系列初等变换将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.

等价是 λ - 矩阵之间的一种关系，这个关系，显然具有下列三个性质：

1) 自反性：每一个 λ - 矩阵与自己等价.

2) 对称性：若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价，则 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 等价. 这是由于初等变换具有可逆性的缘故.

3) 传递性：若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价，$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{C}(\lambda)$ 等价，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{C}(\lambda)$ 等价.

应用初等变换与初等矩阵的关系即得，矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件为有一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_l, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$ 使

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_l \boldsymbol{B}(\lambda) \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t. \tag{1}$$

这一节主要是证明任意一个 λ - 矩阵可以经过初等变换化为某种对角形. 为此，首先给出下面的引理.

引理 设 λ - 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$，并且 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽，那么一定可以找到一个与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 等价的矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$，它的左上角元素也不为零，但是次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低.

证明 根据 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽的元素所在的位置，分三种情形来讨论：

1) 若在 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的第一列中有一个元素 $a_{i1}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，则有

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda) q(\lambda) + r(\lambda),$$

其中余式 $r(\lambda) \neq 0$，且次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低.

对 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 作初等行变换. 把 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的第 i 行减去第一行的 $q(\lambda)$ 倍，得

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

再将此矩阵的第一行与第 i 行互换,得

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}(\lambda).$$

$\boldsymbol{B}(\lambda)$的左上角元素 $r(\lambda)$符合引理的要求,故 $\boldsymbol{B}(\lambda)$即为所求的矩阵.

2) 在 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的第一行中有一个元素 $a_{1i}(\lambda)$不能被 $a_{11}(\lambda)$除尽,这种情况的证明与 1)类似,但是对 $\boldsymbol{A}(\lambda)$进行的是初等列变换.

3) $\boldsymbol{A}(\lambda)$的第一行与第一列中的元素都可以被 $a_{11}(\lambda)$除尽,但 $\boldsymbol{A}(\lambda)$中有另一个元素 $a_{ij}(\lambda)(i>1,j>1)$不能被 $a_{11}(\lambda)$除尽.我们设 $a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$.对 $\boldsymbol{A}(\lambda)$作下述初等行变换:

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)+(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$= \boldsymbol{A}_1(\lambda)$.

矩阵 $\boldsymbol{A}_1(\lambda)$的第一行中,有一个元素

$$a_{ij}(\lambda) + (1 - \varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$$

不能被左上角元素 $a_{11}(\lambda)$除尽,这就化为已经证明了的情况 2).

定理 2 任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r \geqslant 1$, $d_i(\lambda)(i = 1,2,\cdots,r)$是首项系数为 1 的多项式,且

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \quad (i = 1,2,\cdots,r-1).$$

证明 经过行列调动之后,可以使得 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$,如果 $a_{11}(\lambda)$不能除尽 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部元素,由引理,可以找到与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的 $\boldsymbol{B}_1(\lambda)$,它的左上角元素 $b_1(\lambda) \neq 0$,并且次数比$a_{11}(\lambda)$低.如果 $b_1(\lambda)$还不能除尽 $\boldsymbol{B}_1(\lambda)$的全部元素,由引理,又可以找到与 $\boldsymbol{B}_1(\lambda)$等价的 $\boldsymbol{B}_2(\lambda)$,它的左上角元素 $b_2(\lambda) \neq 0$,并且次数比 $b_1(\lambda)$低.如此下去,将得到一系列彼此等价的 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}_1(\lambda), \boldsymbol{B}_2(\lambda), \cdots$.它们的左上角元素皆不为零,而且次数越来越低.但次数是非负整数,不可能无止境地降低.因此在有限步以后,我们将终止于一个 λ-矩阵 $\boldsymbol{B}_s(\lambda)$,它的左上角元素 $b_s(\lambda) \neq 0$,而且可以除尽 $\boldsymbol{B}_s(\lambda)$的全部元素 $b_{ij}(\lambda)$,即

$$b_{ij}(\lambda) = b_s(\lambda) q_{ij}(\lambda),$$

对 $\boldsymbol{B}_s(\lambda)$作初等变换:

$$\boldsymbol{B}_s(\lambda)=\begin{pmatrix} b_s(\lambda) & \cdots & b_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1}(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} b_s(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

