

## 基本概念

1. 余子式  $M_{ij}$  和代数余子式  $A_{ij}$ ,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ,  $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ 。
2. 对称矩阵:  $A^T = A$ 。
3. 伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ , 组成元素  $A_{ij}$ , 书写格式: 行元素的代数余子式写在列。
4. 逆矩阵  $AB = BA = E$ , 称  $A$  可逆。若  $A$  可逆, 则  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ 。
5. 分块对角阵  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ ,  $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$ ,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$ 。
6. 初等行(列)变换: ① 对换两行或两列; ② 某行或某列乘以非零常数  $k$ ; ③ 某行(列)的  $k$  倍加到另一行(列)。
7. 等价矩阵: ① 初等变换得来的矩阵; ② 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$ 。
8. 初等矩阵: 初等变换经过一次初等变换得来的矩阵, ①  $E(i, j)$ ; ②  $E(i(k))$ ; ③  $E(j, i(k))$ 。
9. 矩阵的秩: 最高阶非零子式的阶数。  $r(A) = k \Leftrightarrow \exists D_k \neq 0, \forall D_{k+1} = 0$ 。
10. 线性表示: 存在  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使得  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$ , 等价于非齐次方程组  $Ax = \beta$  有解  $k_1, k_2, \dots, k_n$ 。
11. 线性相关: 存在不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \bar{0}$ , 等价于齐次方程组  $Ax = \bar{0}$  有非零解。
12. 线性无关:  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \bar{0}$  成立  $\Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , 等价于齐次方程组  $Ax = \bar{0}$  仅有零解。
13. 极大无关组:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中  $r$  个向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  满足: ① 线性无关; ②  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任意向量可由其表示或  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任意  $r+1$  个向量线性无关, 则称  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的极大无关组。
14. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  表示:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任意一个向量可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  表示, 等价于  $BX = A$  有解,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ ,  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 。
15. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  等价: 两个向量组能相互线性表示。

16.

17. 齐次方程组  $Ax = \bar{0}$  基础解系：第一种描述：设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是方程组的解，且满足① 线性无关；② 任意一个解可由其表示。第二种描述： $n-r(A)$  个线性无关的解。【其中 1 个线性无关的解  $\Leftrightarrow$  1 个非零解；2 个线性无关的解  $\Leftrightarrow$  2 个不成比例的解。】

18. 特征值和特征向量： $Ax = \lambda x, x \neq \bar{0}$ 。

19. 相似矩阵：存在可逆矩阵  $P$ ，使得  $P^{-1}AP = B$ ，则称  $A, B$  相似。

20. 相似对角化：根据方阵  $A$ ，找到可逆矩阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$ ，使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

21. 内积： $[\alpha, \beta] = \alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ 。

22. 正交： $[\alpha, \beta] = 0$ 。

23. 正交矩阵： $AA^T = E$  或者  $A^T = A^{-1}$ 。特点： $A$  的列（行）为两两正交的单位向量。

24. 二次型： $f = x^T Ax$ ，其中  $A$  为对称阵。

25. 合同矩阵：存在可逆矩阵  $C$ ，使得  $C^T AC = B$ ，则称  $A, B$  合同。

26. 标准型： $f = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。

27. 正负惯性指数：标准型中正负系数的个数。

28. 正定二次型： $\forall x \neq \bar{0}, f = x^T Ax > 0$ 。

29. 正定矩阵  $A$ ：对称阵  $A$  使得  $f = x^T Ax$  为正定二次型。

## 基本定理

1. 行列式按行按列展开定理： $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ 。

逆过程应用：已知  $D = \begin{vmatrix} a_{ij} \end{vmatrix}_{n \times n}$ ，求  $b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots + b_n A_{in}$ 。将  $D$  中第  $i$  行元素换成对

应的  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，得到  $D_1$ ，则： $b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots + b_n A_{in} = D_1$ 。

2.  $A_n$  为可逆矩阵  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ； $A_n$  为可逆矩阵  $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \Leftrightarrow A^* = |A| A^{-1}$ 。

推论：方阵  $A, B$  满足  $AB = E$ ，则：①  $BA = E$ ；②  $A$  可逆，且  $\Rightarrow A^{-1} = B$ 。

