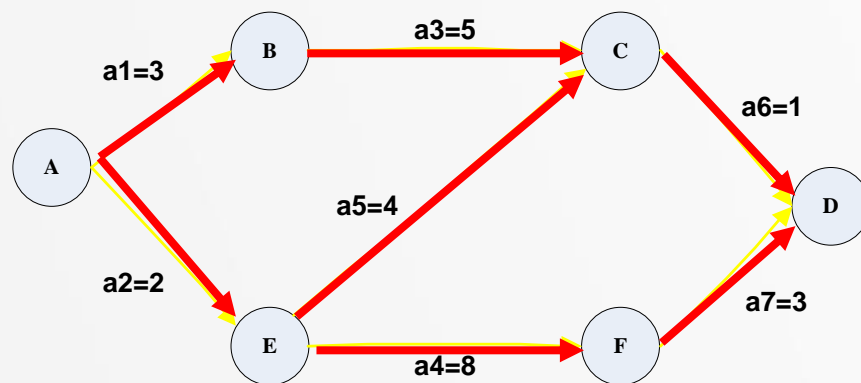


# 5.5.2 关键路径

问题：下表给出了某工程各工序之间的优先关系和各工序所需的时间（其中 “—” 表示无先驱工序），指明完成该工程所需的最短时间。如果因为其他原因,a7所需时间变为 6,会不会影响工期？如果a3所需时间变为6,会不会影响工期呢？哪些工序影响工期,哪些不会影响？不会影响的范围是多少？

工序代号	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
所需时间	3	2	5	8	4	1	3
先驱工序	-	-	a1	a2	a2	a3,a5	a4



## AOE网 (activity on edge)

若有向图中，顶点表示事件，弧表示活动，弧上的权表示完成该活动所需的时间，则称这类有向图为边表示活动的网（AOE网）

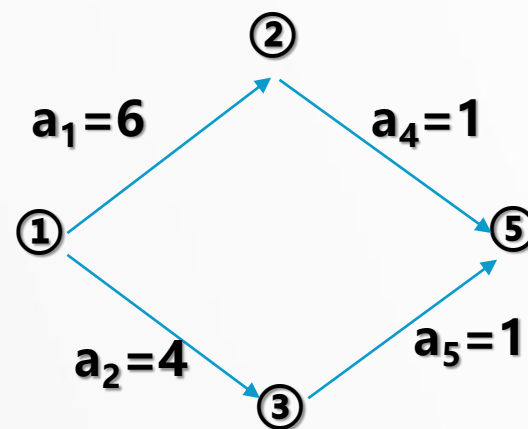
AOE网中仅有一个入度为0的事件，称为源点，它表示工程的开始；网中也仅有一个出度为0的事件，称为汇点，它表示工程的结束。

每一事件V表示以它为弧头的所有活动已经完成，同时，也表示以它为弧尾的所有活动可以开始。

## AOE网可解决如下问题：

估算工程的最短工期（从源点到汇点至少需要多少时间）

找出哪些活动是影响整个工程进展的关键



有4个事件： $V_1, V_2, V_3, V_5$

$V_1$ 为源点， $V_5$ 为汇点

有4个活动： $a_1, a_2, a_4, a_5$

$V_3$ 表示： $a_2$ 已完成， $a_5$ 可以开始

# 算法分析

- 首先工程图是有向无环图，否则不可能合理安排工程
- 其次，工期是从源点到汇点的最短完成时间
  - 实质：带权有向图顶点（事件）的最早开始时间，工期就是汇点最早开始时
  - 每一个事件必须前趋活动都结束才能够开始，设事件j的前趋活动 $a_i (i=1,2,\dots,m)$ ，分别的最早开始事件为 $ve(i)$ ，活动持续时间为 $w(i,j)$ ，则事件j的最早开始时间 $ve(j)=\max(ve(i)+w(i,j))$
  - 利用拓扑排序方法分别求各个事件的最早开始时间

(如何利用拓扑排序？求事件先后顺序，后发生的事件之前所有事件的最早开始时间)

- 在工期不变的情况下，求各个事件的最晚开始时间。如果某些事件的最早开始时间和最晚开始时间相同，则这些事件就是关键活动上面的事件，就可以求出关键活动及关键路径
- i. 事件最晚开始时间：从汇点开始倒推每个活动的最晚开始时间。
$$vl(j) = \min(vl(i) - w(i, j))$$
- 倒推每个活动的最晚开始时间，需要求逆图的入度，实质就是原图的出度，因此利用前面的拓扑排序顺序从汇点开始求每个活动开始事件的最晚开始时间

(如何利用拓扑排序？反向求事件先后顺序，后发生的事件之前所有事件的最晚开始时间)

课堂讨论： 求下面AOE网的关键路径