在右下角的 λ - 矩阵 $\boldsymbol{A}_1(\lambda)$ 中,全部元素都是可以被 $b_s(\lambda)$ 除尽的,因为它们都是 $\boldsymbol{B}_s(\lambda)$ 中元素的组合.

如果 $\boldsymbol{A}_1(\lambda)\neq\boldsymbol{O}$,则对于 $\boldsymbol{A}_1(\lambda)$ 可以重复上述过程,进而把矩阵化成

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

其中 $d_1(\lambda)$ 与 $d_2(\lambda)$ 都是首项系数为 1 的多项式($d_1(\lambda)$ 与 $b_s(\lambda)$ 只差一个常数倍数),而且 $d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)$, $d_2(\lambda)$ 能除尽 $\boldsymbol{A}_2(\lambda)$ 的全部元素.

如此下去, $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 最后就化成了所要求的形式. ▌

最后化成的这个矩阵称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的**标准形**.

例 用初等变换化 λ - 矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

为标准形. 具体步骤如下:

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & 1\\ \lambda & \lambda^2 & 0\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^3+\lambda-1 & 1+\lambda^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}=B(\lambda).$$

§3 不变因子

现在来证明，λ - 矩阵的标准形是唯一的. 为此，我们引入：

定义 5 设 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于正整数 k，$1\leqslant k\leqslant r$，$A(\lambda)$ 中必有非零的 k 级子式. $A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 级**行列式因子**.

由定义可知，对于秩为 r 的 λ - 矩阵，行列式因子一共有 r 个. 行列式因子的意义就在于，它在初等变换下是不变的.

定理 3 等价的 λ - 矩阵具有相同的秩与相同的各级行列式因子.

证明 我们只需要证明，λ - 矩阵经过一次初等变换，秩与行列式因子是不变的.

设 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 经过一次初等行变换变成 $B(\lambda)$，$f(\lambda)$ 与

$g(\lambda)$分别是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$的 k 级行列式因子.我们证明 $f=g$.下面分三种情形讨论:

1) $\boldsymbol{A}(\lambda)$经第一种初等行变换变成 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.这时,$\boldsymbol{B}(\lambda)$的每个 k 级子式或者等于$\boldsymbol{A}(\lambda)$的某个 k 级子式,或者与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的某一个 k 级子式反号,因此 $f(\lambda)$是 $\boldsymbol{B}(\lambda)$的 k 级子式的公因式,从而 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.

2) $\boldsymbol{A}(\lambda)$经第二种初等行变换变成 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.这时,$\boldsymbol{B}(\lambda)$的每个 k 级子式或者等于$\boldsymbol{A}(\lambda)$的某一个 k 级子式,或者等于 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的某一个 k 级子式的c 倍.因此 $f(\lambda)$是 $\boldsymbol{B}(\lambda)$的 k 级子式的公因式,从而 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.

3) $\boldsymbol{A}(\lambda)$经第三种初等行变换变成 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.这时 $\boldsymbol{B}(\lambda)$中那些包含 i 行与j 行的k 级子式和那些不包含i 行的k 级子式都等于$\boldsymbol{A}(\lambda)$中对应的 k 级子式;$\boldsymbol{B}(\lambda)$中那些包含 i 行但不包含j 行的k 级子式,按 i 行分成两部分,而等于 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的一个 k 级子式与另一个k 级子式的$\pm\varphi(\lambda)$倍的和,也就是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的两个 k 级子式的组合.因此 $f(\lambda)$是 $\boldsymbol{B}(\lambda)$的 k 级子式的公因式,从而 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.

