

## 第三章 数据链路层

# 纠1位错的海明码

# 纠1位错，需要多少位冗余位呢？



要传输的数据是  $m$  位，冗余位  $r$  应该  
是多少，才能纠正1位错来呢？



## 纠1位错，需要多少位冗余位呢？

- 设一个系统中，编码后的码字位数是  $n$ ，则  $n=m+r$ 。因为要传输的数据位是  $m$  位，该系统需要传输的正确的码字个数应该是  $2^m$ ，全部码字的个数是  $2^n$ 。如果每个正确码字发生1位错，能够被纠错，至少发生1位错不会变成另外1个正确的码字，如果  $n$  位码字的每一位都发生一次跳变，变成一个错误的码字，那么每个码字至少需要  $n+1$  个码字来表示它，所以，下面这个式子成立：

$$(n + 1)2^m \leq 2^n$$

$$n = m + r$$



$$(m + r + 1) \leq 2^r$$



# 纠正单个错需要的冗余位跟数据位的关系

□ 纠正单个错误需要的校验位的下界满足：

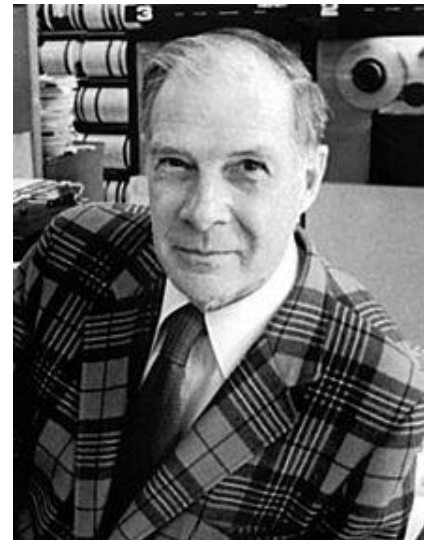
m	r	n（码字的总位数）
1	2	3
2~4	3	5~7
5~11	4	9~15
12~26	5	17~31
27~57	6	33~63
58~120	7	65~127

$$(m + r + 1) \leq 2^r$$



# 海明纠错码（1950年）

- 每一个码字从左到右编号，最左边为第1位
- 校验位和数据位
  - 凡编号为2的乘幂的位是校验位，如1、2、4、8、16、.....
  - 其余是数据位，如3、5、6、7、9、.....
- 每一个校验位设置根据：包括自己在内的一些位的集合的奇偶值（奇数或偶数）。





