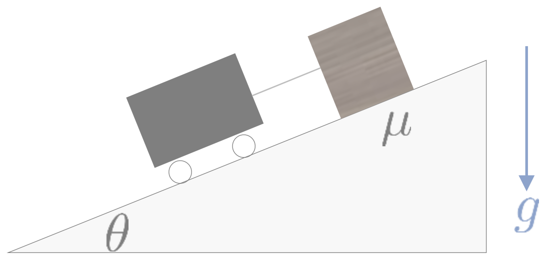
曲阜师范大学
QUFU NORMAL UNIVERSITY

2016级数学系普物1



数学与应用数学专业

主讲人：刘世东

2017-2018学年第1学期

物理工程学院

Z质点的运动

hidiandeyundong

机械运动中最基本的运动即质点的运动

掌握描述质点运动的基本理论

运动学方程
速度，加速度等的概念
圆周运动，抛体运动
伽利略变换

机械运动

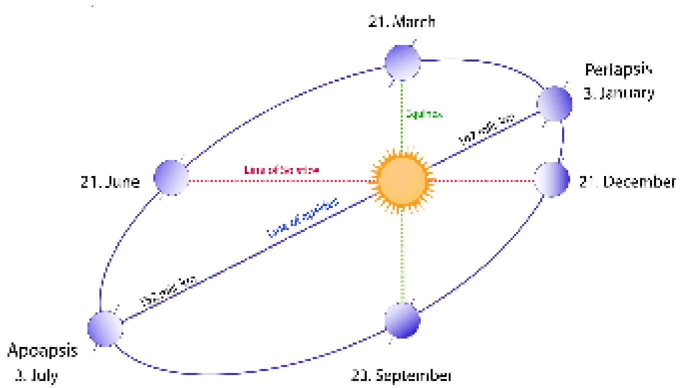
一种最基本，最简单的运动形式

力学的研究对象

一个**物体A**相对于另一个**物体B**的位置，或者，一个物体的某些部分相对于其他部分的位置，随着时间而变化的过程叫做机械运动.

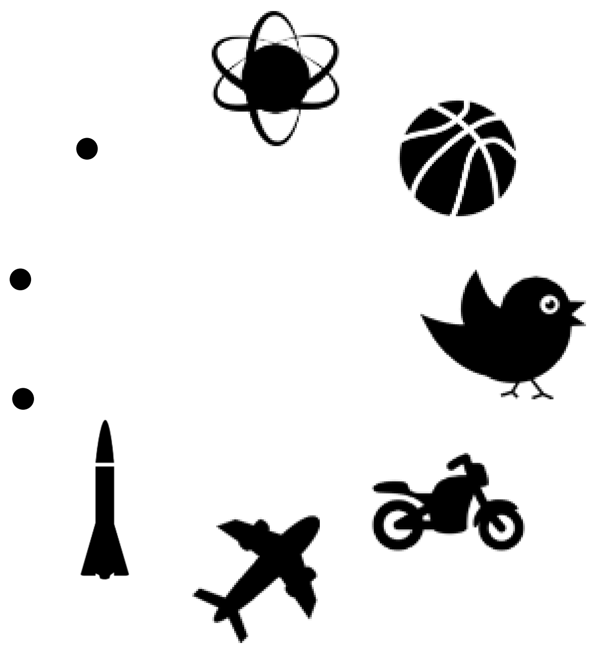
物体A

质点：有质量的点



自转

公转



质点只是一个理想模型

一个物体是否可以看作质点，须据实际情况而定.

物体尺寸与活动范围相比可以忽略不计.

平动物体

机械运动

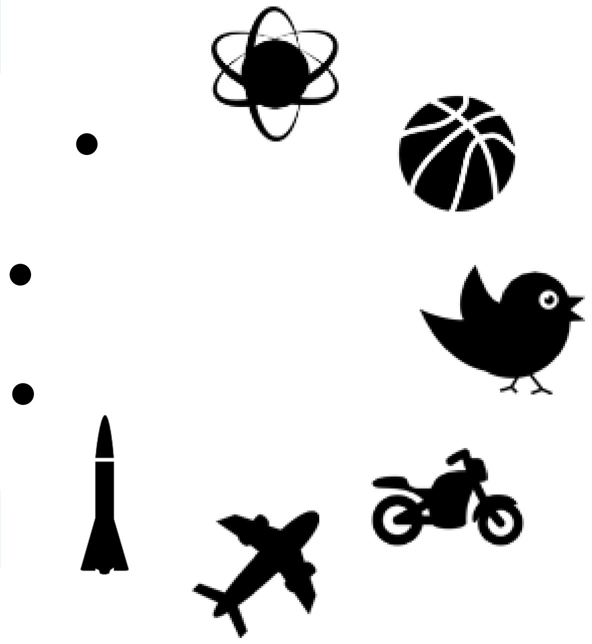
一种最**基本**，最**简单**的运动形式

一个**物体A**相对于另一个**物体B**的位置，或者，一个物体的某些部分相对于其他部分的位置，随着时间而变化的过程叫做机械运动.

力学的研究对象

物体B

参考系： 被选作参考的物体



坐标系： 建在参考系上

参考系可以任意选择

任何物体都可以当作参考系；参考系往往根据解决问题的难以来选定.

参考系不同，运动的描述不同.

