实验三　连续时间信号的频域分析

一、实验目的

1、掌握傅立叶变换及其性质；

2、掌握连续时间信号傅立叶变换的数值计算方法；

3、掌握利用 MATLAB 实现信号的幅度调制的方法；

4、掌握利用 MATLAB 实现对周期信号的频谱分析。

二、实验原理

（一）利用 MATLAB 实现周期信号的分解与合成

1、求下图 3-1 所示周期矩形脉冲的傅立叶级数表达式，并用 MATLAB 求出由前 N 次谐波合成的信号近似波形。

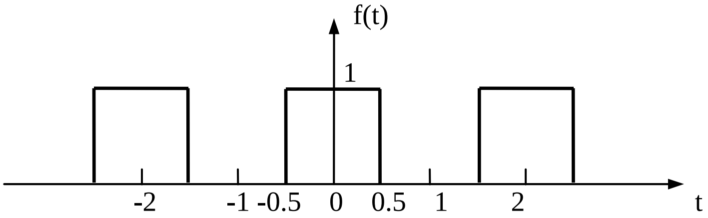


图 3-1 周期矩形脉冲

解：取 $t_0=-0.5$，$T_0=2$，则

加上-号

积分区间应为-0.5到0.5

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{\boxed{jn\omega_0 t}}dt=\frac{1}{2}\boxed{\int_{-1}^{1}}e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}Sa(\frac{n\pi}{2})$$

由前 N 次谐波合成的信号近似波形为

$$f_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}Sa(\frac{n\pi}{2})e^{jn\pi}=0.5+\sum_{n=1}^{N}Sa(n\pi/2)\cos(n\pi t)$$

程序如下：

```
clear all;
t=-2:0.001:2;                %信号的抽样点
N=input('N=');
c0=0.5;
fN=c0*ones(1,length(t));     %计算抽样点上的直流分量
for n=1:2:N                  % 偶次谐波为零
    fN= fN +cos(pi*n*t)*sinc(n*pi/2) ;
```

```
end
plot(t, fN);grid;
title(['N=' num2str(N)])        % 数值型数据转换为字符型数据
axis([-2 2 -0.2 1.2])
```

