Math. Semesterber. (2007) 54: 13–30
DOI 10.1007/s00591-007-0016-0

PHILOSOPHISCHE UND HISTORISCHE SICHT

Hans Fischer

Die Geschichte des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

Eine Geschichte der Analysis in der Nussschale

Eingegangen: 29. September 2006 / Angenommen: 30. November 2006 / Online: 7. Februar 2007

Zusammenfassung Die Geschichte der Diskussion des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ zeigt nicht nur die Entwicklung verschiedener analytischer Techniken sondern auch Aspekte des Übergangs von einer vorrangig kalkül- hin zu einer begriffsorientierten Analysis auf.

Schlüsselwörter Uneigentliches Integral · gleichmäßige Konvergenz · Fourier-analysis

Mathematics Subject Classification (2000) 01A55 · 01A60 · 26-03 · 28-03 · 42-03

1 Einleitung

Die Diskussion des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

bildet auch heute noch einen wichtigen Bestandteil der (elementaren) Analysis. Das Integral dient etwa als

- Musterbeispiel für ein Integral im uneigentlichen Riemannschen Sinne, dessen Integrand aber nicht absolut integrierbar ist,
- als Grundlage für Formeln, etwa die der Dirichletschen Sprungfunktion

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(kx)\frac{\sin x}{x} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \,]-1;1[\\ 0 & \text{für } x \notin [-1;1], \end{cases} \tag{2}$$

H. Fischer (✉)
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Mathematisch-Geographische Fakultät,
85072 Eichstätt, Deutschland
E-mail: hans.fischer@ku-eichstaett.de

– als Hilfsmittel für den Einstieg in die Fourieranalysis,
– als Beispiel für die Anwendung komplexer Integration.

Dieser Aspektreichtum aus heutiger Sicht lässt eine ähnliche Vielfalt in der historischen Entwicklung des Integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ vermuten. Tatsächlich zeigt es sich, dass sich in Herleitungen für den Wert des Integrals, die seit Euler unternommen wurden, die geschichtliche Entwicklung der Analysis besonders plastisch wiederspiegelt.

Hinsichtlich der reellen Analysis sind dabei besonders zwei Zugänge interessant: Einmal die – zumindest prinzipiell auf Euler (1781) zurückgehende – Methode, von der Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin x}{x} dx = \arctan \frac{1}{k} \quad (k > 0)$$

auszugehen und dann k gegen 0 gehen zu lassen. Zum anderen, die vermutlich von Frullani (1828) als erstem angewandte Reihenbetrachtung

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Daneben war (und ist) es auch möglich, sich dem Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ mit Hilfe der Integration im Komplexen zu nähern. Die vorliegende Untersuchung wird sich allerdings im wesentlichen auf die historische Entwicklung der reellen Methoden beschränken.

In dieser Arbeit ist es freilich unmöglich (und nicht ihrer Intention dienend), auch nur in einigermaßen erschöpfender Weise die reellen Methoden zu erörtern, mit denen das Integral (1), meist im Zusammenhang mit einer ganzen Klasse verwandter Integrale, behandelt worden ist. Die hier gegebene Auswahl richtet sich nach den in Lehrbüchern des 19. Jahrhunderts besonders häufig aufgegriffenen Zugängen und orientiert sich auch an Hardys Übersicht (1909), von der abschließend die Rede sein wird. Eine Übersicht über Beiträge bis ca. 1850 findet sich in Burckhardt (1914, 1123–1126).

2 Euler: globale Sicht von Formeln

Wie bei so vielen historischen Entwicklungen analytischer Sachverhalte beginnt auch unsere Geschichte mit Leonhard Euler. Dieser (1781/94, 219–222) zeigte zunächst durch wiederholte partielle Integration für natürliches n:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Delta .$$

Δ war dabei Eulers Bezeichnung für das moderne $(n-1)!$ Durch die Variablensubstitution $x = ky$ mit nicht näher spezifiziertem k ergab sich

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-ky} dy = \frac{\Delta}{k^n}. \tag{3}$$

Wichtig für die Gültigkeit dieser Formel war laut Euler nur, dass k keine „negativen Werte“ annahm, da in diesem Falle e^{-ky} nicht für $y = \infty$ verschwinden würde. Gemäß Euler musste daher die Beziehung (3) auch für „imaginäre“ $k = p+q\sqrt{-1}$ (p „nicht negativ“) gelten. Durch Betrachtung der Imaginärteile folgerte er:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\sin qx dx = \frac{\Delta \sin n\theta}{f^n}, \quad f = \sqrt{p^2+q^2}, \quad \theta = \arctan\frac{q}{p}. \tag{4}$$

Die Fortsetzung dieser Formel auf $n = 0$ vollzog Euler (1781/94, 225 f.) folgendermaßen: Er stellte zuerst sinngemäß fest, dass $\Delta = \frac{(n+1)!}{n\cdot(n+1)}$. Nun erweiterte er diese Beziehung ohne Begründung der Zulässigkeit auf $n = \omega$ für ein „unendlich kleines“ ω, mit dem Ergebnis: $\Delta = \frac{1}{\omega}$. Für Euler war es selbstverständlich, dass bei einem solchen n gelte:

$$\sin n\theta = \sin\omega\theta = \omega\theta.$$

(Er schrieb überall ein „=“.) Somit folgerte er aus (4):

$$\int_0^\infty e^{-px}\sin qx\frac{dx}{x} = \arctan\frac{q}{p}. \tag{5}$$

Euler bemerkte, dass ein Beweis dieser Gleichung wohl kaum auf andere Weise als durch „Approximationen“ (*approximationes*), wie die eben dargestellten, gefunden werden könne. Im Spezialfall $p = 0$ und $q = 1$, welcher gemäß Euler „allen bislang bekannten Kunstgriffen des Kalküls zu widerstehen“ schien, ergab sich aus (5) ohne weitere Kommentare die Beziehung (1). Eulers Vorgehen ist hier – wie ja auch in vielen anderen Fällen – gekennzeichnet durch das Vertrauen in die Macht der algebraischen Formeln und der dadurch entstehenden Möglichkeit zur Ausdehnung der Termvariablen auf neue Zahlbereiche unter Einbeziehung auch unendlich kleiner bzw. großer Zahlen. Wie sich bereits aus seiner Bemerkung bezüglich der „approximationes“ schließen lässt, war sich Euler bei diesem Problem vermutlich bewusst, dass sein Vorgehen auf Vorbehalte stoßen könnte. Diese Vermutung wird dadurch bestärkt, dass er seinen Artikel mit einer Analogiebetrachtung zwischen (1) und der bereits weiter oben (Euler 1781/94, 224) durch selbstverständliche Erweiterung von (4) auf $n = \frac{1}{2}$ und von Δ auf die Gammafunktion gewonnenen Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{6}$$

beschloss. Das Ergebnis (1) dürfe „umso weniger bezweifelt“ werden als die „ungeheuere Ähnlichkeit“ zwischen linken wie rechten Seiten in (1) und (6) „höchste Bewunderung“ verdiene (Euler 1781/94, 227). Auch in diesem Argument drückt sich hinsichtlich der Auffassung von algebraischen Termen eine „globale“ Sichtweise aus, wie sie Gepflogenheiten des 18. Jahrhunderts entsprach (Jahnke 1999, 169).

