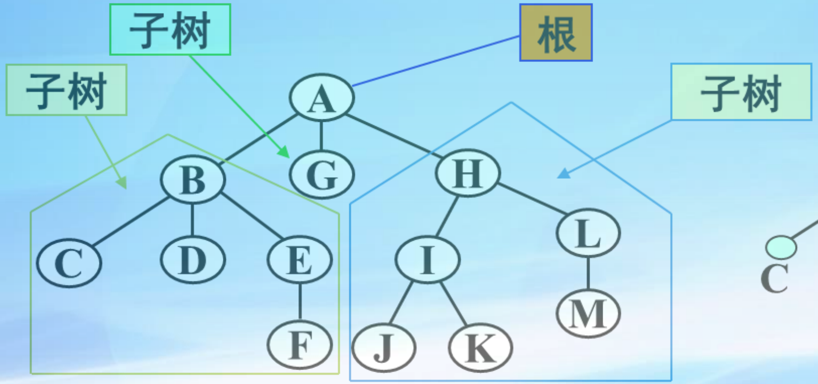
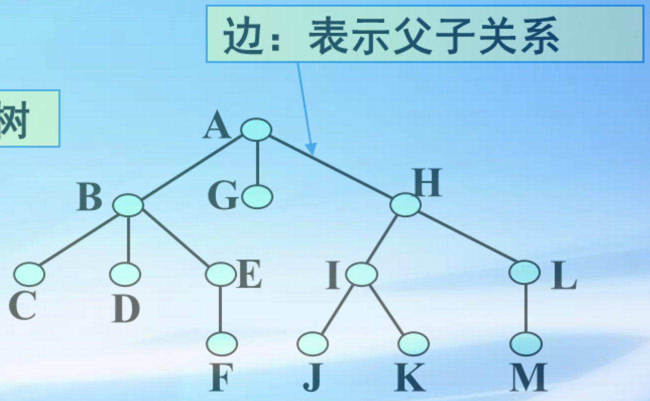
《数据结构》