运行结果如图 3-2。

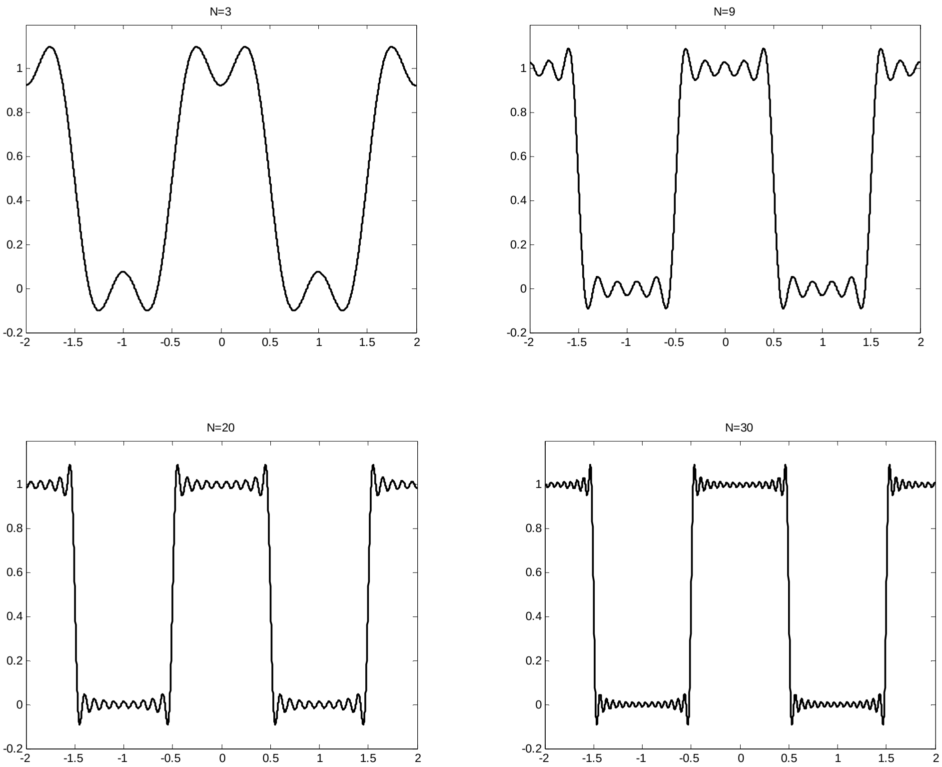


图 3-2　所求前 N 项傅立叶系数合成的近似波形

3、周期方波信号如下图 3-3 所示，求出该信号三角函数形式的傅立叶级数，并用 MATLAB 编程实现其各次谐波叠加情况。

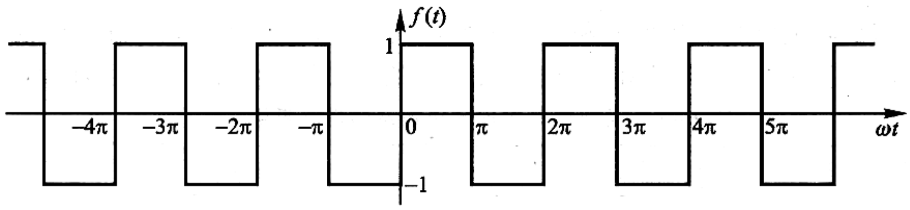


图 3-3 周期方波信号

解：由图可知，该方波信号的周期为 2π，且为奇函数，故 $a_n = 0$，所以

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

计算得到

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,\cdots \\ \dfrac{4}{n\pi} & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

该方波的信号的傅立叶级数为

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\{\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)t] + \cdots\} \qquad n = 1,2,\cdots$$

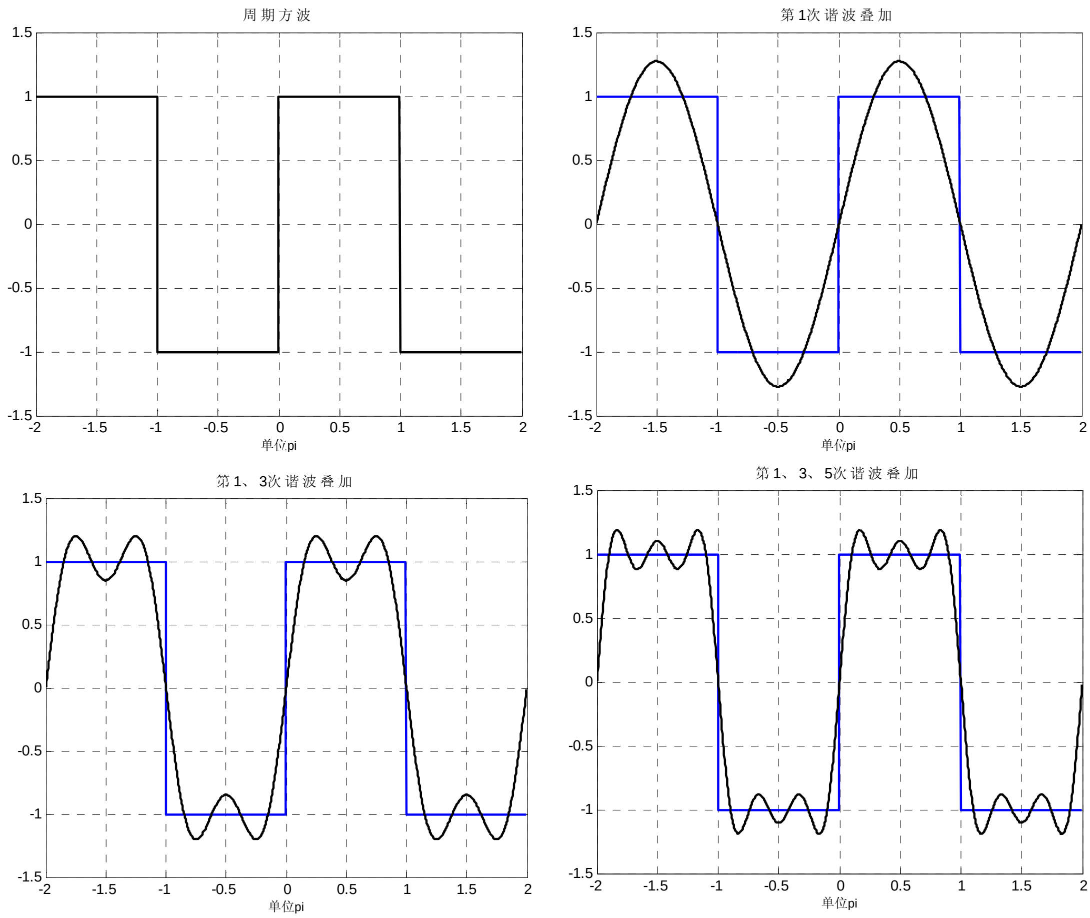
因此，只要由 b_n 计算出 $f(t)$ 各次谐波的振幅，再根据各次谐波的频率，即可利用 MATLAB 绘出周期方波的各次谐波叠加后的波形。

