

二轴云台末端指向控制

liuskywalkerjskd

2025 年 12 月 27 日

目录

1	经典二轴云台控制方法的局限性	3
1.1	坐标系定义	3
1.2	指向向量的变换推导	3
1.2.1	基座旋转矩阵	3
1.2.2	关节空间内的指向向量	4
1.2.3	世界系下的指向向量	4
1.3	耦合效应证明	4
1.3.1	证明一: Yaw 电机运动干扰世界 Pitch	4
1.3.2	证明二: Pitch 电机运动干扰世界 Yaw	4
2	数学建模与符号定义	5
2.1	符号约定	5
2.2	核心坐标系	5
3	控制算法推导	6
3.1	第一步: 坐标系转换	6
3.2	第二步: 向量对齐与解耦 (Vector Extraction)	6
3.3	第三步: 球面逆运动学 (Spherical IK)	7
3.3.1	求解 Pitch (θ)	8
3.3.2	求解 Yaw (ψ)	8
3.4	完整解算梳理	8
3.4.1	输入量定义	9
3.4.2	第一步: 构建目标指向向量 (世界系)	9
3.4.3	第二步: 构建基座旋转矩阵	9
3.4.4	第三步: 投影至基座系	9
3.4.5	第四步: 解算关节角	9
4	最优化与限位约束处理	10
4.1	几何解法	10
5	控制器设计与实现	11
5.1	控制系统架构	11
5.2	基座姿态反解	12
5.2.1	计算相对旋转矩阵	12
5.2.2	反解基座姿态	12
5.3	偏航轴的最短路径逻辑 (Angle Wrapping)	13

本文所有旋转矩阵均采用右手坐标系下的内旋 (Body-fixed) 欧拉角表示, 旋转顺序为 Z (Yaw) $\rightarrow Y$ (Pitch) $\rightarrow X$ (Roll)。向量均表示为列向量, 旋转矩阵左乘向量表示坐标变换。

1 经典二轴云台控制方法的局限性

在做二轴云台位置控制的时候, 最常见的一种控制方式是: 将 Yaw 和 Pitch 的控制完全解耦, 即使用 IMU 反馈的 Yaw 和 Pitch 角度分别作为 Yaw 和 Pitch 的角度反馈, 两个独立的串级 PID 控制器输出结果分别用于 Yaw 和 Pitch 两个电机, 这种控制方法在云台基座水平时候是完全正确的, 而在实际工况中如果云台基座不水平, 将会遇到一些问题, 例如云台基座存在一个 Roll 角的时候, 此时分别转动 Yaw 或 Pitch 电机都会同时影响到两个角度, 虽然在闭环系统的控制下依然可能能够控制云台指向目标方向, 但是从控制路径上来看, 可能并不是最优的。

为了证明“当基座存在 Roll 角时, 单独转动 Yaw 或 Pitch 电机都会同时影响两个维度的世界姿态”, 我们建立如下刚体运动学模型。

1.1 坐标系定义

- **世界系 (W):** 绝对静止。
- **基座系 (B):** 相对于 W 系仅存在横滚角 ϕ (Roll)。
- **关节输入:** 云台相对于基座依次进行偏航 ψ_j (Yaw 电机) 和俯仰 θ_j (Pitch 电机) 的旋转。

1.2 指向向量的变换推导

1.2.1 基座旋转矩阵

基座相对于世界的旋转矩阵 ${}^W_B \mathbf{R}$ (仅包含 Roll) 为:

$${}^W_B \mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2.2 关节空间内的指向向量

在云台基座系下，视轴向量 \mathbf{v}_B 由关节角度 (ψ_j, θ_j) 决定。假设云台初始指向为 $[1, 0, 0]^T$ ，经过 Z-Y 旋转后：

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{R}_z(\psi_j) \mathbf{R}_y(\theta_j) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_j \cos \theta_j \\ \sin \psi_j \cos \theta_j \\ -\sin \theta_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.2.3 世界系下的指向向量

