# 数学竞赛培训前摸底

5 月 11 日前提交纸质答案到 东 7-503 办公室 刘老师

1. 假设数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$ ，其中 $m, n \geq 1$。证明
   a) $x_n \leq n x_1$ ， $n \geq 1$ 。
   b) 如果非负整数 $n \geq 1, N \geq 1,\ q \geq 0,\ r \geq 0$,满足 $n = qN + r, 0 \leq r < N$, 则:
      $x_n \leq q\, x_N + r\, x_1$ 。
   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在。

2. 设 n 为任意正整数，证明
   a) 如果$\sin x \neq 0$ ，则有 $\frac{\sin(nx)}{sinx} = \frac{\sin((n-2)x)}{sinx} + 2\cos((n-1)x)$ 。
   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{sinx} dx = \frac{\pi}{2}$ 。

3. 证明

$$det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix} =$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$ 。

4. 设 $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 的四个根为 $a, b, c, d$，证明

$$det\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix} = 0$$

5. 证明：若函数$f(x)$在$[0,1]$上可微，则在$(0,1)$ 中至少存在一点 ξ ，使得

$$\int_0^1 f(x)\, dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(\xi)$$ 。