坐标系为定量描述运动而引入

直角坐标系，极坐标系等

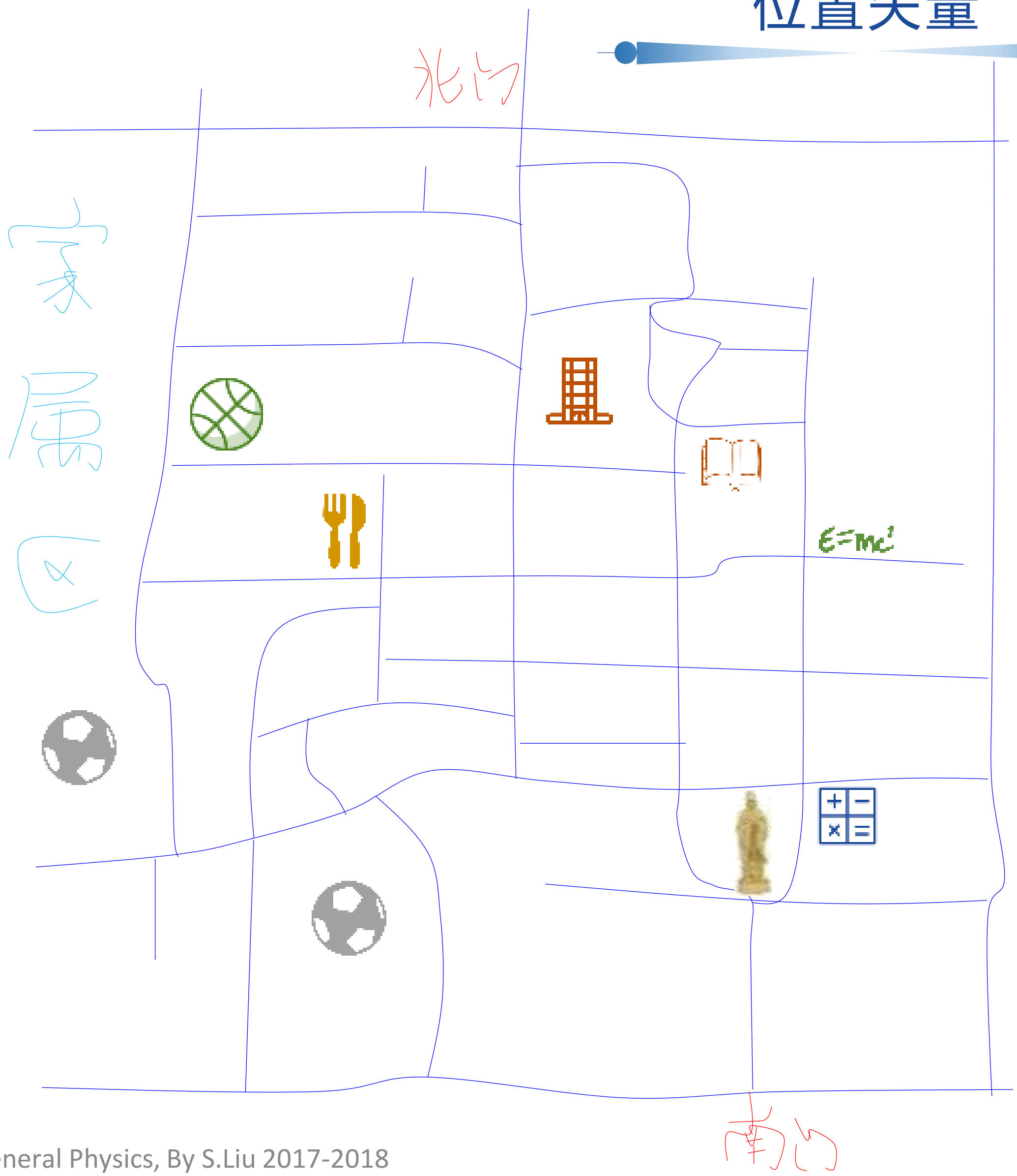
Ch1. 质点的运动 § 1-1运动学方程

位置矢量

Position Vector

简称位矢

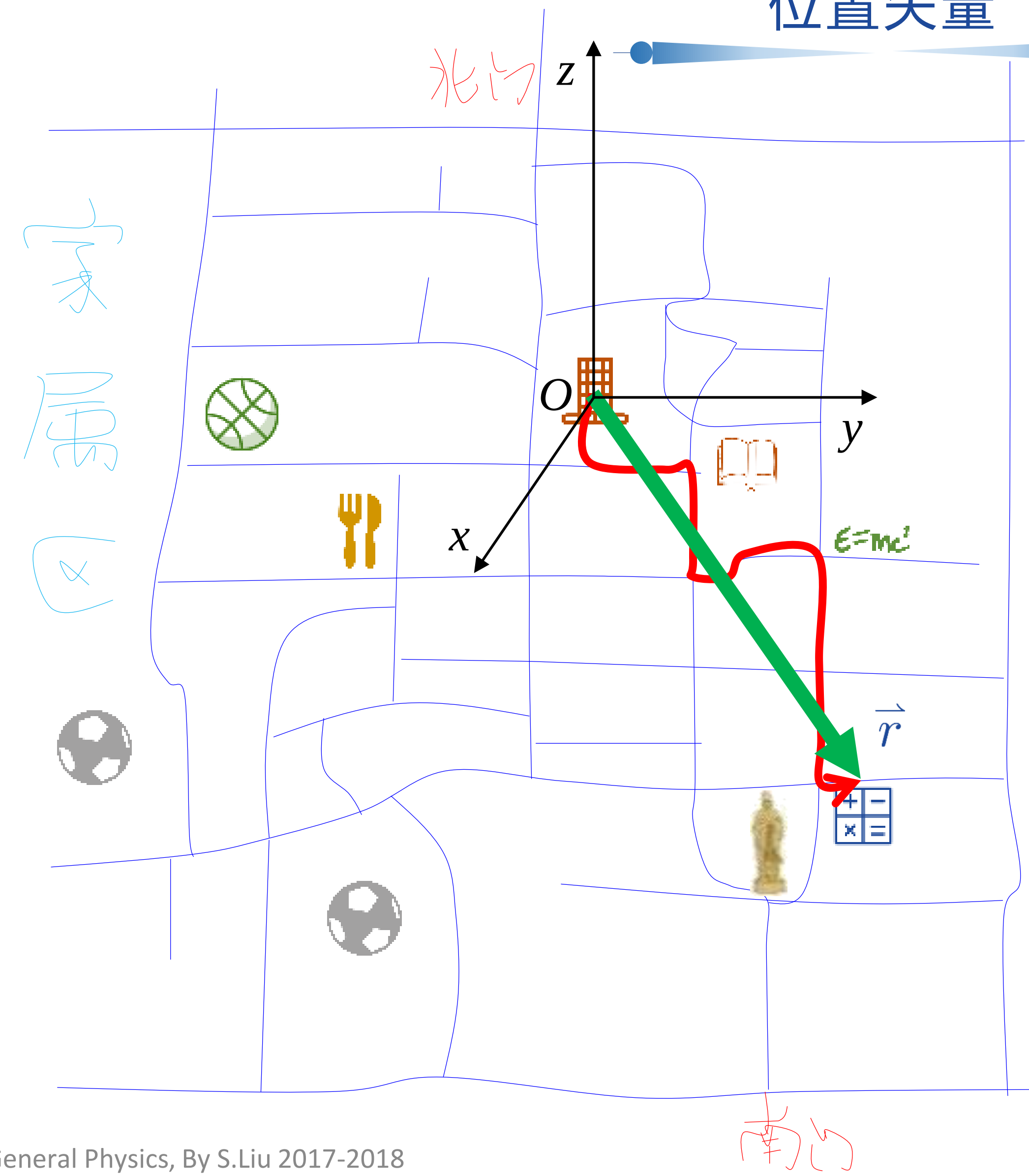
数学院位于综合楼的**直线**距离方位



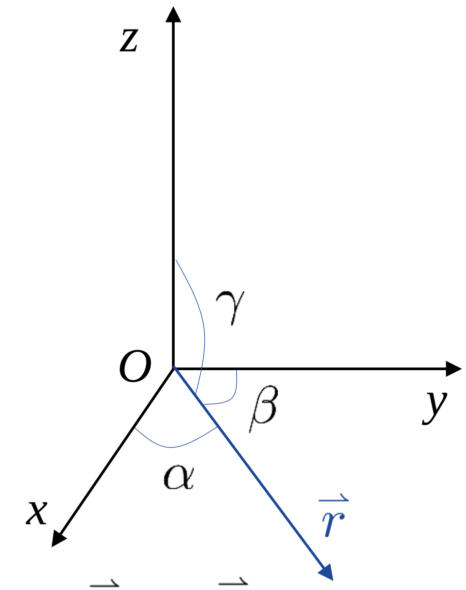
位置矢量

Position Vector

简称位矢



数学院位于综合楼的**直线**距离方位

