形式最简单的. $A$ 和 $J_A$ 又都具有相似类的共性(相似不变性),如 $|A|=|J_A|$;$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(J_A)$;$|\lambda I-A|=|\lambda I-J_A|$等等. 因此,在讨论相关于 $A$ 的一些问题时,常常利用 $J_A$ 的简单形式,先就 $J_A$ 进行讨论,得到 $A$ 的相应结论,这就是 Jordan 化方法. 这一节用 Jordan 化方法先讨论 $A$ 的矩阵多项式的计算问题. 由此证明 Cayley 定理,再给出矩阵 $A$ 的最小多项式及其性质.

## 一、矩阵多项式

**定义 2.4**　设 $A\in F^{n\times n}$,$a_i\in F$,$g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是一个多项式,则称矩阵 $g(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$ 为 $A$ 的矩阵多项式.

应注意,$A\in F^{n\times n}$,$a_i\in F$,　$i=0,1,2,\cdots,m$ 时,$g(A)\in F^{n\times n}$,即 $g(A)$ 也是一个方阵,容易看到 $A$ 和 $g(A)$ 有如下关系.

**定理 2.6**　设 $A\in F^{n\times n}$,$g(A)$ 是 $A$ 的矩阵多项式,则有如下结果:

(1) 若 $\lambda_0$ 是 $A$ 的特征值,则 $g(\lambda_0)$ 是 $g(A)$ 的特征值.

(2) 如果 $A$ 相似于 $B$:$P^{-1}AP=B$,则 $g(A)$ 相似于 $g(B)$:$P^{-1}g(A)P=g(B)$.

(3) 如果 $A$ 为准对角矩阵,则 $g(A)$ 也是准对角矩阵. 而且

若
$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{pmatrix},$$
$A_i$ 为方子块,

则
$$g(A)=\begin{pmatrix}g(A_1)&&&\\&g(A_2)&&\\&&\ddots&\\&&&g(A_k)\end{pmatrix}.$$

**证明**　只证(2),其余留做练习.

已知　$P^{-1}AP=B$,则

$$\begin{aligned}P^{-1}g(A)P&=P^{-1}(a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I)P\\&=a_m(P^{-1}AP)^m+a_{m-1}(P^{-1}AP)^{m-1}+\cdots+a_1P^{-1}AP+a_0I\\&=g(P^{-1}AP)\\&=g(B).\end{aligned}$$

(2)得证. □

下面,我们讨论 $g(A)$ 的计算问题,即已知方阵 $A$ 和多项式 $g(\lambda)$,如何计算方阵 $g(A)$ 的问题. 设

$$g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

为计算 $g(A)$,用 Jordan 化方法. 设

$$A = PJ_AP^{-1};\quad J_A = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中$J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_s(\lambda_s)$为$J_A$ 的全部Jordan 块.

由定理2.7 知

$$g(A) = Pg(J_A)P^{-1} = P\begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix}P^{-1},$$

因此计算$g(A)$的问题转化为对Jordan 块$J_i(\lambda_i)$计算$g(J_i(\lambda_i))$的问题.

取一个$r$ 阶Jordan 块为代表作分析.

设
$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r} = \lambda I + U_r,$$

首先有

$$J(\lambda)^k = (\lambda I + U_r)^k = \lambda^k I + C_k^1\lambda^{k-1}U + C_k^2\lambda^{k-2}U^2 + \cdots + U^k, \tag{2.10}$$

利用

$$U_r^k = \begin{cases} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & k+1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}, & k < r, \\ 0, & k \geqslant r, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中
$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

(2.10)式表示成矩阵形式是

$$J(\lambda)^k=\begin{cases}\begin{pmatrix}\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & 1 & 0\\ & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ddots & 0\\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & \ddots & \\ & & & & C_k^1\lambda^{k-1}\\ & & & & \lambda^k\end{pmatrix}, & k< r,\\[2ex] \begin{pmatrix}\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1}\\ & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \vdots\\ & & \ddots & \\ & & & C_k^1\lambda^{k-1}\\ & & & \lambda^k\end{pmatrix}, & k\geqslant r.\end{cases}$$

代入$g(J(\lambda))$,并合并$U$ 的相同幂次项得

在$m\geqslant r$ 时,

$$g(J(\lambda))=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i}\right)U^i.$$