将 \mathbf{v}_B 变换到世界系得到 $\mathbf{v}_W = [x_w, y_w, z_w]^T$ ：

$$\mathbf{v}_W = {}^W_B \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi_j c\theta_j \\ s\psi_j c\theta_j \\ -s\theta_j \end{bmatrix} \quad (3)$$

(注：简写 $c = \cos, s = \sin$)

展开计算得到三个分量：

$$\begin{cases} x_w = \cos \psi_j \cos \theta_j \\ y_w = \cos \phi \sin \psi_j \cos \theta_j + \sin \phi \sin \theta_j \\ z_w = \sin \phi \sin \psi_j \cos \theta_j - \cos \phi \sin \theta_j \end{cases} \quad (4)$$

1.3 耦合效应证明

1.3.1 证明一：Yaw 电机运动干扰世界 Pitch

世界系下的俯仰角 θ_{world} 主要由高度分量 z_w 决定 ($\sin \theta_{world} = -z_w$)。观察式 (4) 中的 z_w ：

$$z_w = \underbrace{\sin \phi}_{\neq 0} \cdot \sin(\psi_j) \cdot \cos \theta_j - \cos \phi \sin \theta_j \quad (5)$$

当基座存在横滚 ($\phi \neq 0$) 时， $\sin \phi \neq 0$ 。此时 z_w 显式依赖于 Yaw 关节角 ψ_j 。**结论：**即使保持 Pitch 电机 θ_j 不动，仅转动 Yaw 电机 ψ_j ，视轴的高度 z_w 也会发生改变（即产生“点头”现象）。

1.3.2 证明二：Pitch 电机运动干扰世界 Yaw

世界系下的偏航角 ψ_{world} 由水平分量比值决定：

$$\tan(\psi_{world}) = \frac{y_w}{x_w} = \frac{\cos \phi \sin \psi_j \cos \theta_j + \sin \phi \sin \theta_j}{\cos \psi_j \cos \theta_j} \quad (6)$$

分子分母同除以 $\cos \theta_j$:

$$\tan(\psi_{world}) = \frac{\cos \phi \sin \psi_j + \sin \phi \cdot \tan(\theta_j)}{\cos \psi_j} \quad (7)$$

当 $\phi \neq 0$ 时, 公式中出现 $\tan \theta_j$ 项。**结论**: 即使保持 Yaw 电机 ψ_j 不动, 仅转动 Pitch 电机 θ_j , 视轴的世界偏航角 ψ_{world} 也会发生漂移。

综上所述: 在基座不水平的非结构化环境下, 关节空间与笛卡尔空间存在复杂的非线性耦合, 简单的单轴独立闭环控制无法实现理想的轨迹跟踪。因此, 我们需要一套数学方法, 借助姿态解算解决这个问题。

2 数学建模与符号定义

在机器人学中旋转矩阵的上下标有多种写法, 本文中为了描述清晰, 我们采用如下的坐标系定义法。

2.1 符号约定

- ${}^A_B\mathbf{R}$: 表示坐标系 B 相对于坐标系 A 的旋转矩阵。物理意义是: 将 B 系下的向量变换到 A 系描述。
- 左上标 (Superscript): 表示**参考坐标系** (Reference Frame)。
- 左下标 (Subscript): 表示**本坐标系/动系** (Body Frame)。

2.2 核心坐标系

系统中存在以下四个核心坐标系:

1. **世界系 (W , World)**: 惯性系, 通常指大地坐标系 (我们在这里应用 NWU 坐标系, 即: 右手坐标系 X 轴指向北方, Y 轴指向西方, Z 轴指向天空), 绝对静止。
2. **基座系 (B , Base)**: 云台底座所在的坐标系。如果是车载或机载云台, 该坐标系随载体运动, 例如 RoboMaster 比赛中步兵机器人的底盘。
3. **目标系 (T , Target)**: 我们希望云台指向的目标姿态。其 X 轴定义为视轴 (指向方向)。
4. **云台末端系 (G , Gimbal)**: 云台实际受控后的末端坐标系。