3 Laplace: komplexe Variablensubstitutionen versus „direkte“ Methoden

Pierre Simon Laplace sah für sein eigenes analytisches Schaffen Euler als großes Vorbild an. Besonders der Gewinnung von neuen Resultaten durch Erweiterung von Funktionstermen auf komplexe Variable, für die er sich (z.B. Laplace 1812/20/86, 88) ebenfalls auf Euler berief, widmete Laplace zahlreiche Betrachtungen. Beim Übergang zum Komplexen „und zurück“ in seiner Behandlung des Integrals (1) wird Laplaces Methode besonders deutlich. In dem Integral $\int_0^\infty \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{x^\alpha}dx$ mit $0 < \alpha < 1$ nahm Laplace (1809, 193–196) die Variablensubstitution $x = t^{\frac{1}{1-\alpha}}\sqrt{-1}$ vor, so dass sich ohne weitere Diskussion das Resultat ergab:

$$\int_0^\infty \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^\infty \exp(-t^{\frac{1}{1-\alpha}})dt.$$

Auf diese Weise erhielt er für den Imaginärteil:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \frac{\sin\left((2r+1)(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)}{1-\alpha}\int_0^\infty \exp(-t^{\frac{1}{1-\alpha}})dt, \tag{7}$$

mit einem zunächst noch unbestimmten $r \in \mathbb{Z}$. Für den Fall $1-\alpha \approx 0$ (d.h. eines „unendlich kleinen“ $1-\alpha$) begründete er durch ein Ausschlussargument, dass $r = 0$ sein müsse. Da aber gemäß Laplace

$$e^{-t^\infty} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für } t > 1, \end{cases}$$

ergab sich

$$\int_0^\infty \exp(-t^{\frac{1}{1-\alpha}})dt = 1 \quad (1-\alpha \approx 0).$$

Auf diese Weise machte er plausibel, dass aus (7) im Falle $1-\alpha \approx 0$ das bekannte Ergebnis (1) folgte. Viel expliziter als Euler nahm Laplace zu der Methode der Erweiterung von Parameterbereichen Stellung. So kommentierte er (1811, 361) Variablensubstitutionen, wie die oben dargestellte, mit den Worten:

> Aber auch wenn diese Mittel – genau wie die der Induktion – mit größter Vorsicht und Zurückhaltung angewendet worden sind, so müssen stets ihre Resultate noch direkt bewiesen werden.

Was Laplace genau unter „direkten“ Beweismethoden verstand, erläuterte er nicht explizit. Aus einer Reihe von Beispielen für Berechnungen bestimmter Integrale, wie man sie etwa in dessen *Théorie analytique des probabilités* (Laplace 1812/14/20/86, 89–102) findet, geht hervor, dass er damit in erster Linie sein Methodenrepertoire der reellen Analysis meinte: Die Anwendung von Potenzreihen, die Darstellung der gesuchten Integrale in Differential- und Differenzengleichungen, die von ihm (stets ohne weitere Kommentare vollzogene) Differentiation bzw. erneute Integration bestimmter Integrale nach vorhandenen Parametern unter dem Integralzeichen, und schließlich den – in der Regel selbstverständlichen – Übergang vom „Endlichen“ zum „unendlich Kleinen“. Im Falle „unseres“ Integrals leitete

Laplace (1811, 366 f.; 1812/14/86, 98) zuerst mit Hilfe einer Differentialgleichung die Beziehung

$$\int_0^\infty \cos(rx)e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \tag{8}$$

her. Durch Integration dieser Gleichung nach $r > 0$ und der von Laplace selbstverständlich durchgeführten Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergab sich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(rx)}{x}e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^r e^{-\frac{s^2}{4a^2}}ds = \sqrt{\pi}\int_0^{\frac{r}{2a}} e^{-t^2}dt.$$

Da, wie er (1812/20/86, 98) sich ausdrückte, „$\frac{r}{a}$ unendlich wird, wenn a gleich null ist“, folgerte Laplace sofort:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(rx)}{x}dx = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Cauchy konnte später dem komplexen Rechnen von Laplace eine solide Grundlage durch seinen „Residuenkalkül“ (s. Smithies 1997, 113–146; Grattan-Guinness 1990, 770–777) verschaffen. In diesem Rahmen leitete Cauchy (1825, 85 und ausführlicher 1826, 138 f.) auch (1) her.

In der Integralrechnung versuchten sowohl Euler als auch Laplace, möglichst große Klassen spezieller Integrale mit jeweils dafür geeigneten Methoden zu bewältigen, wobei das Hauptziel die Wertbestimmung dieser Integrale war. Auch wenn sich Laplace selbst mit einem Teil seiner Methoden grundsätzlich in die Tradition Eulers stellte, so werden doch in der Behandlung von (1) exemplarisch fundamentale Unterschiede zwischen den Konzepten dieser beiden Mathematiker deutlich: Gemäß der Sichtweise einer globalen Gültigkeit von Formeln, wie sie für die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts typisch war, erweiterte Euler den Bereich von Variablen in Ergebnistermen in vielfachen Richtungen. Laplace dagegen ging es strenggenommen gar nicht um die Extrapolation von Ergebnistermen, sondern um Transformationen bei der Integration exponentieller Funktionen von reellen zu komplexen Variablen. Während Euler nur in Einzelfällen – wie dem der oben beschriebenen „approximationes“ – mögliche Vorbehalte andeutete, wollte Laplace sein entsprechendes Vorgehen nur mehr als „Mittel der Induktion“ werten. Seine „direkte“ Herleitung von (1) fußte wesentlich auf der Differentiation bzw. der Integration nach Parametern in Integralen. Die Problematik der dabei fälligen Vertauschung verschiedener Grenzprozesse wurde freilich erst nach Laplace aufgegriffen.

4 Fourierreihen und Fourierintegrale

Eine wichtige Rolle für die Entwicklung der reellen Analysis in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts spielten Probleme der Darstellbarkeit einer „willkürlichen“ Funktion durch ihre Fourierreihe bzw. ihr Fourierintegral. Den Ausgangspunkt bildete die bereits im 18. Jahrhundert im Zusammenhang mit dem physikalischen Problem der schwingenden Saite aufgekommene und kontrovers diskutierte Frage, welche Funktionen überhaupt durch Reihen nach Winkelfunktionen ausgedrückt werden könnten. Die Untersuchung von fortlaufenden Wellen in unbegrenzten Medien ergab die Ausweitung der entsprechenden Fragestellung auf Fourierintegrale. Diese Probleme gaben allein schon Anlass zur Klärung von Grundbegriffen, wie dem der „willkürlichen Funktion", der Stetigkeit oder der Konvergenz (und sie trugen natürlich auch zur Klärung des Integralbegriffs bei). Das formale Rechnen mit Reihenentwicklungen, wie es der Auffassung einer „algebraischen Gleichheit" (Jahnke 1999, 156) entsprach, musste auch und gerade im Zusammenhang mit Fourierreihen durch eine zunehmend strenge Betrachtung der relevanten Grenzprozesse abgelöst werden, um punktweise die „numerische Gleichheit" garantieren zu können.