3. 对矩阵  $A$  进行一次初等行（列）变换，等价于在矩阵  $A$  的左（右）边乘以一个与之对应的初等矩阵。

4. 初等变换不改变矩阵的秩。
5. 非齐次方程组  $A_{m \times n}x = b$  有解  $\Leftrightarrow b$  可由  $A$  的列线性表示  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$ ；唯一解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n$ ；无穷多解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n$ ；  
非齐次方程组  $A_{m \times n}x = b$  无解  $\Leftrightarrow b$  不能由  $A$  的列线性表示  $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A, b)$   
特别地：当方程组的系数矩阵  $A$  为方阵时：唯一解  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 。
6. 齐次方程组  $A_{m \times n}x = 0$  仅有零解  $\Leftrightarrow A$  的列向量组线性无关  $\Leftrightarrow r(A) = n$ ；齐次方程组  $A_{m \times n}x = 0$  有非零解  $\Leftrightarrow A$  的列向量组线性相关  $\Leftrightarrow r(A) < n$ 。
7. 矩阵方程  $AX = B$  有解  $\Leftrightarrow B$  的列可由  $A$  的列线性表示  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$ ； $B$  的列与  $A$  的列等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$ 。
8. 矩阵  $A$  通过初等行变换变成矩阵  $B$ ，则  $A, B$  行向量组等价，列向量组有相同的相关性。
9. 齐次线性方程组  $A_{m \times n}x = 0$  系数矩阵的秩  $r(A) = r < n$ ，则存在基础解系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ ，  
并且  $Ax = 0$  的通解为  $\tilde{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ ，其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数。
10. 不同特征值对应的特征向量线性无关；实对称阵不同特征值对应的特征向量正交。
11. 相似矩阵有相同的秩和相同的特征值。
12. 方阵可对角化  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $\Leftrightarrow k$  重特征值  $\lambda_i$ ， $r(A - \lambda_i E) = n - k$ ；  
实对称阵一定可以对角化； $A$  有  $n$  个不同的特征值则  $A$  一定可以对角化。
13. 实对称阵一定可以对角化，并且一定存在正交阵  $Q$ ，使得  $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ 。
14. 任意二次型  $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ )，总有正交变换  $x = Qy$ ，化  $f$  为标准形  
 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ ，其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $f$  的矩阵  $A = (a_{ij})$  的特征值。
15. 设二次型  $f = x^T A x$  的秩为  $r$ ，且二次型的标准型分别为  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$  和  
 $f = k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2 + \dots + k_r z_r^2$ ，则系数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  和  $k_1, k_2, \dots, k_r$  中正负个数相等。
16. 对称阵  $A$  正定  $\Leftrightarrow$  二次型  $f = x^T A x$  为正定二次型  $\Leftrightarrow$  二次型  $f = x^T A x$  的规范型为  
 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \Leftrightarrow A$  的特征值全为正  $\Leftrightarrow A$  的各顺序阶主子式全大于 0。

## 基本性质

- 行列式运算性质：转置不变；对换取反；数乘可提；行列拆分；叠加不变。
- 矩阵乘法：①  $AB=O \not\Rightarrow A=O$  或  $B=O$ ；②  $AB \neq BA$ ；③  $AB=AC \not\Rightarrow B=C$ 。
- 矩阵转置：①  $(A^T)^T = A$                       ②  $(A+B)^T = A^T + B^T$   
                     ③  $(kA)^T = kA^T$                       ④  $(AB)^T = B^T A^T$
- 方阵的行列式：① 方阵  $A, B$ ， $|AB| = |A| \cdot |B|$     ②  $|kA| = k^n |A|$ ， $A$  为  $n$  阶方阵。
- 伴随矩阵：①  $AA^* = A^*A = |A|E$ ；              ②  $|A^*| = |A|^{n-1}$ ；              ③  $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
- 逆矩阵：①  $(A^{-1})^{-1} = A$ ；                      ②  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ；  
                     ③  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ；              ④  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ，              ⑤  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 。
- 初等矩阵： $E^{-1}(i, j) = E(i, j)$ ， $E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k}))$ ， $E^{-1}(i, j(k)) = E(i, j(-k))$ 。
- 初等变换与初等矩阵： $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  等于有限个初等矩阵的乘积。
- 矩阵  $A$  左（右）边乘可逆矩阵  $P$  相当于对  $A$  进行初等行（列）变换。
- 行阶梯矩阵的秩等于其非零行的行数。
- 秩：①  $r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ ；                      ②  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ；  
                     ③  $r(A) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ；              ④  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$ ；  
                     ⑤  $A_{m \times n} B_{n \times k} = O$ ，则  $r(A) + r(B) \leq n$ ；              ⑥  $r(A) = r(A^T)$ ；  
                     ⑦  $r(A^*) = \begin{cases} n \Leftrightarrow r(A) = n \\ 1 \Leftrightarrow r(A) = n-1 \\ 0 \Leftrightarrow r(A) < n-2 \end{cases}$
- $A = \alpha\beta^T$ ， $\alpha, \beta$  为  $n$  维非零列向量，则  $r(A) = 1$ 。
- 向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关  $\Leftrightarrow$  向量组  $A$  中至少有一个向量能由其余  $m-1$  个向量线性表示。
- 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关，向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示，  
     即  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ ，则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  无关  $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 。
- 相关组添加向量仍相关，无关组减少向量仍无关；无关组添加分量仍无关，相关组减少分量仍相关。

16. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关，而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$  线性相关，则向量  $\beta$  必能由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示，且表示式是惟一的。
17. 向量组与它的极大无关组等价；
18. 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。
19. 矩阵等价  $\nleftrightarrow$  矩阵行（列）向量组等价。向量组等价  $\nleftrightarrow$  对应矩阵等价，除非两个向量组中向量个数相等。
20. 矩阵  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$  且同型；列向量组  $A, B$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$ 。
21. 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系， $\eta^*$  是非齐次方程组  $Ax = b$  的一个特解，则  $Ax = b$  的通解  $x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*$ ，其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数。
22. 两个方程组  $Ax = 0, Bx = 0$  同解  $\Leftrightarrow A, B$  行向量组等价。
23. 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则：①  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ ；②  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|$ 。
24.  $A, B$  同型且秩相等  $\Rightarrow A, B$  等价；方阵  $A, B$  可对角化，且有相同特征值  $\Rightarrow A, B$  相似；对称阵  $A, B$  的特征值正负个数对应相等  $\Rightarrow A, B$  合同。
25. 设  $Ax = \lambda x$ ，则有以下表：

矩阵	$A$	$A^2$	$f(A)$	$A^{-1}$	$A^*$	$A^T$	$P^{-1}AP$
特征值	$\lambda$	$\lambda^2$	$f(\lambda)$	$\lambda^{-1}$	$ A /\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
特征向量	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	/	$P^{-1}x$

## 基本方法

- 求行列式：方法一、利用行列式的性质化三角行列式；方法二、利用性质尽可能多的化行列式的某行（列）元素为零，然后依此行（列）用 Laplace 展开。
- 求解矩阵方程：方法：通过矩阵运算将方程化为  $AX = B, XA = B, AXB = C$  三种方式，具体运算放最后一步，注意左，右乘。
- 求矩阵的秩： $A$  具体时，将  $A \xrightarrow{r} B$ （行阶梯矩阵）， $r(A) = r(B) = B$  中非零行的行数； $A$  为抽象矩阵时，利用秩的不等式证明  $r \leq r(A) \leq r$ 。

4. 讨论向量组的相关性：①  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  具体时，构造矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，比较秩与个数的关系；②.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  抽象时，先设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ ，通过恒等变形或乘法，或重组，得到  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ ，或者用秩的理论判断， $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ 。
5. 求极大无关组：将向量组的各向量做为矩阵的列， $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \xrightarrow{r} B$  行阶梯矩阵，向量组的秩等于矩阵  $B$  的秩，每个阶梯上取一列（一般取阶梯竖线右边的第一列），构成极大无关组。
6. 求基础解系和通解：先求  $r(A)$ ，得  $n - r(A)$ ，通过矩阵的运算，求出  $Ax = 0$  的  $n - r(A)$  各线性无关的解及  $Ax = b$  的一个特解，再利用解的结构得到通解。
7. 含参数方程组  $Ax = b$  求解：①.  $(A|b) \xrightarrow{r}$  行阶梯型，讨论  $r(A) = r(A|b)? \Leftrightarrow b$  可否由  $A$  的列线性表示；②. 特别，当  $A$  为方阵时，求出  $|A| \neq 0$  的条件，即唯一解的条件，再把  $|A| = 0$  中的参数代入原方程组，继续由  $r(A) = r(A|b)?$ ，判断是表达式不唯一，还是不能由其表示。
8. 方阵特征值，特征向量求法：① 解  $|A - \lambda E| = 0$ ，得根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，② 解方程组  $(A - \lambda_i E)x = 0$ ，得基础解系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ ，从而得到对应  $\lambda_i$  的特征向量为  $k_1\xi_1 + \dots + k_s\xi_s$ ，其中  $k_1, k_2, \dots, k_s$  不全为 0。
9. 方阵对角化：①  $|A - \lambda E| = 0$  求特征值；②  $(A - \lambda_i E)x = 0$  得所有特征值的特征向量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ；③ 令  $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ， $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，则  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。
10. 二次型正交变换下化标准形：① 写出对称阵  $A$ ，② 求  $|A - \lambda E| = 0$ ，得特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，③ 将每一个特征值代入  $(A - \lambda_i E)x = 0$ ，得基础解系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ ，正交单位化（一个向量时，只要单位化），最终得到所有特征值对应的（特征）向量  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ，④  $Q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ，令  $x = Qy$ ，得二次型的标准形  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。【其中②，③，④步也为对称阵通过正交矩阵  $Q$  对角化的步骤。】

