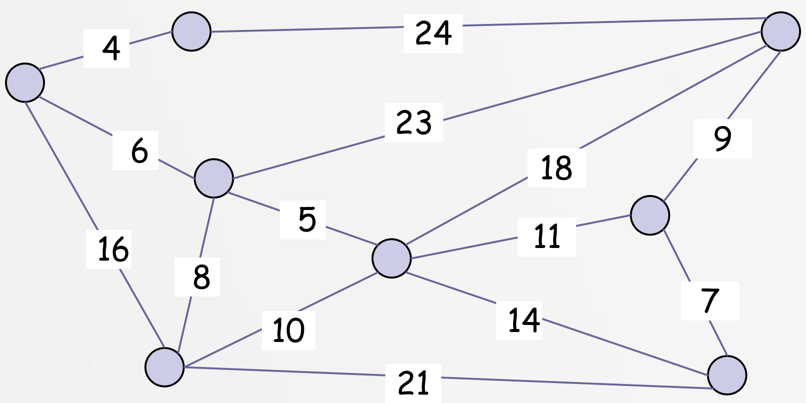
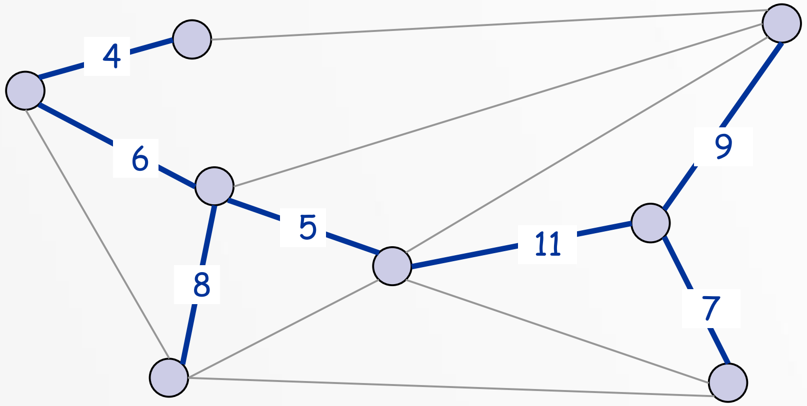
最小生成树问题

最小生成树

设G =(V,E)是无向连通带权图，即一个**网络**。E中每条边(v,w)的权为c[v][w]。如果G的子图G’是一棵包含G的所有顶点的树T，则称G’为G的生成树。生成树上各边权的总和称为该生成树的**耗费**。在G的所有生成树中，耗费最小的生成树称为G的**最小生成树**。



$G = (V, E)$



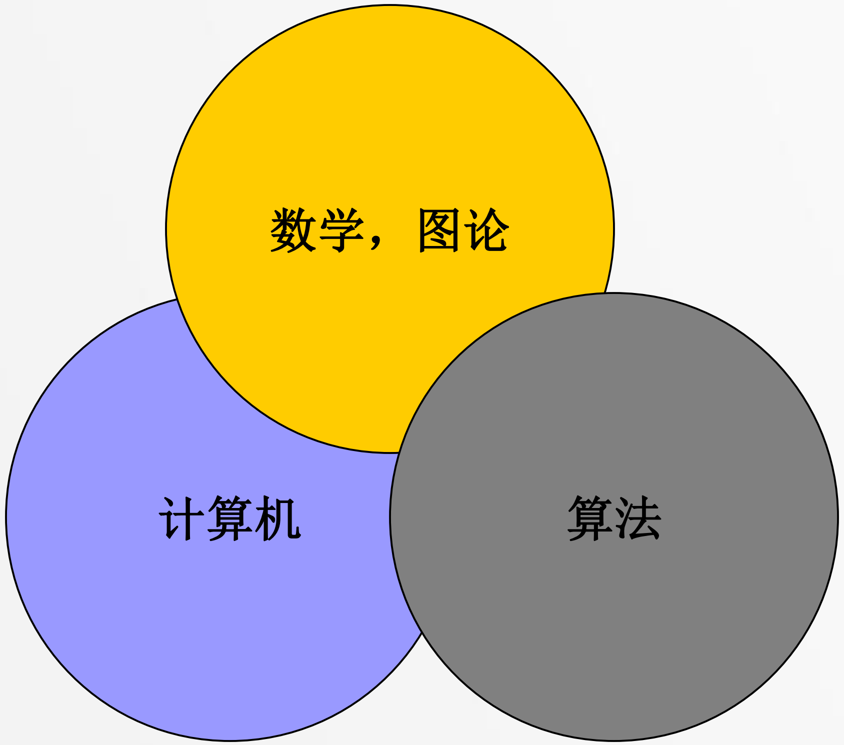
T, $\Sigma_{e \in T}\, c_e = 50$

贪心算法

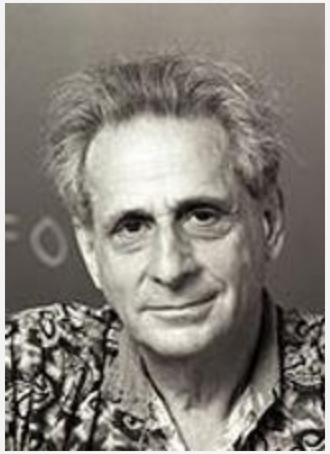
- Prim’s 算法
- Kruskal ‘s 算法
- 重复删除算法

- 以上三种方法都可以形成最小生成树.