对于列变换,可以完全一样地讨论.总之,如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$经过一次初等变换变成 $\boldsymbol{B}(\lambda)$,那么 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.但由初等变换的可逆性,$\boldsymbol{B}(\lambda)$也可以经过一次初等变换变成 $\boldsymbol{A}(\lambda)$.由上面的讨论,同样应有 $g(\lambda)\mid f(\lambda)$,于是 $f(\lambda)=g(\lambda)$.

当 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部 k 级子式为零时,$\boldsymbol{B}(\lambda)$的全部 k 级子式也就等于零;反之亦然.因此,$\boldsymbol{A}(\lambda)$与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$既有相同的各级行列式因子,又有相同的秩. ▌

现在来计算标准形矩阵的行列式因子.设标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$. 不难证明，在这种形式的矩阵中，如果一个 k 级子式包含的行与列的标号不完全相同，那么这个 k 级子式一定为零(读者自己证明). 因此，为了计算 k 级行列式因子，只要看由 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行与 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列 $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r)$ 组成的 k 级子式就行了，而这个 k 级子式等于

$$d_{i_1}(\lambda) d_{i_2}(\lambda) \cdots d_{i_k}(\lambda).$$

显然，这种 k 级子式的最大公因式就是

$$d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda).$$

定理 4 λ - 矩阵的标准形是唯一的.

证明 设(1)是 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形. 由于 $\mathbf{A}(\lambda)$ 与(1)等价，它们有相同的秩与相同的行列式因子，因此，$\mathbf{A}(\lambda)$ 的秩就是标准形的主对角线上非零元素的个数 r；$\mathbf{A}(\lambda)$ 的 k 级行列式因子就是

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda) \quad (k=1,2,\cdots,r). \tag{2}$$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \cdots, d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}. \tag{3}$$

这说明 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形(1)的主对角线上的非零元素是被 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的行列式因子所唯一决定的，所以 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形是唯一的. ▌

定义 6 标准形的主对角线上非零元素 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 λ - 矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子**.

定理 5 两个 λ - 矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者，它们有相同的不变因子.

证明 等式(2)与(3)给出了 λ - 矩阵的行列式因子与不变因子之间的关系. 这个关系式说明，行列式因子与不变因子是相互确定的. 因此，说两个矩阵有相同的各级行列式因子，就等于说它们有相同的各级不变因子.

必要性已由定理 3 证明.

充分性是很明显的.事实上,若 λ - 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 有相同的不变因子,则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 和同一个标准形等价,因而 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价. ▌

由(3)可以看出,在 λ - 矩阵的行列式因子之间,有关系

$$D_k(\lambda) \mid D_{k+1}(\lambda) \quad (k=1,2,\cdots,r-1). \tag{4}$$

在计算 λ - 矩阵的行列式因子时,常常是先计算最高级的行列式因子.这样,由(4)我们就大致有了低级行列式因子的范围了.

作为一个例子,我们来看可逆矩阵的标准形.设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为一个 $n \times n$ 可逆矩阵,由定理 1 知

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)| = d,$$

其中 d 是一非零常数.这就是说,

$$D_n(\lambda) = 1.$$

于是由(4)可知,$D_k(\lambda)=1(k=1,2,\cdots,n)$,从而

$$d_k(\lambda) = 1 \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

因此,可逆矩阵的标准形是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.反过来,与单位矩阵等价的矩阵一定是可逆的,因为它的行列式是一个非零的数.这就是说,矩阵可逆的充分必要条件是它与单位矩阵等价.又矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件是有一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_l, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$,使

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t.$$

特别地,当 $\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{E}$ 时,就得到:

定理 6 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆的充分必要条件是它可以表成一些初等矩阵的乘积. ▌

由此又得到矩阵等价的另一条件:

推论 两个 $s \times n$ 的 λ - 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件为,有一个 $s \times s$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 与一个 $n \times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$,使

$$\boldsymbol{B}(\lambda) = \boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda).$$