形式最简单的. A 和 J_A 又都具有相似类的共性(相似不变性),如 $|A|=|J_A|$;$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(J_A)$; $|\lambda I-A|=|\lambda I-J_A|$等等. 因此,在讨论相关于 A 的一些问题时,常常利用 J_A 的简单形式,先就 J_A 进行讨论,得到 A 的相应结论,这就是 Jordan 化方法. 这一节用 Jordan 化方法先讨论 A 的矩阵多项式的计算问题. 由此证明 Cayley 定理,再给出矩阵 A 的最小多项式及其性质.

一、矩阵多项式

定义 2.4 设 $A\in F^{n\times n}$,$a_i\in F$,$g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是一个多项式,则称矩阵 $g(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$ 为 A 的矩阵多项式.

应注意,$A\in F^{n\times n}$,$a_i\in F$, $i=0,1,2,\cdots,m$ 时,$g(A)\in F^{n\times n}$,即 $g(A)$ 也是一个方阵,容易看到 A 和 $g(A)$ 有如下关系.

定理 2.6 设 $A\in F^{n\times n}$,$g(A)$ 是 A 的矩阵多项式,则有如下结果:

(1) 若 λ_0 是 A 的特征值,则 $g(\lambda_0)$ 是 $g(A)$ 的特征值.

(2) 如果 A 相似于 B:$P^{-1}AP=B$,则 $g(A)$ 相似于 $g(B)$:$P^{-1}g(A)P=g(B)$.

(3) 如果 A 为准对角矩阵,则 $g(A)$ 也是准对角矩阵. 而且

若
$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$
A_i 为方子块,

则
$$g(A)=\begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}.$$

证明 只证(2),其余留做练习.

已知 $P^{-1}AP=B$,则

$$\begin{aligned} P^{-1}g(A)P &= P^{-1}(a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I)P \\ &= a_m(P^{-1}AP)^m+a_{m-1}(P^{-1}AP)^{m-1}+\cdots+a_1P^{-1}AP+a_0I \\ &= g(P^{-1}AP) \\ &= g(B). \end{aligned}$$

(2)得证. □

下面,我们讨论 $g(A)$ 的计算问题,即已知方阵 A 和多项式 $g(\lambda)$,如何计算方阵 $g(A)$ 的问题. 设

$$g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

为计算 $g(A)$,用 Jordan 化方法. 设

$$
A = PJ_AP^{-1}; \quad J_A = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},
$$

其中 $J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_s(\lambda_s)$ 为 J_A 的全部Jordan 块.

由定理2.7 知

$$
g(A) = Pg(J_A)P^{-1} = P\begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix}P^{-1},
$$

因此计算 $g(A)$ 的问题转化为对Jordan 块 $J_i(\lambda_i)$ 计算 $g(J_i(\lambda_i))$ 的问题.

取一个 r 阶Jordan 块为代表作分析.

设

$$
J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r} = \lambda I + U_r,
$$

$k\cdot\lambda U^{k-1}$

首先有

$$
J(\lambda)^k = (\lambda I + U_r)^k = \lambda^k I + C_k^1\lambda^{k-1}U + C_k^2\lambda^{k-2}U^2 + \cdots + U^k, \tag{2.10}
$$

利用

$$
U_r^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} \overbrace{0 & 0 & \cdots & 0 & 1}^{k+1} & 0\cdots 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, & k < r, \\ 0, & k \geqslant r, \end{cases} \tag{2.11}
$$

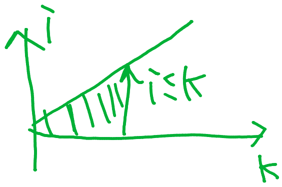
其中

$$
C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}.
$$

(2.10)式表示成矩阵形式是

$$
J(\lambda)^k=\begin{cases}
\begin{pmatrix}
\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & 1 & 0\\
 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ddots & 0\\
 & & \ddots & \ddots & 1\\
 & & & \ddots & \\
 & & & & C_k^1\lambda^{k-1}\\
 & & & & \lambda^k
\end{pmatrix}, & k<r,\\[2ex]
\begin{pmatrix}
\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1}\\
 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \vdots\\
 & & \ddots & \\
 & & & C_k^1\lambda^{k-1}\\
 & & & \lambda^k
\end{pmatrix}, & k\geqslant r.
\end{cases}
$$