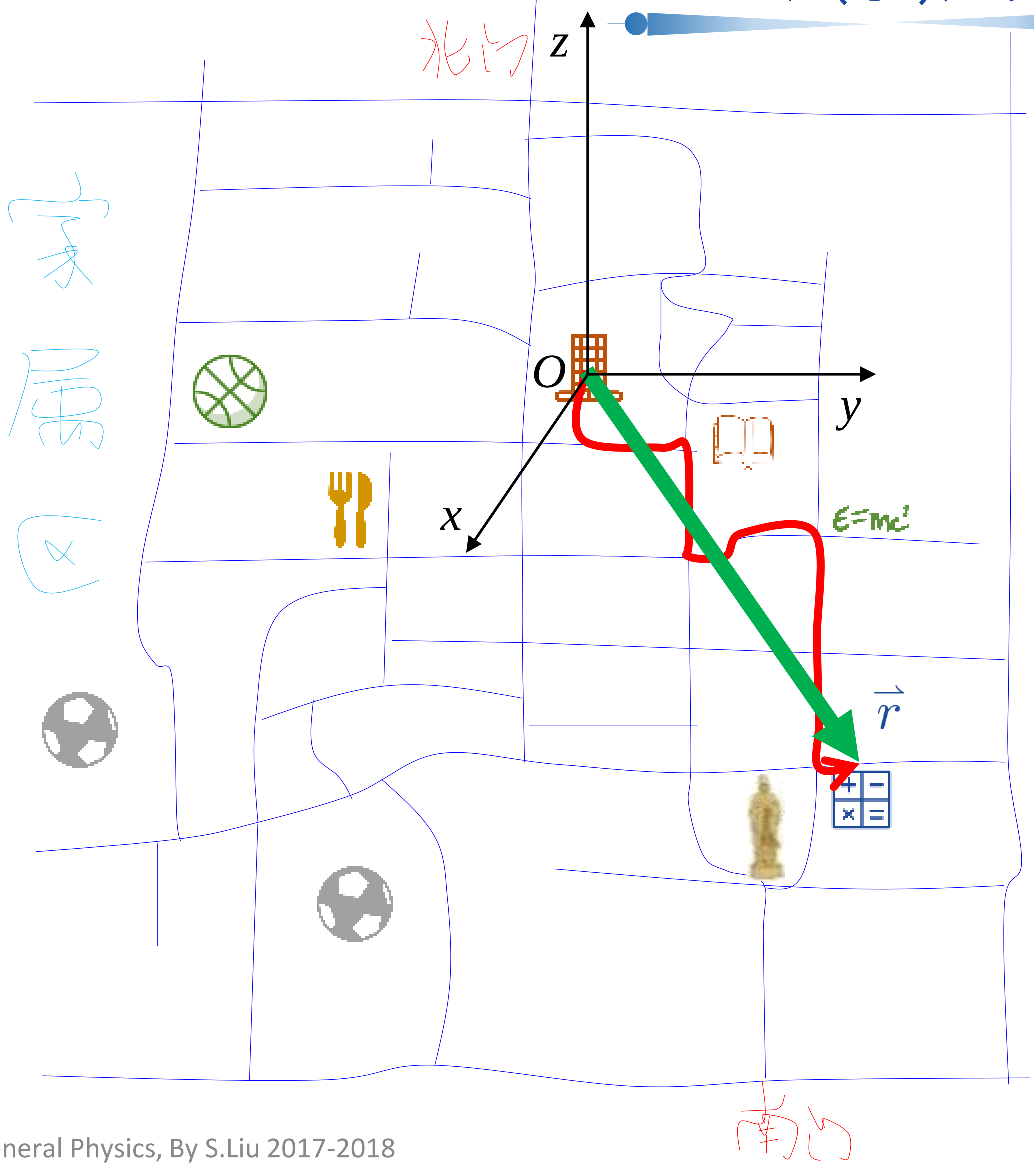


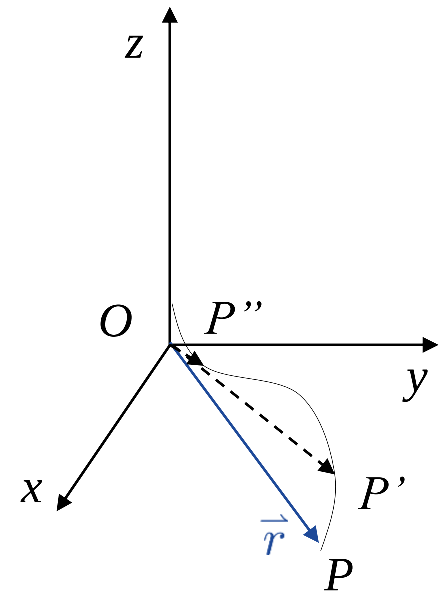
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

运动(学)方程





$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$= x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

or