程序如下：

```
% 观察周期方波信号的分解与合成
% m：傅里叶级数展开的项数
display('Please input the value of m (傅里叶级数展开的项数)'); % 在命令窗口显示提示信息
    m = input('m = ');              %键盘输入傅里叶级数展开的项数
    t = -2*pi:0.01:2*pi;            %时域波形的时间范围-2π~2π，采样间隔 0.01
    n = round(length(t)/4);         %根据周期方波信号的周期，计算 1/2 周期的数据点数
    f = [ones(n,1);-1*ones(n,1);ones(n,1);-1*ones(n+1,1)];    %构造周期方波信号
    y = zeros(m+1,max(size(t)));
    y(m+1,:) = f';
    figure(1);
    plot(t/pi,y(m+1,:));            %绘制方波信号
    grid;                           %在图形中加入栅格
    axis([-2 2 -1.5 1.5]);          %指定图形显示的横坐标范围和纵坐标范围
    title('周期方波');               %给显示的图形加上标题
    xlabel('单位 pi','Fontsize', 8); %显示横坐标单位
    x = zeros(size(t));
    kk = '1';
    for k=1:2:2*m-1                 %循环显示谐波叠加图形
        pause;
        x = x+sin(k*t)/k;
        y((k+1)/2,:) = 4/pi*x;      %计算各次谐波叠加和
        plot(t/pi,y(m+1,:));
        hold on;
        plot(t/pi,y((k+1)/2,:));    %绘制谐波叠加信号
```

```
        hold off;
        grid;
        axis([-2 2 -1.5 1.5]);
        title(strcat('第',kk,'次谐波叠加'));
        xlabel('单位 pi','Fontsize', 8);
        kk = strcat(kk,'、',num2str(k+2));
    end
    pause;
    plot(t/pi,y(1:m+1,:));grid;
    axis([-2 2 -1.5 1.5]);
    title('各次谐波叠加波形');
    xlabel('单位 pi','Fontsize', 8);
    % End
```

