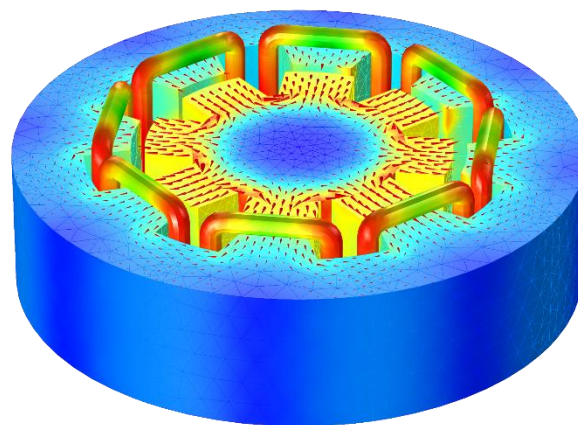
# COMSOL Multiphysics® 低频电磁场建模

## Part II

张 凯  
应用工程师  
COMSOL 中国

# 日程

- AC/DC模块简介
- 麦克斯韦方程理论
- 静电
- 电流、永磁体建模
- 磁场和线圈建模
- 电磁损耗及发热
- 电磁与机械耦合模型
- 建模技巧讲解

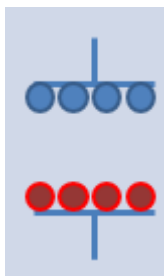


# 静电还是电流？

## ■ 静电 (es) :

- 电荷在表面分布，但不会移动；观测时间远小于电荷弛豫时间；系统完全电容性；忽略导电性。

$$t_{obs} \ll \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$



$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla V) = 0$$

## ■ 电流 (ec), 稳态

- 电荷移动形成稳态电流；电荷密度不随时间变化；系统完全电阻性；忽略介电特性

$$t_{obs} \gg \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



$$\nabla \cdot (-\sigma \nabla V) = 0$$

# 电容和电阻特性

- 电流瞬态、频域
  - 传导电流和位移电流
  - 电荷随时间变化
  - 电导和介电特性均不可忽略
  - 观测时间与电荷弛豫时间相同量级。

$$t_{obs} \sim \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

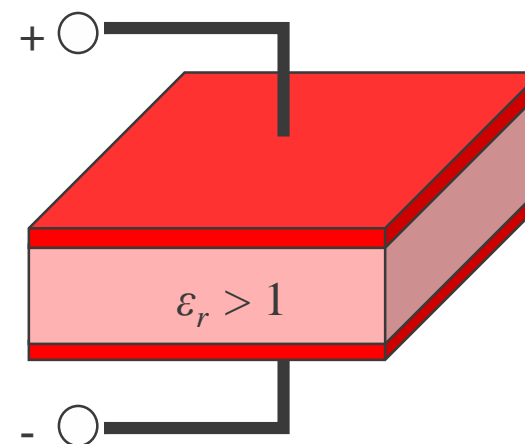
$$\nabla \cdot \left( \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}) = 0$$

# 电容器

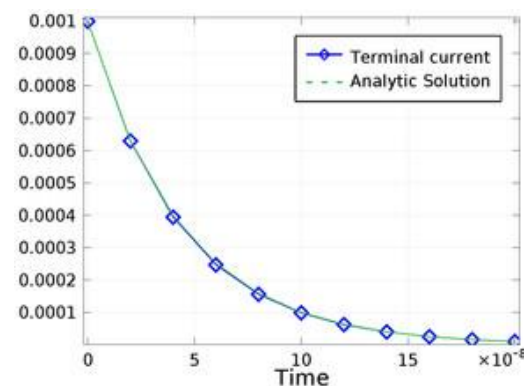
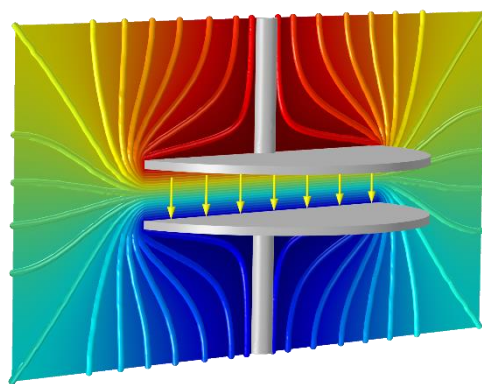
- 类似电阻...
- 为计算场需添加空气域
- 几何需要包含引出结构
- 所需材料属性不同
- 稳态和频域下方程不同：

$$\nabla \cdot (-(\epsilon_0 \epsilon_r) \nabla V) = 0$$
$$\nabla \cdot (-(\sigma + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r) \nabla V) = 0$$



# DEMO: 平行板电容器的静电、瞬态和频域模拟

- 平行板电容器在静电、频域和瞬态条件下模拟
- 研究了电容器边缘场和域尺寸效应
- 频域模拟解析了介电材料中的损耗
- 充电行为的瞬态模拟与解析解一致



<http://cn.comsol.com/model/frequency-domain-modeling-of-a-capacitor-12693>

<http://cn.comsol.com/model/transient-modeling-of-a-capacitor-in-a-circuit-12695>

<http://cn.comsol.com/model/computing-capacitance-12689>

# 电容-稳态/频域:

- 稳态: 所有区域无电流流过, 导体域等势, 绝缘体域无电流

$$\nabla \cdot (-(\epsilon_0 \epsilon_r) \nabla V) = 0$$

- 频域:

$$\nabla \cdot \underbrace{(-(\sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r) \nabla V)}_{\text{产生损耗}} = 0$$