图的定义和有关术语





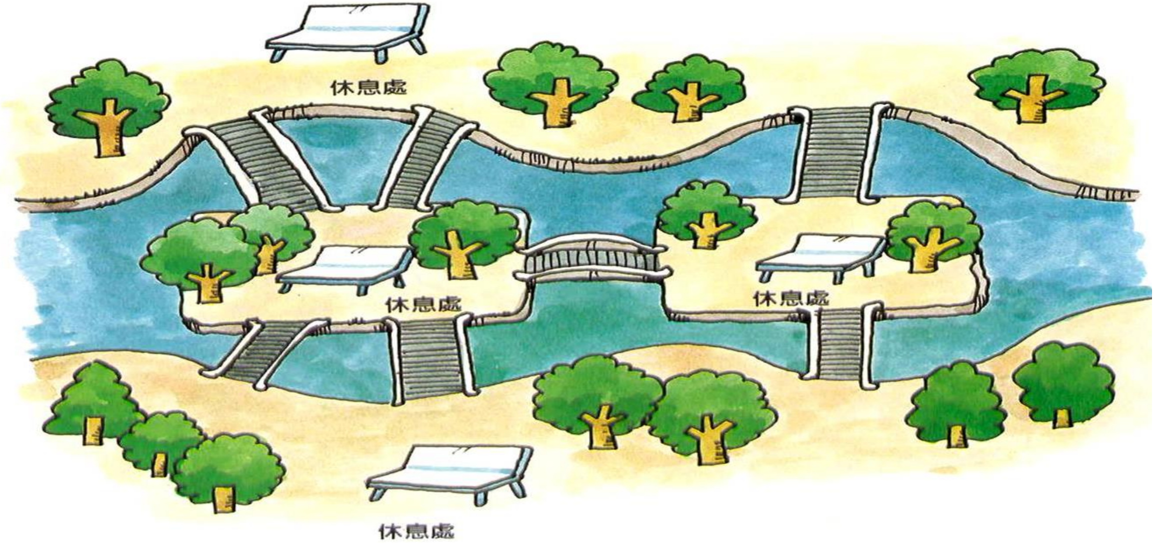
学习目标和要求

1.准确复述图的**基本概念和相关术语。**

2.理解邻接矩阵的物理含义。

哥尼斯堡七桥问题

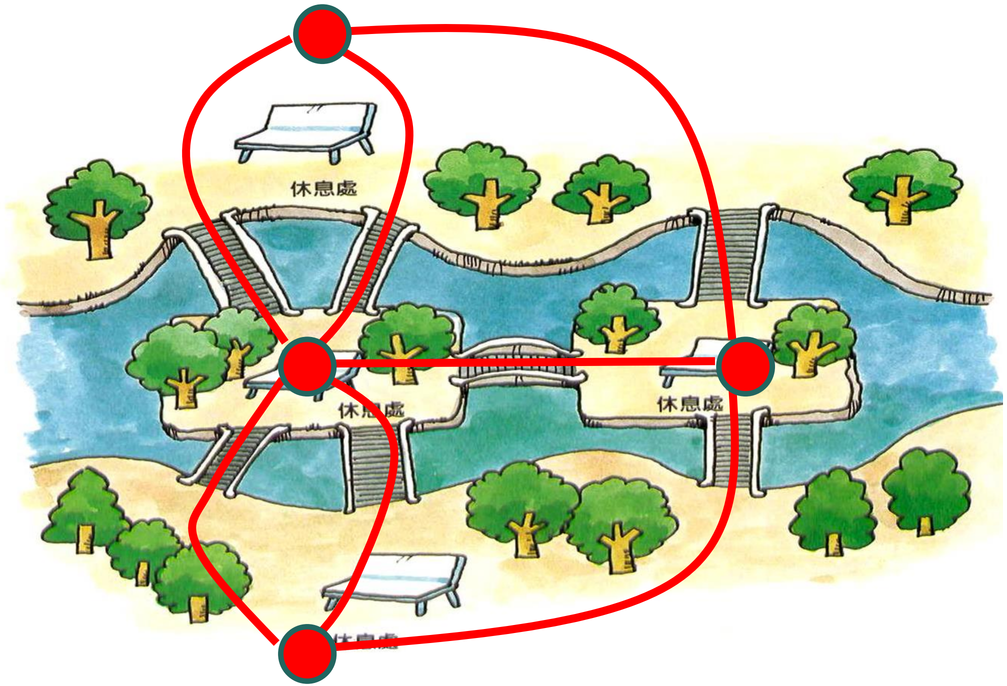
- 一个散步者是否可能从这四块陆地中任一块出发，不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最终再回到出发点？

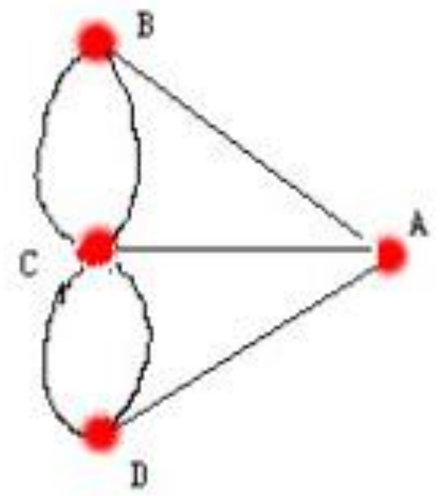


哥尼斯堡七桥问题

- 1736年
- 欧拉（Leonhard Euler）
- “哥尼斯堡七桥”论文
- 数学新分支---图论

哥尼斯堡七桥问题





图处理应用的多样性

- 地图：旅行者关注的问题“从南京到北京，最快速的道路是哪一条？”