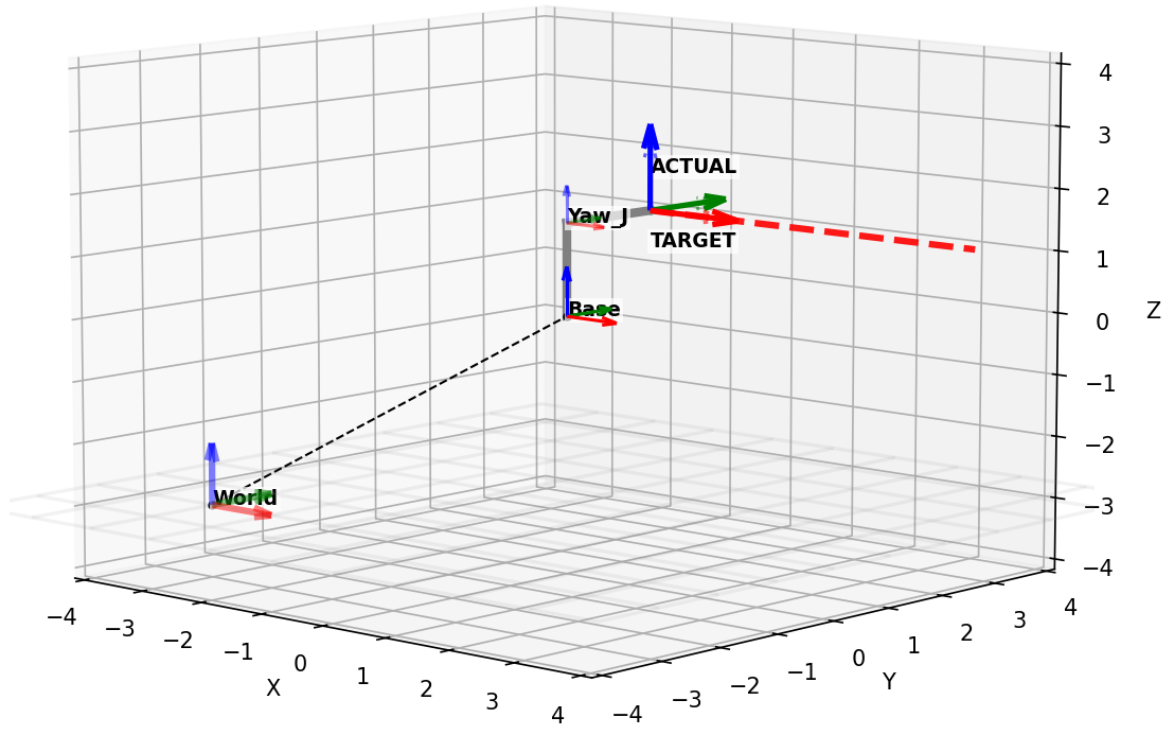


图 1: 坐标系可视化, 红色为 X 轴, 绿色为 Y 轴, 蓝色为 Z 轴

3 控制算法推导

我们的核心任务是: 已知基座姿态 ${}^W_B \mathbf{R}$ 和目标姿态 ${}^W_T \mathbf{R}$, 求解云台的关节角度 ψ (Yaw) 和 θ (Pitch)。

3.1 第一步: 坐标系转换

IMU 传感器给出的是相对于 W 系的绝对姿态。但云台是装在底座上的, 电机也是相对于底座转动的。因此, 第一步必须计算目标相对于基座的姿态 ${}^B_T \mathbf{R}$ 。

根据旋转矩阵的链式法则:

$${}^W_T \mathbf{R} = {}^W_B \mathbf{R} \cdot {}^B_T \mathbf{R} \quad (8)$$

我们需要求 ${}^B_T \mathbf{R}$, 故两边同左乘 $({}^W_B \mathbf{R})^{-1}$ 。由于旋转矩阵是正交矩阵, 其逆等于转置, 即 $({}^W_B \mathbf{R})^{-1} = ({}^W_B \mathbf{R})^T$ 。公式变为:

$${}^B_T \mathbf{R} = ({}^W_B \mathbf{R})^T \cdot {}^W_T \mathbf{R} \quad (9)$$

3.2 第二步: 向量对齐与解耦 (Vector Extraction)

