Armstrong公理

讲授内容

1. 逻辑蕴含
2. 函数依赖集的闭包
3. Armstrong公理
4. 属性集闭包

逻辑蕴含

- 设有关系模式R（A,B,C），函数依赖集F={ A→B,B→C },判断 A→C是否成立。

解：对于关系模式R的任一实例r的任意元组t_1、t_2，

若$t_1[A]=t_2[A]$，根据函数依赖的定义：

由 A→B，可得 $t_1[B]=t_2[B]$；

由 B→C，可得 $t_1[C]=t_2[C]$；

则若$t_1[A]=t_2[A]$，那么$t_1[C]=t_2[C]$；

因此， A→C成立。

逻辑蕴含

- 设F是关系模式R上的函数依赖集， X、Y是R的属性子集，对于R的每个满足F的关系实例r，若函数依赖X→Y都成立，则称F逻辑蕴含X→Y。

  记为：F ├X→Y

函数依赖集的闭包（Closure）

- F 逻辑蕴含的所有函数依赖的集合，称为函数依赖集 F 的闭包，并记为F^+。

$$F^+ = \{ X \rightarrow Y \mid F \vdash X \rightarrow Y \}$$

Armstrong公理

- 1974年Armstrong提出一套推理规则，被称为Armstrong公理。
- 利用推理规则可从给定的函数依赖中推导出其所蕴含的函数依赖。

Armstrong公理

- 推理规则
  - 基本规则
  - 扩充规则

关系模式R（U，F）：

U为R的属性集

F是U上的函数依赖集

X、Y、Z、W是U的子集

子集X、Y的并集记为XY

{X,Y}与XY含义相同

{X}与X含义相同

基本推理规则

- Al. 自反律（Reflexivity）
  - 若Y ⊆ X，则X →Y
- A2. 增广律（Augmentation）
  - 若X→Y为F所蕴含，则XZ→YZ
- A3. 传递律（Transitivity）
  - 若X→Y、Y→Z为F所蕴含，则X→Z

扩充推理规则

- 合并规则（Union Rule）
  - 若X→Y、X→Z，则X→YZ （A2，A3）
- 伪传递规则（Pseudotransitivity Rule）
  - 若X→Y、WY→Z，则XW→Z （A2，A3）
- 分解规则（Decomposition Rule）
  - 若X→Y、Z⊆Y，则X→Z （A1，A3）

扩充推理规则

- **引理1：**

  $X \rightarrow A_1A_2 \ldots A_k$ 成立的充分必要条件是 $X \rightarrow A_i$ 成立 (i =1，2，…，k)

函数依赖集的闭包

- 求解函数依赖集$F = \{ A \to B,\ B \to C \}$的闭包$F^+$

解：F中的所有函数依赖都是其闭包中的元素，即

$$A \to B \in F^+ \qquad B \to C \in F^+$$

根据自反律规则，下述函数依赖也是其闭包中的元素

$A \to A$	$B \to B$	$C \to C$
$AB \to A$	$AB \to B$	$AB \to AB$
$AC \to A$	$AC \to C$	$AC \to AC$
$BC \to B$	$BC \to C$	$BC \to BC$
$ABC \to A$	$ABC \to B$	$ABC \to C$
$ABC \to AB$	$ABC \to AC$	$ABC \to BC$
$ABC \to ABC$		

函数依赖集的闭包

- 求解函数依赖集F = { A→B, B→C } 的闭包F^+

A→B、B→C及传递规则：A→C

A→B、A→C及合并规则：A→BC

A→B及增广规则：A→AB、AC→BC、AC→ABC

B→C及增广规则：AB→AC、B→BC、AB→ABC

A→C及增广规则：A→AC、AB→BC

A→BC及增广规则：A→ABC

AB→B、B→C及传递规则：AB→C

AC→A、A→B及传递规则：AC→B

……

AC→AB ∈ F^+？

到底有多少函数依赖?