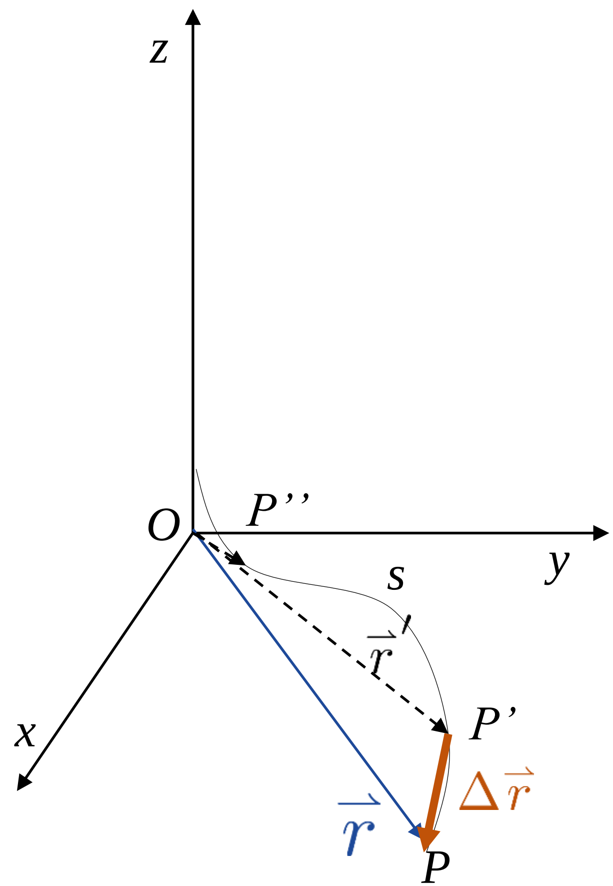
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

消去t后得到轨迹方程

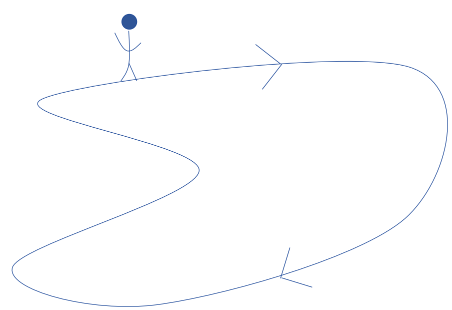
位移

不同时间之间的位矢只差称之为位移, 是一个矢量, 一般用 $\Delta\vec{r}$表示

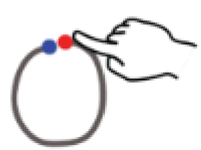
$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$