$k+1$ 项; 共 $r-(k+1)$ 行 $\geqslant 0$; $r\geqslant 2$; 如 $k=r-1$: $J(\lambda)^k=J(\lambda)^{r-1}=\begin{pmatrix}\lambda^{r-1} & (r-1)\lambda^{r-2} & \cdots & (r-1)\lambda & 1\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & & & (r-1)\lambda^{r-2}\\ & & & & \lambda^{r-1}\end{pmatrix}$; 如: $k=r$, $J(\lambda)^k=J(\lambda)^r=\begin{pmatrix}\lambda^r & r\lambda^{r-1} & \frac{r(r-1)}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & r\lambda\\ & \lambda^r & & \ddots & \vdots\\ & & & & r\lambda^{r-1}\\ & & & & \lambda^r\end{pmatrix}$; $U_r^{r-1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ & & & 0\\ & & & \vdots\\ & & & 0\end{pmatrix}_{r\times r}$; $r\times r$



代入$g(J(\lambda))$,并合并U 的相同幂次项得

在$m\geqslant r$ 时,

$g(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$; $\sum_{k=0}^m a_k J(\lambda)^k$; $\sum_{k=0}^m a_k\sum_{i=0}^k C_k^i\lambda^{k-i}U^i$; 注 $\sum_{k=0}^m\sum_{i=0}^k f(i,k)=\sum_{i=0}^m\sum_{k=i}^m f(i,k)$; $=\sum_{i=0}^m\left(\sum_{k=i}^m a_kC_k^i\lambda^{k-i}\right)U^i \quad \cdots (*)$

$$g(J(\lambda))\overset{(*)}{=}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i}\right)U^i.$$

$$\text{又}\qquad \sum_{k=i}^m a_kC_k^i\lambda^{k-i}=\sum_{k=i}^m\frac{a_kk!}{(k-i)!\,i!}\lambda^{k-i}=\frac{1}{i!}\sum_{k=i}^m a_k\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^k)$$
$$=\frac{1}{i!}g^{(i)}(\lambda),$$

$$g(J(\lambda))=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{g^{(i)}(\lambda)}{i!}U^i=\begin{pmatrix}
g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \dfrac{g^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!}\\
 & g(\lambda) & \ddots & \vdots\\
 & & \ddots & g'(\lambda)\\
 & & & g(\lambda)
\end{pmatrix};\tag{2.12}$$

当$m<r$ 时,

$m+1$ 列; $r-(m+1)\geqslant 0$ 列

$$g(J(\lambda))=\begin{pmatrix}
g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \dfrac{g^{m}(\lambda)}{m!} & 0 & \cdots & 0\\
 & g(\lambda) & & & \ddots & & 0\\
 & & & \ddots & & & \dfrac{g^{(m)}(\lambda)}{m!}\\
 & & & \ddots & & & \vdots\\
 & & & & & & g'(\lambda)\\
 & & & & & & g(\lambda)
\end{pmatrix}.$$

$\| \text{by}(*)$

$\sum_{i=0}^m\left(\sum_{k=i}^m a_kC_k^i\lambda^{k-i}\right)U^i=\sum_{i=0}^m\frac{g^i(\lambda)}{i!}U^i$ //

二、方阵的化零多项式

对 n 阶方阵 A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A)=0$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵 A 的**化零多项式**.

我们感兴趣的是方阵 A 的化零多项式是否存在?Cayley-Hamilton 定理回答这个问题.

定理 2.7 (Cayley-Hamilton)设 $A\in F^{n\times n}$,则方阵 A 的特征多项式就是 A 的化零多项式,即若

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

则有 $f(A)=0$.

证明 用 Jordan 化方法证. 重写证明过程

设 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$,其中 $\sum_{i=1}^{s} r_i=n$, $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_s$ 互不相同.

记号混乱!

设
$$A=P\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m)\end{pmatrix}P^{-1},$$

$J_i(\lambda_i)$ 是对角线元素为 λ_i 的 t_i 阶 Jordan 块,$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 不必互异,$i=1,2,\cdots,m$,

则
$$f(A)=P\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & f(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_m(\lambda_m))\end{pmatrix}P^{-1},$$

$n\geq t_i$

$$f(J_i(\lambda_i))=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{t_i-1}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i)\end{pmatrix}_{t_i\times t_i}.$$

"错误"

我们只看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第 1 行元素,由于 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$ 中含因子 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,$t_i\leqslant r_i$,所以 $t_i-1<r_i$,从而 $f(\lambda),f'(\lambda),\cdots,f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有因子 $(\lambda-\lambda_i)$,因此

$$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(t_i-1)}(\lambda_i)=0,$$

即 $f(J_i(\lambda_i))$ 第一行元素全为 0,由 $f(J_i(\lambda_i))$ 的结构有

$$f(J_i(\lambda_i))=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

所以
$$f(A)=0.$$
□

$f(\lambda)$为n次多项式，$f(A)=0$使得A^n可以表示成$A^k(k<n)$的幂次项的组合：

$$A^n=-(a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I). \tag{2.13}$$

例9　设$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，求$A^6$.