属性集闭包

- 在R(U,F)中，F是属性集U上的一组函数依赖，$X \subseteq U$，则属性集X关于函数依赖集F的闭包 X_F^+ 定义为：

$X_F^+ = \{A_i \mid X \to A_i$ 可由F经Armstrong公理导出，$A_i \subseteq U\}$

即 $X_F^+ = \{A_i \mid X \to A_i \in F^+,\ A_i \subseteq U\}$

X_F^+是F^+中所有函数依赖于属性集X的所有属性的集合

属性集闭包

- 引理1：

  $X \rightarrow A_1A_2 \ldots A_k$ 成立的充分必要条件是$X \rightarrow A_i$ 成立（i=1，2，…，k)

- 引理2：

  X、Y $\subseteq$ U，$X \rightarrow Y$ 能由F 根据Armstrong公理导出的充分必要条件是$Y \subseteq X_F^+$

  $Y \in X_F^+$

属性集闭包

算法1：求X_F^+的一个算法

输入：属性集X和函数依赖集F

输出：属性集X关于函数依赖集F的闭包X_F^+

算法实现流程：

$X_F^+ := X;$

repeat

old $X_F^+ := X_F^+;$

对 F 中的每一个函数依赖 $Y \rightarrow Z$

do

if $Y \subseteq X_F^+$ then $X_F^+ := X_F^+ \cup Z;$

until (old $X_F^+ = X_F^+$)

属性集闭包

- $F=\{A \to BC, E \to CF, B \to E, CD \to EF\}$，求 $(AB)_F^+$

解：$(AB)_F^{+(0)} = AB$

第n次循环

由 $A \to BC$、$B \to E$，$(AB)_F^{+(1)} = AB \cup BC \cup E = ABCE$

$(AB)_F^{+(1)} \neq (AB)_F^{+(0)}$ 算法继续

由 $A \to BC$、$E \to CF$、$B \to E$，$(AB)_F^{+(2)} = ABCE \cup BC \cup CF \cup E = ABCEF$

$(AB)_F^{+(2)} \neq (AB)_F^{+(1)}$ 算法继续

由 $A \to BC$、$E \to CF$、$B \to E$，$(AB)_F^{+(3)} = ABCEF \cup BC \cup CF \cup E = ABCEF$

$(AB)_F^{+(3)} = (AB)_F^{+(2)}$ 算法终止

所以 $(AB)_F^+ = ABCEF$

算法可否优化？

属性集闭包

- 对于关系R（U,F），U={A,B,C,D,E,F}，R满足函数依赖 F={ A→BC, B→E, CD→EF }，判断 AD→F是否在F^+中。

解：$(AD)_F^+ = AD$

由 A→BC，$(AD)_F^+ = AD \cup BC = ABCD$

再由 B→E、CD→EF，$(AD)_F^+ = ABCD \cup E \cup EF = ABCDEF$

因为**F** $\subseteq (AD)_F^+$，所以AD→F $\in F^+$

函数依赖集的闭包

- 求解函数依赖集F = { A→B, B→C } 的闭包F^+

利用属性集闭包求解F^+

A→B、B→C及传递规则：A→C

A→B、A→C及合并规则：A→BC

A→B及增广规则：AC→BC、A→AB、AC→ABC

B→C及增广规则：AB→AC、B→BC、AB→ABC

A→C及增广规则：A→AC、AB→BC

A→BC及增广规则：A→ABC

AB→B、B→C及传递规则：AB→C

AC→A、A→B及传递规则：AC→B

……

小结

Armstrong 公理的有效性

从F 中的已有函数依赖利用Armstrong 公理推导出的每一个函数依赖$X \rightarrow Y \in F^{+}$。

Armstrong 公理的完备性

函数依赖集F所蕴含的函数依赖，即F^{+}中的每一个函数依赖都可以利用Armstrong公理推导出来。