数学竞赛培训前摸底

5 月 15 日前提交纸质答案到 东 7-503 办公室

1. (抽象代数)设 A, B 是群 G 的两个子群，证明 AB≤G 当且仅当 AB=BA。
2. (抽象代数)证明：如果群 G 只有有限多个子群，则 G 是有限群。
3. (抽象代数)确定S_4的 Sylow 子群的个数。
4. (数学分析)假设数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$ ，其中 $\mathrm{m}, \mathrm{n} \geq 1$。证明
   a) $x_n \leq n x_1$ ， $n \geq 1$ 。
   b) 如果非负整数 $\mathrm{n} \geq 1, N \geq 1,\ q \geq 0,\ r \geq 0$,满足 $\mathrm{n} =\ qN + r, 0 \leq r < N$, 则：

      $x_n \leq q\, x_N + r\, x_1$ 。
   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在。

5. (数学分析)设 n 为任意正整数，证明
   a) 如果$\sin x\ \neq 0$ ，则有 $\frac{\sin(nx)}{sinx} = \frac{\sin((n-2)x)}{sinx} + 2\cos((n-1)x)$ 。
   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{sinx} dx = \frac{\pi}{2}$ 。
6. (高等代数)证明

$$det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \\ & & & \end{bmatrix} =$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$ 。

7. (高等代数)设 $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 的四个根为 a, b, c, d，证明

$$det\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix} = 0$$

8. (数学分析)证明：若函数$f(x)$在$[0,1]$上可微，则在$(0,1)$ 中至少存在一点 ξ，使得

$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{6\xi} f'(\xi)$ 。

9. (实分析)中有如下 Arzelà-Ascoli 定理:

Definition *A collection $\mathcal{F}$ of real-valued functions on a metric space X is said to be* **equicontinuous** *at the point $x \in X$ provided for each $\epsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that for every $f \in \mathcal{F}$ and $x' \in X$,*

$$\text{if } \rho(x', x) < \delta, \text{ then } |f(x') - f(x)| < \epsilon.$$

The collection $\mathcal{F}$ is said to be equicontinuous on X provided it is equicontinuous at every point in X.

A sequence $\{f_n\}$ of real-valued functions on a set X is said to be **pointwise bounded** provided for each $x \in X$, the sequence $\{f_n(x)\}$ is bounded and is said to be **uniformly bounded** on X provided there is some $M \geq 0$ for which

$$|f_n| \leq M \text{ on } X \text{ for all } n.$$

The Arzelà–Ascoli Theorem *Let X be a compact metric space and $\{f_n\}$ a uniformly bounded, equicontinuous sequence of real-valued functions on X. Then $\{f_n\}$ has a subsequence that converges uniformly on X to a continuous function f on X.*

试证明若命题中的"uniformly bounded"表述更改为"pointwise bounded"，则 Arzelà-Ascoli 定理的结论依然成立，即证明:

pointwise

The Arzelà–Ascoli Theorem *Let X be a compact metric space and $\{f_n\}$ a uniformly bounded, equicontinuous sequence of real-valued functions on X. Then $\{f_n\}$ has a subsequence that converges uniformly on X to a continuous function f on X.*

10. (数分与高代)设 A 为 n 阶实方阵，证明 $\frac{d}{dx}det(xE - A) = tr(Adj(xE - A))$，其中$E$为 n 阶单位矩阵，det 表示行列式，Adj 表示伴随矩阵。