

第一章 矩阵

矩阵的概念： $A_{m \times n}$ （零矩阵、负矩阵、行矩阵、列矩阵、 n 阶方阵、相等矩阵）

矩阵的运算： 加法（同型矩阵）-----交换、结合律

数乘 $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$ -----分配、结合律

$$\text{乘法} \quad A * B = (a_{ik})_{m \times l} * (b_{kj})_{l \times n} = (\sum_1^l a_{ik} b_{kj})_{m \times n}$$

（一般 $AB=BA$ ，不满足消去律；由 $AB=0$ ，不能得 $A=0$ 或 $B=0$ ）

$$\text{转置：} (A^T)^T = A \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(kA)^T = kA^T \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$\text{方幂：} A^{k_1} A^{k_2} = A^{k_1+k_2} \quad (A^{k_1})^{k_2} = A^{k_1 k_2}$$

逆矩阵： 设 A 是 N 阶方阵，若存在 N 阶矩阵 B 的 $AB=BA=I$ 则称 A 是可逆的，且 $A^{-1} = B$

矩阵的逆矩阵满足的运算律：

1、可逆矩阵 A 的逆矩阵也是可逆的，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

2、可逆矩阵 A 的数乘矩阵 kA 也是可逆的，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

3、可逆矩阵 A 的转置 A^T 也是可逆的，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4、两个可逆矩阵 A 与 B 的乘积 AB 也是可逆的，且 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ，但是两个可逆矩

阵 A 与 B 的和 $A+B$ 不一定可逆，即使可逆，但 $(A+B) \neq A^{-1} + B^{-1}$ 。 A 为 N 阶方阵，若 $|A|=0$ ，则称 A 为**奇异矩阵**，否则为**非奇异矩阵**。

5、若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

逆矩阵注： ① $AB=BA=I$ 则 A 与 B 一定是方阵 ② $BA=AB=I$ 则 A 与 B 一定互逆；

③不是所有的方阵都存在逆矩阵；④若 A 可逆，则其逆矩阵是唯一的。

分块矩阵： 加法，数乘，乘法都类似普通矩阵

转置：每块转置并且每个子块也要转置

注：把分出来的小块矩阵看成是元素

初等变换：

1、交换两行（列）

2、非零 k 乘某一行（列）

3、将某行（列）的 K 倍加到另一行（列）

初等变换不改变矩阵的可逆性，初等矩阵都可逆

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵

$$\text{等价标准形矩阵 } D_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

第二章 行列式

N 阶行列式的值：行列式中所有不同行、不同列的 n 个元素的乘积的和

$$|a_{ij}|_n = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

行列式的性质：①行列式行列互换，其值不变。（转置行列式 $D = D^T$ ）

②行列式中某两行（列）互换，行列式变号。

推论：若行列式中某两行（列）对应元素相等，则行列式等于零。

③常数 k 乘以行列式的某一行（列），等于 k 乘以此行列式。

推论：若行列式中两行（列）成比例，则行列式值为零；

推论：行列式中某一行（列）元素全为零，行列式为零。

④行列式具有分行（列）可加性

⑤将行列式某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，值不变

行列式依行（列）展开：余子式 M_{ij} 、代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

定理：行列式中某一行的元素与另一行元素对应余子式乘积之和为零。

克莱姆法则：

非齐次线性方程组：当系数行列式 $D \neq 0$ 时，有唯一解： $x_j = \frac{D_j}{D} (j=1, 2, \dots, n)$

齐次线性方程组：当系数行列式 $D = 1 \neq 0$ 时，则只有零解

（逆否命题：若方程组存在非零解，则 D 等于零）

特殊行列式：

$$\text{①转置行列式: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

②对称行列式: $a_{ij} = a_{ji}$

③反对称行列式: $a_{ij} = -a_{ji}$ 奇数阶的反对称行列式值为零

④三阶线性行列式:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解法：用 $k_1 a_{22}$ 把 a_{21} 化为零，。。化为三角形行列式

⑤上（下）三角形行列式

第三章 矩阵的秩与线性方程组

矩阵的秩 $r(A)$:

若 A 可逆，则满秩

若 A 是非奇异矩阵，则 $r(AB) = r(B)$

初等变换不改变矩阵的秩

求法：1.定义；2.转化为标准式或阶梯形

伴随矩阵： A 为 N 阶方阵，伴随矩阵： $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

特殊矩阵的逆矩阵：

1、分块矩阵 $D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 则 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$

2、准对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$ ， 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & A_3^{-1} & \\ & & & A_4^{-1} \end{pmatrix}$

3、 $AA^* = A^*A = |A|I$

4、 $A^* = |A|A^{-1}$ (A 可逆)

5、 $|A^*| = |A|^{n-1}$

6、 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$ (A 可逆)

7、 $(A^*)^T = (A^T)^*$

8、 $(AB)^* = B^*A^*$

判断矩阵是否可逆：充要条件是 $|A| \neq 0$ ，此时 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

求逆矩阵的方法：

定义法 $AA^{-1} = I$

伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

初等变换法 $(A | I_n) = (I_n | A^{-1})$,只能是行变换。

初等矩阵与矩阵乘法的关系：

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，则对 A 的行实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同等的 m 阶初等矩阵左乘以 A；对 A 的列实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同种 n 阶初等矩阵右乘以 A （行变左乘，列变右乘）

