



考研数学微积分笔记

作者：

时间：April 4, 2021

版本：1.0

邮箱：



目录

1 极限与连续	1
1.1 极限的有关定义	1
1.2 极限的性质	3
1.2.1 极限的一般性质	3
1.2.2 极限的存在性质	4
1.2.3 无穷小的性质	6
1.3 两个重要极限	7
1.3.1 准备工作	7
1.3.2 两个重要极限式	7
1.4 连续与间断	13
1.4.1 相关定义	13
1.4.2 函数在区间上连续	14
2 导数与微分	16
2.1 导数的有关定义	16
2.2 可微	18
2.3 求导工具	18

第一章 极限与连续



1.1 极限的有关定义

定义 1.1. 数列极限

数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (1.1)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A (或: 收敛于 A), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (1.2)$$



定义 1.2. 函数极限-1

函数 $f(x)$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.3)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1.4)$$



笔记

1. 若 $x \rightarrow a$, 则 $x \neq a$. 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$;
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $f(a)$ 无关. 如: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$;
 3. $x \rightarrow a$ 分为 $x \rightarrow a^+$ 和 $x \rightarrow a^-$;
 4. 我们称 $0 < |x - a| < \delta$ 为 a 的去心邻域;
 5. $\lim_{x \rightarrow a^-} \triangleq f(a - 0)$ (左极限); $\lim_{x \rightarrow a^+} \triangleq f(a + 0)$ (右极限)。
- ★ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\iff f(a - 0), f(a + 0)$ 都存在且相等。

定义 1.3. 函数极限-2

函数 $f(x)$, 若对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > (<)0$, 当 $x > X(< -X)$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1.5)$$

则称函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} f(x) = A \quad (1.6)$$



如, 对于函数 $f(x) = \arctan x$ 有: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

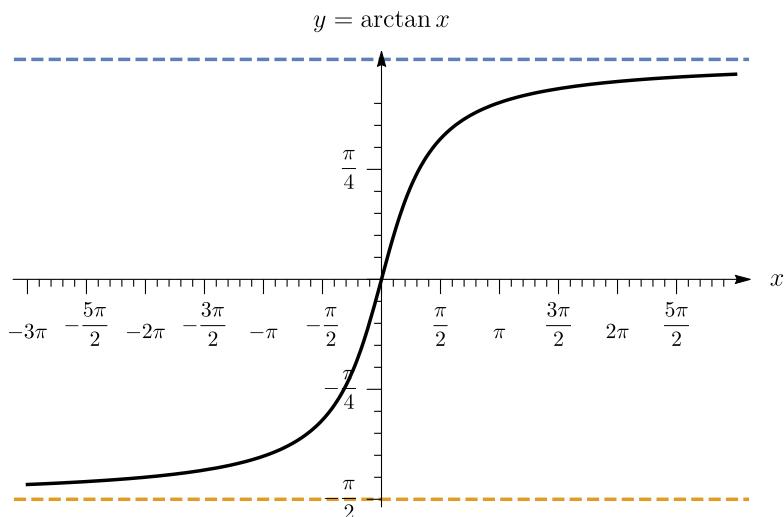


图 1.1: $f(x) = \arctan x$ 的图像

定义 1.4. 无穷小

若 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为无穷小。



笔记

1. 0 是无穷小, 但无穷小不一定为 0;
2. $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ 是否为无穷小与 x 的趋向有关; 如, $\alpha = 3(x - 1)^2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = 0$, 则 $3(x - 1)^2$ 当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小。
3. 设 $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, 有如下三种情形:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 称 β 为 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = k (\neq \infty, 0)$, 称 β 为 α 的同阶无穷小, 记作 $\beta = O(\alpha)$ (特例: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 为等价无穷小, 记作 $\beta \sim \alpha$)。

1.2 极限的性质

1.2.1 极限的一般性质

下面我们开始介绍极限的一般性质，并给出相关的证明。主要有：唯一性、保号性（重点）两个性质。

1. 唯一性

性质 极限存在必唯一。

证明 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 又 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ ，不妨设 $A > B$ 。我们采用反证法来完成相关的证明。

取 $\varepsilon = \frac{A - B}{2} > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ，所以存在 $\delta_1 > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \frac{A - B}{2}$ ，也即 $\frac{A + B}{2} < f(x) < \frac{3A - B}{2}$ (*)；同理，由第二个极限可以得出 $\frac{3B - A}{2} < f(x) < \frac{A + B}{2}$ (**)。从而，若我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，就有(*)与(**)同时成立。但 $f(x) > \frac{A + B}{2}$ 与 $f(x) < \frac{A + B}{2}$ 显然不可能同时成立，矛盾，从而假设不成立。