又

$$\sum_{k=i}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i}=\sum_{k=i}^{m}\frac{a_kk!}{(k-i)!i!}\lambda^{k-i}=\frac{1}{i!}\sum_{k=i}^{m}a_k\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^k)$$

$$=\frac{1}{i!}g^{(i)}(\lambda),$$

$$g(J(\lambda))=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{g^{(i)}(\lambda)}{i!}U^i=\begin{pmatrix}g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!}\\ & g(\lambda) & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & g'(\lambda)\\ & & & g(\lambda)\end{pmatrix};\qquad(2.12)$$

当$m< r$ 时,

$$g(J(\lambda))=\begin{pmatrix}g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{m}(\lambda)}{m!} & 0 & \cdots & 0\\ & g(\lambda) & & & \ddots & & 0\\ & & \ddots & & & & \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!}\\ & & \ddots & & & & \vdots\\ & & & & & & g'(\lambda)\\ & & & & & & g(\lambda)\end{pmatrix}.$$

## 二、方阵的化零多项式

对 $n$ 阶方阵 $A$，若存在多项式 $g(\lambda)$，使矩阵 $g(A)=0$，则称 $g(\lambda)$ 为矩阵 $A$ 的**化零多项式**.

我们感兴趣的是方阵 $A$ 的化零多项式是否存在？Cayley-Hamilton 定理回答这个问题.

**定理 2.7**　(Cayley-Hamilton) 设 $A\in F^{n\times n}$，则方阵 $A$ 的特征多项式就是 $A$ 的化零多项式，即若

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

则有　$f(A)=0$.

**证明**　用 Jordan 化方法证.

设 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，其中 $\sum_{i=1}^{s} r_i=n$，$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_s$ 互不相同.

设
$$A=P\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m)\end{pmatrix}P^{-1},$$

$J_i(\lambda_i)$ 是对角线元素为 $\lambda_i$ 的 $t_i$ 阶 Jordan 块，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 不必互异，$i=1,2,\cdots,m$，

则
$$f(A)=P\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & f(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_m(\lambda_m))\end{pmatrix}P^{-1},$$

$$f(J_i(\lambda_i))=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{t_i-1}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i)\end{pmatrix}_{t_i\times t_i}.$$

我们只看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第 1 行元素，由于 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$ 中含因子 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，$t_i\leqslant r_i$，所以 $t_i-1<r_i$，从而 $f(\lambda),f'(\lambda),\cdots,f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有因子 $(\lambda-\lambda_i)$，

因此
$$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(t_i-1)}(\lambda_i)=0,$$

即　$f(J_i(\lambda_i))$ 第一行元素全为 0，由 $f(J_i(\lambda_i))$ 的结构有

$$f(J_i(\lambda_i))=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

所以
$$f(A)=0.$$
□

$f(\lambda)$为$n$次多项式,$f(A)=0$使得$A^n$可以表示成$A^k(k<n)$的幂次项的组合:
$$A^n=-(a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I).\qquad(2.13)$$

**例9**　设$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,求$A^6$.

**解**　**方法1**:

由例4
$$A=P\begin{pmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}P^{-1},\quad 其中P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所以
$$A^6=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}^6&\\&\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}^6\end{pmatrix}P^{-1}.$$

令$g(\lambda)=\lambda^6$,则
$$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^6=g\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g(2)&g'(2)\\0&g(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^6&6\times2^5\\&2^6\end{pmatrix},$$

所以
$$A^6=P\begin{pmatrix}2^6&6\times2^5&0&0\\0&2^6&0&0\\0&0&2^6&6\times2^5\\0&0&0&2^6\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}64&192&0&-192\\0&64&0&0\\0&0&64&192\\0&0&0&64\end{pmatrix}.$$

**方法2**:
$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^4,$$
$$g(\lambda)=\lambda^6=(\lambda^2-8\lambda+40)f(\lambda)+160\lambda^3-720\lambda^2-1152\lambda-640,$$
$$g(A)=160A^3-720A^2-1152A-640I=\begin{pmatrix}64&192&0&-192\\0&64&0&0\\0&0&64&192\\0&0&0&64\end{pmatrix}.$$