线性方程组解的判定：

非齐次线性方程组：

增广矩阵 \rightarrow 简化阶梯型矩阵

$r(AB) = r(B) = r$ 当 $r = n$ 时，有唯一解；当 $r \neq n$ 时，有无穷多解

$r(AB) \neq r(B)$ ，无解

齐次线性方程组：

仅有零解充要 $r(A) = n$ 有非零解充要 $r(A) < n$

当齐次线性方程组方程个数 $<$ 未知量个数，一定有非零解

当齐次线性方程组方程个数 $=$ 未知量个数，有非零解充要 $|A| = 0$

齐次线性方程组若有零解，一定是无穷多个

N 维向量：由 n 个实数组成的 n 元有序数组。希腊字母表示（加法数乘）

特殊的向量：行（列）向量，零向量 θ ，负向量，相等向量，转置向量

向量间的线性关系：线性组合或线性表示

向量组的秩：

定理：如果 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性无关的部分组，则它是

极大无关组的充要条件是： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可由 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出。

秩：极大无关组中所含的向量个数。

定理：设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A) = r$ 的充要条件是：A 的列（行）秩为 r 。

线性组合或线性表示注：两个向量 α, β ，若 $\alpha = k\beta$ 则 α 是 β 的线性组合

任意向量都是单位向量组的线性组合

零向量是任意向量组的线性组合

任意向量组中的一个都是他本身的线性组合

向量组间的线性相关注：

1. n 个 n 维单位向量组一定是线性无关
2. 一个非零向量是线性无关，零向量是线性相关
3. 含有零向量的向量组一定是线性相关
4. 若两个向量成比例，则他们一定线性相关

向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示的充要条件是 $r(\alpha_1^T \alpha_2^T \dots \alpha_n^T) = r(\alpha_1^T \alpha_2^T \dots \alpha_n^T \beta^T)$

判断向量组是否线性相关的方法：

- 1、定义法：设 $k_1 k_2 \dots k_n$ ，求 $k_1 k_2 \dots k_n$
- 2、向量间关系法：部分相关则整体相关，整体无关则部分无关
- 3、分量法（n 个 m 维向量组）：

$$4、\text{线性相关（充要）} \Rightarrow r(\alpha_1^T \alpha_2^T \dots \alpha_n^T) < n$$

$$\text{线性无关（充要）} \Rightarrow r(\alpha_1^T \alpha_2^T \dots \alpha_n^T) = n$$

推论①当 $m=n$ 时，相关，则 $|\alpha_1^T \alpha_2^T \alpha_3^T| = 0$ ；无关，则 $|\alpha_1^T \alpha_2^T \alpha_3^T| \neq 0$

②当 $m < n$ 时，线性相关

推广：若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 组线性无关，则当 s 为奇数时，向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_s + \alpha_1$ 也线性无关；当 s 为偶数时，向量组也线性相关。

定理：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关。

极大无关组注： 向量组的极大无关组不是唯一的，但他们所含向量的个数是确定的；
不全为零的向量组的极大无关组一定存在；
无关的向量组的极大无关组是其本身；
向量组与其极大无关组是等价的。

第四章 向量空间

向量的内积

定义： $(\alpha, \beta) = \alpha \beta^T = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

性质：非负性、对称性、线性性

$$(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta);$$

$$(k\alpha, k\beta) = k^2 (\alpha, \beta);$$

$$(\alpha + \beta, \gamma + \delta) = (\alpha, \gamma) + (\alpha, \delta) + (\beta, \gamma) + (\beta, \delta);$$

$$\left(\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i, \sum_{j=1}^s l_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^r k_i \sum_{j=1}^s l_j (\alpha_i, \beta_j) \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R^n,$$

向量的长度： $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

$|\alpha| = 0$ 的充要条件是 $\alpha = 0$ ； α 是单位向量的充要条件是 $(\alpha, \alpha) = 1$

正交向量： α, β 是正交向量的充要条件是 $(\alpha, \beta) = 0$

正交的向量组必定线性无关

正交矩阵：n 阶矩阵 A $AA^T = A^T A = I$

性质：1、若 A 为正交矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1} = A^T$ ，且 A^{-1} 也是正交矩阵；

2、若 A 为正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$ ；

3、若 A、B 为同阶正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵；

4、n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是 A 的列（行）向量组是标准正交向量；

线性方程组解的结构：齐次非齐次、基础解系

齐次线性方程组（I）解的结构：解为 $\alpha_1, \alpha_2 \dots$

（I）的两个解的和 $\alpha_1 + \alpha_2$ 仍是它的解；

（I）解的任意倍数 $k\alpha$ 还是它的解；

（I）解的线性组合 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s$ 也是它的解， c_1, c_2, \dots, c_s 是任意常数。

非齐次线性方程组（II）解的结构：解为 $\mu_1, \mu_2 \dots$

（II）的两个解的差 $\mu_1 - \mu_2$ 仍是它的解；

若 μ 是非齐次线性方程组 $AX=B$ 的一个解， v 是其导出组 $AX=O$ 的一个解，则 $u+v$ 是（II）的一个解。

定理：

如果齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = r < n$ ，则该方程组的基础解系存在，且在每个基础解系中，恰含有 $n-r$ 个解。

若 μ 是非齐次线性方程组 $AX=B$ 的一个解， v 是其导出组 $AX=O$ 的全部解，则 $u+v$ 是（II）的全部解。