Die Grenzbeziehung

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{\varepsilon} f(x)\frac{\sin(Tx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(0^+), \quad (\varepsilon > 0) \tag{9}$$

für noch genauer zu spezifizierende Funktionen f (oder eine dazu äquivalente Aussage) spielte in den meisten Beiträgen des 19. Jahrhunderts eine zentrale Rolle. Dieser Umstand gilt zunächst einmal für Joseph Fourier selbst, der freilich erst 1822 die Ergebnisse einer unveröffentlichten Schrift von 1807 im Rahmen seiner *Théorie analytique de la chaleur* (1822) veröffentlichen konnte. Die Darstellbarkeit einer (stillschweigend hinreichend glatten) Funktion durch ihre Fourierreihe begründete er mit einer zu (9) sehr ähnlichen Beziehung. Für die Rechtfertigung von (9) verwendete Fourier (1822, §423), der dabei ganz explizit unendlich kleine und große Zahlen betrachtete, direkt die Beziehung (1). Diese wurde von ihm (1822, §356) mit Hilfe einer „algebraisch" gewonnenen trigonometrischen Reihe für $\frac{\pi}{4}$ (Bottazzini 1986, 69) und intuitivem Übergang zwischen der Reihe und einem bis auf lineare Variablentransformation zu $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ identischen Integral hergeleitet, andererseits aber auch als „seit langem bekannt" bezeichnet.

Augustin Louis Cauchy (1818) (und in sehr ähnlicher Weise praktisch zeitgleich Siméon Denis Poisson) verwendeten (wieder für stillschweigend glatte Funktionen f) bei der Begründung einer zu (9) äquivalenten Gleichung die für $a > 0$ und beliebiges b durch partielle Integration gewonnene Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \tag{10}$$

ohne dabei auf (1) zurückzugreifen. Im Spezialfall $f = 1$, wo (9) äquivalent zu (1) ist, ergab sich so umgekehrt eine neue Herleitung für (1), wie sie übrigens im wesentlichen Poisson (1813, 220) im Rahmen einer Arbeit zu verschiedenen Klassen bestimmter Integrale bereits vorweggenommen hatte.

5 Cauchys Darstellung

In seinem Lehrbuch *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) stellte Cauchy die Methode einem breiten Leserkreis vor (ohne sich dabei auf Poisson zu beziehen). Das Verfahren war prinzipiell dem von Laplace ähnlich, insgesamt aber deutlich einfacher.

Durch Integration des zu (10) analogen Integrals

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

„bzgl. a unter dem Zeichen $\int$, beginnend mit $a = c$“ ($c > 0$) erhielt Cauchy (1823, 198):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx dx = \arctan \frac{a}{b} - \arctan \frac{c}{b}. \tag{11}$$

Unter der stillschweigenden Annahme $b > 0$ ergab sich aus (11) durch $c = 0$ und $a = \infty$ das (1) entsprechende Ergebnis

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Im Falle $c = 0$ geht (11) übrigens in die Eulersche Beziehung (5) über.

Cauchy ging dabei nicht auf zwei – aus heutiger Sicht – wesentliche Punkte ein: Erstens vertauschte er stillschweigend die Integrationsreihenfolge gemäß der (bei ihm nicht erwähnten) Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx dx &= \int_0^\infty \int_c^a e^{-ax} \sin bx da dx \\ &= \int_c^a \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx da = \int_c^a \frac{b}{a^2 + b^2} da. \end{aligned}$$

Zweitens blieb der Übergang zu $c = 0$ und $a = \infty$ ohne Kommentar. Nun war es freilich nicht so, dass Cauchy solche Probleme nicht gesehen hätte. Im Gegenteil, mit einigem Recht wird er als einer der Hauptpropagatoren der neuen „Strenge“ bezeichnet, weil er sich von der Sicht der „algebraischen Allgemeingültigkeit“ distanzierte (Lützen 1999, 200) und darauf verwies, dass „in Wirklichkeit der größte Teil dieser Formeln nur unter gewissen Bedingungen und nur für gewisse Werte der Größen, die sie enthalten, Gültigkeit beibehält“ (Cauchy 1821, iii). Vor der eben beschriebenen Herleitung von (1) skizzierte er [1823, 197] einen Beweis dafür, dass bei stetigen Integranden die Reihenfolge der Integration vertauschbar ist. Allerdings beschränkte er seine Betrachtungen auf endliche Integrationsbereiche (Laugwitz 1989, 217). Das Problem der Stetigkeit einer Funktion, die durch einen Grenzprozess (z.B. unendliche Reihenbildung) aus einer Folge stetiger Funktionen hervorgeht, wurde von Cauchy ebenfalls gesehen. Seine diesbezüglichen Ausführungen haben zahlreiche Diskussionen darüber verursacht, inwiefern er das Konzept der gleichmäßigen Konvergenz (u.U. implizit im Rahmen infinitesimaler Betrachtungen) vorweggenommen habe. Besonders Spalt (1981) und Laugwitz (z.B. 1986, 75–80, 211–216) haben die Konsistenz der Ausführungen Cauchys aus der Sicht eines konsequenten Umgehens mit unendlich kleinen und großen Zahlen betont. Cauchy ist aber eben nicht an dieser wie an vielen anderen Stellen seines Werks auf die spezifische Begründung der Vertauschung von Grenzprozessen eingegangen. Generell waren Cauchys Ausführungen in seinen Vorlesungsausarbeitungen und insbesondere im *Resumé* sehr knapp gefasst (Laugwitz 1986, 211; Grattan-Guinness 1990, 747). Allein schon weil sehr viele Artikel von Cauchy in den *Comptes rendus* erschienen und dort den Autoren maximal vier Druckseiten für eine Mitteilung zustanden, sind die meisten seiner Aufsätze eher skizzenhaft gehalten.

Fest steht, dass Cauchy für die Berechnung des Integrals (1) einen neuen (eigentlich zuerst von Poisson publizierten) Ansatz vorstellte, der später von vielen

Autoren aufgegriffen wurde. Außerdem steht fest, dass Cauchy ganz wesentlich zu einem Problembewusstsein bezüglich der Vertauschung von Grenzübergängen beitrug, das im Falle „unseres“ Integrals zwar bei ihm selbst nicht deutlich wurde, jedoch alsbald zum Tragen kommen sollte.