下图 3-4 是当 m=4 的程序运行结果。



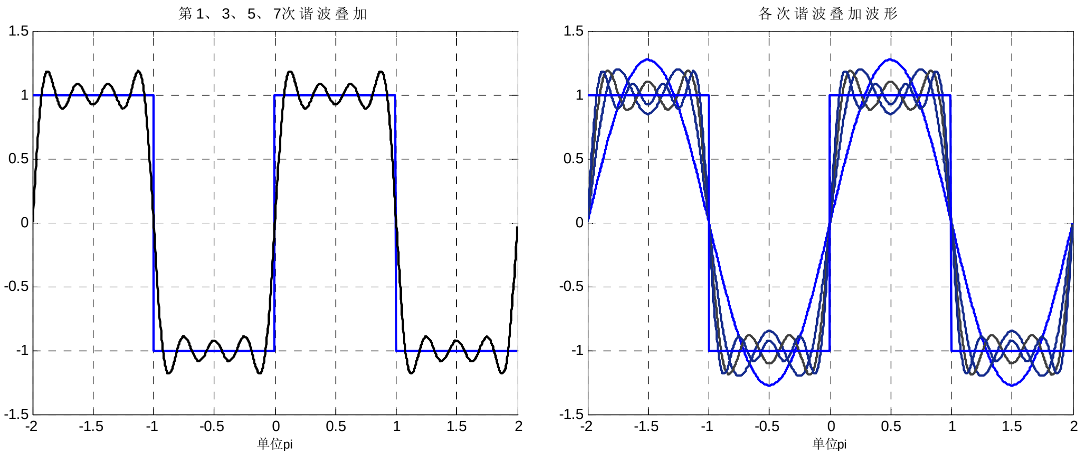


图 3-4 周期方波信号的傅立叶级数分析

（二）利用 MATLAB 实现周期信号的频谱分析

4、利用 MATLAB 实现下图 3-5 所示的周期三角形信号的频谱图。

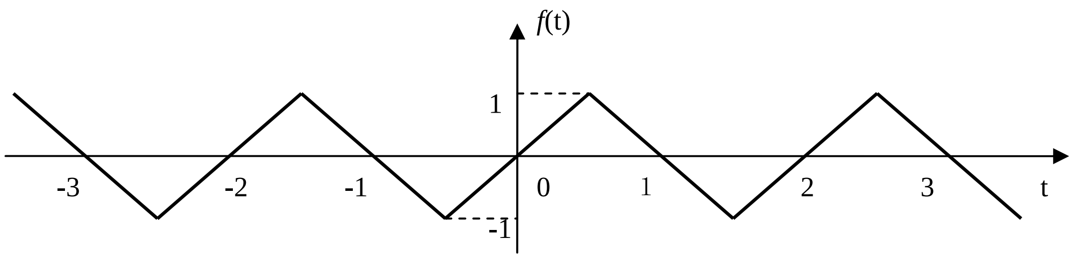


图 3-5 周期三角形信号

解：由图可知信号的周期为 T_0=2，所以 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$， $f(t)$ 在区间[-1/2，3/2]内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}2t & |t|\le\dfrac{1}{2}\\ 2(1-t) & \dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

由 $f(t)$ 波形知 $C_0=0$。取 $t_0=-1/2$，则

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{T_0+t_0}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}2te^{-jn\pi t}dt+\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2}2(t-1)e^{-jn\pi t}dt$$

经过计算，该周期信号的傅立叶级数为

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{-4j}{n^2\pi^2}\sin(\dfrac{n\pi}{2}) & n\ne 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

程序如下：

```
N=10;
n1=-N:-1;
C1=-4*j*sin(n1*pi/2)/pi^2./n1.^2;
C0=0;
n2=1:N;C2=-4*j*sin(n2*pi/2)/pi^2./n2.^2;
Cn=[C1,C0,C2];n=-N:N;
subplot(2,1,1);stem(n,abs(Cn));ylabel('Cn 的幅度谱')
subplot(2,1,2);stem(n,angle(Cn));ylabel('Cn 的相位谱')
xlabel('\omega/\omega_0')
```