因为我们使用的二轴云台只能控制两个自由度的姿态, 而空间中以欧拉角形式表示的姿态是三维的, 对于这样一个欠驱的系统, 如果直接把 ${}^B_T \mathbf{R}$ 转换成欧拉角, 目标自带

的 Roll 会“污染”Yaw 和 Pitch 的计算值。

为了解决这个问题，我们回归物理本质：**我们要的是 X 轴指向目标。我们只关心目标坐标系的 X 轴向量在基座系下的投影。**

设 ${}^B_T\mathbf{R}$ 的列向量形式为：

$${}^B_T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{target} & \mathbf{y}_{target} & \mathbf{z}_{target} \end{bmatrix} \quad (10)$$

我们提取第一列 \mathbf{x}_{target} ，这就是**目标指向向量** \mathbf{v}_{aim} ：

$$\mathbf{v}_{aim} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} \quad (11)$$

这一步直接舍弃了旋转矩阵的后两列（Y 轴和 Z 轴信息），从而在数学上彻底切断了 Target Roll 对指向计算的干扰。

3.3 第三步：球面逆运动学 (Spherical IK)

现在问题简化为：控制云台的 Yaw (ψ) 和 Pitch (θ)，使得云台末端的 X 轴向量 \mathbf{v}_{curr} 与 \mathbf{v}_{aim} 重合。

使用 RoboMaster 比赛中常见的 **Z-Y (Yaw-Pitch) 内旋**结构为例：

1. 先绕 Z 轴旋转 ψ 。
2. 再绕旋转后的 Y 轴旋转 θ 。

其正运动学公式中，末端 X 轴向量 $([1, 0, 0])$ 的变换结果为：

$$\mathbf{v}_{curr} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

令 $\mathbf{v}_{curr} = \mathbf{v}_{aim}$ ，即：

$$\begin{cases} x = \cos \psi \cos \theta \\ y = \sin \psi \cos \theta \\ z = -\sin \theta \end{cases} \quad (13)$$

Spherical Decomposition of Aim Vector

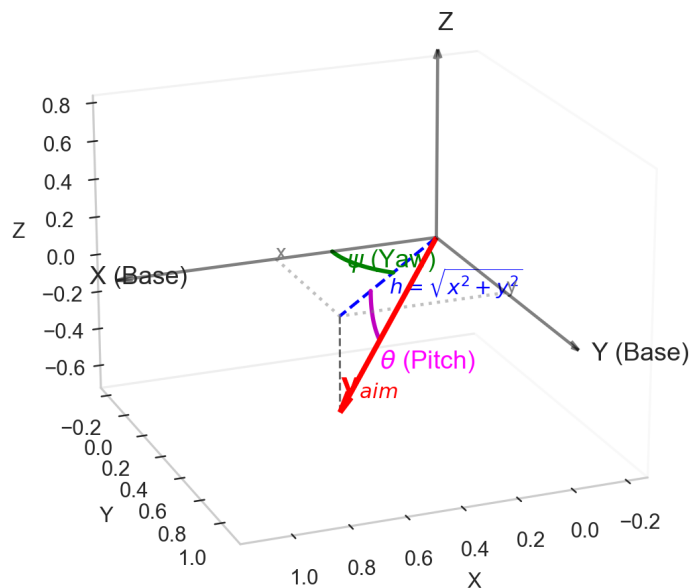


图 2: 球面坐标示意图

3.3.1 求解 Pitch (θ)

通过 z 分量可以求 θ 。为了数值稳定性，我们使用水平投影长度 h ：

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (14)$$

利用 $\arctan2$ 函数求解（该函数能处理分母为 0 的情况）：

$$\theta_{raw} = \arctan2(-z, h) \quad (15)$$

此处利用 h 作为分母，可以天然地将 Pitch 限制在 $[-90^\circ, +90^\circ]$ 的半球范围内，避免出现云台倒立的解。

3.3.2 求解 Yaw (ψ)