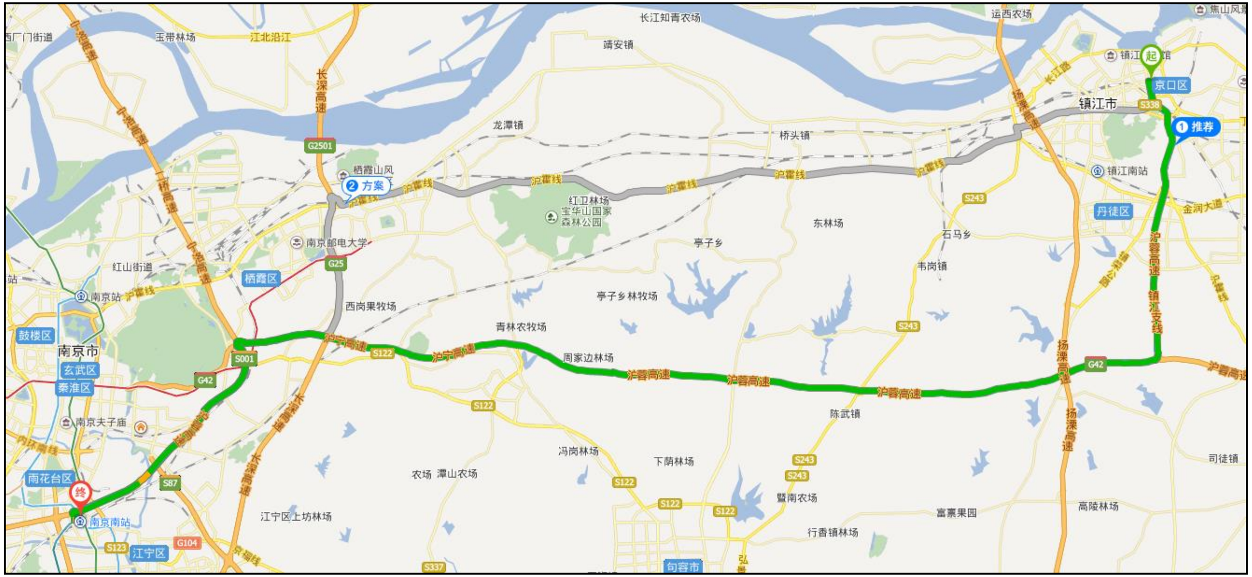
需要放置一张
南京到北京的带有导航轨迹的图

图处理应用的多样性

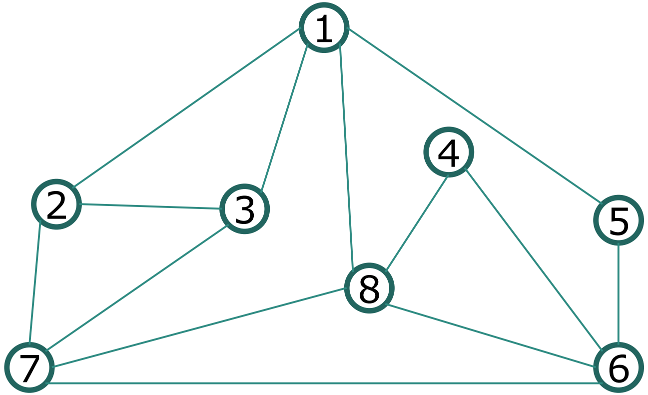
- 地图：旅行者关注的问题“从南京到北京，最快速的道路是哪一条？”
- 超文本：**Web**网页中，利用超级链接，可以方便地从一个网页跳入另一个网页。网页跳转关系构成了一个图，并且是搜索引擎算法的基础。
- 规划问题：一个生产过程由多个任务构成，在满足任务时间约束的条件下，如何合理分配资源，用最少时间完成整个生产过程？
- ……

问题

- 这种多对多的“关系网”如何用计算机表示？如何用计算机自动完成对问题的处理呢？



图的基本概念



图(Graph)是用于描述事物之间最一般关系的数据结构，由用于表示事物的顶点(vertex)集合V，以及表示事物之间关系的边(edge)集合E构成，记作G=(V, E)，其中：

（1）V表示非空有穷顶点(vertex)集

（2）E表示V上的顶点对所构成的边(edge)集

（3）顶点数目n>0，边数目m≥0

❖边的种类

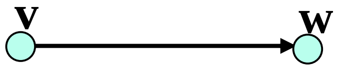
无向边(Undirected Edge)

不带方向的边，记作(v, w)，表示w是v的邻接点

(v, w)和(w, v)是相同的边，互为邻接点

可表示对称关系，如“同志关系”

有向边(Directed Edge)



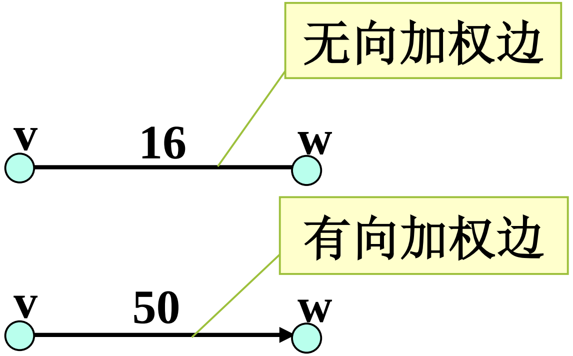
带方向的边，记作<v, w>，表示w是v的邻接点，v是边的尾(Tail)，w是边的头(Head)，也叫做弧(Arc)

<v, w>和<w, v>是不同的边

表示非对称关系，如“领导关系”

❖边的种类

加权边(Labeled Edge)



边附带一个非负实数作为权(weight)，权也称为边的耗费(Cost)或者长度(Length)

边的权通常记为$C(v, w)$或$C<v, w>$

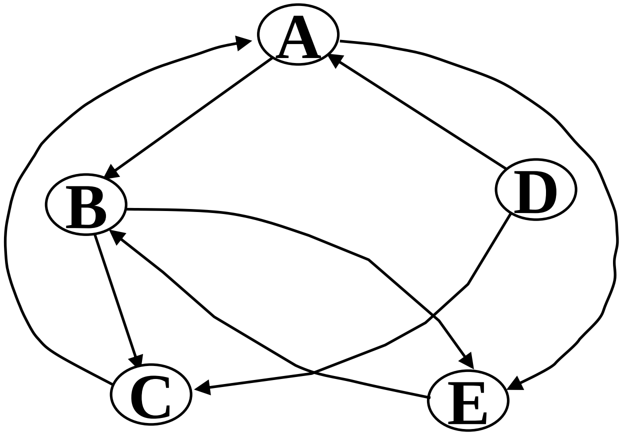
边的权可以表示边的长度、沿着边旅行所需的费用或时间、工程（输电线路、通信线路、高速公路等）造价等