6 Das Dirichlet-Integral

Auch Peter Gustav Lejeune Dirichlet ist in seiner Pariser Zeit (1822–1826) durch Cauchys Strenge beeinflusst worden. In seinen beiden Arbeiten (1829; 1837a) zur Konvergenz von Fourierreihen (der zweite Artikel stellt eine ausführlichere Darstellung der Inhalte des ersten dar) gelang ihm eine sehr allgemeine und – im Gegensatz zu den Ansätzen von Fourier, Poisson und Cauchy (s. Lützen 1999, 226–228; Bottazzini 1986, 183–190) – auch unangreifbare Lösung des Problems. Auf Einzelheiten der beiden Beiträge Dirichlets einzugehen, ist angesichts der Fülle an historischer Literatur (z.B. Bottazzini 1986, 191–196) an dieser Stelle nicht nötig.

Den Kern von Dirichlets Beitrag zur (punktweisen) Darstellbarkeit einer „willkürlichen Funktion“ f durch ihre Fourierreihe bildete die Diskussion des heute so genannten „Dirichlet-Integrals“

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta \quad (0 < h \leq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}).$$

Dirichlet zeigte, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = \frac{\pi}{2} f(0^+),$$

falls $f(x)$ über dem Intervall $[0; h]$ monoton zunehmend oder abnehmend ist. Der Beweis hierfür beruhte wesentlich auf elementaren Abschätzungen der Integrale

$$\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{2n+1}}^{\frac{\nu\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta \quad (\nu \in \mathbb{N}, \frac{\nu\pi}{2n+1} \leq h).$$

Das Vorgehen über solche Abschätzungen entsprach ganz dem analytischen Stil Dirichlets, wie er sich in seinen Publikationen manifestierte. Aus heutiger Sicht ist man geneigt, seine Ausführungen als „epsilontisch“ zu betrachten, Dirichlet selbst stand aber der „Methode des Unendlichkleinen“ durchaus wohlwollend gegenüber, bezeichnete sie gar als „bei allen zusammengesetzteren Fragen unentbehrlich“ (Dirichlet 1852, 230). In der ersten Arbeit zu Fourierreihen berief sich Dirichlet (1829, 123) bei seinen Abschätzungen noch darauf, dass man wisse, das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin\gamma}{\gamma} d\gamma$ habe den „endlichen Wert“ $\frac{\pi}{2}$. In der zweiten Arbeit von 1837, die ein Musterbeispiel für eine gelungene didaktische Aufbereitung eines – für die damalige Zeit ungewöhnlichen – mathematischen Beweises bildet, musste sich Dirichlet nicht mehr auf diesen Sachverhalt beziehen. Es genügte ihm (1837a, 147) darauf aufzubauen, dass wegen

$$\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} = 1 + 2\cos 2\beta + 2\cos 4\beta + \cdots + 2\cos 2n\beta$$

auch gelte, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{12}$$

weil bei der Integration alle Summenglieder bis auf das erste verschwänden.

7 Ein kurzer Ausflug ins 20. Jahrhundert: die vereinfachte Nutzung der Dirichletschen Idee

Es gibt tatsächlich einen verblüffend einfachen Beweis für (1), der auf der Darstellung (12) aufbaut, bei Dirichlet selbst aber so nicht zu finden ist. Wie es scheint, ist ein solcher Beweis erst im 20. Jahrhundert in die analytische Literatur eingegangen. In der zweiten Auflage des ersten Bandes von Richard Courants „Differential- und Integralrechnung" (1930, 373 ff.) wurde die Erörterung der Darstellung einer Funktion durch eine Fourierreihe direkt auf (1) gegründet. Zum Beweis dieser Beziehung wurde zunächst – durch partielle Integration von $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$ – gezeigt, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert. Da nun die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$$

stetig differenzierbar auf $t = 0$ durch $f(0) = 0$ fortgesetzt werden kann, gilt wieder nach partieller Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)tf(t)dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(2n+1)tdt \to 0 \quad (n \to \infty),$$

woraus wegen (12) sofort die Behauptung (1) folgt.

Diese Gedankenführung wäre durchaus in Dirichlets methodischem Repertoire gelegen (s. Fischer 2000, 72). Umso mehr überrascht es, dass in einschlägigen Abhandlungen und Lehrbüchern des 19. Jahrhunderts diese Herleitung offenbar noch nicht auftritt. Vielleicht war es letztlich doch die Dominanz der Eulerschen Ansätze, die während des 19. Jahrhunderts die Diskussion der Beziehung (1) im Rahmen der reellen Analysis bestimmte und die auch in Frullanis Ansatz deutlich wird.

8 Frullani: Partialbruchentwicklung des Cotangens

Im Gegensatz zu Cauchy und Dirichlet war Guiliano Frullani (1795–1834) kaum in nennenswertem Umfang an der grundlegenden Neukonzeption der Analysis im 19. Jahrhundert beteiligt. Frullani war Professor der höheren Mathematik an der Universität in Pisa, später Katasterdirektor. Außerdem war er korrespondierendes Mitglied der Akademie in Brüssel. Sein analytisches Werk ist Einzelfragen, insbesondere hinsichtlich der Berechnung von speziellen Integralen, gewidmet. In seinem Artikel „Sopra gli integrali definiti" (1828/31, 448 f.) arbeitete er ganz in der Tradition des – man würde heute sagen „formalen" – Rechnens der algebraischen

Analysis. Frullanis Rechnung beruhte auf der Aufteilung des Integrationsbereiches in Stücke der Länge π. Damit ergab sich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(y + k\pi)}{y + k\pi} dy$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{(-1)^k \sin y}{y + k\pi} dy.$$

Mit der Variablentransformation $y = \pi - u$ in den Integralen mit ungeradem k und der selbstverständlich vollzogenen Vertauschung von Integration und Reihenbildung erhielt Frullani:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \sin u \left(\frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k\pi + u} - \frac{1}{2k\pi - u} \right) \right) du.$$

Nun wusste man aus Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748, 191), dass

$$\frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k\pi + u} - \frac{1}{2k\pi - u} \right) = \frac{1}{2} \cot \frac{u}{2}.$$

Damit folgte schließlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin u \cot \frac{u}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos u) du = \frac{\pi}{2}.$$

Der Beitrag von Frullani wies einerseits in die algebraische Analyis des 18. Jahrhunderts zurück, andererseits lieferte er aber einen wegweisenden Ansatz, innerhalb dessen später noch Überlegungen zu den von ihm unbearbeiteten Fragen bezüglich der Konvergenz und der Vertauschung von Grenzübergängen angestellt werden konnten, wie sie der Sichtweise der Analysis im 19. Jahrhundert zunehmend entsprachen.