解　方法1：

由例4

$$A=P\begin{pmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}P^{-1},\quad 其中P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所以
$$A^6=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}^6&\\&\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}^6\end{pmatrix}P^{-1}.$$

令$g(\lambda)=\lambda^6$，则

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^6=g\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g(2)&g'(2)\\0&g(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^6&6\times2^5\\&2^6\end{pmatrix},$$

所以
$$A^6=P\begin{pmatrix}2^6&6\times2^5&0&0\\0&2^6&0&0\\0&0&2^6&6\times2^5\\0&0&0&2^6\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}64&192&0&-192\\0&64&0&0\\0&0&64&192\\0&0&0&64\end{pmatrix}.$$

方法2：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^4,$$

$$g(\lambda)=\lambda^6=(\lambda^2-8\lambda+40)f(\lambda)+160\lambda^3-720\lambda^2-1152\lambda-640,$$

$$g(A)=160A^3-720A^2-1152A-640I=\begin{pmatrix}64&192&0&-192\\0&64&0&0\\0&0&64&192\\0&0&0&64\end{pmatrix}.$$

三、最小多项式

对$A\in F^{n\times n}$，Cayley 定理指出它有化零多项式$f(\lambda)=|\lambda I-A|$，事实上，A有很多化零多项式. 任取多项式$h(\lambda)$，$g(\lambda)=h(\lambda)f(\lambda)$都是$A$的化零多项式. 若$A$是$V_n(F)$上线性

变换T的矩阵,对A的化零多项式$f(\lambda)$,相应地用多项式得到的线性变换$f(T)$就是零变换:$f(T)=0$.所以线性变换T的化零多项式也是存在的,而且

$$\text{线性变换 } f(T)=0 \Leftrightarrow \text{矩阵 } f(A)=0 \tag{2.14}$$

线性变换T的(或者说矩阵A的)最小多项式$m_T(\lambda)$是T的所有化零多项式中次数最低,首项系数是1的多项式.这里我们讨论最小多项式的性质与结构,并从最小多项式结构讨论线性变换T有对角矩阵(T可对角化)的充分必要条件.

定义 2.5 设T是线性空间$V_n(T)$上的线性变换,$m_T(\lambda)$是一个关于文字λ的多项式,如果$m_T(\lambda)$满足

(1) $m_T(\lambda)$最高次项系数为1;

(2) $m_T(\lambda)$是T的一个化零多项式,即$m_T(T)=0$;

(3) $m_T(\lambda)$是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是T的**最小多项式**.

定义2.5中条件(3)可以推出T的最小多项式$m_T(\lambda)$整除T的一切化零多项式,即:

如果多项式$\varphi(\lambda)$,使$\varphi(T)=0$,则$m_T(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$.否则,$m_T(\lambda)\nmid\varphi(\lambda)$,则有次数低于$m_T(\lambda)$的多项式$h(\lambda)$,使

$$\varphi(\lambda)=m_T(\lambda)g(\lambda)+h(\lambda),\quad \varphi(T)=0\Rightarrow h(T)=0,$$

与$m_T(\lambda)$次数最低矛盾.

又由(2.14)式,若$m_T(\lambda)$是T的最小多项式,则$m_T(\lambda)$也是T的矩阵A的最小多项式,又

$$m_T(P^{-1}AP)=P^{-1}m_T(A)P,$$

所以,T与它的矩阵A有相同的化零多项式和最小多项式.相似矩阵也有相同的化零多项式与最小多项式.因而研究A和研究T的最小多项式有相同的结论.

定理 2.8 T的特征多项式$f(\lambda)$与最小多项式$m_T(\lambda)$有相同的根(重数不计),即若

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则

$$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}, \tag{2.15}$$

$$1\leqslant t_i\leqslant r_i,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

证明 由$m_T(\lambda)\mid f(\lambda)$,$t_i\leqslant r_i$是显然的,所以,证明只证$t_i\geqslant1$即可.

反设$t_i=0$,即λ_i不是最小多项式$m_T(\lambda)$的根,取T的Jordan矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

其中,$J_i(\lambda_i)$为Jordan块,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$,而$m_A(A)=0\Leftrightarrow m_A(J_i(\lambda_i))=0$,则由于$m_T(\lambda_i)\neq0$,而使

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} m_T(\lambda_i) & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{pmatrix} \neq 0.$$

所以,$m_T(J) \neq 0$,从而$m_T(T) \neq 0$. 与$m_T(\lambda)$是T 的最小多项式矛盾,所以 $r_i \geqslant 1$. □

从证明中可以看到,最小多项式$m_T(\lambda)$必须满足

$$m_T(J) = \begin{pmatrix} m_T(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & m_T(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(J_m(\lambda_m)) \end{pmatrix} = 0.$$

这启发我们更进一步来根据Jordan 矩阵J 的关于λ_i 的Jordan 块的阶数来确定式(2.15)给出的$m_T(\lambda)$结构中的 t_i.