在水平面 (XY 平面) 上，Yaw 角取决于 x 和 y 的比值：

$$\psi = \arctan2(y, x) \quad (16)$$

3.4 完整解算梳理

为了在工程中直接编程实现，我们将上述推导整合为从输入欧拉角到输出关节角的完整数学表达。

3.4.1 输入量定义

设基座 (Base) 在世界系下的欧拉角为 $(\psi_b, \theta_b, \phi_b)$, 目标 (Target) 在世界系下的欧拉角为 $(\psi_t, \theta_t, \phi_t)$ 。

3.4.2 第一步：构建目标指向向量 (世界系)

由于我们只关心目标的 X 轴指向, 且 X 轴不受横滚 (Roll, ϕ_t) 影响, 目标指向向量 \mathbf{v}_W 在世界系下的坐标仅由目标的 Yaw 和 Pitch 决定:

$$\mathbf{v}_W = \begin{bmatrix} \cos \theta_t \cos \psi_t \\ \cos \theta_t \sin \psi_t \\ -\sin \theta_t \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.4.3 第二步：构建基座旋转矩阵

根据基座的欧拉角 $(\psi_b, \theta_b, \phi_b)$ 构建旋转矩阵 ${}^W_B \mathbf{R}$ 。假设旋转顺序为 Z-Y-X:

$${}^W_B \mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi_b) \mathbf{R}_y(\theta_b) \mathbf{R}_x(\phi_b) = \begin{bmatrix} c\psi_b c\theta_b & c\psi_b s\theta_b s\phi_b - s\psi_b c\phi_b & c\psi_b s\theta_b c\phi_b + s\psi_b s\phi_b \\ s\psi_b c\theta_b & s\psi_b s\theta_b s\phi_b + c\psi_b c\phi_b & s\psi_b s\theta_b c\phi_b - c\psi_b s\phi_b \\ -s\theta_b & c\theta_b s\phi_b & c\theta_b c\phi_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

(其中 c 代表 \cos , s 代表 \sin)

3.4.4 第三步：投影至基座系

将世界系下的目标向量 \mathbf{v}_W 投影到基座系, 得到 $\mathbf{v}_{aim} = [x, y, z]^T$ 。利用矩阵性质 $({}^W_B \mathbf{R})^{-1} = ({}^W_B \mathbf{R})^T$, 即用 ${}^W_B \mathbf{R}$ 的转置左乘向量:

$$\mathbf{v}_{aim} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ({}^W_B \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{v}_W \quad (19)$$

展开为分量形式 (即 ${}^W_B \mathbf{R}$ 的列向量与 \mathbf{v}_W 的点积):

$$\begin{aligned} x &= (\text{Row}_1 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{v}_W = (\text{Col}_1 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_W \\ y &= (\text{Row}_2 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{v}_W = (\text{Col}_2 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_W \\ z &= (\text{Row}_3 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{v}_W = (\text{Col}_3 \text{ of } {}^W_B \mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_W \end{aligned} \quad (20)$$

3.4.5 第四步：解算关节角

最后代入球面逆解公式, 得到云台电机所需的控制量:

$$\begin{cases} \psi_{cmd} = \arctan2(y, x) \\ \theta_{cmd} = \arctan2(-z, \sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \quad (21)$$

这就是完全解耦了目标 Roll 姿态、并补偿了基座姿态干扰后的最终控制指令。

4 最优化与限位约束处理

在工程实际中，Pitch 轴通常有机械限位（例如 $\theta \in [-45^\circ, +45^\circ]$ ）。如果计算出的 θ_{raw} 超出了这个范围（比如目标在头顶），我们该怎么办？