9 Bonnet und Dirichlet um 1850: die Rechtfertigung der Vertauschung von Grenzprozessen

Pierre Ossian Bonnet (1819–1892) ist besonders durch Arbeiten zur Astronomie, Geodäsie und vor allem zur Differentialgeometrie hervorgetreten. Zu Beginn seines Schaffens hat er sich auch mit speziellen Fragen der elementaren Analysis beschäftigt, allerdings ohne diesen Bereich systematisch zu betreiben. In seiner bemerkenswerten Arbeit „Remarques sur quelques intégrales définies“ stellte er die „Urform“ des später so genannten „2. Mittelwertsatzes“ der Integralrechnung vor: Ohne explizit Beweise zu geben, berief er (1849, 249 f.) sich auf einen Satz über unendliche Reihen von Niels Henrik Abel (1826, 222) (Abels Theorem III), um im Analogieschluss auf Integrale für eine im Intervall $[a; b]$ endliche und integrable

Funktion φ und eine über demselben Intervall positive und monoton abnehmende Funktion f sinngemäß die folgende Aussage zu formulieren:

$$f(a) \min_{x\in[a;b]} \int_a^x \varphi(t)dt \leq \int_a^x f(t)\varphi(t)dt \leq f(a) \max_{x\in[a;b]} \int_a^x \varphi(t)dt \qquad (13)$$

für alle $x \in [a; b]$. Bonnet (1849, 250) folgerte nun aus diesem Satz, indem er sich wiederum auf eine analoge Überlegung von Abel (Abels Theorem IV, Abel 1826, 223) für Reihen berief, die „nicht immer hinreichend streng bewiesene" Grenzbeziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{k\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (14)$$

Letzteres Resultat benutzte Bonnet (1849, 252–254) schließlich, um für lokal monotone Funktionen f mit Hilfe seiner Version des 2. Mittelwertsatzes (13) die für die Fourieranalysis fundamentale Beziehung (9) zu beweisen. Ulisse Dini (1880, 101) hat 30 Jahre später eine gegenüber Bonnets Vorgehen noch einmal stark vereinfachte Herleitung von (9) aufgrund von (1) geben können, unter der „Dini-Bedingung", dass $\frac{f(x)-f(0^+)}{x}$ integrierbar über einem Intervall $[0; \delta]$ ist.

Auch Dirichlet bewies die Grenzbeziehung (14) im Rahmen einer allgemeineren Betrachtung, stellte hier aber keine Bezüge zur Fourieranalysis her. In seinen Vorlesungen zur Integralrechnung, von denen 1904, basierend auf einer Mitschrift aus dem SS 1854, eine weitgehend authentische Fassung durch den Gymnasiallehrer Gustav Arendt herausgegeben wurde, stellte Dirichlet (1854/1904, 193) zunächst die Herleitung von Poisson/Cauchy für (5) (mit kleineren Modifikationen) vor. Auf die Rechtfertigung der Vertauschung der Integrationsreihenfolge ging Dirichlet an dieser Stelle nicht ein. Allerdings war er sich durchaus darüber bewußt, daß bei Mehrfachintegralen über unbeschränkten Bereichen Probleme bei der Vertauschung der Integrationsreihenfolge auftreten könnten. Dirichlet (1854/1904, 99 f.) betonte aber allgemein, dass in Analogie zu der entsprechenden Eigenschaft von unendlichen Doppelreihen die Vertauschung der Integrationsreihenfolge nur dann gesichert sei, wenn die Doppelintegrale absolut konvergierten, was im vorliegenden Falle ja auch zutrifft.

Für den Grenzübergang $k \to 0$ berief er sich (1854/1904, 194) auf einen allgemeinen Satz, wonach

$$\lim_{k\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx,$$

falls das letztere Integral (im uneigentlichen Sinne) existiert und φ auf der positiven Halbachse stetig sowie (im uneigentlichen Sinne) integrierbar ist. Den Beweis dieses Satzes bewältigte Dirichlet (1854/1904, 154–157) durch trickreiche Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Die oben beschriebene Arbeit von Bonnet hat Dirichlet offenbar nicht gekannt.[1]

[1] Aus dem Nachlass von Dirichlet ist noch eine weitere, gegenüber der gerade beschriebenen Gedankenführung stark modifizierte, Version zum Beweis von (1) überliefert, wie sie freilich offenbar weder publiziert noch in Vorlesungen präsentiert wurde. Der genaue Wortlaut und eine photographische Wiedergabe des undatierten Schriftstücks ist in Fischer (2001) zu finden.

Eine wichtige Folgerung, die Dirichlet mit Hilfe der Additionstheoreme für sin und cos aus (1) zog, war die Herleitung des Diskontinuitätsfaktors (2). Eine äquivalente Integralformel war bereits von Poisson (1824) im Rahmen einer speziellen Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet worden, doch scheint erst Dirichlet (1839a, b, c) die universale Anwendbarkeit dieser Sprungfunktion für die Berechnung komplizierter Gebietsintegrale, etwa im Rahmen der Potentialtheorie, erkannt zu haben (Fischer 2000, 68 f.). Auch für die in diesem Zusammenhang auftretenden Vertauschungen der Integrationsreihenfolge skizzierte Dirichlet (1839c, 395 f.) eine Begründung, die die Analogie zur Vertauschung der Summationsreihenfolge bei Doppelreihen bemühte.

Sowohl Dirichlets wie auch Bonnets Beiträge zeigen, dass um 1850 der Bedarf einer expliziten Diskussion der Vertauschung des Grenzüberganges $p \to 0$ und der Integration auf der linken Seite der Eulerschen Gleichung (5) gesehen wurde. Beide Mathematiker versuchten, die Vertauschung von Grenzübergang und Integration durch (sehr ähnliche) allgemeinere Lehrsätze zu begründen. Das Problembewusstsein entstand, wie aus dem Wortlaut der jeweiligen Beiträge eindeutig hervorgeht, sowohl bei Bonnet wie auch bei Dirichlet dadurch, dass die Frage nach der (Rechts-)Stetigkeit der Funktion $k \mapsto \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin x}{x} dx$ in $k = 0$ gestellt und nicht mehr in der Sichtweise der „algebraischen Gleichheit" sowohl auf der linken wie auf der rechten Seite von (5) einfach $p = 0$ gesetzt wurde. Dirichlet (1854/1904, 157 f.) kommentierte diesen Sachverhalt gründlich. Wie Bonnet zitierte auch er die Arbeit von Abel (1826), in der (unter anderem) ausführlich diskutiert worden war, wie im Falle der binomischen Reihe Unterschiede im Verhalten des (im Konvergenzbereich gültigen) Ergebnisterms und des eigentlichen Wertes der unendlichen Reihenentwicklung auftreten konnten, wenn sich die Variable dem Rand des Konvergenzbereiches näherte. Wir sehen hier exemplarisch, welch enormen Einfluss Abels Artikel offenbar auf die Entwicklung der Analysis in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hatte. In den Beiträgen von Dirichlet und Bonnet um 1850 wird für die Integralrechnung der Übergang zwischen einer Schwerpunktsetzung auf Methoden zur Wertbestimmung hin zu eher begriffsbezogenen Problemen deutlich. Allgemeine Konzepte, wie etwa der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz, welche die Vertauschung von Grenzprozessen rechtfertigen, sind allerdings noch nicht ausgeprägt. Sowohl bei Bonnet (Mittelwertsatz) wie auch bei Dirichlet (Vertauschung der Integrationsreihenfolge) wird – weitgehend intuitiv – die Analogie zu unendlichen Reihenentwicklungen für Begründungen herangezogen.

