实验四 信号的傅里叶变换

一、实验目的

1、掌握求解连续 LTI 系统频率响应方法；

2、掌握符号计算和数值计算两种计算信号傅里叶变换的方法。

二、实验原理

（一）求解连续 LTI 系统频率响应（教材 4.7 节）

已知一个连续时间线性时不变系统满足如下形式的线性常系数微分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

其频率响应为：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

可以用 MATLAB 提供的$freqs$函数来计算该频率响应，使用方法为：

$$h = freqs(b, a, \omega)$$

上式中，b和a分别是其分子多项式和分母多项式的系数向量，即

$$b = [b_M, b_{M-1}, \dots, b_0]$$

$$a = [a_N, a_{N-1}, \dots, a_0]$$

ω为抽样频率点，h为频率响应在抽样点ω上的值。

例：给定一连续 LTI 系统，描述其输入与输出关系的微分方程为：

$$\frac{d^2(y(t))}{dt^2} + 3\frac{d(y(t))}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

分别绘制该系统的幅频响应、相频响应、频率响应的实部和频率响应的虚部。

程序如下：

```
close all;
clear all;
a = [1 3 2];
b = [1];
w = -2 * pi : 0.01 : 2 * pi;
h = freqs(b, a, w);

%幅频响应、相频响应、频率响应的实部和频率响应的虚部（共四张图）
ax1 = subplot(2, 2, 1);
plot(w / pi, abs(h));grid;
```

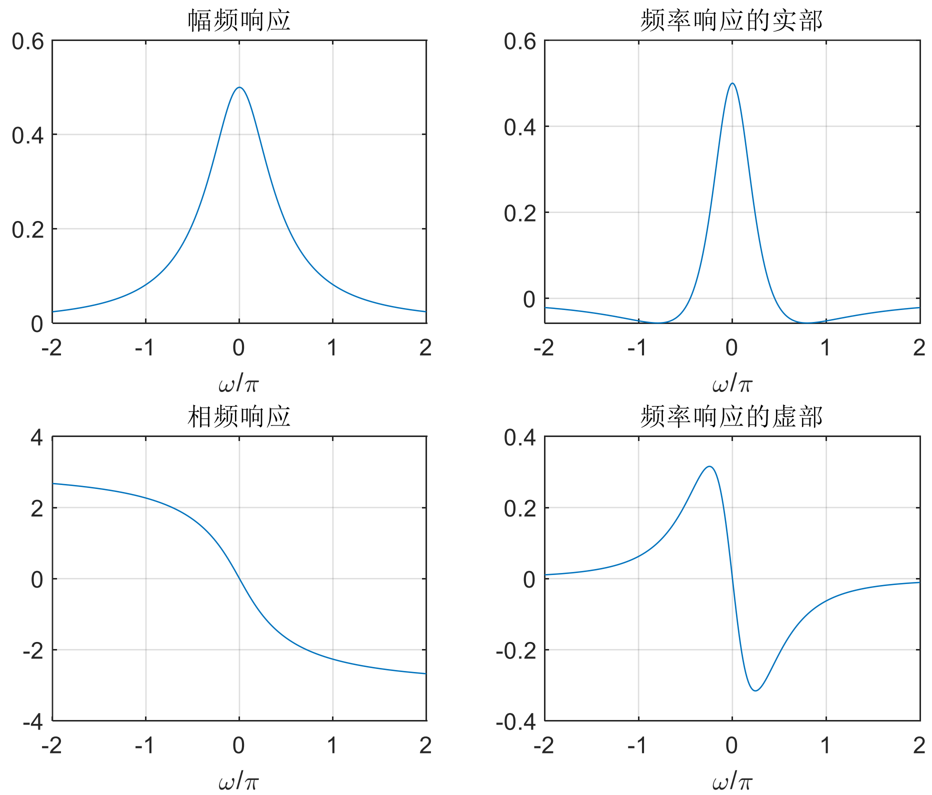
```
title('幅频响应');
xlabel('\omega/\pi');

ax3 = subplot(2, 2, 3);
plot(w / pi, angle(h));grid;
title('相频响应');
xlabel('\omega/\pi');

ax2 = subplot(2, 2, 2);
plot(w / pi, real(h));grid;
title('频率响应的实部');
xlabel('\omega/\pi');

ax4 = subplot(2, 2, 4);
plot(w / pi, imag(h));grid;
title('频率响应的虚部');
xlabel('\omega/\pi');
```

结果如下：



（二）使用符号计算的方法计算信号的傅里叶变换

MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 提供了能直接求解傅里叶变换与反变换的函数 fourier()和 ifourier()，调用格式如下：

- $F = fourier(f)$：它是符号函数 f 的傅里叶变换，默认返回函数 F 是关于Ω的函数；
- $F = fourier(f,v)$：它的返回函数 F 是关于符号对象 v 的函数，即