# 如何决定每个数据位的校验位

- 将某一位数据位的编号展开成2的乘幂的和，那末每一项所对应的位即为该数据位的校验位(收方使用)。

如：  $11 = 1 + 2 + 8$

$$29 = 1 + 4 + 8 + 16$$

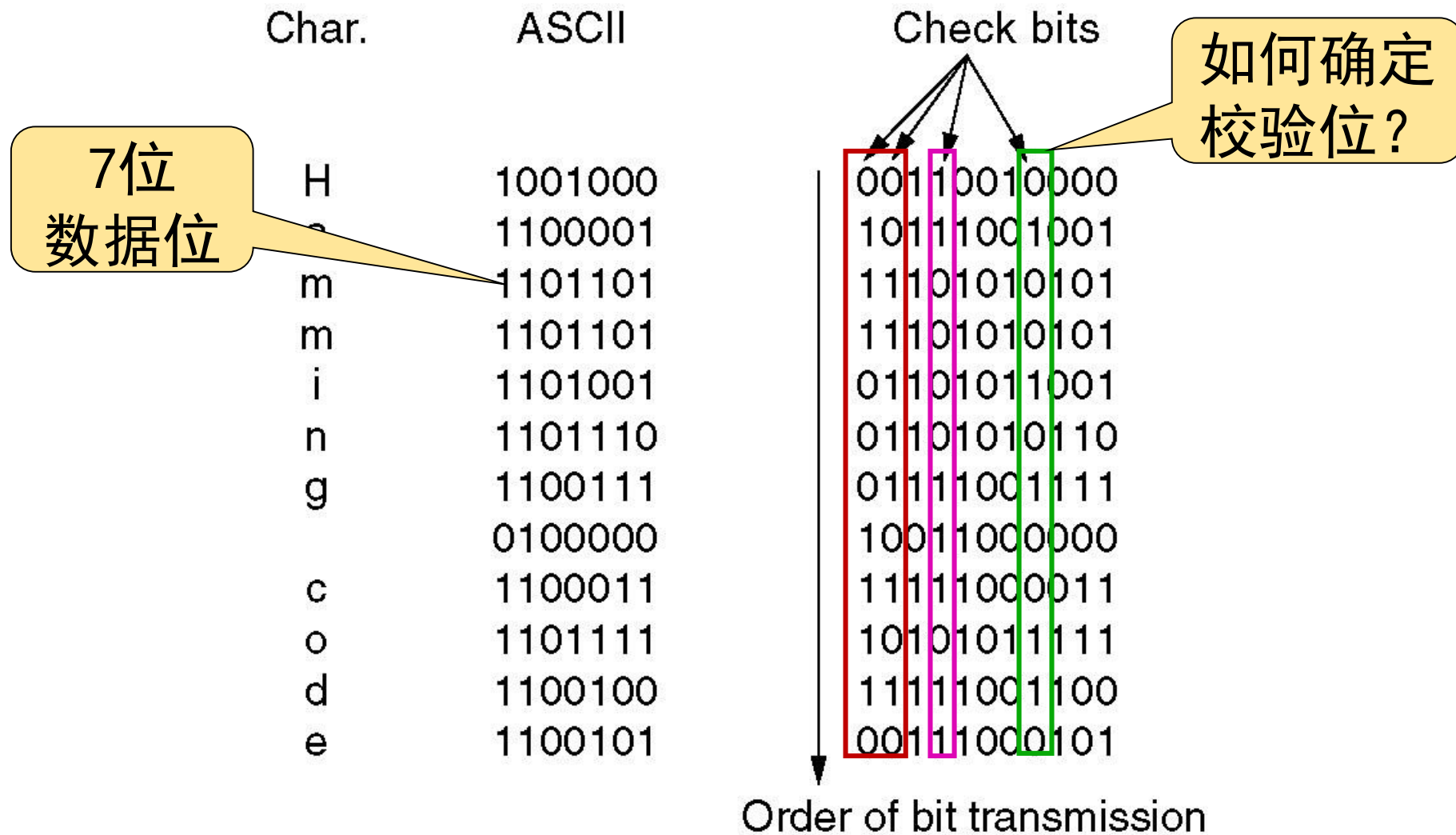
- 校验位1的检验集合为所有奇数位。
- 校验位2的检验集合：2、3、6、7、10、11、...
- 校验位4的检验集合：4、5、6、7、.....
- 校验位8的检验集合：8、9、10、11、.....

校验位的计算(m=7, r=4)

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11
	P1	P2	D1	P3	D2	D3	D4	P4	D5	D6	D7
1=2 <sup>0</sup>	√		√		√		√		√		√
2=2 <sup>1</sup>		√	√			√	√			√	√
4=2 <sup>2</sup>				√	√	√	√				
8=2 <sup>3</sup>								√	√	√	√



# 海明码实例





# 海明码实例之校验位计算

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11
	P1	P2	D1	P3	D2	D3	D4	P4	D5	D6	D7
信息码	-	-	1	-	0	0	1	-	0	0	0
检验位	0	0	-	1	-	-	-	0	-	-	-
海明码	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0

使用偶校验，一个校验集合里的1的个数是偶数



## 海明码纠错过程(接收端)

- ❑ 首先将差错计数器置“0”， $\text{counter}=0$ 。
- ❑ 当海明码数据到达接收端后，接收端逐个检查各个校验位的奇偶性。
- ❑ 如发现某一校验位和它所检测的集合的奇偶性不正确，就将该检验位的编号加到差错计数器中。
  - $\text{Counter}=0$ ，无差错
  - $\text{counter} \neq 0$ ，出错，该值指明出错的位