10 Die Rechtfertigung der Vertauschung von Grenzübergängen durch gleichmäßige Konvergenz

Das Konzept der gleichmäßigen Konvergenz zur Rechtfertigung der Vertauschung von Grenzübergängen wurde ab ca. 1850 durch Beiträge von Philipp Ludwig Seidel, George Gabriel Stokes und Eduard Heinrich Heine eingeführt. Vor allem durch Karl Weierstraß' Darstellung der Analysis hat es sich – zuerst im Zusammenhang mit Reihenentwicklungen, dann auch im Rahmen anderer Begriffe, wie etwa uneigentlichen Integralen – ab ca. 1860 durchgesetzt. In „modernen" Lehrbüchern der Analysis, wie sie ab ca. 1870 erschienen, wurde die gleichmäßige Konvergenz zuerst zur Begründung des Verfahrens von Frullani, später auch zur Rechfertigung der Poisson/Cauchyschen Methode verwendet.

Der Frullanische Ansatz lässt sich – vorausgesetzt, dass man vorher die Existenz von $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ gezeigt hat – mit Hilfe der gleichmäßigen Konvergenz auf recht einfache Weise rechtfertigen: Es genügt festzustellen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2k\pi + u} - \frac{1}{2k\pi - u} \right|$$

für $u \in [0; \pi]$ die von u unabhängige Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(4k^2 - 1)\pi}$$

besitzt.

Der wesentliche Unterschied zwischen der reellen Analysis Cauchyscher und Weierstraßscher Prägung beruht in der einheitlich finitären ε-δ-Betrachtungsweise von Weierstraß bei expliziter Verwendung des Konzeptes der gleichmäßigen Konvergenz. Ursprünglich wurde gleichmäßige Konvergenz bei unendlichen Reihenentwicklungen betrachtet und erst relativ zögernd auf andere Grenzwertbildungen übertragen. Auch wenn sich etwa in Dinis wegweisenden *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (1878, 404 f.) oder bei Axel Harnack (1881, 280–289) schon implizite Ansätze in Richtung der gleichmäßigen Konvergenz uneigentlicher Integrale zeigen, so wurde doch dieser Begriff offenbar erst von Christian de la Vallée-Poussin (1891; 1892) explizit eingeführt und systematisch angewandt. William Osgood (1902) verbreitete diese Theorie weiter. In die Lehrbuchliteratur sind entsprechende Überlegungen wohl erst 1906 mit Horatio Scott Carslaws *Fourier's Series and Integrals* und de la Vallée-Poussins *Cours d'analyse infinitésimale*, T.II eingegangen.

De la Vallée-Poussins allgemeine Ausführungen zur Integration (1906, 103 f.) eines gleichmäßig konvergenten uneigentlichen Integrals nach einem Parameter lassen sich sinngemäß in folgendem Satz zusammenfassen: Sei $f(x, \alpha)$ Riemann-integrierbar auf $[a, X] \times [\alpha_0; \alpha_1]$ für vorgegebene a, $\alpha_0 < \alpha_1$ und alle $X > a$. Wenn

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$$

für $\alpha \in [\alpha_0; \alpha_1]$ gleichmäßig konvergent ist, so gilt für alle $r \in [\alpha_0, \alpha_1]$:

1.) $\int_{\alpha_0}^r \varphi(\alpha) d\alpha = \int_a^\infty \int_{\alpha_0}^r f(x, \alpha) d\alpha dx$
2.) $\int_a^\infty \int_{\alpha_0}^r f(x, \alpha) d\alpha dx$ ist gleichmäßig konvergent für alle $r \in [\alpha_0; \alpha_1]$.

Zur Rechtfertigung der Vertauschung von Integration und Grenzübergang des Parameters diente der „Stetigkeitssatz" für bezüglich eines Parameters gleichmäßig konvergente Integrale (de la Vallée-Poussin 1906, 102).

Mit Hilfe dieser Sätze leitete de la Vallée-Poussin (1906, 105), ausgehend von

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x dx = \frac{1}{1 + \alpha^2} \tag{15}$$

nach zweimaliger Integration die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-ky}\frac{1-\cos y}{y^2}dy = \arctan\frac{1}{k} - k\frac{\log(1+1/k^2)}{2}$$

her und folgerte daraus aufgrund des Stetigkeitssatzes bezüglich $k \to 0$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos y}{y^2}dy = \frac{\pi}{2}.$$

Aus dieser Formel konnte er das Resultat (1) (durch partielle Integration), aber auch (wegen $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$) das Ergebnis

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

erschließen.

Für eine direkte Begründung von (1), die bei de la Vallée-Poussin nicht zu finden ist, hätte es genügt zu bemerken, dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin x}{x}dx = \arctan\frac{1}{k}$$

(ableitbar aus (15)) gleichmäßig für alle nichtnegativen k konvergiert. Dies kann man mit einer Überlegung analog zu alternierenden Reihen oder auch mit Hilfe partieller Integration zeigen. Mit Hilfe des Stetigkeitssatzes ergibt sich dann die Behauptung. Im Wesentlichen findet sich eine solche Betrachtung bei Carslaw (1906, 102 f.; 107 f.).

11 Hardys „abschließende“ Bewertung

Der Grund für Godefrey Harold Hardys kleinen Artikel „The Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$“ [1909] war offenbar ein didaktischer. Hardy berichtet über Schwierigkeiten, die nach wie vor bei der Behandlung von bestimmten Integralen bei Studenten bestünden, trotz all der Fortschritte, die in den Lehrmethoden und in den Kenntnissen der Lehrkräfte seit seiner eigenen Ausbildungszeit (also innerhalb von etwa 12 Jahren – Hardy war 1877 geboren) gemacht worden seien. Offenbar spielte Hardy nicht nur auf den universitären Unterricht, sondern auch auf den in Spezialschulen ab, die auf den Eintritt in angesehene Universitäten – in seinem eigenen Falle Cambridge – vorbereiteten. Dass man sich auf solchen Schulen bezüglich des Lehrstoffs in Integralrechnung stark beschränken müsse, zeige sich bereits an dem speziellen Integral (1). Hardy bezeichnete dieses als eines der „einfachsten“ (sic!) „echten“ bestimmten Integrale, wobei er mit dem Adjektiv „echt“ (*proper*) solche bestimmten Integrale bezeichnete, für die ohne Kenntnis einer Stammfunktion ein „endlicher“ Ergebnisterm (*expressed in finite terms*) gefunden werden könne.

Um nun die Schwierigkeit bei der Berechnung des betrachteten Integrals genauer diskutieren zu können, bewertete Hardy die verschiedenen Herleitungen in einem

Punkteschema. Die eigentlichen Probleme bei der Wertbestimmung „praktisch aller“ „echten“ Integrale seien, so Hardy, die dabei nötigen Vertauschungen von Grenzprozessen, wobei bereits die Bildung eines eigentlichen Riemann-Integrals als Grenzprozess anzusehen sei. Für jede dieser Vertauschungen vergab Hardy zehn „Strafpunkte“. Ansonsten wollte Hardy fallweise auftretende Kunstgriffe oder theoretische Eigenheiten in eher willkürlicher Weise (*in a more capricious way*) mit Punkten zwischen eins und zehn bewerten.