运行结果如图 3-6 所示。

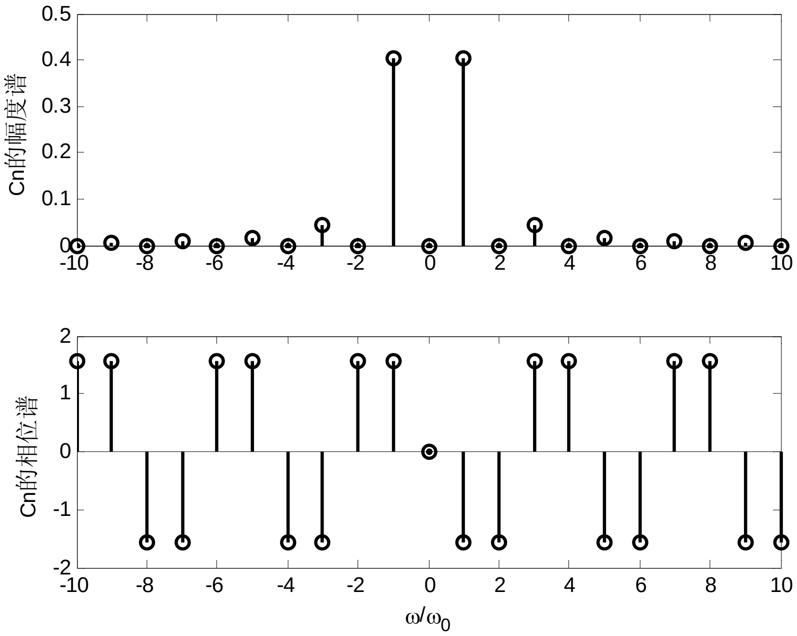


图 3-6 周期三角形信号的频谱图

5、周期锯齿脉冲信号如图 3-7，求其傅立叶级数，并用 MATLAB 绘制频谱图。

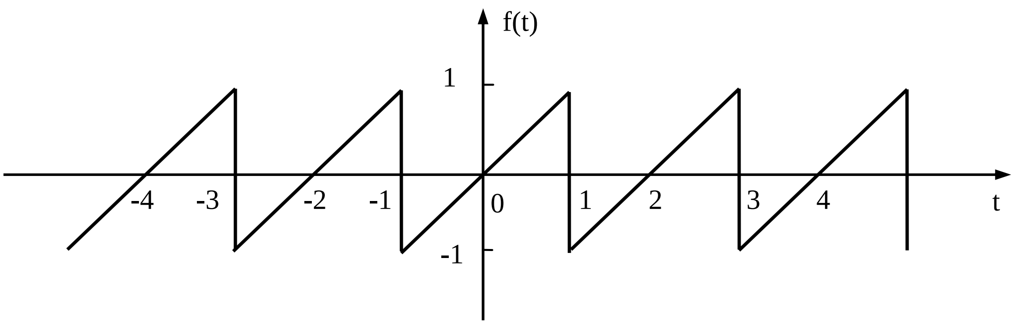


图 3-7 周期锯齿脉冲信号

解：

$$a_n = 0$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

程序如下：

```
% 周期锯齿脉冲信号频谱分析
% 绘制并观察周期锯齿脉冲信号频谱特性
% Nf：谐波的次数
% bn：第 1,2,3,...次谐波正弦项系数
    display('Please input the value of Nf ');
    Nf = input('Nf = ');
    bn = zeros(Nf+1,1);cn = zeros(Nf+1,1);
    bn(1) = 0;
    for i = 1:Nf
        bn(i+1) = (-1)^(i+1)*1/(i*pi);          % 计算系数 bn
        cn(i+1) = abs(bn(i+1));                 %计算幅度频谱
    end
    t = -5:0.01:5;
    x = sawtooth(pi*(t+1));            %用 sawtooth 函数构造周期锯齿脉冲信号
    subplot(211);
    plot(t,x);axis([-5 5 -1.5 1.5]);
    title('周期锯齿脉冲信号','Fontsize',8);xlabel('t (单位:s)', 'Fontsize',8);
    subplot(212);
    k=0:Nf;
    stem(k,cn);
    hold on;
    plot(k,cn);
    title('幅度频谱','Fontsize',8);xlabel('谐波次数', 'Fontsize',8);
    % End
```