可能不满足三角不等式（两边长度之和不大于第三边）

图的基本概念

图的种类繁多，分类的方法各异，最常见的有：

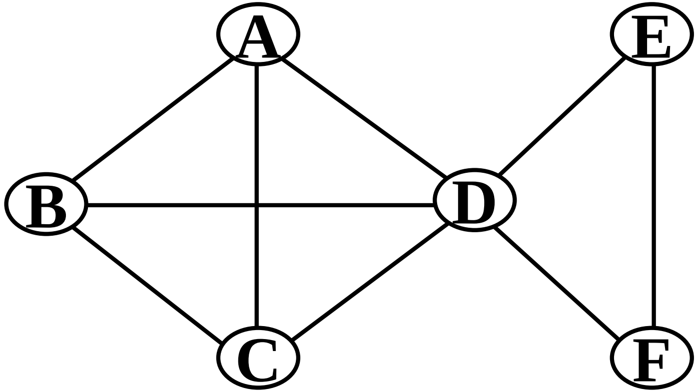
- **有向图**（directed graph，digraph）：边都有向



图的基本概念

图的种类繁多，分类的方法各异，最常见的有：

- 有向图（directed graph，digraph）：边都有向
- 无向图（undirected graph）：边都无向



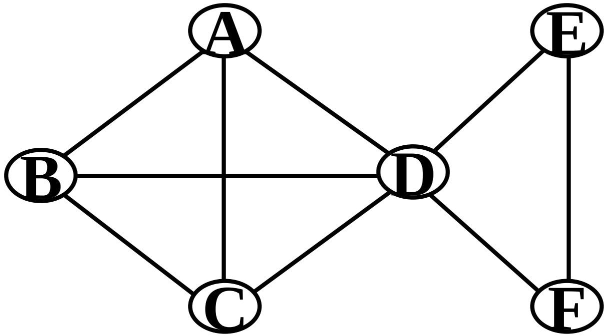
图的基本概念

图的种类繁多，分类的方法各异，最常见的有：

- 有向图（directed graph，digraph）：边都有向
- 无向图（undirected graph）：边都无向
- 简单图：无重复边，无到自身的边（形如<v,v>的边）

无向简单图：两个点之间最多只有一条边，而且没有自环（自回路）

有向简单图：无自环，无重复边（允许<v，w>和<w，v>同时存在）



图的基本概念

图的种类繁多，分类的方法各异，最常见的有：

- 有向图（directed graph，digraph）：边都有向
- 无向图（undirected graph）：边都无向
- 简单图 ：无重复边，无到自身的边（形如<v,v>的边）
- 加权图（labeled graph）：边均带权

边权图称网（network），非加权图也称0/1图

边的权通常不满足三角不等式； “拓扑”结构图

图的基本概念

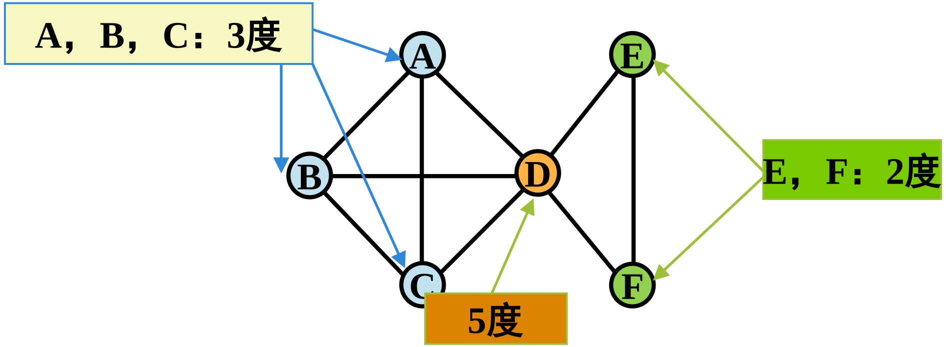
图的种类繁多，分类的方法各异，最常见的有：

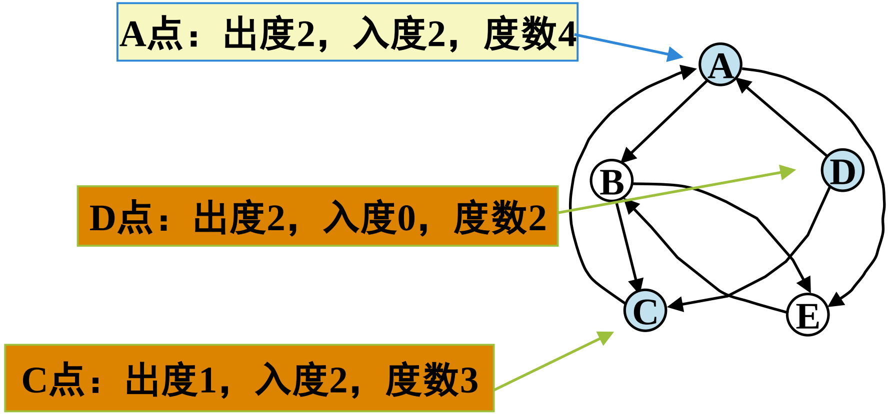
- 有向图（directed graph，digraph）边都有向
- 无向图（undirected graph）边都无向
- 简单图 无重复边，无到自身的边（形如<v,v>的边）
- 加权图（labeled graph） 边均带权

这里只研究简单图（简单的有向、无向图，简单的有向、无向加权图）

图的相关术语

顶点的度(Degree)





无向图:与顶点关联的边的总数

所有顶点的度数之和 = 边数的两倍

有向图

顶点的出度：以顶点为尾的边数目

顶点的入度：以顶点为头的边数目

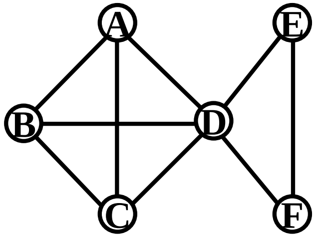
顶点的度=出度+入度

所有顶点的入度之和=出度之和=边的总数

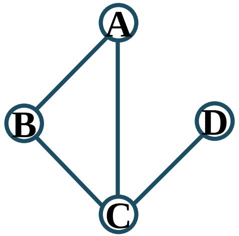
图的相关术语

❖ 子图 (SubGraph)