Mit diesen Regeln beurteilte Hardy insbesondere komplexe Verfahren der *contour integration*, die Begründung gemäß Poisson/Cauchy, wie sie am Ende unseres vorangehenden Paragraphen aus der Sicht der gleichmäßigen Konvergenz nochmals beleuchtet wurde, und schließlich auch die Herleitung gemäß Frullani, wobei Hardy allerdings diese „klassischen“ Verfahren keinem Erstentdecker zuordnen konnte.

Für die Herleitung gemäß Frullani vergab Hardy beispielsweise 28 Punkte. Tatsächlich ist hier nur eine einzige Vertauschung zwischen Integration über dem endlichen Intervall $[0; \pi]$ und der Cotangensreihe erforderlich. Zu den hierbei fälligen zehn Punkten addierte Hardy weitere 18 Punkte für die verschiedenen Umformungen und Kunstgriffe. Die Verwendung der Cotangensreihe bewertete er dabei mit nur vier Punkten. Man sollte allerdings nicht vergessen, dass solche Produkt- bzw. Reihenentwicklungen zur damaligen Zeit noch zum analytischen Standardstoff – gerade im englischsprachigen Raum – gehörten. Was Hardy allerdings bei seiner Bewertung versäumte, war die Berücksichtigung der Tatsache, dass bei Herleitungen gemäß Frullani zuerst einmal die Konvergenz „unseres“ Integrals (beispielsweise nach partieller Integration) gezeigt werden muss, wofür sicher weitere drei „Strafpunkte“ fällig gewesen wären.

Letztlich konnten die 28 (eigentlich 31) Punkte der Frullanischen Methode von keiner anderen unterboten werden, so dass Hardy erstere „with some confidence“ als „distinctly the best“ bezeichnete. Nachdem aber auch diese „beste“ Herleitung alles andere als elementar war, schloss Hardy, dass Integrale wie (1) weit außerhalb der Möglichkeiten des Schulunterrichtes lägen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war wohl noch nicht die auf Dirichlets Beziehung (12) basierende Herleitung bekannt, wie sie in Abschnitt 7 diskutiert wurde. Der Leser ist herzlich eingeladen, selbst diese Methode auf Hardysche Art mit Punkten zu belegen. Da hier keine einzige Vertauschung von Grenzübergängen stattfindet, ergeben sich deutlich weniger Punkte als bei dem Zugang Frullanis (der Autor kommt übrigens auf 16 „Strafpunkte“).

Die Ausführungen von Hardy zeigen exemplarisch die Schwerpunkte einer „modernen“ Analysis nach Weierstraß auf. Nicht mehr spezielle Probleme, sondern allgemeine Konzepte stehen im Vordergrund. Das erweist die Art der Bewertung von Hardy, die grundsätzlichen Erwägungen, hier der Vertauschung von Grenzübergängen, wesentlich mehr Gewicht zubilligt als Kunstgriffen. Deutlichere Hinweise in diese Richtung kann man aus Hardys Buch *Course of Pure Analysis* (1908) entnehmen, mit dem sich auch der Artikel von 1909 in seinen Grundanliegen deckt und auf das auch in dem Artikel verwiesen wird. In diesem Buch ging es Hardy vorzugsweise darum, die der Analysis zugrundeliegenden Begriffe, vorzugsweise des Grenzwerts, in ihren verschiedenen Aspekten gründlich zu klären und einzuüben. In einer Besprechung dieses Buches schrieb denn auch der Referent Emil Lampe (1909) über Hardys Aufbereitung der Lerninhalte:

> Immer wird der Begriff an die Spitze gestellt und vertieft; weniger Rücksicht wird auf die Technik des Rechnens genommen.

Ganz in diesem Sinne hat das Integral (1) in Hardys Beitrag nicht mehr den Status eines (besonders wichtigen) Einzelproblems, es dient vielmehr der Illustration spezieller Begriffskontexte, die Eigenleben zu entfalten beginnen.

Am Beispiel unseres Integrals zeigt es sich, wie sich seit Euler der Stellenwert eines Problems der Mathematik und die Arbeitsweise an ihm verändert hat: Euler präsentierte eine plausible Wertbestimmung für das Integral (1) und verglich es mit ähnlichen „konkreten" Fällen. Was die „Strenge" der Begründung angeht, äußerte sogar er, dessen (scheinbar) freies Umgehen mit Formeln von heutigen Mathematikern neidisch bewundert wird, Vorbehalte. Gegen Mitte des 19. Jahrhunderts finden wir andere Vorstellungen darüber, was „mathematische Strenge" betrifft. Unser Integral ist aber immer noch ein Repräsentant einer bestimmten Klasse bestimmter Integrale, die mit spezifischen Methoden berechnet werden. Dirichlets Vorlesung von 1854 über Integralrechnung ist noch überwiegend nach den Integraltypen, wie sie sich in der Tradition Eulers darboten, gegliedert. Hardys Buch dagegen, wie alle Lehrbücher ab dem letzten Drittel des 19. Jahrhunderts ist dem Ordnungsprinzip der vorrangigen Konzepte Zahl, Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral unterworfen. Euler hätte wohl den Kunstgriffen von Laplace, Poisson/Cauchy oder Frullani, die zu „direkten" Herleitungen führten, eine entscheidende Bedeutung zuerkannt. Hardy dagegen sah die Essenz des Vorgehens in der Vertauschung von Grenzübergängen, alles andere war offenbar für ihn – aus der Sicht der „modernen Analysis" – mehr oder weniger „selbstverständlich".

Wir sehen aber auch anhand der Geschichte des Integrales (1), wie lange es gedauert hat, bis sich bestimmte allgemeine Konzepte, wie etwa die „bedingte" oder die „gleichmäßige" Konvergenz, in hinreichend allgemeiner Weise etablieren konnten. Wurden diese Begriffe zunächst für Reihen eingeführt, so scheint es Jahrzehnte gedauert zu haben, bis sie auch auf uneigentliche Integrale übertragen wurden. Während beispielsweise die bedingte Konvergenz bei Reihen bereits von Dirichlet (1837b, 318–320) gründlich diskutiert wurde, findet man sie bei uneigentlichen Integralen erst gut 40 Jahre später – bezüglich (1) etwa bei Harnack (1881, 280) – thematisiert.

Die Entwicklung der Diskussion des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ zeigt somit nicht nur beispielhaft die Entwicklung im Problembewusstsein bezüglich

- unendlich kleiner Zahlen,
- uneigentlicher Konvergenz von Reihen bzw. Integralen,
- Vertauschung von Integrationsreihenfolgen,
- Vertauschung von Grenzübergängen und Integration,
- Grundeigenschaften komplexer Funktionen,

sondern auch die Wandlung von der Bewältigung konkreter Probleme durch (möglichst allgemeine) „Methoden" hin zu einer übergreifende Konzepte betonenden Sichtweise, wie sie die „moderne" Analysis gegen Anfang des 20. Jahrhunderts prägte.