位移不同于路程, 路程一般用 s 表示



位移 vs 路程



速度

运动的快慢用速度 $\vec{v}$表示.　　单位: m/s

把位移$\Delta\vec{r}$与时间Δt的比值，称之为平均速度

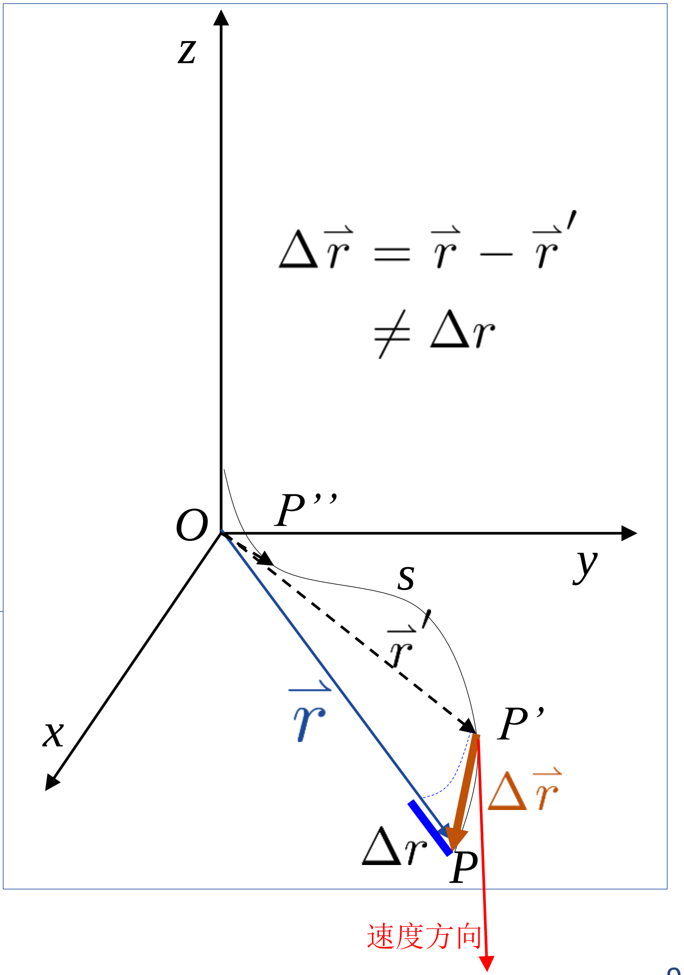
$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}\,(t+\Delta t) - \Delta\vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

某一点的瞬时速度，简称速度,方向沿切线方向

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$



PK

平均速率　$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$　$\geq \bar{\vec{v}}$

瞬时速率　$v = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt} \neq \dfrac{dr}{dt} = |\vec{v}|$

加速度

单位: m/s^2

速度描述运动快慢

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

加速度描述速度变化快慢

平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

加加速度不需要,

牛顿运动定律

瞬时加速度

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned}$$

小球在下落的一瞬间, 速度非常小→0, 而加速度为9.8 m/s^2

速度的大小与加速度的大小没有必然关系, 方向亦是如此!

运动学方程，速度，加速度

$$\vec{r}\,(t) \xleftrightarrow[\text{积分}]{\text{微商}} \vec{v}\,(t) \xleftrightarrow[\text{积分}]{\text{微商}} \vec{a}\,(t)$$

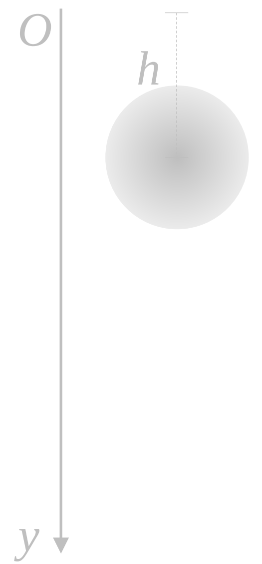
一质点做**直线运动**, 其运动学方程为

$$y = h + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

求速度, 加速度

$$v = \frac{dy}{dt} = v_0 + gt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = g$$



自由落体运动—匀加速直线运动

逆过程参看p17例题1-1

√ or ×

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

1. 一物体具有加速度而速度为零.
2. 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度.
3. 一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率.
4. 一物体具有沿正方向的加速度而有沿幅方向的速度.
5. 一物体的加速度大小恒定而其速度方向改变.

加速度方向总是
只想轨道的内侧

已知：质点的运动方程 $\vec{r}\,(t) = 2t\,\vec{i} + \left(2 - t^2\right)\vec{j}$

1. 质点的轨迹;
2. t=0s 及t = 2s 时,质点的位置矢量;
3. t=0s到t=2s时间内的位移;
4. t=2s内的平均速度;
5. t=2s末的速度及速度大小;
6. t=2s末加速度及加速度大小。

解: (1)先写出标量形式

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$$

消去t后得到轨迹方程, 即

$$y = 2 - \frac{x^2}{4}$$

(2) $t = 0, x = 0, y = 2 \Rightarrow \vec{r} = (0, 2)$

$t = 2, x = 4, y = -2 \Rightarrow \vec{r} = (4, -2)$

(3) $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t = 2) - \vec{r}\,(t = 0) = (4, -4)$

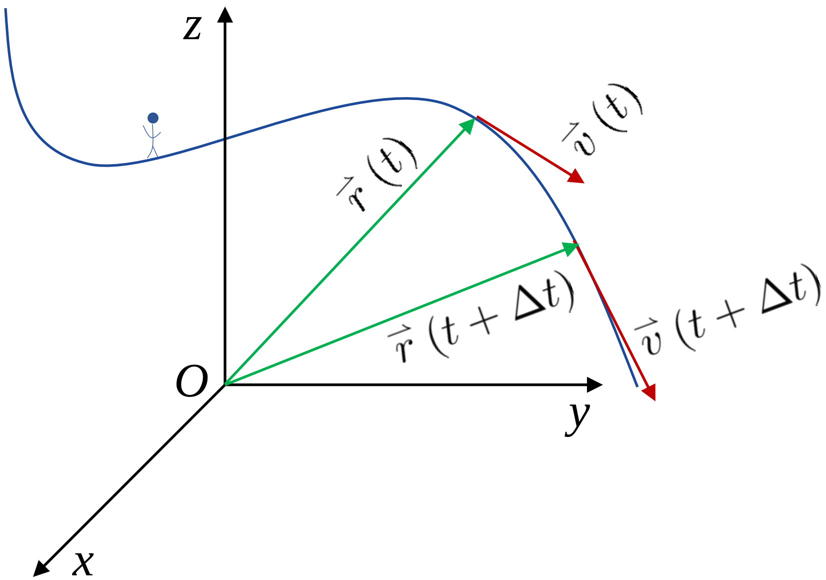
(4) $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{(4, -4)}{2} = (2, -2)$

(5) $\begin{cases} v_x = 2 \\ v_y = -2t \end{cases}$

(6) $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -2 \end{cases}$

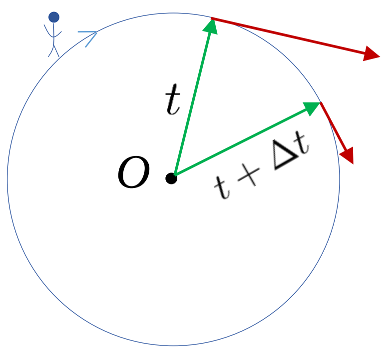
圆周运动

质点的运动一般都是曲线运动.