发明人的基础条件(算法设计的艺术)



扮演他们



kruscal

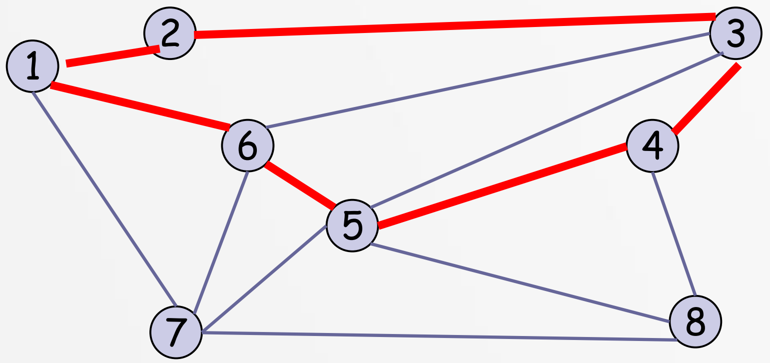
Princeton University

prim

Princeton University
Bell Laboratories
director of mathematics research from 1958 to 1961

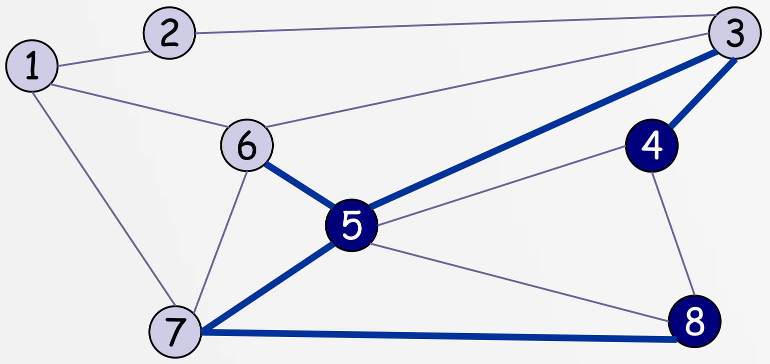
回路与切分

- 回路. 如 a-b, b-c, c-d, …, y-z, z-a的边的集合.



回路 C = 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1

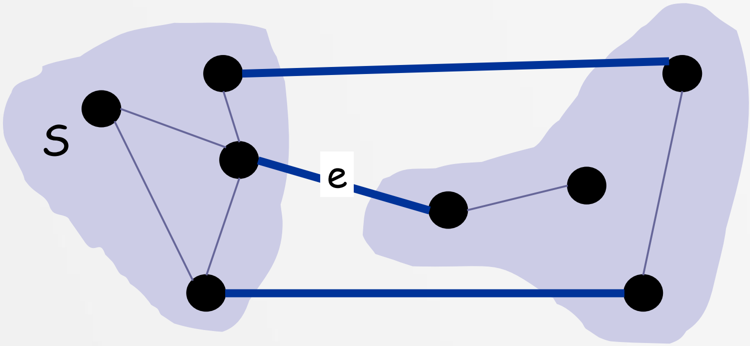
- 切分集合. 一个切分S是顶点集合的一个子集. 相应的切分集 cutset D 是边的一个子集，该集合中每条边都有一个终点在 S中.



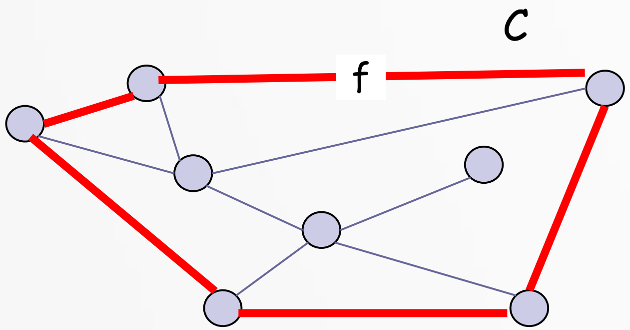
Cut S = { 4, 5, 8 }
Cutset D = 5-6, 5-7, 3-4, 3-5, 7-8

切分与回路性质

- 假设所有边的权重 c_e 是不相同的.
- 切分性质. 令 S 是顶点集合的任一子集, 并令 e 是具有最小权重的边，该边的一个节点在点集S中，另一个在V-S中. 最小生成树必包含e.
- 回路性质. 令 C 是任一一回路, 令 f 是 C中具有最大权重的边. 最小生成树一定不包含边 f.



e 在最小生成树中



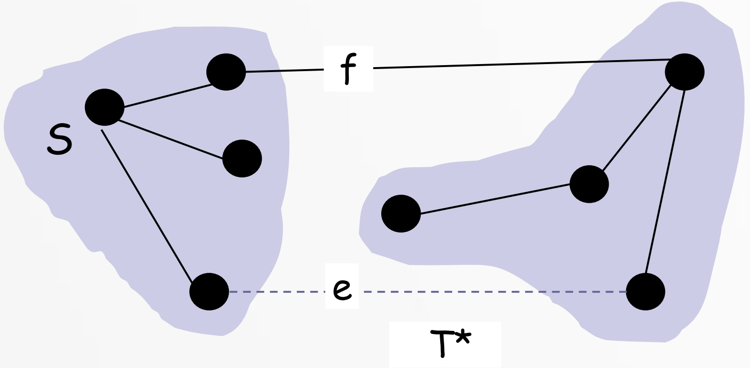
f 不在最小生成树中

证明

- 假设所有边的权重c_e 均不同.