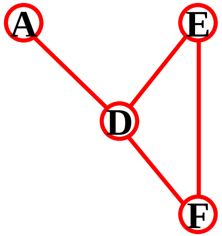
设G=(V，E)和G1=(V1，E1)是两个图，且V1⊆V，E1⊆E，那么称G1是G的子图。



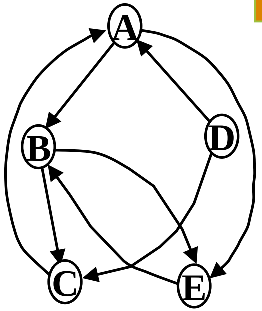
原图



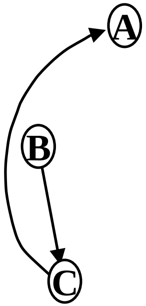
子图1



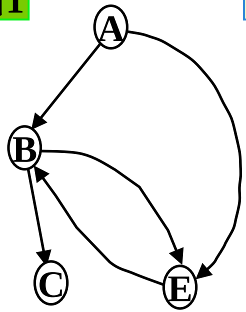
子图2



原图



子图1



子图2

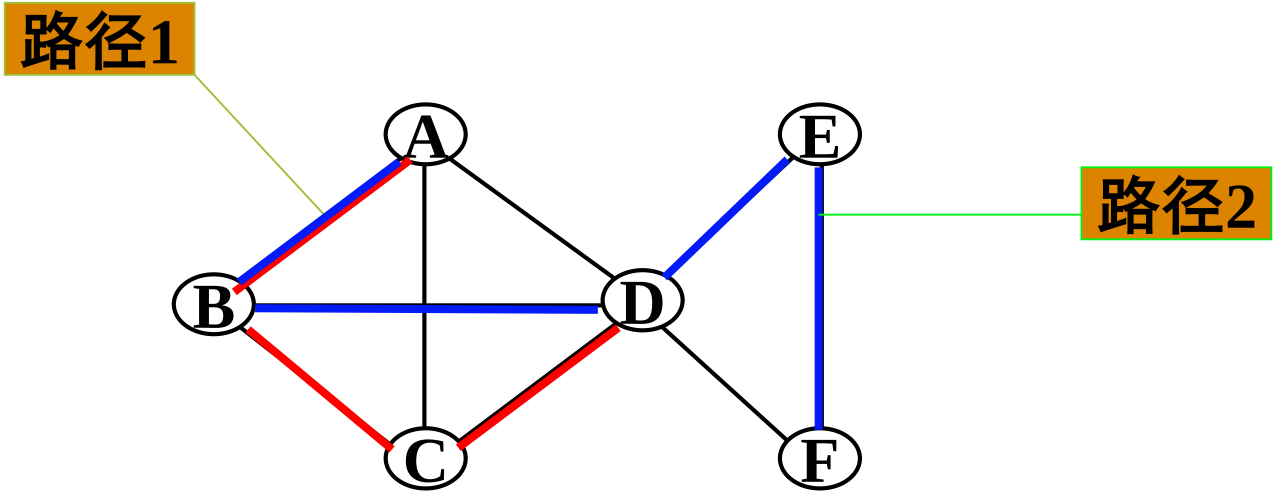
图的相关术语

路径(path):首尾相接的边序列(w_1, w_2)、(w_2, w_3)、…、(w_{k-1}, w_k)。

起点w_1和终点w_k：路径上的两个端点。

路径长度（length）：路径上的边数。

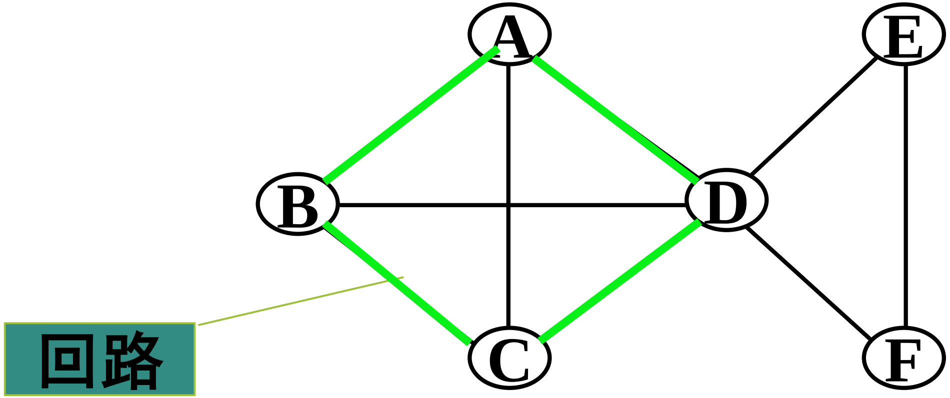