特殊化

圆周运动

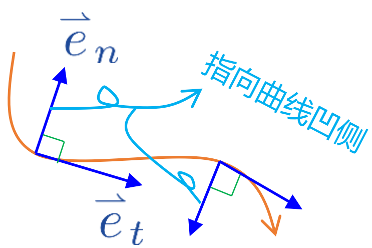


对圆周运动的描述一般采用**自然坐标系**

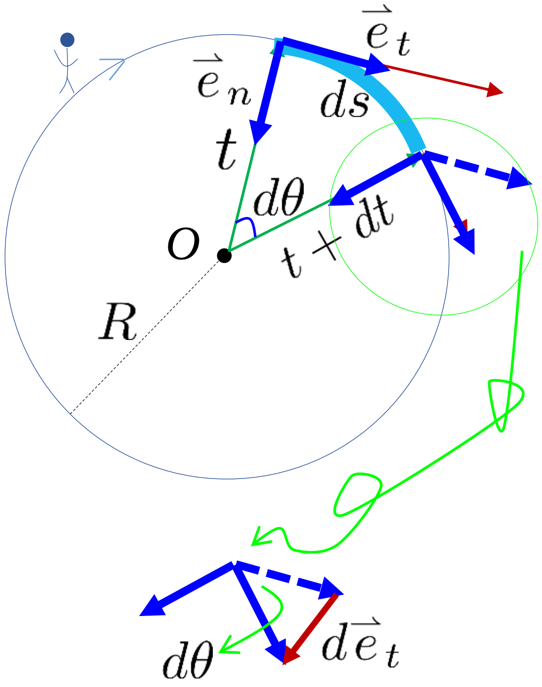
切线方向 $\vec{e}_t$

法线方向 $\vec{e}_n$

Note: 二单位矢量不是常矢量



切向 and 法向加速度



质点的速度总是沿着轨道的切线方向, 故

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \quad \text{with} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

故 $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v\vec{e}_t\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$d\vec{e}_t = \vec{e}_t(t+dt) - \vec{e}_t(t)$$

$d\theta$ 很小 $\begin{cases} |d\vec{e}_t| = d\theta \\ d\vec{e}_t \text{的方向为 } \vec{e}_n \end{cases}$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n$$

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

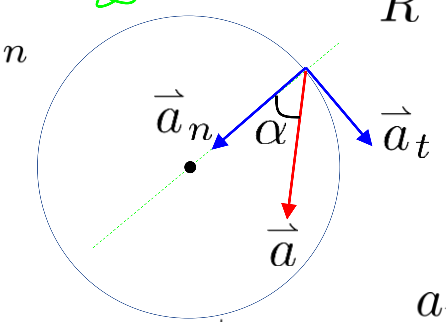
$$= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$$= \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

切向加速度

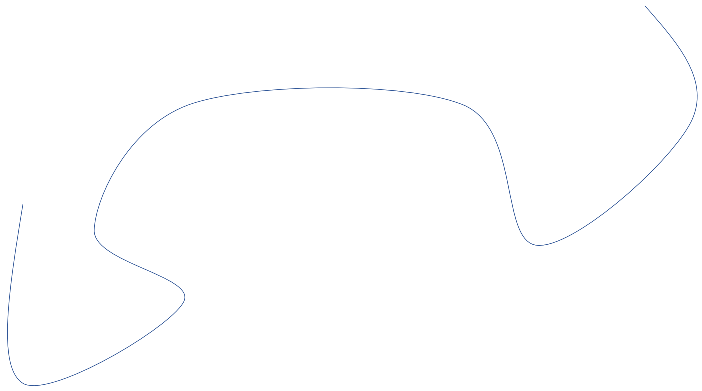
法向加速度

又叫向心加速度, 总是指向圆心

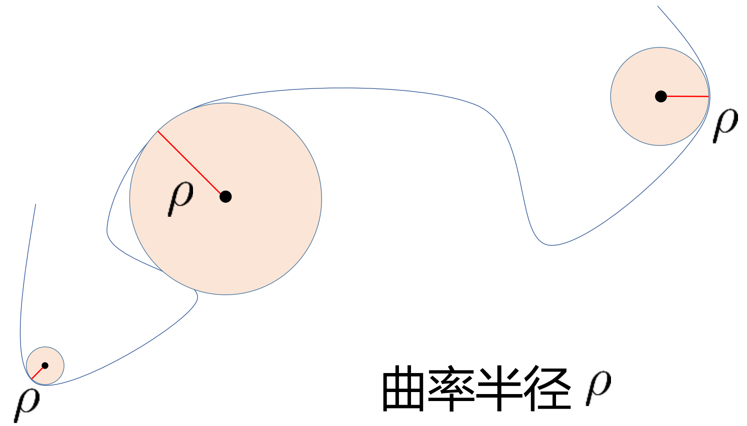


$$\tan\alpha = \frac{a_t}{a_n}$$

一般曲线运动



一般曲线运动



曲率半径 ρ

ρ 无穷大时, 对应直线运动, 即没有法向加速度 $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}$