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jvt}dx;$$

- $f = ifourier(F)$：函数 F 的傅里叶反变换，默认的独立变量为Ω，默认返回是关于 x 的函数。

若需要对返回结果作图时，不能使用 plot()，应该使用 ezplot()或者 fplot()。

例： 计算下面信号的傅里叶变换，并画出傅里叶变换的幅度谱和相位谱：

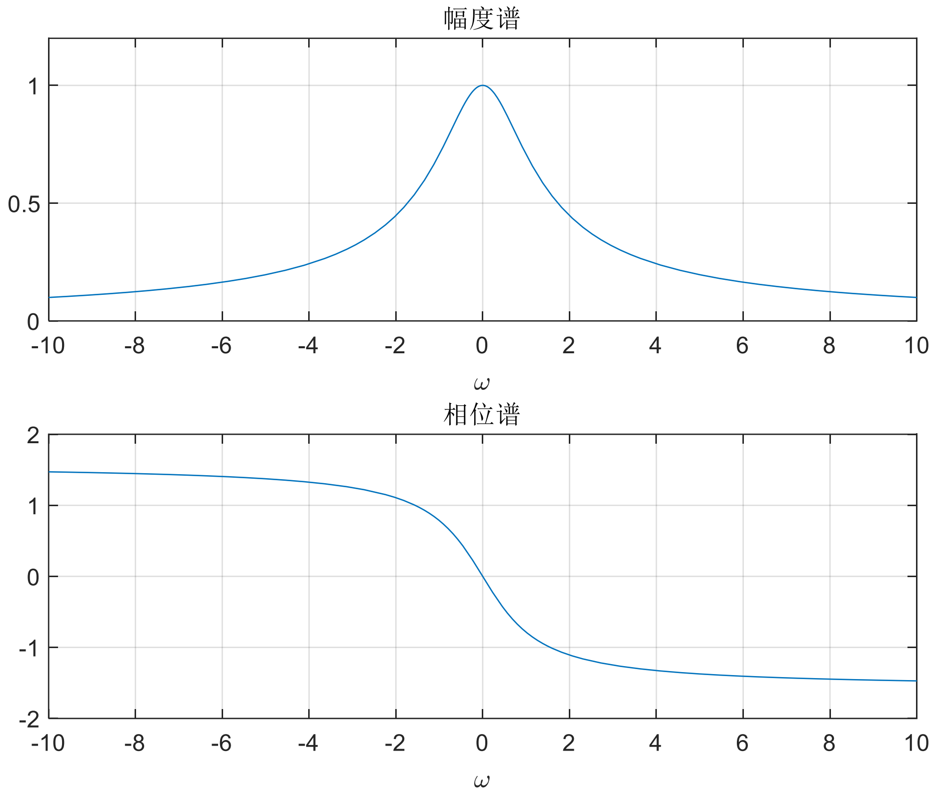
$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

程序如下

```
close all;
clear
syms t
x1_t = exp(-t) * heaviside(t);
X1 = fourier(x1_t);
w=[-10,10];
figure
subplot(2,1,1);
fplot (abs(X1),w);
title('幅度谱');
xlabel('\omega');grid
ylim([0, 1.2])

subplot(2,1,2);
fplot (angle(X1),w);
title('相位谱');
xlabel('\omega');grid
ylim([-2, 2])
```

结果如下：



（三）使用数值计算方法计算信号的傅里叶变换

$f(t)$的傅里叶变换为：

$t>0$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta t)e^{-j\omega n\Delta t}\Delta t$$

若信号为时限信号，当Δt足够小，项数N足够多时，有：

$$F(j\omega)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}f(t_1+n\Delta t)e^{-j\omega(t_1+n\Delta t)}$$

$$=\Delta t*[f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_{2N+1})]*\left[e^{-j\omega t_1},e^{-j\omega t_2},\ldots,e^{-j\omega t_{2N+1}}\right]^T$$

其中$[\cdot]^T$表示矩阵转置。

用 MATLAB 代码表示F：

$$F=f*exp(-1j*t.'*\omega)*dt$$

其中$f=[f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_{2N+1})]$，$t=[t_1,t_2,\ldots,t_{2N+1}]$，$\omega=[\omega_1,\omega_2,\ldots]$，$dt$是$t$的间隔，$t.'$表示$t$的转置。具体实现可以参考下面的例子。

例：计算下面信号的傅里叶变换，并画出傅里叶变换的幅度谱和相位谱：

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

程序如下：

```
close all;
clear
dt = 0.01;
dw = 0.1;
t = -10: dt: 10;
w = -10:dw:10;
x1_t = exp(-t) .* heaviside(t);
X1 = x1_t * exp(-1j * t.' * w) * dt;
figure
subplot(2,1,1);
plot (w,abs(X1));
title('幅度谱');
xlabel('\omega');grid
ylim([0, 1.2])

subplot(2,1,2);
plot (w,angle(X1));
title('相位谱');
xlabel('\omega');grid
ylim([-2, 2])
```

结果如下：