简单路径：顶点不重复



图的相关术语

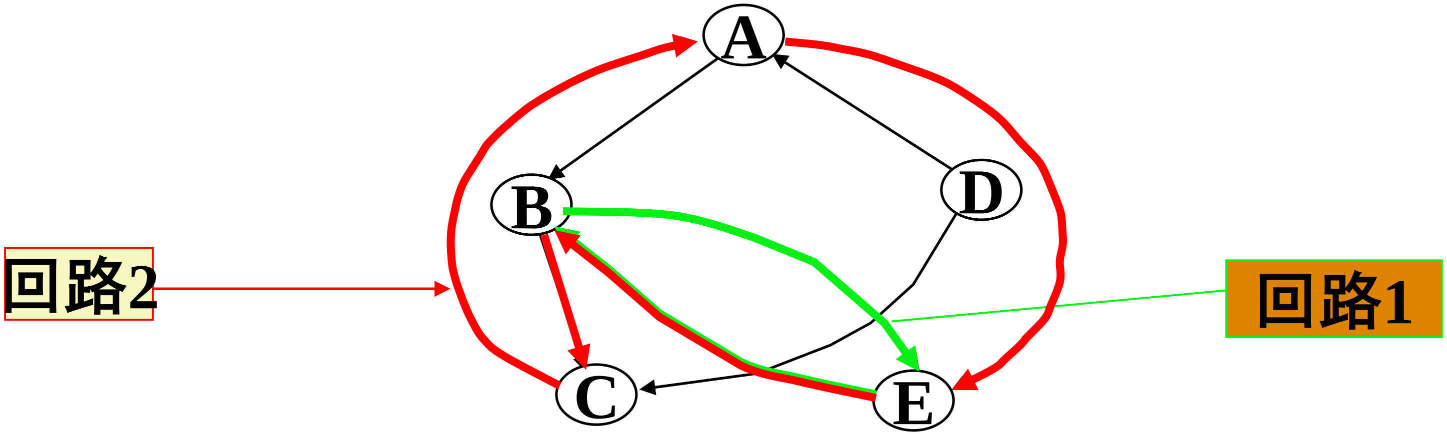
回路(cycle)：起点和终点相重合的简单路径。

❖无向回路也称圈。



图的相关术语

回路(cycle)：起点和终点相重合的简单路径



图的相关术语

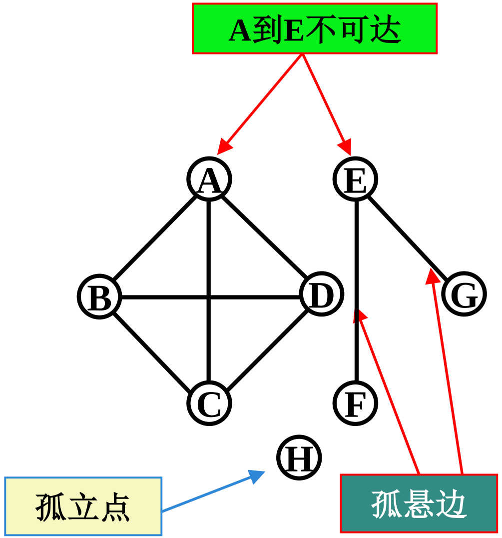
❖无向图的连通性

顶点连通(Connected)

顶点连通：顶点v到w有路径，称顶点v和顶点w连通，也称v可到达w

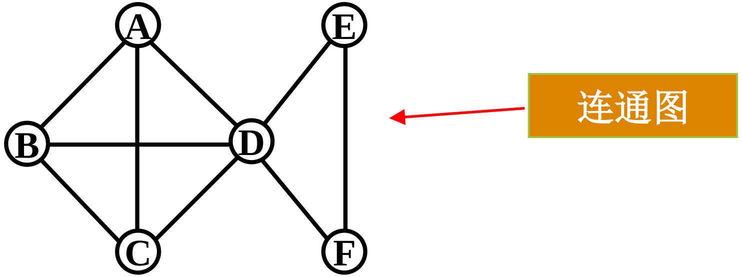
孤立点：与任何点都不连通

孤悬边：删除边(v, w)后，顶点v或w就变成孤立点



连通图(Connected Graph)

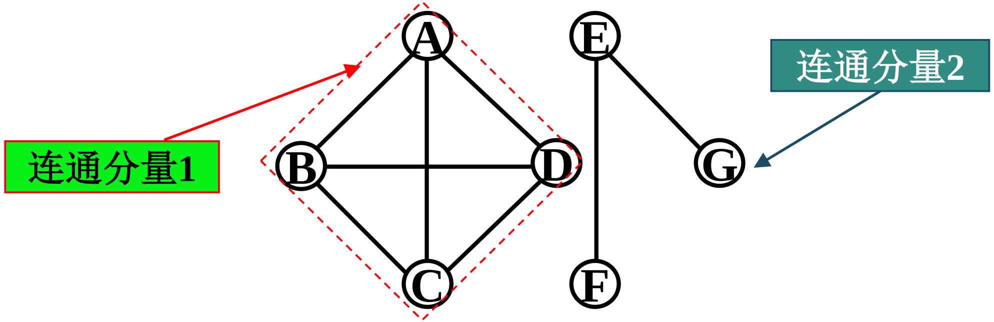
任何两点都连通的无向图



❖无向图的连通性

无向图的连通分量(Connected Component)