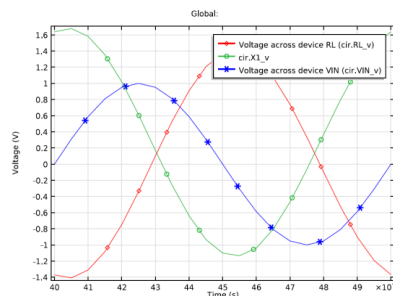
$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$$

$$\tan(\delta) = \frac{\sigma + \omega\epsilon''}{\omega\epsilon'}$$

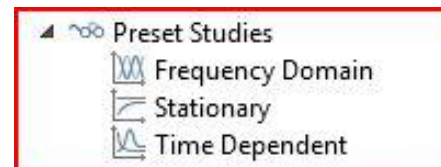
↑  
损耗角

# 电路(cir)接口

- 应用：与电路仿真耦合
  - 使用SPICE接口
  - 支持SPICE电路("Netlist")导入
- 解变量：V 和 I 回路(求解ODEs)
- 材料属性：不需要
  - 循环组件 + 节点连接
- 计算：耦合电路与 FEM 模型
- 求解类型：  
稳态 (st) + 频域(freq) + 瞬态(tr)



```
* BJT Amplifier circuit
.OPTIONS TNOM=27
.TEMP 27
Vin 1 0 sin(0 1 10kHz)
Vcc 4 0 15
Rg 1 2 100
Cin 2 3 10u
R1 4 3 47k
R2 3 0 10k
X1 4 5 inductor
RE 7 0 1k
Cout 5 6 10u
Rl 6 0 10k
Q1 5 3 7 BJT
.MODEL BJT NPN(Is=15f Ise=15f
+ Ikf=.3 Xtb=1.5 Ne=1.3 Nc=2 Rc=1
+ Cjc=7.5p Mjc=.35 Vjc=.75 Fc=.5
+ Cje=20p Mje=0.4 Vje=0.75
+ Vaf=75 Xtf=3 Xti=3)
.SUBCKT inductor V_coil I_coil
COMSOL: *
```





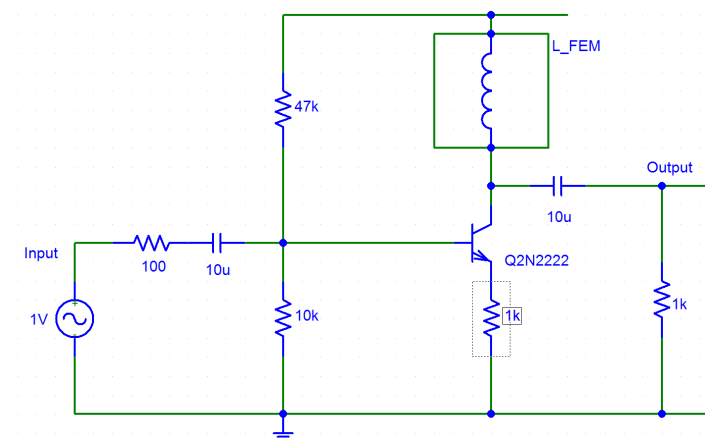
# 电路(cir)接口 - 详情

## ■ 电路元件：

- 接地、电阻、电容、电感
- 电压 / 电流源 (电压 / 电流控制)
- 子电路定义
- 二极管、PN BJT、n-沟道 MOSFET

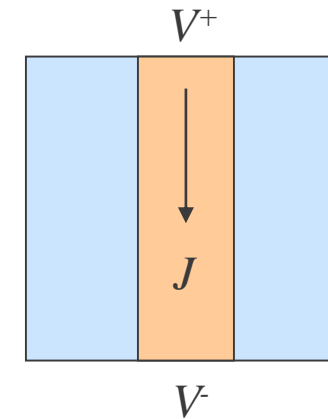
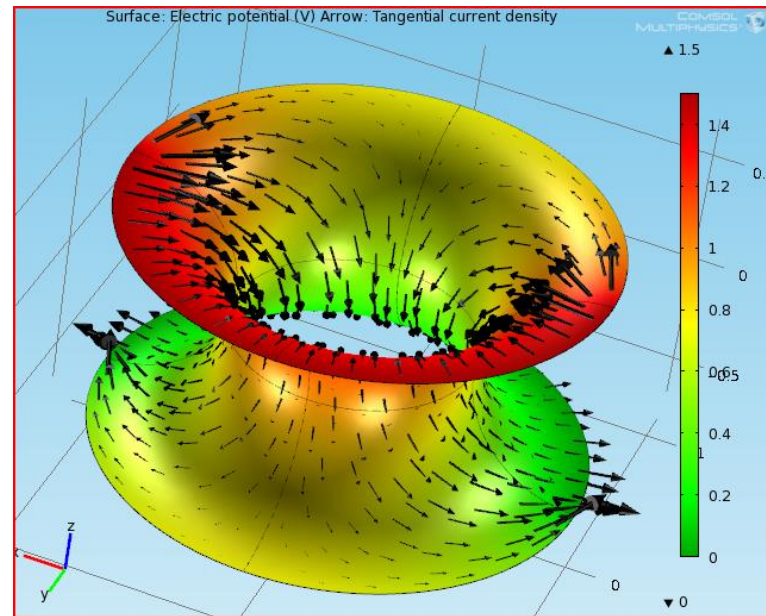
## ■ 耦合选择：

- 外部  $U$  vs.  $I \leftrightarrow$  FEM 模型提供电压，ODE 计算电流
- 外部  $I$  vs.  $U \leftrightarrow$  FEM 模型提供电流，ODE 计算电压
- 外部  $I$  终端，仅适用于(ec/ecs)，类似  $I$  vs.  $U$