同理，我们可以得到 $A < B$ 也不成立。故 $A = B$ 。 \square

2. ★ 保号性

性质 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > (<)0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $f(x) > (<)0$ 。

证明 设 $A > 0$ 。取 $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$ 。因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ，故存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$ 。展开可得 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$ 。从而 $f(x) > 0$ 。 \square

例 1.1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x - 1)^3} = -2$ ，则 $x = 1$ 为什么点？

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x - 1)^3} = -2 < 0$ ，故根据保号性，存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $\frac{f'(x)}{(x - 1)^3} < 0$ 。于是，当 $x \in (1 - \delta, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (1, 1 + \delta)$ 时， $f'(x) < 0$ 。故 $x = 1$ 为极大值点。

1.2.2 极限的存在性质

下面介绍几个判定极限存在的性质。

性质

1. 数列型

如果 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ 。

2. 函数型

如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ 。

型一:n 项和求极限

例 1.2 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

解 以上是非齐次的情形, 采取夹逼定理。于是令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ 。

容易得到: $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} = 1$, 故得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 。

例 1.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$ 。

解 令 $b_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n}$, 从而 $\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq b_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$ 。

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{左} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{右} = \frac{1}{2}$ 。故所求极限为 $\frac{1}{2}$ 。

例 1.4 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ 。



解

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2
 \end{aligned}$$

例 1.5 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$ 。

解

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2 + i^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

 **笔记** 对于 n 个数相加，分子或分母不齐次的情况，用夹逼定理；

对于分子、分母齐次且分母多一次的情况，用定积分定义。

我们还有另一个著名的判定数列极限存在性的定理，也即如下性质：

性质 单调有界数列必有极限。

这个性质可以分为两类来讨论，一为单调递增有上界，二为单调递减有下界。

型二：极限存在性证明

例 1.6 已知， $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，并求之。

解 显然， $\{a_n\}$ 单调递增，现在我们证明 $a_n \leq 2$ ，采用数学归纳法：

首先， $a_1 = \sqrt{2} < 2$ 。假设 $a_k \leq 2$ ，则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$ 。因此 $a_n \leq 2$ 。从而由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。下面求出这个极限：

设极限为 A , 由 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, 令 $n \rightarrow \infty$, 两边平方有 $A^2 = A + 2$, 解得 $A = 2$ 或 $A = -1$ 。由于 $a_n > a_1 = \sqrt{2}$, 故 $A = -1$ 舍去。从而极限为 2。

例 1.7 已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

解 先证明 $a_n > 0$: 由于 $a_1 > 0$, 故设 $a_k > 0$ 。则 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{a_k}) > 0$ 。于是根据均值不等式可以得到 $a_{n+1} \geq 1$ 。而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) - a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - a_{n+1})$ 。由于 $a_n \geq 1$, 故 $\frac{1}{a_n} \leq a_n$ 。从而, $a_{n+1} - a_n \leq 0$ 。于是数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 又有 $a_n \geq 1$, 从而得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

1.2.3 无穷小的性质

(一) 一般性质

1. 若 $\alpha \rightarrow 0$ 且 $\beta \rightarrow 0$, 则:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \pm \beta \rightarrow 0, \\ k\alpha \rightarrow 0, \\ \alpha\beta \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

2. 若 $|\alpha| \leq M, \beta \rightarrow 0$, 则 $\alpha\beta \rightarrow 0$ 。

3. $\alpha \rightarrow 0, \lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ 。

(二) 等价性质

1. (a). $\alpha \sim \alpha$ (自反性);

(b). $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (对称性);

(c). $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (传递性)。

2. $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A$ 。

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时:

(a). $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(x + 1)$;

(b). $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(c). $(1 + x)^a - 1 \sim ax$ 。



1.3 两个重要极限

1.3.1 准备工作

我们先证明如下结论：

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 如图1.2所示，在单位圆中，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}r^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x = S_1$ ， $S_{\text{扇形 } AOB} = \frac{1}{2}x = S_2$ ， $S_{\text{Rt } \triangle AOC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \tan x = S_3$ 。