极大连通子图，其中极大指的是在满足连通的条件下，尽可能多的含有图中的顶点以及这些顶点之间的边

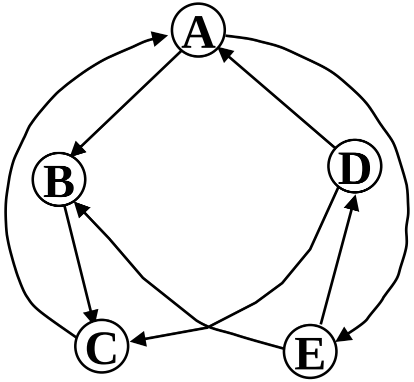


❖有向图的连通性

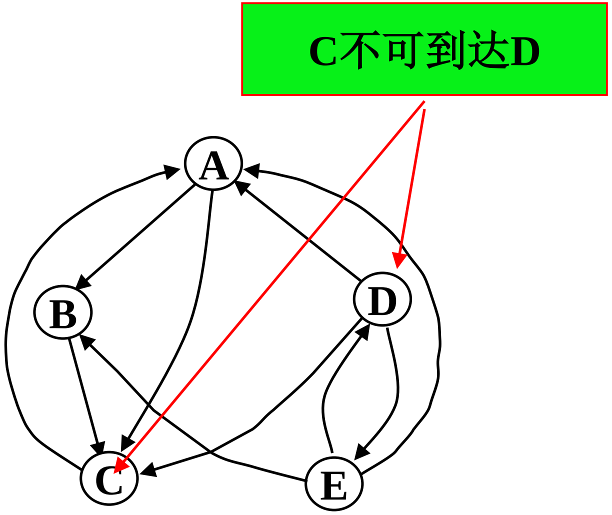
有向图G中，若顶点v到顶点w有一条路径，则称v与w是连通的。若v到w和w到v均有路径，即v与w同在一条回路上，则称v与w是互连通的。

强连通图(Strongly Connected Graph)