例如，Please input the value of Nf

Nf = 30

程序运行结果如图 3-8。

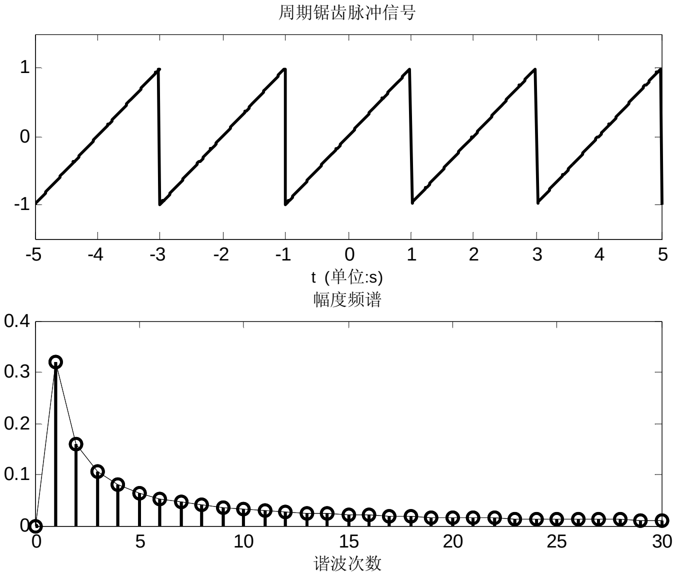


图 3-8 周期锯齿脉冲信号的频谱

（三）非周期信号频域分析的 **MATLAB** 实现

当非周期序列写成下列有理多项式的形式

$$F(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\cdots+b_Me^{-j\omega M}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\cdots+a_Ne^{-j\omega N}}$$

可以用 MATLAB 中提供的 freqz( )函数来计算上面非周期序列的傅立叶变换值，调用格式为

h=freqz (b,a,w)

上式中，b 和 a 分别是其分子多项式和分母多项式的系数向量，即

$$\mathrm{b}=[\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_M]$$
$$\mathrm{a}=[\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_N]$$

w 为抽样的频率点，h 为傅立叶变换在抽样点 w 上的值。

6、利用 MATLAB 画出 $\alpha=\pm0.9$ 时，$F(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ 的幅度频谱。

程序如下：

```
clear all;
b=[1];
a1=[1 -0.9];a2=[1 0.9];
w=linspace(0,2*pi,512);        %线性均匀分 0-2π 的间隔，共 512 点
h1=freqz(b,a1,w);
h2=freqz(b,a2,w);
```

```
plot(w/pi,abs(h1),w/pi,abs(h2),'k:');
xlabel('\omega/\pi');
legend('\alpha=0.9','\alpha=-0.9')
```

画出的幅度频谱如图 3-9。

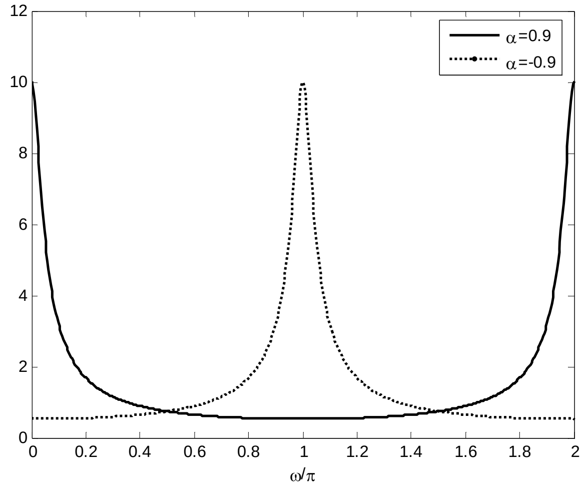


图 3-9 $F(e^{j\omega})$ 的幅度频谱

四、实验仪器及环境

计算机 1 台，MATLAB7.0 软件。

五、实验要求

预习傅立叶变换相关知识。

六、思考题

1、既然可直接由傅立叶变换的定义计算连续信号的傅立叶变换，为什么利用 DFT 分析连续信号的频谱？

2、在利用 DFT 分析连续信号频谱时，会出现哪些误差？如何避免或减小这些误差？