显然有

$$S_3 > S_2 > S_1$$

从而，

$$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2} \sin x$$

于是， $\sin x < x < \tan x$ 证明完毕。 \square

 **笔记** 这里给出的证明并不够严谨，但更严密的证明需要引入幂级数对 $\sin x$ 进行重新定义，这里不再阐述。

1.3.2 两个重要极限式

1. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$

2. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$

 **笔记** 这里的 Δ 表示一切具有趋于零状态的变量与表达式，需要当作一个整体来进行处理。

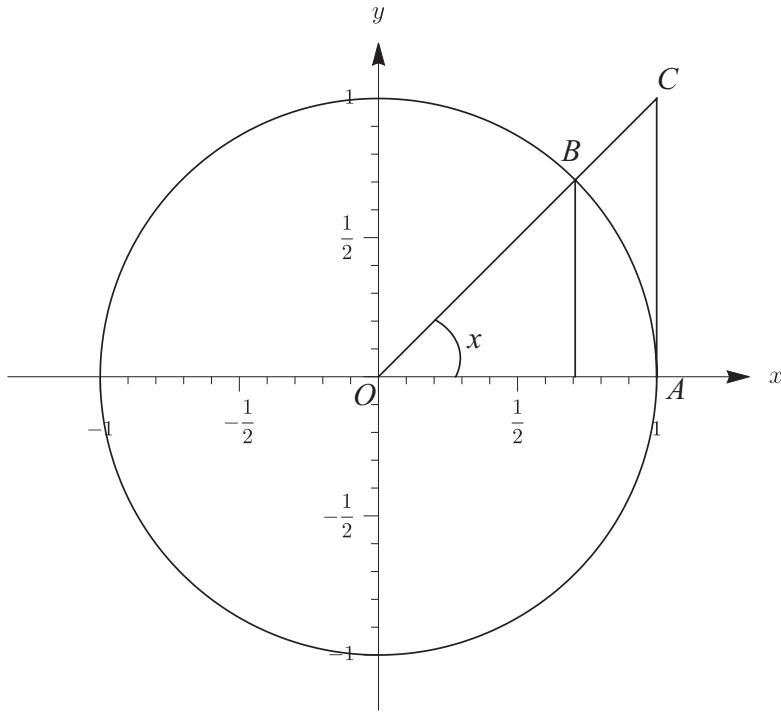


图 1.2: 单位圆

型三: 不定型

所谓不定型, 就是指含有“无穷”与 0 的极限求解。包含 $\frac{0}{0}$ 型, 1^∞ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $\infty \times \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型, ∞^0 型与 0^0 型。

下面分类进行讲解。

1. $\frac{0}{0}$ 型

(a). 习惯:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x)^{v(x)} \Rightarrow e^{v(x) \ln u(x)}, \\ \ln(\quad) \Rightarrow \ln(1 + \Delta) \sim \Delta (\Delta \rightarrow 0), \\ (\quad) - 1 \Rightarrow \begin{cases} e^\Delta - 1 \sim \Delta; & (\Delta \rightarrow 0) \\ (1 + \Delta)^a - 1 \sim a\Delta. \end{cases} \\ x - \ln(1 + x) \Rightarrow \text{二阶无穷小}, \\ x, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x \Rightarrow \text{任意两个之差为三阶无穷小} \end{array} \right.$$

(b). 注意: 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$

例 1.8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 1.9 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^{\sin x} - 1}{x^2 \ln(1 + 2x)}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln(1+x^2)} - 1}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{2x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 1.10 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1+\cos x}{2})^x - 1}{x^3}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \frac{1+\cos x}{2}} - 1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+\cos x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. 1^∞ 型:

主要有两种方法: 一是凑出 $(1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式, 二是恒等变形。

例 1.11 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin x)^{\frac{1}{x - \ln(1+x)}}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-x \sin x))^{-\frac{1}{x \sin x} - \frac{x \sin x}{x - \ln(1+x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x - \ln(1+x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)} = e^{-2} \end{aligned}$$



例 1.12 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^{x^2}$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{1}{x} - 1\right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x}-1} x^2 (\cos \frac{1}{x}-1)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\cos \frac{1}{x}-1)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}} \\ &\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t-1}{t^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例 1.13 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x - \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x-\sin x}} \right]^{\frac{x-\sin x}{1+\sin x} \frac{1}{x^3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sin x} \frac{x-\sin x}{x^3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

3. $\infty - \infty$ 型:

例 1.14 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\tan x)^2}\right)$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\tan x)^2 - x^2}{(\tan x)^2 x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^2 - x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + x}{x} \times \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sec x)^2 - 1}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^2}{x^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例 1.15 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x)$