任何两点都相互连通的有向图



强连通图



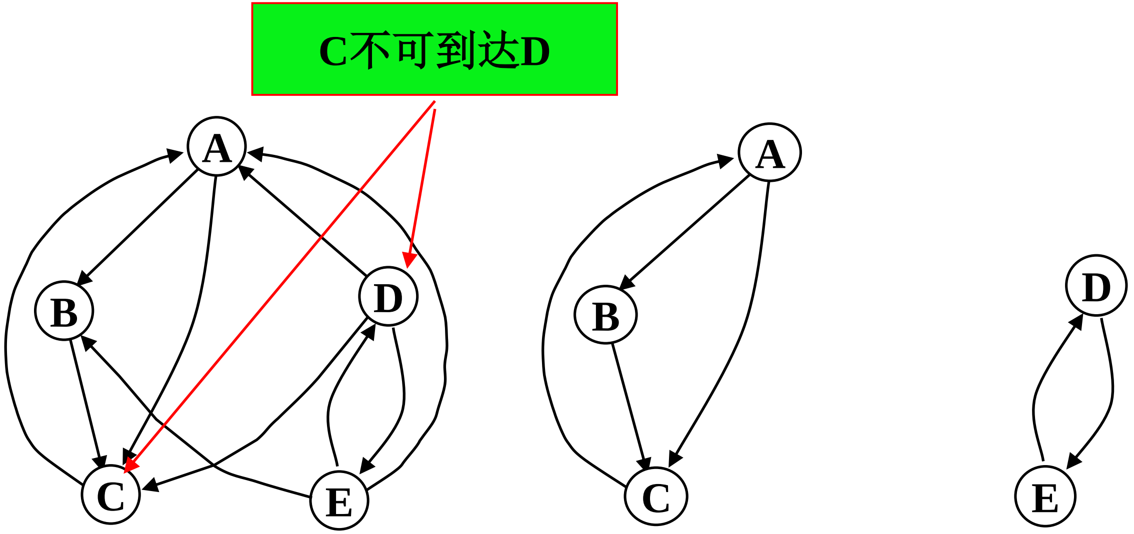
非强连通图

图的相关术语

❖ 有向图的连通性

强连通分量(Strongly Connected Components)：有向图的极大强连通子图

强连通图只含一个强连通分量



非强连通图　　强连通分量1　　强连通分量2

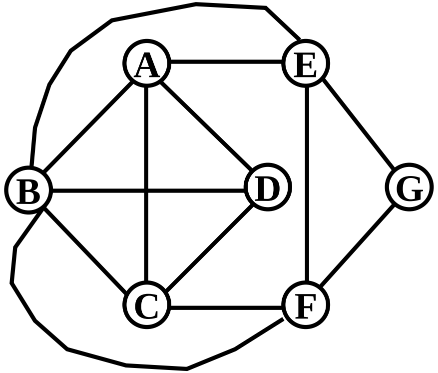
图的相关术语

生成树和生成林

无向连通图的生成树

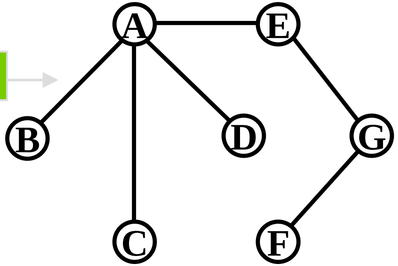
图的一种连通子图，它含有图的全部n个顶点，只含有足以使图保持连通的n-1条边

生成树也叫支撑树，可能不唯一

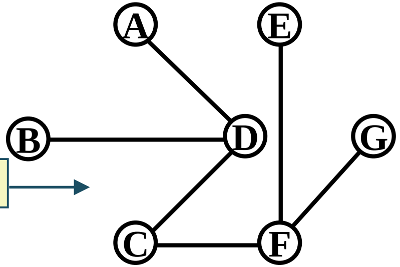


原图

生成树1



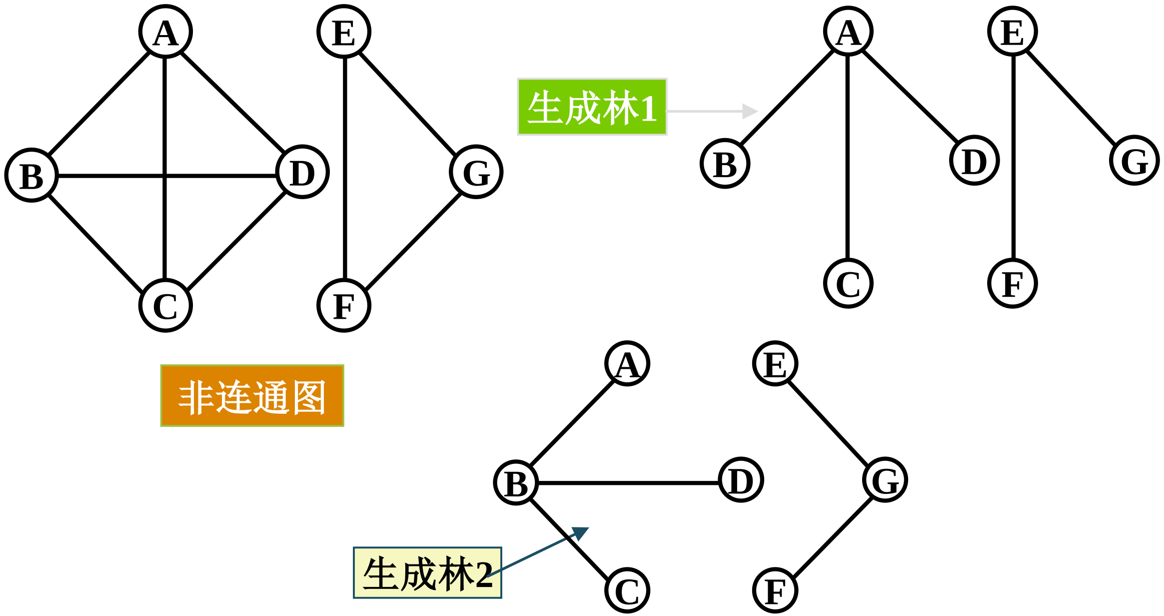
生成树2



❖生成树和生成林

无向非连通图的生成森林

无向非连通图每个连通分量有一棵生成树，构成图的生成森林



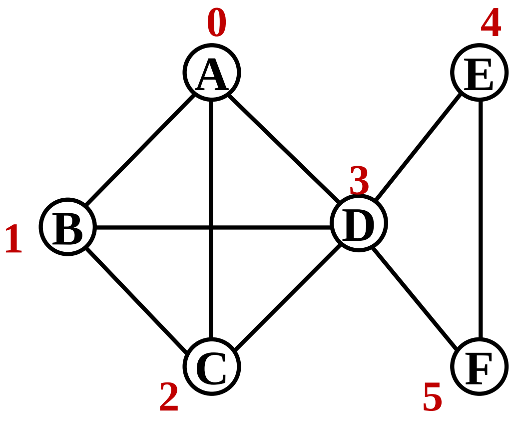
邻接矩阵

顶点表示事物，边表示事物间的关系，对应的关系矩阵称为邻接矩阵

如果图中有n个顶点，那么图的邻接矩阵是一个n*n的方阵；顶点对应矩阵的行列号，边对应矩阵元素值

- **0/1图对应的邻接矩阵是0/1矩阵：顶点v和w之间有边，矩阵第v行第w列元素值为1；否则为0**

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i到v_j有边\\ 0 & 否则\end{cases}$$



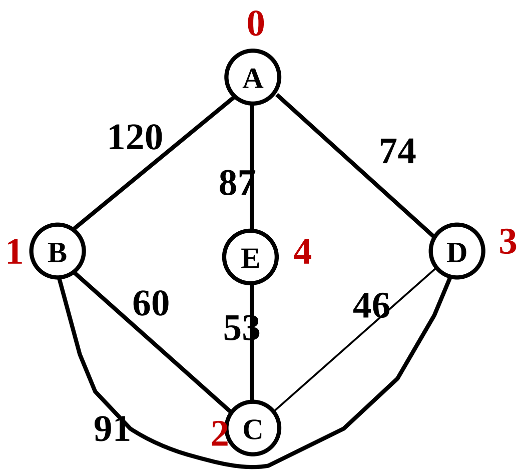
无向图

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

对称矩阵

- 加权图对应的邻接矩阵（也称耗费矩阵）是实数矩阵

$$c_{ij}=\begin{cases} w_{ij} & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{有边,而且边的权值为}w_{ij} \\ \infty & \text{否则} \end{cases}$$



无向加权图

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{l}{} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 120 & \infty & 74 & 87 \\ 120 & 0 & 60 & 91 & \infty \\ \infty & 60 & 0 & 46 & 53 \\ 74 & 91 & 46 & 0 & \infty \\ 87 & \infty & 53 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

耗费矩阵，对称

The End, Thank You!