定理 2.9　设变换T 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

又T 的 Jordan 标准形中关于特征值λ_i 的Jordan 块的最高阶数为$\overline{n_i}$,则T 的最小多项式

$$m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\overline{n_1}}(\lambda - \lambda_2)^{\overline{n_2}}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{\overline{n_s}}. \tag{2.16}$$

证明　取$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\overline{n_1}}(\lambda - \lambda_2)^{\overline{n_2}}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{\overline{n_s}}$,设$T$ 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于λ_i 的Jordan 块为n_{ij}阶.

$$\overline{n_i} = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{it_i}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

不妨设$J_{i1}(\lambda_i)$是$\overline{n_i}$阶的Jordan 块,

则

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_i(\lambda_i))=\begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i))=\begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$含因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$,

所以
$$g(\lambda_i)=g'(\lambda_i)=\cdots=g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i)=0.$$

由此　$g(J_{i1}(\lambda_i))=0$,因而也有$g(J_{ij}(\lambda_i))=0$, $j=2,3,\cdots,t_i$, $i=1,2,\cdots,s$. 这说明:$g(J)=0$,即$g(\lambda)$是T的化零多项式. 设又有多项式

$$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

其中　$1\leqslant k_i\leqslant\bar{n}_i$,若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$,则一定$\exists\, i$,使　$k_i<\bar{n}_i$,对这样的$h(\lambda)$可以看到,由于

$$h^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i)\neq 0\quad(\bar{n}_i-1\geqslant k_i),$$

从而　$h(\lambda)$不是T的化零多项式,因此$g(\lambda)$是含因子$(\lambda-\lambda_i)$, $i=1,2,\cdots,s$的多项式中次数最低的T的化零多项式. 由定义知,$g(\lambda)$为最小多项式,即

$$m_T(\lambda)=g(\lambda).$$ □

作为定理2.9的推论,若$m_T(\lambda)$为一次因子之积,即$\bar{n}_i=1$, $i=1,2,\cdots,s$,则$J_i(\lambda)$必为对角阵,反之亦然. 因此有

定理2.10　线性变换T可以对角化的充分必要条件是T的最小多项式$m_T(\lambda)$是一次因子的乘积,即

$$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s).$$

定理2.10在矩阵上相应的叙述为,方阵A可对角化的充要条件是A的最小多项式$m_A(\lambda)$为一次因子之积. 这样我们就得到了线性变换T(矩阵A)可对角化的又一个充分必要条件.

例10　设$\mathbf{R}^3$上线性变换T在基$\{e_1,e_2,e_3\}$下矩阵为A, $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,求$T$的最小多项式$m_T(\lambda)$.

解
$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

由定理2.8
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

或者
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

由于
$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -7 & 5 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3 & -2\\ -7 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ -3 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\neq 0,$$
可断定
$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

例 11 设$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$,求矩阵$A$的最小多项式$m_A(\lambda)$.

解
$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$
由于$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$为$f(\lambda)$的单根,因此相应A的 Jordan 标准形中关于λ_1,λ_2的 Jordan 块有$\bar{n}_1=\bar{n}_2=1$.

对$\lambda_3=\lambda_4=2$,$\mathrm{rank}(A-2I)=3$,所以$\lambda=2$对应$n-\mathrm{rank}(A-2I)=4-3=1$个Jordan 块,只能为$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$,所以$\bar{n}_3=2$,即有
$$J_A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}.$$
由定理2.9,得
$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$
本例中矩阵A是不可对角化的.

例12 设$g(x)$是一个多项式,λ是方阵A的特征值.证明如果$g(A)=0$,则有$g(\lambda)=0$,即A的特征值是A的任何一个化零多项式的根.

证明 如果$g(A)=0$,则由最小多项式的定义,有$m_A(x)\mid g(x)$,从而存在多项式$h(x)$,使
$$g(x)=m_A(x)\cdot h(x).$$
当λ是A的特征值时,由定理2.9,有$m_A(\lambda)=0$,从而
$$g(\lambda)=m_A(\lambda)\cdot h(\lambda)=0.$$

习 题 二

1. 设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$是可逆矩阵,但$AB-BA$不可逆.证明1是$A^{-1}B^{-1}AB$的特征值.