解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{8}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. $\frac{\infty}{\infty}$ 型:

(a).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0} \left\{ \begin{array}{ll} = 0, & m < n \\ = \frac{b_m}{a_m}, & m = n \\ = \infty, & m > n \end{array} \right.$$

例 1.16 已知: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2019}}{(n+1)^a - n^a} = k (\neq 0, \neq \infty)$, 求 a, k 。

解

$$\begin{aligned} (n+1)^a &= C_a^0 n^a + C_a^1 n^{a-1} + \cdots + C_a^a \\ &= n^a + a n^{a-1} + A \end{aligned}$$

所以, $(n+1)^a - n^a = a n^{a-1} + A$ 。从而, $a - 1 = 2019 \Rightarrow a = 2020$,

则 $k = \frac{1}{2020}$ 。

例 1.17 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3)}{\ln(x^4 + 3x + 1)}$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 (1 + \frac{3}{x^2})}{\ln x^2 (1 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln(1 + \frac{3}{x^3})}{4 \ln x + \ln(1 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b). 洛必达法则

例 1.18 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$

例 1.19 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

5. $0 \times \infty$ 型

可以化成如下两种情形:

$$\begin{cases} \frac{0}{\infty} & \text{即 } \frac{0}{0} \text{ 型} \\ \frac{\infty}{0} & \text{即 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \end{cases}$$

例 1.20 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)^2 \sin \frac{1}{x^2}$ 。

解

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2} \times \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 4$$

例 1.21 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right))$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \\ &\stackrel{t=\frac{1}{x}}{\underset{t \rightarrow 0}{\lim}} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{t+1}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{t+1}}{2t} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. 0^0 型和 ∞^0 型

这两种都可以化成 e^{\ln} 的形式。

例 1.22 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1/x}{-1/x^2}} = 0$

型四: 左右极限

★ $a \overline{x-b}$ 或 $a \overline{b-x}$ 当 $x \rightarrow b$ 时一定分左右。

例 1.23 已知 $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 。

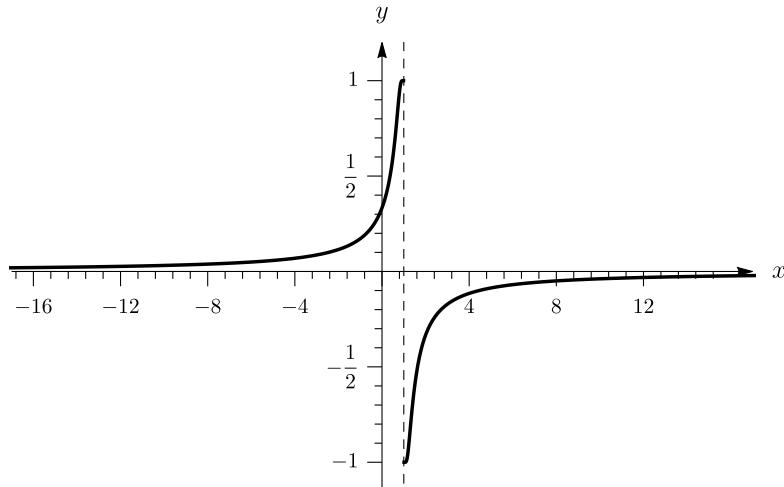
解 因为 $f(2-0) = 0$, $f(2+0) = +\infty$, 故该极限不存在。

例 1.24 $f(x) = \frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 。

解 因为 $f(1-0) = \frac{1}{1} = 1$, $f(1+0) = \frac{1-\infty}{1+\infty} = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在。

这个函数的图像如下图所示:



图 1.3: $f(x)$ 的图像

1.4 连续与间断

1.4.1 相关定义

1. 连续

(a). 一点连续: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 或 $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续。

(b). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$ 。则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记为 $f(x) \in C[a, b]$ 。

2. 间断: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

分类:

(a). 第一类: $f(a + 0), f(a - 0)$ 均存在。

若 $f(a - 0) = f(a + 0) \neq f(a)$, 则称为可去间断点;

若 $f(a - 0) \neq f(a + 0)$, 则称为跳跃间断点。

(b). 第二类: $f(a - 0), f(a + 0)$ 至少一个不存在。

型六: 间断点及分类

例 1.25 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点。

解 容易看出, $x = 0, x = \pm 1$ 为间断点。又因为 $f(0^-) = 0$ 且 $f(0^+) = -\infty$, 故 $x = 0$ 为第二类间断点。而 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}e$, 所以可以得到 $x = -1$ 为第二类间断点, 而 $x = 1$ 为可去间断点。