## 三、最小多项式

对$A\in F^{n\times n}$,Cayley 定理指出它有化零多项式$f(\lambda)=|\lambda I-A|$,事实上,$A$有很多化零多项式.任取多项式$h(\lambda)$,$g(\lambda)=h(\lambda)f(\lambda)$都是$A$的化零多项式.若$A$是$V_n(F)$上线性

变换$T$的矩阵,对$A$的化零多项式$f(\lambda)$,相应地用多项式得到的线性变换$f(T)$就是零变换:$f(T)=0$.所以线性变换$T$的化零多项式也是存在的,而且

$$\text{线性变换 } f(T)=0 \Leftrightarrow \text{矩阵 } f(A)=0 \tag{2.14}$$

线性变换$T$的(或者说矩阵$A$的)最小多项式$m_T(\lambda)$是$T$的所有化零多项式中次数最低,首项系数是1的多项式.这里我们讨论最小多项式的性质与结构,并从最小多项式结构讨论线性变换$T$有对角矩阵($T$可对角化)的充分必要条件.

**定义2.5**　设$T$是线性空间$V_n(T)$上的线性变换,$m_T(\lambda)$是一个关于文字$\lambda$的多项式,如果$m_T(\lambda)$满足

(1) $m_T(\lambda)$最高次项系数为1;

(2) $m_T(\lambda)$是$T$的一个化零多项式,即$m_T(T)=0$;

(3) $m_T(\lambda)$是$T$的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是$T$的**最小多项式**.

定义2.5中条件(3)可以推出$T$的最小多项式$m_T(\lambda)$整除$T$的一切化零多项式,即:

如果多项式$\varphi(\lambda)$,使$\varphi(T)=0$,则$m_T(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$.否则,$m_T(\lambda)\nmid\varphi(\lambda)$,则有次数低于$m_T(\lambda)$的多项式$h(\lambda)$,使

$$\varphi(\lambda)=m_T(\lambda)g(\lambda)+h(\lambda),\quad \varphi(T)=0\Rightarrow h(T)=0,$$

与$m_T(\lambda)$次数最低矛盾.

又由(2.14)式,若$m_T(\lambda)$是$T$的最小多项式,则$m_T(\lambda)$也是$T$的矩阵$A$的最小多项式,又

$$m_T(P^{-1}AP)=P^{-1}m_T(A)P,$$

所以,$T$与它的矩阵$A$有相同的化零多项式和最小多项式.相似矩阵也有相同的化零多项式与最小多项式.因而研究$A$和研究$T$的最小多项式有相同的结论.

**定理2.8**　$T$的特征多项式$f(\lambda)$与最小多项式$m_T(\lambda)$有相同的根(重数不计),即若

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则

$$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}, \tag{2.15}$$

$$1\leqslant t_i\leqslant r_i,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

**证明**　由$m_T(\lambda)\mid f(\lambda)$,$t_i\leqslant r_i$是显然的,所以,证明只证$t_i\geqslant 1$即可.

反设$t_i=0$,即$\lambda_i$不是最小多项式$m_T(\lambda)$的根,取$T$的Jordan矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m)\end{pmatrix},$$

其中,$J_i(\lambda_i)$为Jordan块,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$,而$m_A(A)=0\Leftrightarrow m_A(J_i(\lambda_i))=0$,则由于$m_T(\lambda_i)\neq 0$,而使

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} m_T(\lambda_i) & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{pmatrix} \neq 0.$$

所以,$m_T(J)\neq 0$,从而$m_T(T)\neq 0$. 与$m_T(\lambda)$是$T$ 的最小多项式矛盾,所以 $r_i\geqslant 1$. □

从证明中可以看到,最小多项式$m_T(\lambda)$必须满足

$$m_T(J) = \begin{pmatrix} m_T(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & m_T(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(J_m(\lambda_m)) \end{pmatrix} = 0.$$

这启发我们更进一步来根据Jordan 矩阵$J$ 的关于$\lambda_i$ 的Jordan 块的阶数来确定式(2.15)给出的$m_T(\lambda)$结构中的 $t_i$.