一定意义上说, 直线式曲线的特殊情况

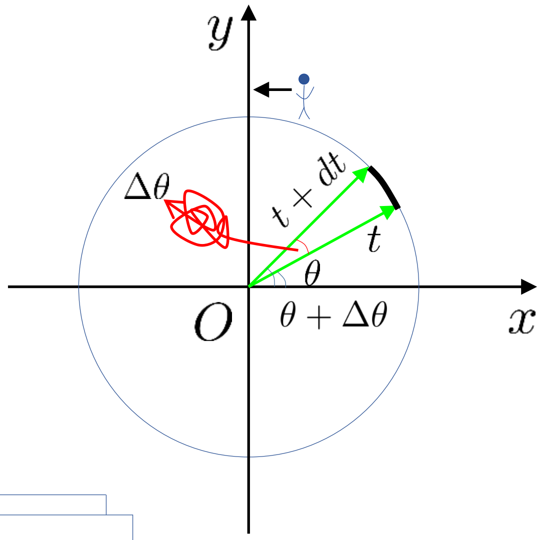
匀速圆周运动: 速率大小不变的圆周运动. 此时, 只有向心加速度, 恒指向圆心

角量:角速度

前面涉及到的速度, 加速度等都是线量.

角量 { 角位置 θ 单位: rad

角位移 $\theta+\Delta\theta$ 右手螺旋 }



类似于速度和加速度的定义, 可以定义

平均角速度	(瞬时)角速度
$\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{d\theta}{dt}$
平均角加速度	(瞬时)角加速度
$\bar{\alpha}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{d\omega}{dt}$

实际上, 有限大小的角位移并不是矢量, 只有无穷小的角位移才是矢量

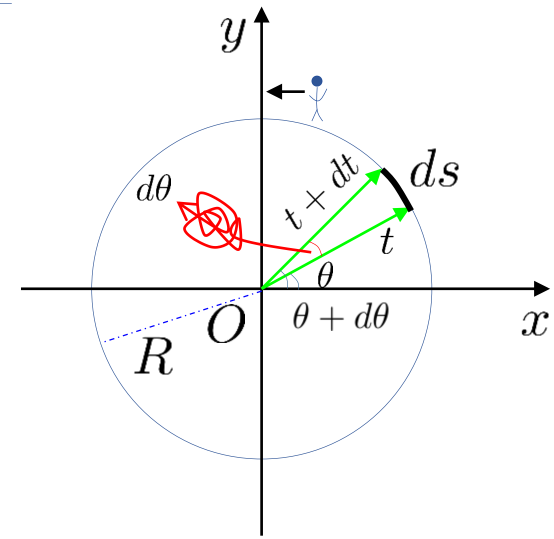
角量与线量之间的关系

圆周运动的速度 $\vec{v} = v\vec{e}_t \quad \text{with} \quad v = \dfrac{ds}{dt}$

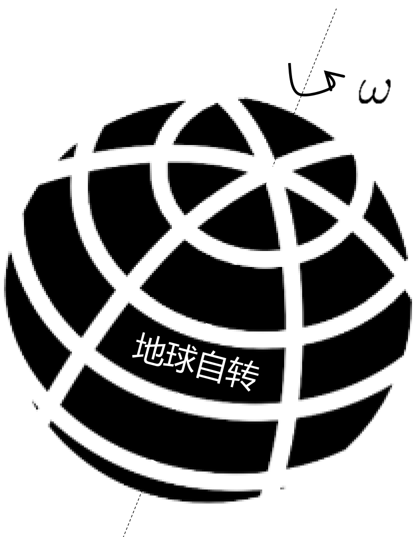
圆周运动的角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

圆周运动的加速度 $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}_t + \dfrac{v^2}{R}\vec{e}_n$

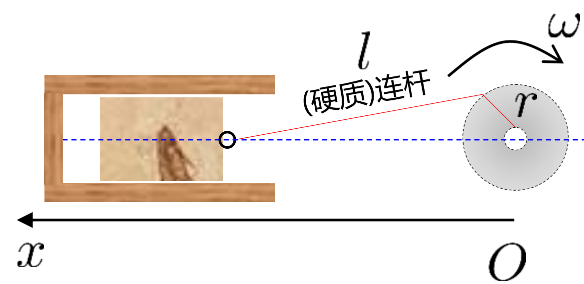
圆周运动的角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$



$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{Rd\theta}{dt} = R\omega$	$v = R\omega$
$a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(R\omega)}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha$	$a_t = R\alpha$
$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R = \dfrac{vR\omega}{R} = v\omega$	$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega$




飞轮半径为R



地球半径 $R\approx 6400$ km, 试求自转角速度, 赤道附近的线速度和向心加速度

ω

v

a_n

参看教材P23-27例题

边缘某一点经过的路程与时间的关系

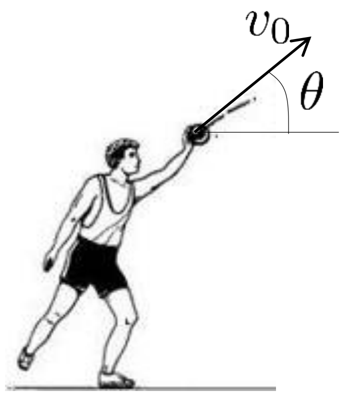
$$s = v_0 t - \frac{bt^2}{2}$$

求该点的加速度, 且何时切线加速度等于法向加速度.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

设$t=0$时, 曲柄与 x 轴夹角为0, 求活塞的运动学方程.