例 1.26 求函数 $f(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x-1}}}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点。

解 容易看出, $x = 0, x = 1$ 为间断点。因为 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - e^{\frac{x}{x-1}} \sim \frac{x}{1-x}$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x-1}} \times \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} \times \frac{x}{\frac{x}{1-x}} = e^{-1}$, 从而 $x = 0$ 为可去间断点。而 $f(1^-) = 0 \neq f(1^+) = -\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1-x}{x-1}} = -e^{-1}$, 从而 $x = 1$ 为跳跃间断点。

1.4.2 函数在区间上连续

1. 最值

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内存在最小值 m 与最大值 M ;

2. 有界

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $k > 0$, 使得 $|f(x)| \leq k$;

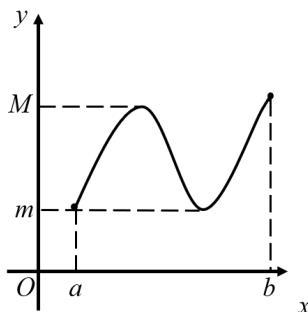


图 1.4: $f(x)$ 的图像

3. 零点定理

若 $f(x) \in [a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = 0$ 。

4. 介值定理

$f(x) \in C[a, b]$, 则 $\forall \eta \in [m, M], \exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$ 。(位于最小值 m 和最大值 M 之间的任何值皆可被 $f(x)$ 取到)。

例 1.27 证明: 方程 $x^5 - 4x + 1 = 0$ 至少有一个正根。

解 令 $f(x) = x^5 - 4x + 1$ 。由于 $f(0) = 1 > 0, f(1) = 1 - 4 + 1 < 0$, 故根据零点

定理，存在 $x_0 \in (0, 1)$ ，使得 $f(x) = 0$ ，也即方程 $x^5 - 4x + 1 = 0$ 至少有一个正根。 \square

例 1.28 $f(x) \in C[a, b]$, $p, q > 0$, 且 $p + q = 1$ 。

证明：存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $f(\xi) = pf(a) + qf(b)$ 。

解 由于 $f(x) \in C[a, b]$ ，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最小值 m 和最大值 M 。而 $pf(a) + qf(b) \leq pM + qM = M$ ，且 $pf(a) + qf(b) \geq pm + qm = m$ ，从而 $pf(a) + qf(b) \in [m, M]$ 。根据介值定理，存在 $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = pf(a) + qf(b)$ 。 \square

例 1.29 $f(x) \in C[0, 2]$, $f(0) + 2f(1) + 3f(2) = 6$ 。证明： $\exists c \in [0, 2]$, 使得 $f(c) = 1$ 。

解 由于 $f(x) \in C[0, 2]$ ，故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上存在最小值 m 和最大值 M 。于是 $6m \leq f(0) + 2f(1) + 3f(2) \leq 6M$ ，故 $m \leq 1 \leq M$ 。根据介值定理，存在 $c \in [0, 2]$, $f(c) = 1$ 。 \square

第二章 导数与微分



2.1 导数的有关定义

定义 2.1. 导数

设函数 $y = f(x), x \in D$ 。现有一点 $x_0 \in D$ 且 $x_0 + \Delta x \in D$ 。定义 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。

若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.1)$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数。记作

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \triangleq f'(x_0) \quad (2.2)$$



笔记

1. 等价定义：

由于当 $x \rightarrow x_0$ 时，有 $f(x) \rightarrow f(x_0)$ ，而 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

从而导数又可以表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \triangleq f'(x_0) \quad (2.3)$$

2. 左右导数

$\Delta x \rightarrow 0$ 分为两种情况： $\Delta x \rightarrow 0^-$ 以及 $\Delta x \rightarrow 0^+$ ；同理， $x \rightarrow a$ 也分为两种情况： $x \rightarrow a^-$ 以及 $x \rightarrow a^+$ 。从而我们可以类似地得到：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \triangleq f'_-(x_0) \quad (2.4)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \triangleq f'_+(x_0) \quad (2.5)$$

并且，可以给出一点导数存在的充要条件，也即：

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在且相等。

3. 可导性与连续性

$f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，反之则不然。证明从略。

例 2.1 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0, \\ \ln(1 + 2x), & x \geq 0 \end{cases}$$