# 电流, 壳(ecs)接口

- 类似电流(ec), 但为薄壳(1D 或 2D)



- ▲ 预置研究
  - 频域
  - 小信号分析, 频域
  - 稳态
  - 瞬态

<http://cn.comsol.com/showroom/gallery/465/>

# 电流边界条件

## ■ 常用边界条件:

- 接地
- 电势
- 终端
- 电绝缘

## ■ 其他边界条件:

- 悬浮电位 (表面电压恒定但未知)
- 法向电流密度(指定电流出口或出口)
- 接触阻抗 (低电导率/介电常数\*边界)
- 电屏蔽 (高电导率\*边界)
- 电接触 (经验电导系数关系边界)

# 接触阻抗 (ec, ecs)

- 用来模拟低电导率/介电常数薄间隙
- 仅适用内部边界,切向无电流流过
- 描述电阻和电容效应
- 假设电流垂流入边界, 电压不连续:

- $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_1 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_2 = \frac{\sigma}{d_s} (V_1 - V_2)s$$

▼ 接触阻抗

层明细表:

薄层
----

表面厚度:

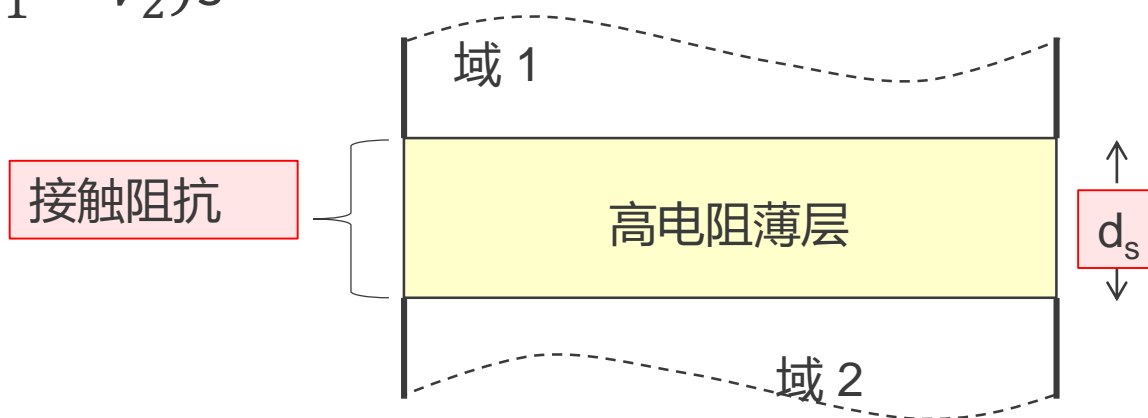
$d_s$  5[mm]

电导率:

$\sigma$  来自材料

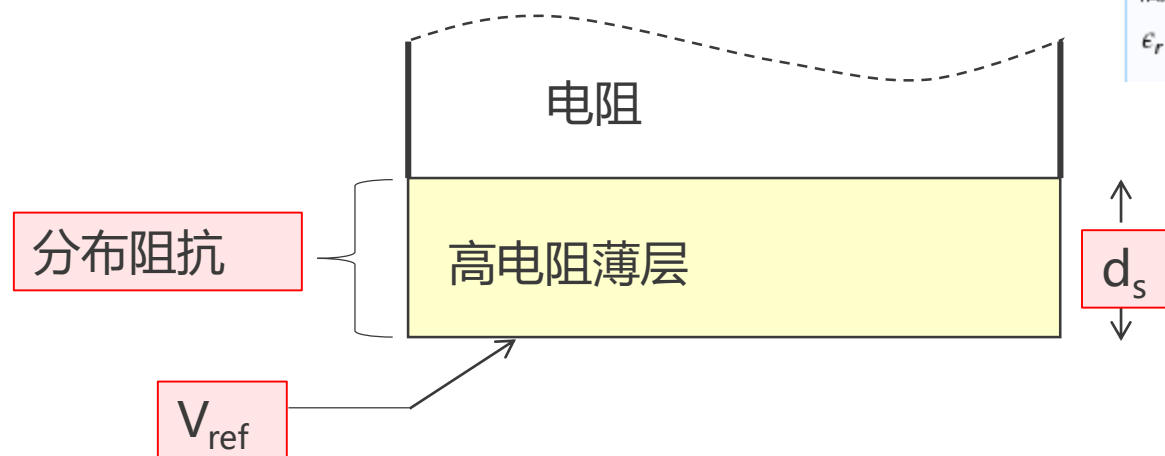
相对介电常数:

$\epsilon_r$  来自材料



# 分布阻抗 (ec, ecs)

- 域表面的高电阻薄层
- 只适用于外部边界
- 切向无电流流过
- 描述电阻和电容效应



分布阻抗

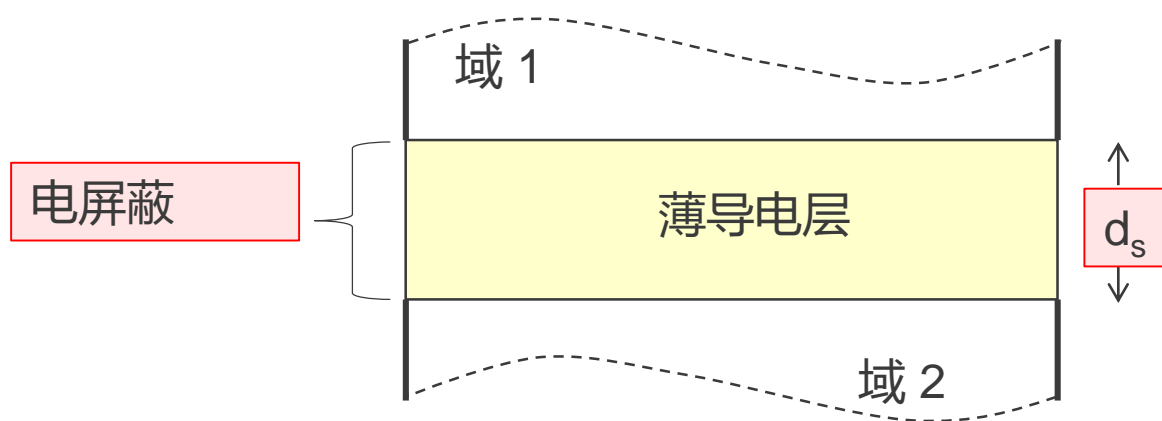
$V_{\text{ref}}$  0

层明细表:

薄层
表面厚度:
$d_s$ 5[mm]
电导率:
$\sigma$ 来自材料
相对介电常数:
$\epsilon_r$ 来自材料

# 电屏蔽(ec, ecs)

- 用来模拟高电导率或介电常数边界
- 方程： $n \cdot (J_1 - J_2)$  不一定为零：
  - 边界上每个节点允许存在电流的净流入或者流出
  - 电流可以沿边界上切线方向流动,并可存在任何一处
- 在瞬态模拟中，位移电流可以在边界上切线方向流动
- 类似于“介电屏蔽”



▼ 厚度

表面厚度:

$d_s$  1[cm]

▼ 电场

本构关系:

相对介电常数

$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$

相对介电常数:

$\epsilon_r$  来自材料

▼ 传导电流

电导率:

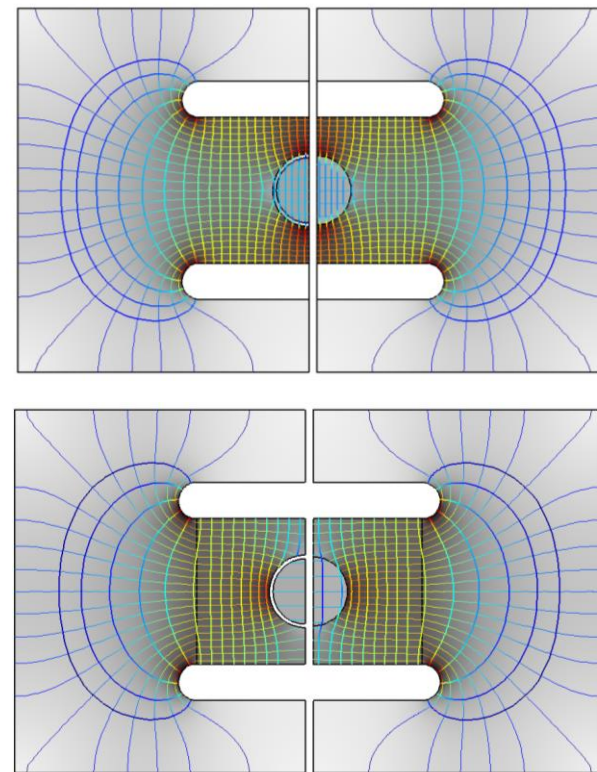
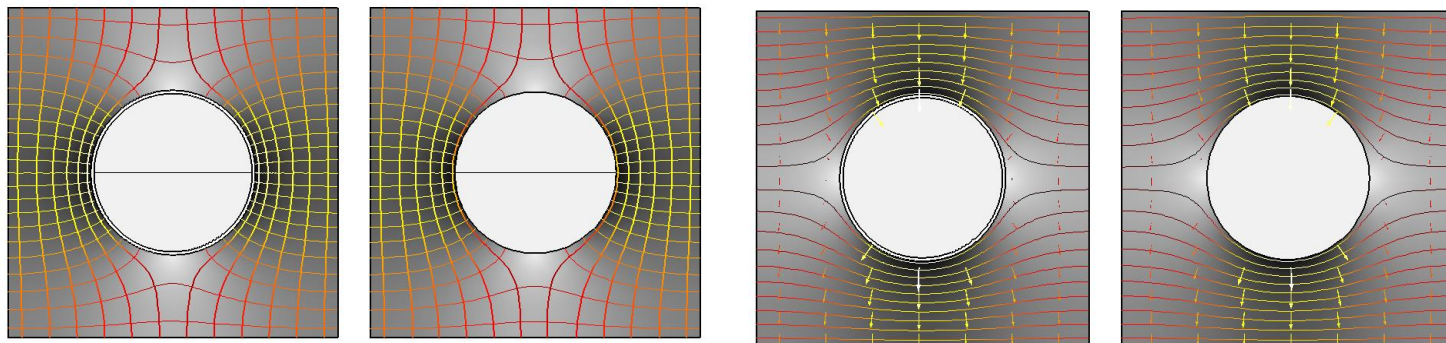
$\sigma$  来自材料

## 悬浮电位 (es, ec, ecs)

- 完美导电薄层 (ec, ecs)
- 集总电源 (ec, ecs) 或电极 (es)

# 练习：薄层边界条件模拟

- <http://cn.comsol.com/showroom/gallery/12623/>
- <http://cn.comsol.com/showroom/gallery/12621/>
- <http://cn.comsol.com/showroom/gallery/12651/>
- <http://cn.comsol.com/showroom/gallery/12625/>



# 电流误区

## ■ 在非导体域中求解稳态电流问题

- 控制方程:  $\nabla \cdot (\sigma \nabla V + \varepsilon_0 \varepsilon_r (\partial \nabla V / \partial t)) = 0$
- 如果  $\sigma = 0$  那么  $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r (\partial \nabla V / \partial t)) = 0$
- 如果存在稳定电流  $\partial / \partial t \rightarrow 0$
- 控制方程变为  $\nabla \cdot \mathbf{0} = 0$
- 出现报错!