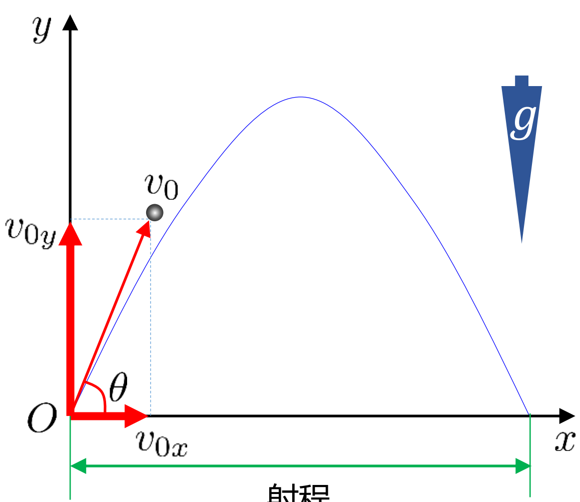
$$x = ?$$



抛体运动

对物体以一定的初速度向空中抛出，仅在重力作用下物体所做的运动叫做抛体运动, 是一种平面曲线运动. 细分为:

1. 斜抛运动　　$\theta \neq 0$
2. 平抛运动　　$\theta = 0$



轨道方程 $y = 0$

$\vec{v}$	$v_{0x} = v_0 \cos\theta$ $v_{0y} = v_0 \sin\theta$	
$\vec{a}$	$a_x = 0$ $a_y = -g$	$\vec{a} = 0\,\vec{i} - g\,\vec{j}$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ a_y = d\dfrac{v_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

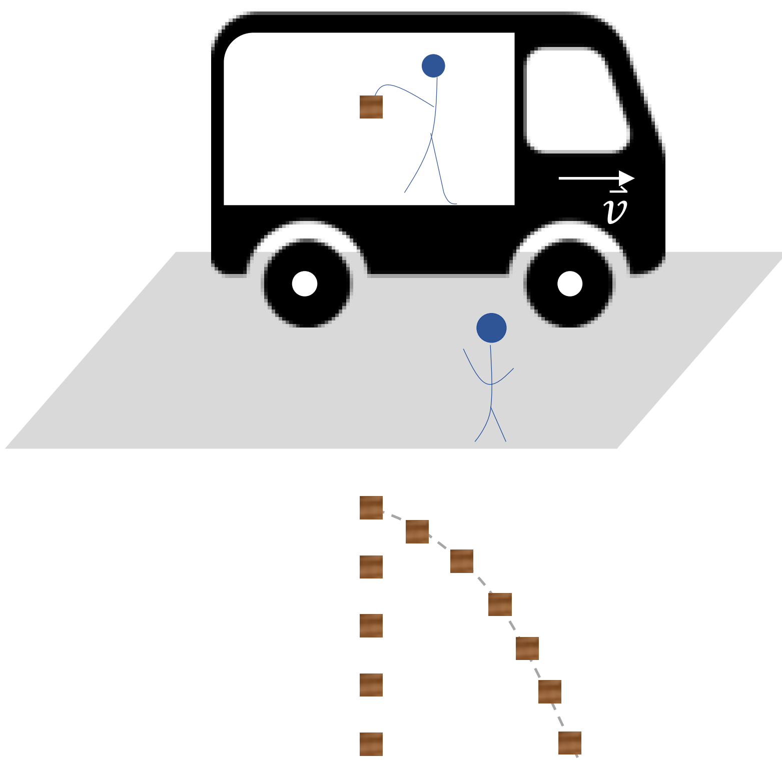
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta}x^2 + \tan\theta x$$

消去t得到轨道方程，为抛物线

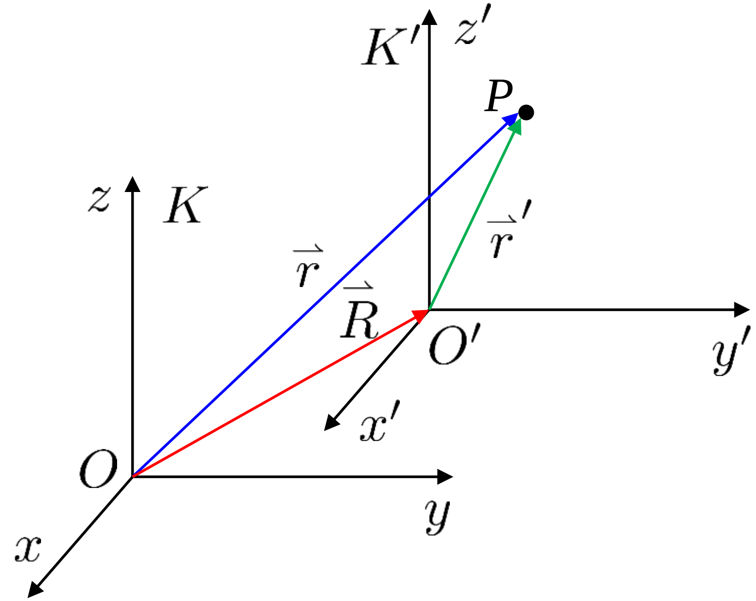
伽利略变换

运动的描述具有相对性, 即不同的参考系, 运动是不一样的.



等等

伽利略变换



K' 相对于 K 的速度为 $\vec{V}$

$$\vec{R}=\vec{V}t$$

经典力学的绝对时空观: 时间绝对性, 空间绝对性, 即二者互不相关

伽利略坐标变换 $\begin{cases}\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{R}\\ t=t'\end{cases}$

伽利略速度变换 $\underset{\text{绝对速度}}{\vec{v}}=\underset{\text{相对速度}}{\vec{v}\,'}+\underset{\text{牵连速度}}{\vec{V}}$

伽利略加速度变换 $\vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{A}$

K'做匀速直线运动时 $\vec{a}=\vec{a}\,'$