

## 2022 年全国大学生数学竞赛（专业组）模拟试卷 2

1. (20 分) 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (1) 求  $P^{-1}$
- (2) 求  $P^{-1}AP$
- (3) 求  $A^{2022}$

2. (20 分)

- (1) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 请找到一个二阶可逆矩阵  $P$  使得  $A = P^{-1}BP$ .
- (2) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , 请找到一个二阶可逆矩阵  $P$  使得  $A = P^{-1}BP$ .

3. (15 分) 求  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2} dx$

4. (15 分) 设  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上二阶可导,  $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在并有限, 且对任意的  $x$  有  $|f''(x)| \leq M$ .

证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

5. (15 分) 设  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上三阶可导,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$ .

证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ .

6. (15 分) 假设  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $0 \leq g(x) = xf(x)$  在  $[1, +\infty]$  上单调递减.

证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) \ln x = 0$ . (提示:  $xf(x) \ln x - xf(x) \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} xf(x) \ln x$ )