练习三

《高等代数》第 8 章（第 4 版与第 5 版是一样的）

- 习题 1 第 5 小问
- 习题 2 第 3 ~~小问~~ 小问
- 习题 3
- 习题 5
- 习题 6 最后一问
- **例 6.14** (第十届全国大学生数学竞赛决赛试题) 证明：任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A = A_0 + A_1 + A_2$，其中 $A_0 = aI_n$，a 是实数，A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

1.(5).

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-1)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda^2-2 & 2\lambda-1 & \lambda^2-2 \\ 4\lambda^2-3 & 3\lambda-2 & \lambda^2-2 \\ \lambda^2-2 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(1) \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda^2-2 & 2\lambda-1 & \lambda^2-2 \\ 4\lambda^2-3 & 3\lambda-2 & \lambda^2-2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda^2-2 & 2\lambda-1 & \lambda^2-2 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4\lambda^2-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2-2 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4\lambda^2-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & 0 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 =$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \underline{4\lambda^2-4-(\lambda+3)(\lambda^2-1)} & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

2.(3). (1) $\beta=0$ 时 原矩阵 $=\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$

$T =$

易知 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$，红色标记的3阶子行列式

$=\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+\alpha & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & 1 \\ 0 & \lambda+\alpha \end{vmatrix} = -(\lambda+\alpha)^2 \Rightarrow$

$D_3=(\lambda+\alpha)^2$,

$D_4=(\lambda+\alpha)^4 \Rightarrow d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2$.

(2) $\beta\neq 0$ 时，$D_4(\lambda)=\left[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2\right]^2$,

取 $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$ 的3阶子式 $\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix} =$

$(\lambda+\alpha)\cdot\beta+\beta\cdot(\lambda+\alpha)=2(\lambda+\alpha)\beta$，它与 $D_4(\lambda)$ 互素，

由于 $D_3(\lambda) \mid 2(\lambda+\alpha)\beta$, $D_3(\lambda) \mid D_4(\lambda) \Rightarrow D_3(\lambda)=1$

于是 $D_1=D_2=D_3=1$, $d_1=d_2=d_3=1$, $d_4=D_4$

3. 求

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & & 0 & a_{n-1} \\ & -1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda & a_2 \\ & & & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ 的不变因子.

易知
$$|A| = (\lambda+a_1)\cdot\lambda^{n-1} + (-1)\cdot a_2\cdot\begin{vmatrix} \lambda & & & \\ -1 & \lambda & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & -1 & \lambda \\ & & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$+\, a_3\cdot\left|\begin{array}{cccc|cc} \lambda & & & & & \\ -1 & \lambda & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & \lambda & & \\ \hline & & & & -1 & \lambda \\ & 0 & & & 0 & -1 \end{array}\right|_{(n-1)\times(n-1)} + \cdots$$

$$+\,(-1)^{n+1}a_n\cdot\begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ & -1 & \lambda & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

易知 $D_{n-1}=1 \Rightarrow \quad D_1=D_2=\cdots=D_{n-1}=1=d_1=d_2=\cdots=d_{n-1}$

$$d_n = D_n = f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

习题5.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \Big[\lambda E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\parallel \atop U}\Big]^k$$

$$U \Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^3 = 0$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & k = 0 \\ A, & k = 1 \\ \lambda^k E + k \cdot \lambda^{k-1} E \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} E \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 0 & \\ = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}, & k \geq 2 \end{cases}$$

习题 6 (14).

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\lambda E-A| = D_n(\lambda) = \lambda\cdot\lambda^{n-1} + (-1)^{n+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda^n + (-1)^{n+2}\cdot(-1)^{n-1}$$

$$= \lambda^n - 1$$

易知 $D_{n-1}=1$, $\Rightarrow d_1=d_2=\cdots=d_{n-1}=1$, $d_n=D_n=\lambda^n-1$

记 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 1 的 n 个复根，于是

$$A\sim\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

问：$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 分解为 $A=A_0+A_1+A_2$，其中 $A_0=aE_n$，$a\in\mathbb{R}$，A_1,A_2 为幂零矩阵.

证明：思路，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \overset{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{幂零 } A_1 \\ \Updownarrow \\ \text{可以相似于}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{幂零 } A_2 \\ \Updownarrow \\ \text{可以相似于}}}$$

- $A=aE_n+A_1+A_2$

$\Downarrow$

$$A-aE_n=A_1+A_2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$P^{-1}(A-aE_n)P=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\mathrm{trace}(A-aE_n)=0$$

$\Rightarrow$ a 必须取为 $\frac{1}{n}(a_{11}+\cdots+a_{nn})=\frac{1}{n}\mathrm{tr}A$。

所以原问题等价于：若 $\mathrm{tr}A=0$，$\exists$ 可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$，即 $P^{-1}AP$ 对角元素为 0.

证明：从 $trA=0$ 出发证明 $A \sim \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$

即 $A = P_1 \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$，其中 P_1 为可逆矩阵.

等价于寻找 n 个线性无关的向量使得

使用归纳法证明：

① $n=1$，$\Rightarrow A=0$，任取非零向量即可.

② $n-1 \to n$：考察 $\{(\alpha, A\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}$.

(a) 若 $\exists \alpha$，$A\alpha$ 线性无关，则 $A\underbrace{(\alpha, A\alpha, \text{基扩展})}_{} \triangleq P$

$$= (\alpha, A\alpha, \cdots) \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$$

此时，由 $A \sim \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$ 知

$trB = 0$，于是由 $(n-1)$ 假设

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & Q\Lambda Q^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$$，其中

Λ 为对角线为 0 的 $n-1 \times n-1$ 阶实方阵.

再根据 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & Q\Lambda Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ Q^{-1}\beta & \Lambda Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha Q \\ Q^{-1}\beta & \Lambda \end{pmatrix}$$ 知

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \Lambda \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}.$$

(b) 若所有 α，$A\alpha$ 都线性相关 $\Rightarrow$

$A = kE \Rightarrow A = 0$. $\longrightarrow$ 此时所有非零向量都是特征向量.