我们的目标是：**在可行域内，找到一个指向误差最小的方向。**

这是一个带约束的最优化问题：

$$\min_{\psi, \theta} \text{Angle}(\mathbf{v}_{aim}, \mathbf{v}_{curr}) \quad \text{s.t.} \quad \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max} \quad (22)$$

4.1 几何解法

由于 Yaw 和 Pitch 在球面坐标系下是正交的：

- **Yaw 轴**：决定了指向向量所在的“垂直平面”（子午面）。无论 Pitch 怎么动，如果 Yaw 不对齐，横向误差永远存在。且通常 Yaw 轴不存在限位，所以 Yaw 轴应该始终指向目标的方向。
- **Pitch 轴**：在确定的垂直平面内，问题退化为二维圆弧上的最近点搜索。显然，离目标越近越好。

因此，最优解非常简单且优雅，就是简单的**截断 (Clipping)**：

$$\theta_{final} = \text{clip}(\theta_{raw}, \theta_{min}, \theta_{max}) = \begin{cases} \theta_{min} & \text{if } \theta_{raw} < \theta_{min} \\ \theta_{max} & \text{if } \theta_{raw} > \theta_{max} \\ \theta_{raw} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

在 Yaw 无约束、Pitch 单边受限的前提下，该裁剪解即为球面距离意义下的最优解。

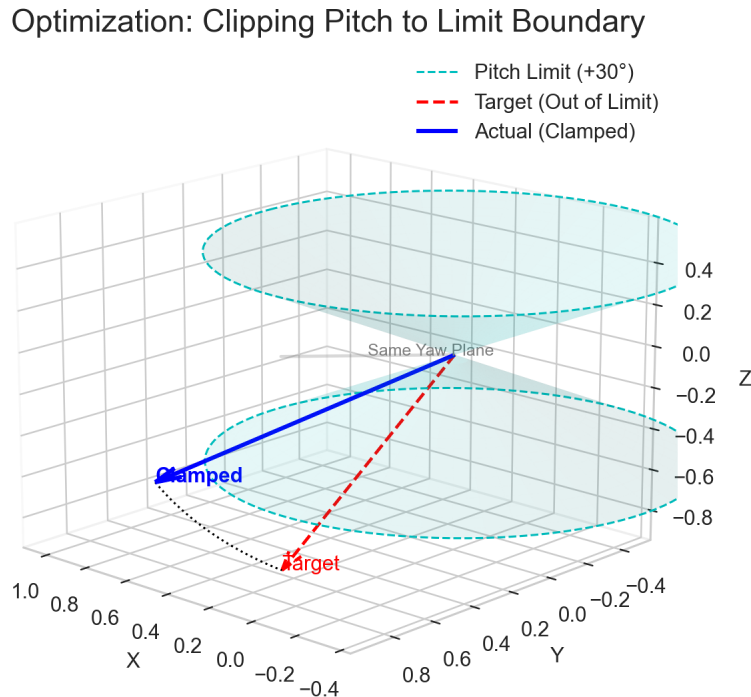


图 3: 可行域约束效果可视化

5 控制器设计与实现

基于前文推导的向量对齐算法：所有的姿态耦合与基座扰动，都已在运动学解算（IK）阶段被转化为随时间变化的关节角度指令。

因此，控制系统的设计目标从“在笛卡尔空间追踪目标”转变为“在关节空间跟随指令”。我们设计一套基于电机编码器反馈的串级 PID 控制系统来实现这一目标。

5.1 控制系统架构

新系统的控制流程概括如下：

- 解算层 (Kinematics):** 以高频（如 1kHz）运行 IK Solver。
 - 输入：** 目标世界姿态 ${}^W\mathbf{R}$ ，基座 IMU 姿态 ${}^B\mathbf{R}$ 。
 - 输出：** 目标关节角度 ψ_{cmd} (Yaw) 和 θ_{cmd} (Pitch)。
 - 特性：** 当基座晃动时，即使目标不动， ψ_{cmd} 和 θ_{cmd} 也会反向变化以抵消晃动。
- 执行层 (Execution):** 双闭环串级 PID 控制器。
 - 反馈源：** 依赖电机编码器的角度和角速度。