- 切分性质. 令S 为顶点集合的任一子集, 并令 e 为一个终点在S中且具有最小权重的边. 最小生成树 T* 必包含 e.

- 证明.
  - □ 假设 e 不属于 T*.
  - □ 将边 e 添加到 T* 形成圈/回路 C
  - □ 边 e 同时属于回路 C 和S的切分集 cutset D $\Rightarrow$ 存在与e不同的一条边, f, 也同样都属于 C 和 D.
  - □ T ' = T* ∪ { e } - { f } 任然是一颗最小生成树.
  - □ 由于 $c_e < c_f$, cost(T') < cost(T*).
  - □ 这与假设矛盾. ▪

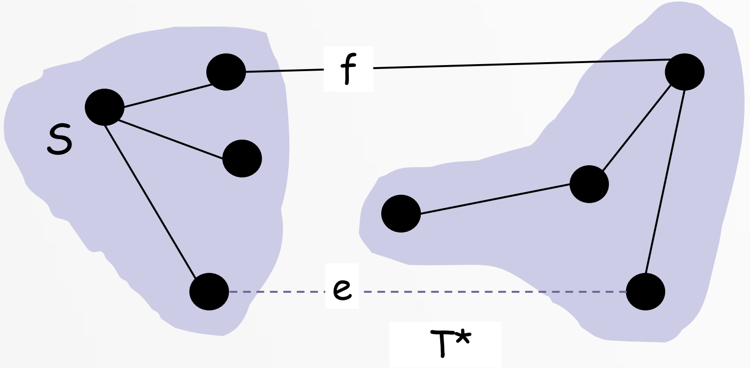


证明

- 假设所有边的权重 c_e 均不相同.

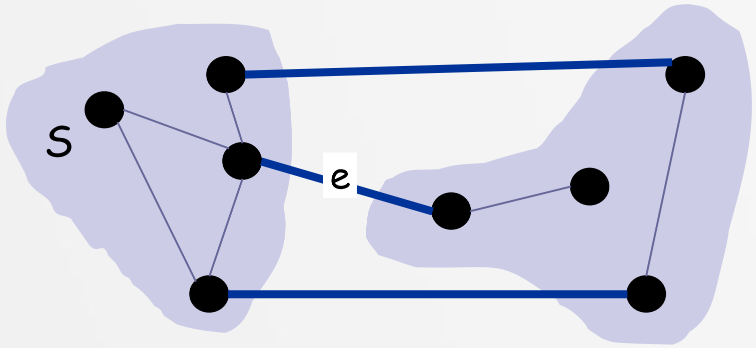
- 回路/圈性质. 另 C 是图 G中任一回路, 并另 f 是回路C中具有最大权重的边. 最小生成树 T* 必定不包含 f.

- 证明.
  - 假设 f 属于 T*.
  - 从 T* 中删除f 形成T*的一个切分S
  - 边 f 同时在 C 和S的切分集 cutset D 中 $\Rightarrow$ 存在另一条边e, 也同样在 C 和 D中.
  - T ' = T* $\cup$ { e } - { f } 仍然是一颗最小生成树.
  - 由于 $c_e < c_f$, cost(T') < cost(T*).
  - 与假设矛盾. ▪

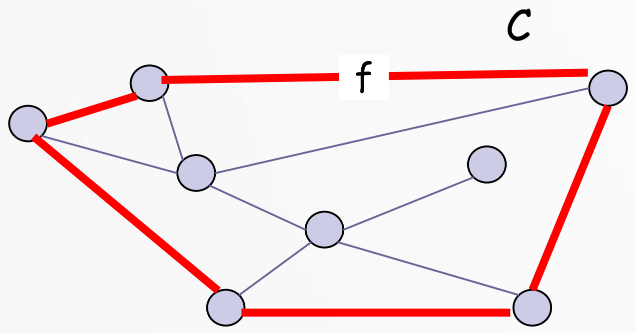


基于图论性质的贪心算法设计

- 假设所有边的权重 c_e 是不相同的.
- **切分性质. 令 S 是顶点集合的任一子集, 并令 e 是具有最小权重的边，该边的一个节点在点集S中，另一个在V-S中. 最小生成树必包含e.**
- **回路性质. 令 C 是任一一回路, 令 f 是 C中具有最大权重的边. 最小生成树一定不包含边 f.**



e 在最小生成树中



f 不在最小生成树中