2022年全国大学生数学竞赛（专业组）模拟试卷1

1、（15分） 设$f(x)$在$[0,2]$上二阶可导，且$f(0)=f(2)$且对任意的$x\in(0,2)$有$|f''(x)|\le M$.
证明:

$$\left|f'(x)\right|\le M, x\in[0,2].$$

2、（15分） 设$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

(1) 证明:极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;

(2) 记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$的敛散性.

3、（15分） 设J是所有元素都为1的n阶矩阵,X是n阶矩阵.证明:矩阵方程$X=XJ+JX$仅有零解（即X是一个n阶零矩阵）

4、（15分） 设$N(0,0,1)$是球面$S: x^2+y^2+z^2=1$的北极.$A(a_1,a_2,0),B(b_1,b_2,0),C(c_1,c_2,0)$为$xOy$面上不同的三点. 设连接$N$与$A,B,C$的三直线依次交球面$S$于点$A_1,B_1,C_1$.

(1) 求连接N与A两点的直线方程;

(2) 求点A_1,B_1,C_1三点的坐标;

(3) 给定点$A(1,-1,0),B(-1,1,0),C(1,1,0)$,求四面体$NA_1B_1C_1$的体积.

5、（20分） $A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶实方阵，满足如下条件:

1）$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

2) 对每个$i(i=1,2,\cdots,n)$,有$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a$.

求$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A(x_1,\cdots x_n)^T$的规范形.

6、（20分） 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，满足对任意$x\in[0,1]$,$\int_{x^2}^{x}f(t)dt\ge\frac{x^2-x^4}{2}$.证明:

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx\ge\frac{1}{10}.$$