## 例：接收纠错

- 接收到码字为00111000100，校验各校验位：
  - 第一位：00111000100，校验集合有3个1，错
  - 第二位：00111000100，校验集合有1个1，错
  - 第四位：00111000100，校验集合有2个1，对
  - 第八位：00111000100，校验集合有1个1，错
- 累加出错位编号：1+2+8=11
- 可计算得其第11位出错，将该位由0改为1，即纠正得到正确结果：00111000101

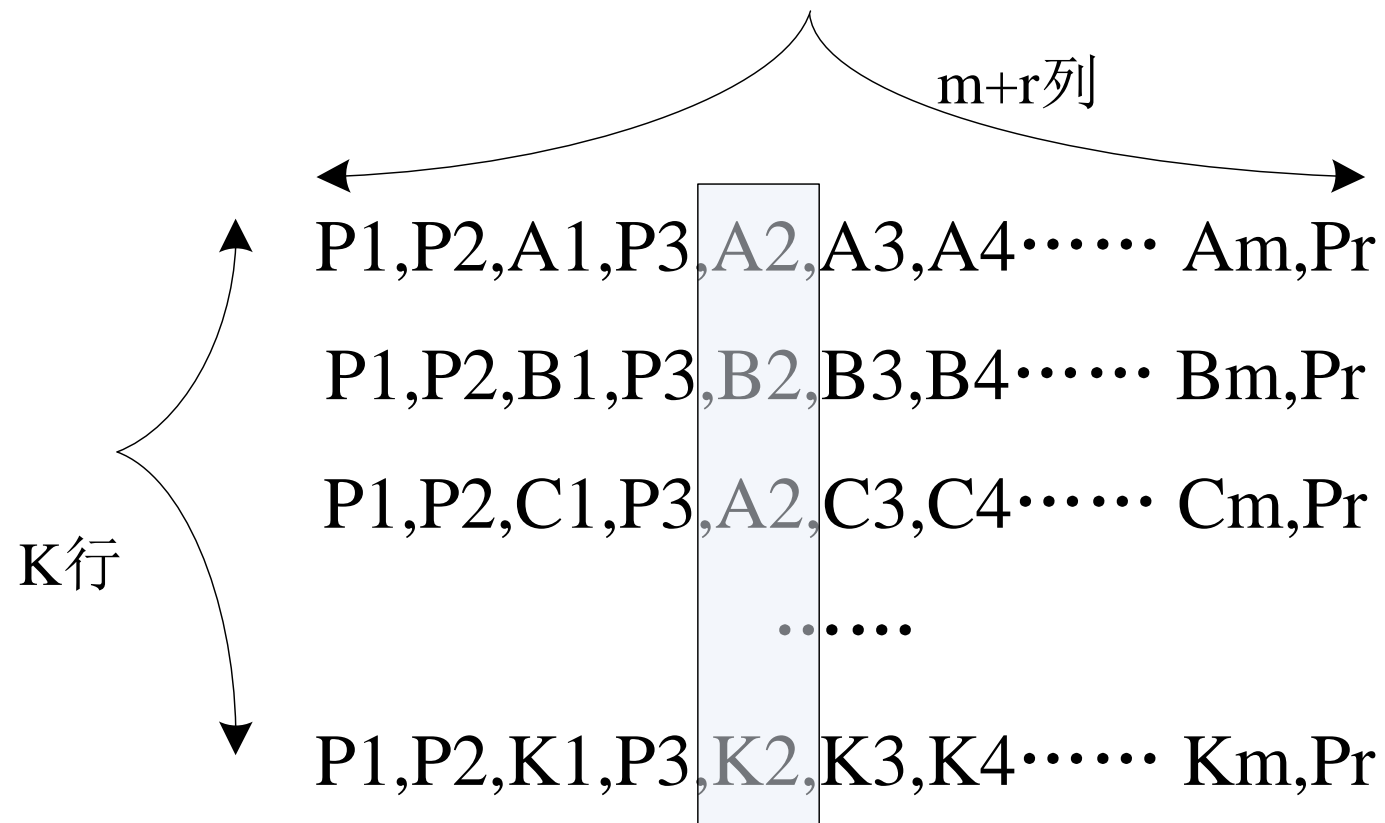


# 利用海明码纠正突发错误

- 将连续的 $k$ 个码字按行排列成矩阵
- 发送数据时，按列发送，每列 $k$ 位
- 如果一个突发性错误长度是 $k$ 位，则在 $k$ 个码字中，至多只有一位受到影响，正好可用海明码纠错改位后恢复



# 利用海明码纠正突发错误图示



## 例1：发送方

原码字为：10101111，采用偶校验海明纠1位错编码，请问编码后的码字是什么？

解：m=8，根据  $(m + r + 1) \leq 2^r$  得：r=4， ??1?010?1111

$$P1=B3 \oplus B5 \oplus B7 \oplus B9 \oplus B11 = \Sigma (1, 0, 0, 1, 1) = 1$$

$$P2=B3 \oplus B6 \oplus B7 \oplus B10 \oplus B11 = \Sigma (1, 1, 0, 1, 1) = 0$$

$$P3=B5 \oplus B6 \oplus B7 \oplus B12 = \Sigma (0, 1, 0, 1) = 0$$

$$P4=B9 \oplus B10 \oplus B11 \oplus B12 = \Sigma (1, 1, 1, 1) = 0$$

所以，编码后码字是：101001001111

## 例2：接收方

采用上面这道题一样的编码，假设接收方收到一个码字：

1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 ( $m=8, r=4$ )，请问这个码字对还是错？

如果错，正确的码字应该是什么？