- **目标：**无静差地追踪解算层发出的指令。

位置环 (Outer Loop)：输入为角度误差，输出为期望的电机转子角速度 ω_{ref} 。通常采用 P 控制或 PD 控制：

$$\omega_{ref}(k) = K_{p,pos} \cdot e_{\psi}(k) \quad (24)$$

速度环 (Inner Loop)：输入为速度误差，输出为电机电流（力矩）指令 I_{cmd} 。注意：为了匹配坐标系，**反馈速度必须是电机编码器反馈的相对角速度 ω_{enc} 。**

$$e_{vel}(k) = \omega_{ref}(k) - \omega_{enc}(k) \quad (25)$$

$$I_{cmd}(k) = K_{p,vel} \cdot e_{vel}(k) + K_{i,vel} \sum e_{vel}(k) + K_{d,vel} \cdot [e_{vel}(k) - e_{vel}(k-1)] \quad (26)$$

5.2 基座姿态反解

IMU 安装于云台末端（相机处），直接测量末端的世界姿态 ${}^W_G \mathbf{R}$ 。为了使用前文所述的 IK 算法，我们需要先反求基座的世界姿态 ${}^W_B \mathbf{R}$ 。

5.2.1 计算相对旋转矩阵

根据电机编码器反馈的角度 ψ_{enc} (Yaw) 和 θ_{enc} (Pitch)，构建云台末端系 G 相对于基座系 B 的旋转矩阵 ${}^B_G \mathbf{R}$ 。依据 Z-Y 旋转顺序：

$${}^B_G \mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi_{enc}) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_{enc}) = \begin{bmatrix} c_{\psi}c_{\theta} & -s_{\psi} & c_{\psi}s_{\theta} \\ s_{\psi}c_{\theta} & c_{\psi} & s_{\psi}s_{\theta} \\ -s_{\theta} & 0 & c_{\theta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

5.2.2 反解基座姿态

根据链式法则：

$${}^W_G \mathbf{R} = {}^W_B \mathbf{R} \cdot {}^B_G \mathbf{R} \quad (28)$$

为了求 ${}^W_B \mathbf{R}$ ，我们在等式两边同时右乘 $({}^B_G \mathbf{R})^{-1}$ 。由于旋转矩阵的正交性，其逆矩阵等于转置矩阵，即 $({}^B_G \mathbf{R})^{-1} = ({}^B_G \mathbf{R})^T$ 。由此得到基座姿态的计算公式：

$${}^W_B \mathbf{R} = {}^W_G \mathbf{R} \cdot ({}^B_G \mathbf{R})^T \quad (29)$$

通过这一步运算，我们利用“末端 IMU + 编码器”构建了一个虚拟的“基座 IMU”。计算出的 ${}^W_B \mathbf{R}$ 将直接作为前文 **IK Solver** 的输入，用于计算下一时刻的目标关节角度，从而实现对基座扰动的实时补偿。

5.3 偏航轴的最短路径逻辑 (Angle Wrapping)

由于 Yaw 轴通常可以无限旋转,而解算层输出的 ψ_{cmd} 是基于 $\arctan2$ 的 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 值。当目标跨越 $\pm 180^\circ$ 边界时,直接相减会导致电机“多转一圈”。

设编码器反馈的多圈角度为 ψ_{enc} , 解算出的单圈目标为 ψ_{cmd} 。首先计算原始误差:

$$e_{raw} = \psi_{cmd} - (\psi_{enc} \pmod{2\pi}) \quad (30)$$

然后进行最短路径映射,得到用于 PID 计算的误差 e_ψ :

$$e_\psi = \begin{cases} e_{raw} - 2\pi & \text{if } e_{raw} > \pi \\ e_{raw} + 2\pi & \text{if } e_{raw} \leq -\pi \\ e_{raw} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

(注: Pitch 轴由于存在机械限位且范围小于 180° , 通常直接做差即可, 无需此步。)