## ■ 求解频域问题

- 控制方程:  $-\nabla \cdot ((\sigma + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r) \nabla V) = 0$
- 如果  $\omega$  较大  $(\sigma + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r) \sim j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$  求解数值解
- 将会导致错误结果, 因为位移电流抑制了传导电流

- 玻璃
- $\varepsilon_r \varepsilon_0 \sim 4.2 \times 10^{-12}$  [F/m]
- $\sigma \sim 1 \times 10^{-14}$  [S/m]



# 数值问题

$$\nabla \cdot \underbrace{\left( -(\sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r) \nabla V \right)} = 0$$

当这两项相差很大 (~1e6)  
时, 容易造成方程病态

$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$$

$$\tan(\delta) = \frac{\sigma + \omega\epsilon''}{\omega\epsilon'}$$

↑

Loss tangent

在空气中  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_r \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m; 当 $\omega$ 也很小时, 方程近似于:

$$-\nabla \cdot ((0) \nabla V) = 0$$

解决办法: 给空气赋值较小电导率, 或选用直接求解器

需要计算焦耳热时才考虑导体, 尽量满足:

$$\frac{\sigma_{metal}}{\sigma_{dielectric}} \leq 10^6$$

# 总结：电场模拟选择哪个接口？

- 静电 (es)
  - 静电场，无电流
- 电流 (ec)
  - 时谐电场
  - 直流电
  - 交流电，忽略电感效应（趋肤深度  $\gg$  几何）
- 电流, 壳 (ecs)
  - 薄层中电流，近似为边
- 电路 (cir)
  - 以电路与 FEM 模型耦合

## 选择物理场

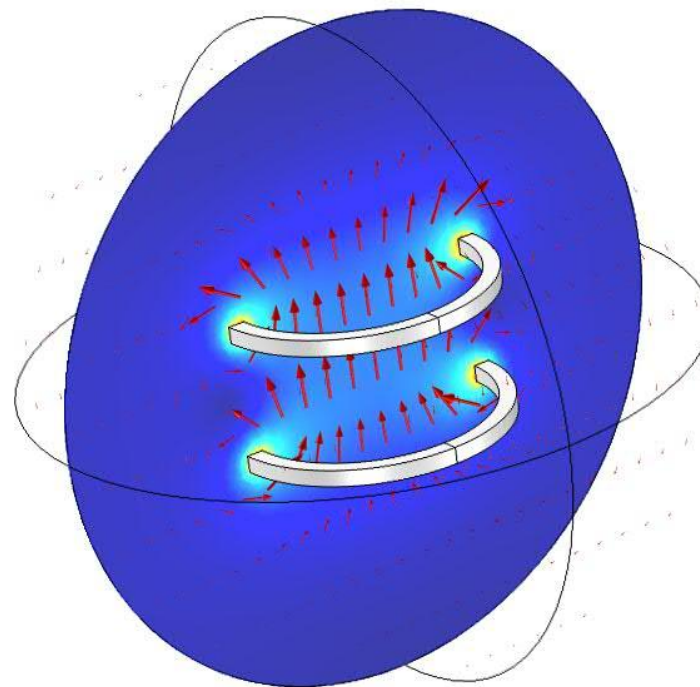


# 磁场模拟

模型中无电流	静磁场	交流磁场	瞬态磁场
$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$ $\mathbf{H} = -\nabla V_m$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$	$(j\omega\sigma - \omega^2\varepsilon)\mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$	$\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$
其中 $V_m$ 是磁标量势	A 是磁矢量势, J 是电流密度, 它们能同时求解, 或单独分析	附加项代表感应电流和位移电流	控制方程中不包括位移电流

# 磁场：如何选择接口？

- 磁场
  - 磁场是由已知电流或线圈域激励
  - 时谐效应可以得到感应电流
- 磁场和电场
  - 与磁场线圈域中的电压激励类似
  - 时谐效应可以得到感应电流
- 磁场，无电流
  - 永磁体产生的静态磁场
- 磁场公式
  - 超导体
- 电路
  - 耦合模型与外部电路



# 磁场，无电流(mfnc) 接口

- 应用：

- 磁介质中的静磁场，无电流源；
- 永磁铁，磁性材料；
- 忽略电流

- 解变量：标量磁势， $V_m$

- 计算： $\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla V_m + \mu_0 \mathbf{M}) = 0$

- 磁场： $\mathbf{H} = -\text{grad}(V_m)$
- 磁感应强度： $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$
- 磁力(麦克斯韦应力张量)

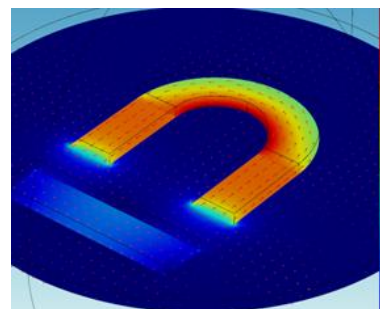
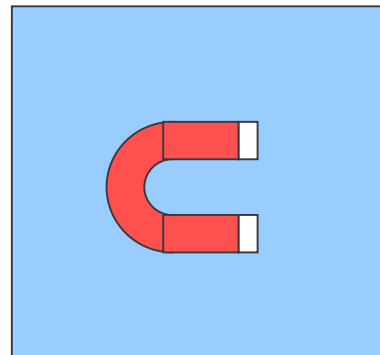
- 求解类型：稳态(st) + 瞬态(tr)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

$$V_m$$



预置研究  
稳态  
瞬态

# 磁场，无电流-材料属性

- 材料中可以定义  $\mu_r$  或  $B(H)$

- 可以选择材料本构：

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r$$

▼ 磁场

本构关系:

相对磁导率 ▼

相对磁导率

磁损耗

B-H 曲线

磁化

剩余磁通密度

非线性永磁体

磁滞 Jiles-Atherton 模型

外部材料

▼ 磁场

本构关系:

剩余磁通密度 ▼

$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r$

相对磁导率:

$\mu_r$  来自材料 ▼

剩余磁通密度:

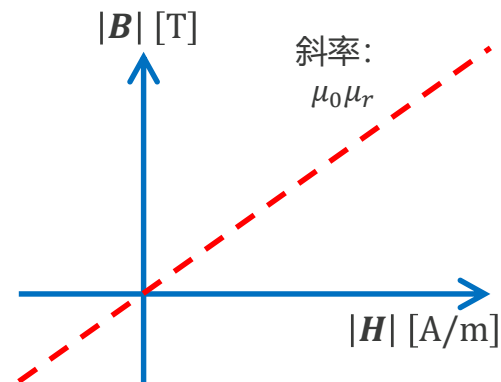
	0	x
$\mathbf{B}_r$	0	y
	0	z

T

# 磁性材料建模

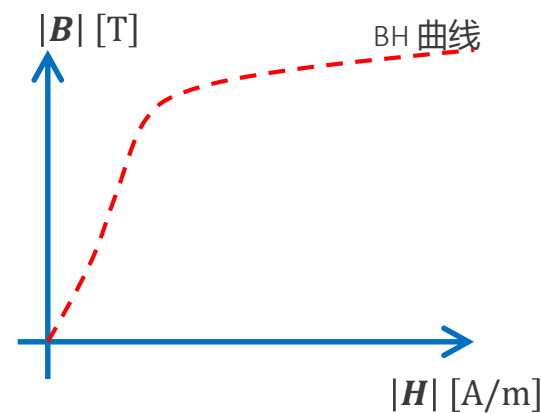
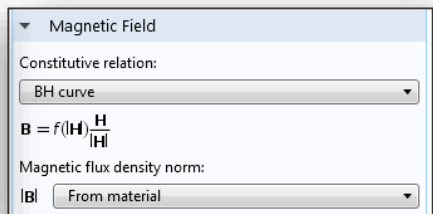
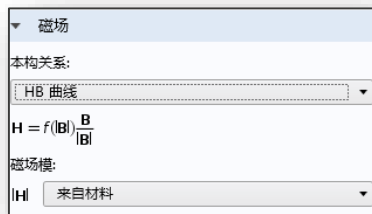
## ■ 相对磁导率：

- 线性材料  $\mu = \mu_0 \mu_r$
- 比例系数为磁导率
- 真空磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H / m]$
- 空气和非磁性材料的相对磁导率  $\mu_r$  默认为1



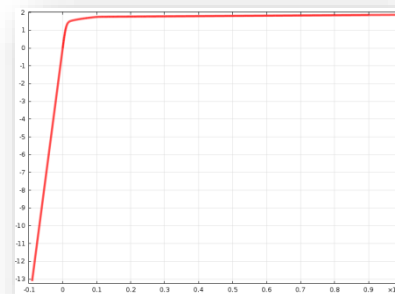
## • BH或HB曲线：

- 用于稳态或时域下的非线性磁性材料建模
- 可通过外部文件导入数据
- 无磁滞
- 初始磁化为零



# 磁饱和曲线

- 非线性磁性材料库
  - 150+ 材料的B-H 和H-B曲线
- B-H 曲线
  - $B = f(H)$
  - 使用磁标势
  - 估算方式:  $V_m \rightarrow H \rightarrow B$
- H-B 曲线
  - $H = g(B)$
  - 使用磁矢势
  - 估算方式:  $A \rightarrow B \rightarrow H$



- 非线性磁性材料
- ▷ Silicon Steel NGO
  - ▷ Silicon Steel GO
  - ▷ Metglas
  - ▷ Cobalt Steel
  - ▷ Nickel Steel
  - ▷ Stainless Steel
  - ▷ Low Carbon Steel
  - ▷ Casting
  - ▷ Iron Powder
  - ▷ Alloy Powder Core



# 磁性材料建模

- 等效HB曲线

- 频域下的非线性磁性材料建模分析
- 通过APP把常规的HB曲线转化为等效HB曲线数据导入模型中
- 通过平均能量方法获得频域下的BH或HB曲线
- 无磁滞

- 磁滞 Jiles-Atherton 模型

- 各向同性材料中的旋转场
- 各向异性材料

- 外部材料函数

- 导入C (.dll) 编写的外部材料函数
- 导入磁滞或不可逆材料属性
- 通过C调用 FORTRAN 函数
- 用户定义高斯点处的状态变量

▼ 磁场

本构关系:

磁滞 Jiles-Atherton 模型

$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

最大磁化参数:

$M_s$  来自材料

朗之万斜率参数:

$a$  来自材料

固定参数:

$k$  来自材料

可逆性参数:

$C$  来自材料

域间耦合参数:

$\alpha$  来自材料

初始磁化:

$M_0$	0	x
	0	y

A/m

▼ 磁场

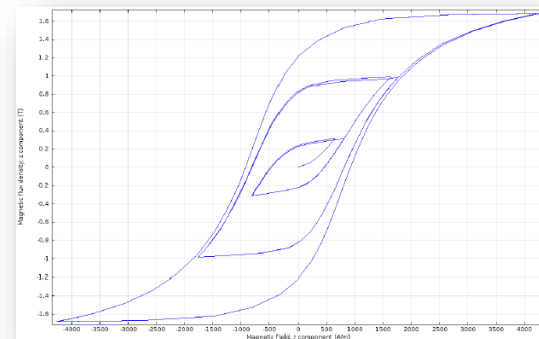
本构关系:

等效 HB 曲线

$\mathbf{H} = f_{\text{eff}}(|\mathbf{B}|) \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$

等效磁场模:

$|\mathbf{H}|_{\text{eff}}$  来自材料



<http://www.comsol.com/blogs/accessing-external-material-models-for-magnetic-simulations/>  
<https://www.comsol.com/model/vector-hysteresis-modeling-20671>  
<https://www.comsol.com/blogs/model-magnetic-materials-in-the-frequency-domain-with-an-app/>

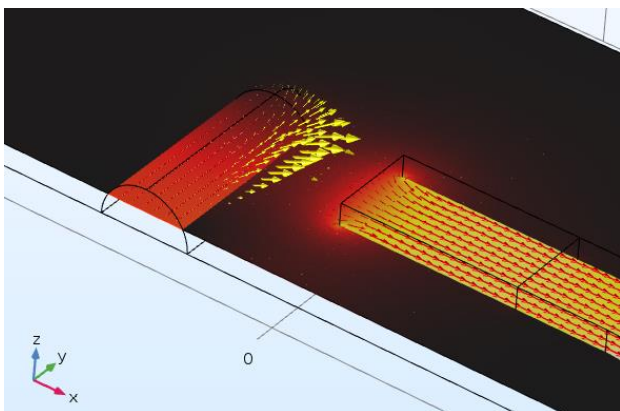
# 力的计算

- COMSOL内置电磁力的计算功能，同时也可支持自定义
  - Maxwell应力张量（内置）
  - 带电粒子追踪（内置）
  - 洛伦兹力积分（内置）
  - 虚功原理（敏感性分析接口）
  - Biot-Savart's 定律积分（PDE接口）
  - Arrkio's 方法

<https://www.comsol.com/blogs/how-to-analyze-an-induction-motor-a-team-benchmark-model/>

# 图形化界面中的标准力计算

- 在指定区域上将力或力矩定义为任意变量进行查看或调用
- 自动进行积分
- 空间力贡献（maxwell 应力张量或洛伦兹力贡献）



磁化区域上的Maxwell 表面应力张量

permanent\_magnet.mph (root)

- 全局定义
- 组件 1 (comp1)
  - 定义
  - 几何 1
  - 材料
  - 磁场, 无电流 (mfnc)
    - 磁通量守恒 1
    - 磁绝缘 1
    - 初始值 1
    - 磁通量守恒 2
    - 零标量磁势 1
    - 力计算 1
  - 网格 1
  - 研究 1
  - 结果

域选择

选择: 手动

2

激活

替代与共存

方程

力计算

力名称:

rod

扭矩轴:

0	x
0	y
1	z

扭矩旋转点:

0	x
0	y
0	z

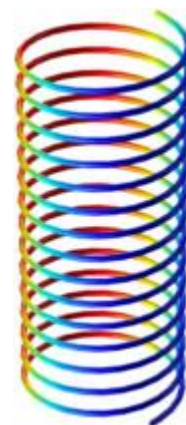
m

# 电磁力计算方法

- 带电粒子受力：

$$\mathbf{F} = \underbrace{q\mathbf{E}} + \underbrace{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

电场力    磁场力



举例：粒子回旋运动轨迹计算（粒子追踪接口案例）

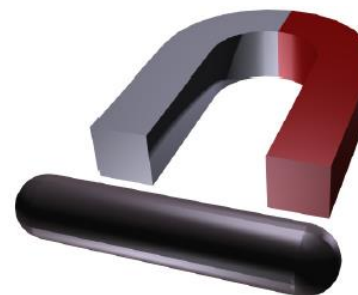
- 洛伦兹力积分

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$$

# 电磁力计算方法

- Maxwell 表面应力张量（COMSOL标准形式）

$$\mathbf{F} = \int \frac{d\mathbf{F}}{dV} dV \quad \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

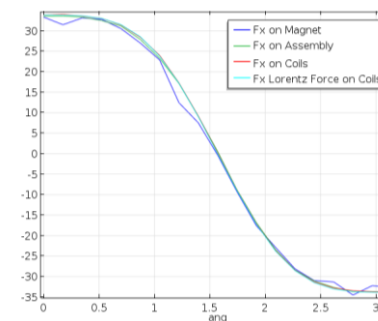
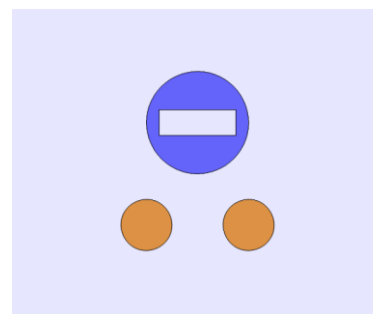


- 通过应力张量的面积分代替体积分（高斯散度定律）

$$\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA$$

- 可能不足：磁体表面非连续性及“尖端”附近的表面法向不确定性有时会影响结果准确性。

— 添加/修改积分区域；加密网格等



# 背景：Maxwell 应力张量

- 带电粒子：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 带电粒子区域：

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} + \rho (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