**定理2.9**　设变换$T$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

又$T$ 的Jordan 标准形中关于特征值$\lambda_i$ 的Jordan 块的最高阶数为$\overline{n_i}$,则$T$ 的最小多项式

$$m_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\overline{n_1}}(\lambda-\lambda_2)^{\overline{n_2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\overline{n_s}}. \tag{2.16}$$

**证明**　取$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\overline{n_1}}(\lambda-\lambda_2)^{\overline{n_2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\overline{n_s}}$,设$T$ 的Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于$\lambda_i$ 的Jordan 块为$n_{ij}$阶.

$$\overline{n_i} = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{it_i}\}, \quad i = 1,2,\cdots,s.$$

不妨设$J_{i1}(\lambda_i)$是$\overline{n_i}$阶的Jordan 块,

则

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_i(\lambda_i))=\begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i))=\begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$含因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$,

所以
$$g(\lambda_i)=g'(\lambda_i)=\cdots=g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i)=0.$$

由此　$g(J_{i1}(\lambda_i))=0$,因而也有$g(J_{ij}(\lambda_i))=0$, $j=2,3,\cdots,t_i$, $i=1,2,\cdots,s$. 这说明:$g(J)=0$,即$g(\lambda)$是$T$的化零多项式. 设又有多项式

$$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

其中　$1\leqslant k_i\leqslant\bar{n}_i$,若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$,则一定$\exists\, i$,使　$k_i<\bar{n}_i$,对这样的$h(\lambda)$可以看到,由于

$$h^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i)\neq 0\quad(\bar{n}_i-1\geqslant k_i),$$

从而　$h(\lambda)$不是$T$的化零多项式,因此$g(\lambda)$是含因子$(\lambda-\lambda_i)$, $i=1,2,\cdots,s$的多项式中次数最低的$T$的化零多项式. 由定义知,$g(\lambda)$为最小多项式,即

$$m_T(\lambda)=g(\lambda).$$ □

作为定理2.9的推论,若$m_T(\lambda)$为一次因子之积,即$\bar{n}_i=1$, $i=1,2,\cdots,s$,则$J_i(\lambda)$必为对角阵,反之亦然. 因此有

**定理2.10**　线性变换$T$可以对角化的充分必要条件是$T$的最小多项式$m_T(\lambda)$是一次因子的乘积,即

$$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s).$$

定理2.10在矩阵上相应的叙述为,方阵$A$可对角化的充要条件是$A$的最小多项式$m_A(\lambda)$为一次因子之积. 这样我们就得到了线性变换$T$(矩阵$A$)可对角化的又一个充分必要条件.

**例10**　设$\mathbf{R}^3$上线性变换$T$在基$\{e_1,e_2,e_3\}$下矩阵为$A$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,求$T$的最小多项式$m_T(\lambda)$.

**解**
$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

由定理2.8
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

或者
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

由于
$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}-4&3&-2\\-7&5&-3\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3&-2\\-7&4&-3\\1&-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-3&2&-1\\3&-2&1\end{pmatrix}\neq 0,$$
可断定
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

**例 11** 设$A=\begin{pmatrix}0&0&0&4\\1&0&0&-4\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$,求矩阵$A$ 的最小多项式$m_A(\lambda)$.

**解**
$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

由于$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$为$f(\lambda)$的单根,因此相应$A$ 的 Jordan 标准形中关于$\lambda_1,\lambda_2$的 Jordan 块有$\bar{n}_1=\bar{n}_2=1$.

对$\lambda_3=\lambda_4=2$,rank$(A-2I)=3$,所以$\lambda=2$对应$n-\text{rank}(A-2I)=4-3=1$个Jordan 块,只能为$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$,所以$\bar{n}_3=2$,即有
$$J_A=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}.$$
由定理2.9,得
$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$
本例中矩阵$A$ 是不可对角化的.

**例12** 设$g(x)$是一个多项式,$\lambda$是方阵$A$ 的特征值.证明如果$g(A)=0$,则有$g(\lambda)=0$,即$A$ 的特征值是$A$ 的任何一个化零多项式的根.

**证明** 如果$g(A)=0$,则由最小多项式的定义,有$m_A(x)\mid g(x)$,从而存在多项式$h(x)$,使
$$g(x)=m_A(x)\cdot h(x).$$
当$\lambda$是$A$ 的特征值时,由定理2.9,有$m_A(\lambda)=0$,从而
$$g(\lambda)=m_A(\lambda)\cdot h(\lambda)=0.$$

# 习 题 二

1. 设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$是可逆矩阵,但$AB-BA$不可逆,证明1是$A^{-1}B^{-1}AB$的特征值.