求 $f'(0)$ 。

解 先考虑连续性。

由于 $f(0^-) = 0 = f(0^+)$ ，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

再考虑可导性。

$$\text{由于 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \neq f'_-(0),$$

故 $f'(0)$ 不存在。

4. 已知 $f(x)$ 连续，

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A, \text{ 则 } f(a) = b, f'(a) = A.$$

这是因为当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A$ 时，由于分母为 0，则分子必须也为 0 才能存在极限；根据导数定义又能推出 $f'(a) = A$ 。



2.2 可微

定义 2.2. 可微

设函数 $y = f(x), x \in D$ 。现有一点 $x_0 \in D$ 且 $x_0 + \Delta x \in D$ 。定义 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。若 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 可微。将 $A\Delta x$ 记作 dy , 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分。



笔记

1. 可导 \Leftrightarrow 可微;
2. 若 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则 $A = f'(x_0)$;
3. 设 $y = f(x)$ 可导, 则 $dy = df(x) = f'(x)dx$, 如 $dx^3 = 3x^2 dx$ 。

2.3 求导工具

(一) 求导公式:

1. $C' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, 特别地, $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x,$
 $(\sec x)' = \sec \tan x, (\csc x)' = -\csc \cot x$
6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$
 $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

(二) 四则运算:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. (a). $(ku)' = ku'$
- (b). $(uv)' = uv' + u'v$
- (c). $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$



例 2.2 $f(x) = x(x+1)\cdots(x+99)$, 求 $f'(0)$ 。

解 记 $g(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+99)$, 根据乘积求导法则, $(xg(x))' =$

$g(x) + xg'(x)$, 将 $x=0$ 代入得 $f'(0) = 99!$ 。

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

(三) 复合函数

定理 2.1. 链式法则

若 $y = f(u)$ 可导, $u = \varphi(x)$ 可导且 $\delta\varphi'(x) \neq 0$, 则 $y = f(\varphi(x))$ 可导且

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot \varphi'(x) \\ &= f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\end{aligned}$$



证明 由于 $\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \neq 0$, 故 Δu 与 Δx 为同阶无穷小, 也即 $\Delta u = O(\Delta x)$ 。

而

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \varphi'(x) \quad (\text{注: 这一步用到了同阶无穷小这个条件}) \\ &= f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).\end{aligned}$$

□

例 2.3 设 $y = \ln \arctan x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\arctan x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x$$

例 2.4 $y = e^{(\sin \frac{1}{x})^2}$, 求 y' 。

$$\text{解 } y' = e^{(\sin \frac{1}{x})^2} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

(四) 反函数导数

$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$, 称为反函数。

例 2.5 求 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数。

解 因为 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, 故 $e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$ 。从而, 由于 $(x + \sqrt{1 + x^2})(-x + \sqrt{1 + x^2}) = 1 = e^y \cdot e^{-y}$ (这里用到了平方差公式), 相减可得: $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ 。

定理 2.2. 反函数求导

设 $y = f(x)$ 可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 则 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ 。



证明 由于 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$, 从而 $\Delta y = O(\Delta x)$ 。而 $\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ 。由 $\Delta y = O(\Delta x)$, 得 $\varphi'(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$ 。

多种求导题型归纳

1. 显函数求导

例 2.6 $y = e^{2x} \sin x + \ln^2 \tan(e^x + 2x)$, 求 y' 。

解 $y = e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + 2 \ln \tan(e^x + x^2) \cdot \frac{1}{\tan(e^x + x^2)} \cdot \sec^2(e^x + x^2) \cdot (e^x + 2x)$

2. 复合函数求导

例 2.7 $y = \arctan^2 \frac{1-x}{1+x}$, 求 y' 。

解 $y' = 2 \arctan \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{1+x}$.

3. 隐函数求导

例 2.8 已知 x, y 满足如下等式:

$$e^{xy} = x^2 + y^2 + 1$$

求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解 在上式两边同时对 x 求导, 可以得到: $e^{xy}(y + x \frac{dy}{dx}) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$ 。从而, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} - 2y}$.

例 2.9 已知 x, y 满足如下等式:

$$2^{xy} + x^2 = y$$

求 $dy|_{x=0}$ 。

解 根据等式可得, $x = 0$ 时, $y = 1$ 。与上一题类似, 两边同时求导可得:

$2^{xy} \ln 2(y + x \frac{dy}{dx}) + 2x = \frac{dy}{dx}$ 。将 $x = 0, y = 1$ 代入可得, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \ln 2$ 。从而, $\left. dy \right|_{x=0} = \ln 2 dx$.