- 通过场代替电荷和电流：

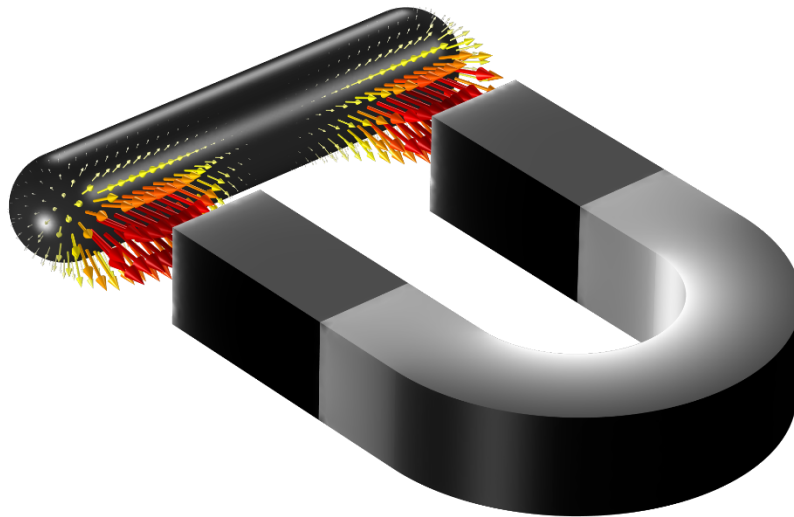
$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} \qquad \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}$$

- 适用于所有区域（即使是真空）的公式：

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

# DEMO: 永磁体的磁场

- 磁场模拟的介绍案例，分析了典型的马蹄形磁铁和铁棒
- 使用对称来减少问题大小
- 计算了磁场和力



<http://cn.comsol.com/showroom/gallery/78/>

# 边界条件

- 常用边界条件：

- 磁绝缘 (磁场线平行)

- 零磁标量势  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$  (磁场线垂直)

- 其他边界条件：  $V_m = 0$

- 磁通密度 (指定边界磁场)

- 低薄磁导率间隙 (低磁导率边界)

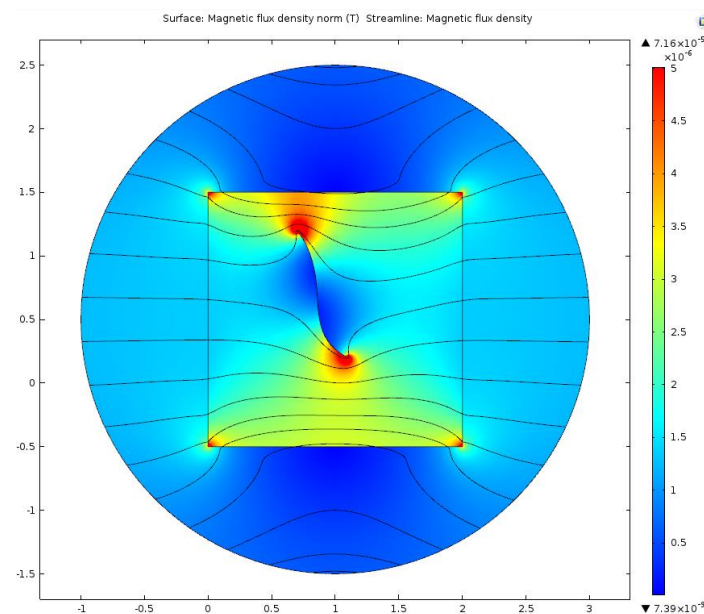
- 磁屏蔽 (高磁导率边界)

- 在多数情况下，最重要的特征为域条件。磁绝缘从外部边界条件产生



# 低薄磁导率间隙

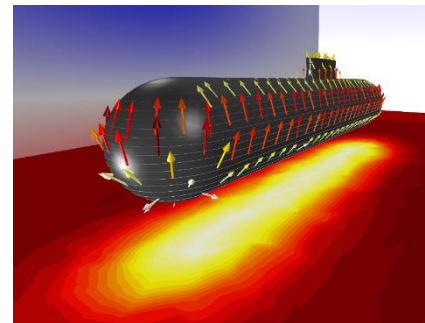
- 用来模拟低磁导率间隙
  - 空气
  - 薄片
- 有磁标量势公式
- 示例：
  - 中间区域：  $\mu_r = 500$
  - 被空气包围：  $\mu_r = 1$
  - 薄裂隙：  $\mu_r = 1$
- 场线在裂隙周围移动



# 练习：

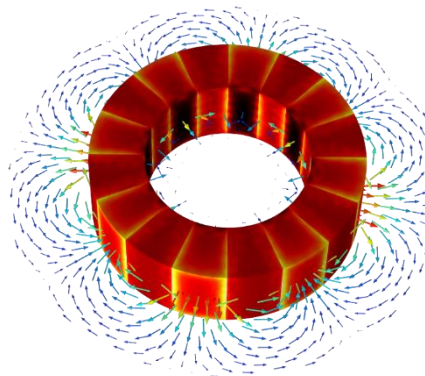
## ■ 潜艇的磁场特征

- 行驶在水面或水下的船引起了可探测的地球磁场局部扰动
- 基于预先所知的船体磁属性知识，船的磁场特征能通过产生适当强度和方向的抵消磁场而减少



## ■ Halbach 转子

- 仅模拟 Halbach 转子 8 个向外通量聚焦磁极中的一个
- 评估了直角坐标和柱坐标中的磁通密度
- 使用参数化曲线特征计算了转子内外的磁场



<http://cn.comsol.com/showroom/gallery/291/>

<http://cn.comsol.com/showroom/gallery/14369/>