1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 (m=8, r=4)

**解：** 将计数器置零，并检查每个校验位的校验集合是否正确：

$$P1=B1 \oplus B3 \oplus B5 \oplus B7 \oplus B9 \oplus B11 = \sum(1,0,1,0,1,0)=1$$

$$P2=B2 \oplus B3 \oplus B6 \oplus B7 \oplus B10 \oplus B11 = \sum(0,0,0,0,1,0)=1$$

$$P3=B4 \oplus B5 \oplus B6 \oplus B7 \oplus B12 = \sum(1,1,0,0,0)=0$$

$$P4=B8 \oplus B9 \oplus B10 \oplus B11 \oplus B12 = \sum(0,1,1,0,0)=0$$

所以，计数器 Counter=1+2=3，数据位第三位出错，正确的应该是码字和原始码字（数据位）分别是：

1 0 **1** 1 1 0 0 0 1 1 0 0 和 11001100





## 小结

- 纠1位错需要的冗余位跟数据位的关系是

$$(m + r + 1) \leq 2^r$$

- 纠1位错的海明码的基本方法是怎样的？

- 发送方：根据校验集合填充校验位。

- 接收方：根据校验集合判定校验位是否出错，出错的位编号累加到累加器上，所有的校验位都检查完成后，通过读取累加器的值来确定码字中出错的那一位的编号。

## 思考题

- 16位数据位，需要纠1位错，冗余位应该为多少？
- 纠1位错的海明码，发送方怎样确定校验位？
- 纠1位错的海明码，接收方怎样判定收到的码字是否正确？如果出错了，怎么纠正成正确的码字？

谢谢观看

# 致谢

本课程课件中的部分素材来自于：（1）清华大学出版社出版的翻译教材《计算机网络》（原著作者：Andrew S. Tanenbaum, David J. Wetherall）；（2）思科网络技术学院教程；（3）网络上搜到的其他资料。在此，对清华大学出版社、思科网络技术学院、人民邮电出版社、以及其它提供本课程引用资料的个人表示衷心的感谢！

对于本课程引用的素材，仅用于课程学习，如有任何问题，请与我们联系！