Danksagung Der Autor dankt den beiden Gutachtern für eine Reihe sehr nützlicher Anregungen.

Literatur

Abel, N.H.: Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$. J. Reine Angew. Math. **1**, 219–250 (1826). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes, T. 1, 219–250, Grøndahl, Kristiania, 1881

Bonnet, O.: Remarques sur quelques intégrales définies. J. Math. Pure Appl. **14**(1), 249–256 (1849)

Bottazzini, U.: The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. Springer, New York, 1986

Bottazzini, U.: Die Theorie der komplexen Funktionen, 1780–1900. In: Geschichte der Analysis, H.N. Jahnke (Hrsg.), S. 267–328. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 1999

Burckhardt, H.: Trigonometrische Reihen und Integrale (bis etwa 1850). In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, 1, 2, H. Burckhardt, R. Fricke &W. Wirtinger (Hrsg.), Artikel IIA12 (1914). Teubner, Leipzig, 1904–1916

Cauchy, A.L.: Seconde note sur les fonctions réciproques. Bull. Soc. Philomatique, 121–124 (1818). Wiederabgedruckt in Œuvres complètes **2**(2), 228–232, Gauthier-Villars, Paris, 1958

Cauchy, A.L.: Cours d' Analyse de l'École Polytechnique. Première Partie. De Bure, Paris, 1821. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes **3**(2), Gauthier-Villars, Paris, 1885

Cauchy, A.L.: Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal. Courcier, Paris, 1823. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes **4**(2), Gauthier-Villars, Paris, 1899

Cauchy, A.L.: Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. De Bure, Paris, 1825. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes **15**(2), 41–89, Gauthier-Villars, Paris, 1974

Cauchy, A.L.: Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies. Exercices de mathématiques **1**, 95–113 (1826). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes **6**(2), 124–145, Gauthier-Villars, Paris, 1887

Carslaw, H.S.: Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. Macmillan, London, 1906

Courant, R.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, 2. Aufl. Springer, Berlin, 1930

De la Vallée-Poussin, Ch.-J.: Étude des intégrales à limites infinies pour lesquelles la fonction sous le signe est continue. Ann. Soc. Sci. Bruxelles **16**, 150–160 (1891)

De la Vallée-Poussin, Ch.-J.: Recherches sur la convergence des intégrales définies. J. Math. Pure Appl. **8**(4), 421–467 (1892)

De la Vallée-Poussin, Ch.-J.: Cours d' analyse infinitésimale, T. II. Librairie Universitaire, Louvain, 1906

Dini, U.: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Nistri, Pisa, 1878

Dini, U.: Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variablile reale. Nistri, Pisa, 1880

Dirichlet, P.G.L.: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. J. Reine Angew. Math. **4**, 157–169 (1829). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 117–132

Dirichlet, P.G.L.: Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen. In: Repertorium der Physik, Bd. I, S. 252–174, Veit, Berlin, 1837a. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 133–160

Dirichlet, P.G.L.: Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 45–81 (1837b). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 313–342

Dirichlet, P.G.L.: Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples. C. R. hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences **8**, 156–160 (1839a). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 375–380

Dirichlet, P.G.L.: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 18–25 (1839b). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 381–390

Dirichlet, P.G.L.: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 61–79 (1839c). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Dirichlet 1889, 391–410

Dirichlet, P.G.L.: Gedächtnisrede auf Carl Gustav Jacobi. Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1–27 (1852). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabddruck in Dirichlet 1897, 225–252
Dirichlet, P.G.L.: Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, G. Arendt (Hrsg.). Vieweg, Braunschweig, 1854/1904
Dirichlet, P.G.L.: Werke, Bd. I, L. Kronecker, L. Fuchs (Hrsg.). Georg Reimer, Berlin, 1889
Dirichlet, P.G.L.: Werke, Bd. II, L. Kronecker, L. Fuchs (Hrsg.). Georg Reimer, Berlin, 1897
Euler, L.: Introductio in analysin infinitorum, tomus I. Lausanne, 1748. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Opera omnia **8**(1), A. Krazer, F. Rudio (Hrsg.), Teubner, Leipzig Berlin, 1922
Euler, L.: De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum. Institutiones calculi integralis **4**, 337–345 (1794). Academia imperialis scientiarum, St. Petersburg. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Opera omnia **19**(1), F. Rudio (Hrsg.), Teubner, Leipzig Berlin, 1932
Fischer, H.: Die verschiedenen Formen und Funktionen des zentralen Grenzwertsatzes in der Entwicklung von der klassischen zur modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Shaker, Aachen, 2000
Fischer, H.: Wer war's? Mitteilungen der DMV, H.1, 56 (2001)
Fourier, J.: Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822
Frullani, G.: Sopra gli integrali definiti. Memorie di matematica e di science fisiche e naturali della Società Italiana delle Science **20**, 448–467 (1828/31)
Grattan-Guinness, I.: Convolutions in French Mathematics, 1800–1840. 3 Bände, durchgehende Paginierung. Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990
Hardy, G.H.: A Course of Pure Mathematics. University Press, Cambridge, 1908
Hardy, G.H.: The Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. The Mathematical Gazette **5**, 98–103 (1909)
Harnack, A.: Elemente der Differential- und Integralrechnung. Teubner, Leipzig, 1881
Jahnke, H.N.: Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts. In: Geschichte der Analysis, H.N. Jahnke (Hrsg.), S. 131–170. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 1999
Lampe, E.: Referat über Hardy 1909. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **39**, JFM 39.0340.01 (1909)
Laplace, P.S.: Mémoire sur divers points d'analyse. Journal de l'École Polytechnique, 15^e cahier, tome 8 (1809). Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes de Laplace XIV, 178–214, Gauthier-Villars, Paris, 1912
Laplace, P.S.: Mémoire sur les intégrales définies et leur applications aux probabilités, et specialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Mémoires de l'Académie des Sciences **11**, I^{re} Partie, 279–347 (1811) Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck in Œuvres complètes de Laplace XII, 357–412. Gauthier-Villars, Paris, 1898
Laplace, P.S.: Théorie analytique des probabilités. 1812/20/86. Alle Seitenangaben gemäß Wiederabdruck der 3. Aufl. (1820) in Œuvres complètes de Laplace VII, Gauthier-Villars, Paris, 1886
Laugwitz, D.: Zahlen und Kontinuum. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1986
Laugwitz, D.: Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820. Archive for History of Exact Sciences **39**, 195–245 (1989)
Lützen, J.: Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Geschichte der Analysis, H.N. Jahnke (Hrsg.), S. 191–244. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 1999
Osgood, W.F.: Problems in Infinite Series and Definite Integrals; with a Statement of Certain Sufficient Conditions which are Fundamental in the Theory of Definite Integrals. Ann. Math. **3**(2), 129–146 (1902)
Poisson, S.D.: Mémoire sur les intégrales définies. Journal de l'École Polytechnique, cah. 16, 215–246 (1813)
Smithies, F.: Cauchy and the Creation of Complex Function Theory. University Press, Cambridge, 1997
Spalt, D.: Vom Mythos der mathematischen Vernunft. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1981