

第三章 线性模型

一、填空题

1. 生成模型通过估计 () 进行分类, 判别模型通过估计 () 进行分类。
2. 感知器算法通常采用 () 法求解目标函数的优化问题。
3. 线性回归模型的封闭解又称为 () 解。
4. 逻辑回归函数的取值区间是 ()。

二、判断题

5. 当两个类别均服从正态分布时, 根据贝叶斯决策理论计算出的决策面必然是一个线性决策面。()
6. 当两个类别均服从正态分布时, 根据贝叶斯决策理论计算出的决策面必然是一个二次型决策面。()
7. 线性回归模型如存在唯一解, 必然可以令模型在训练集上的均方误差为 0。()
8. 4 个不具有共线性的三维样本, 无法用线性回归模型得到唯一解。()
9. 逻辑回归模型无法用于多类分类问题。()

三、选择题

10. 假设线性回归问题的训练集为: $x_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, 100$, 则该线性模型包含多少个参数:()
A. 3 个 B. 4 个 C. 100 个 D. 101 个
11. 上题中如果使用线性回归的最小二乘解的封闭解形式, 则自相关矩阵 R_x 的大小为:()
A. 3×3 B. 4×4 C. 100×100 D. 101×101
12. 逻辑回归模型中的逻辑回归函数可以看做是对以下哪种概率的描述:()
A. $p(x|\omega_1)$ B. $p(\omega_1|x)$ C. $p(x)$ D. $p(\omega_1)$

四、简答题

13. 请写出感知器算法的目标函数的标准数学形式, 并解释其中每一个符号的意义与计算方法, 说明其合理性。

14. 请写出线性回归模型的封闭解数学形式，及其推导过程，并标明符号意义。
15. 在线性回归模型中，假设输入样本记为 $x_i, i = 1, \dots, N$ ，相应的类别标签记为 $y_i, i = 1, \dots, N$ 。请给出自相关矩阵和互相关向量的定义（公式与符号表达）。如果样本集 $X \in \mathbb{R}^{N \times (d+1)}$ 中， $N < d + 1$ ，应如何处理才能得到合理的模型参数向量唯一解。
16. 请从求解线性方程组的角度说明线性回归模型时的无解情况，从矩阵运算角度说明线性回归模型时的唯一解情况，并比较两者之间的联系与区别。
17. 标签 y 是一个随机变量，由函数 $\hat{w}^T \hat{x}$ 加上一个随机噪声生成： $y = \hat{w}^T x + \epsilon$ ；其中噪声 ϵ 服从正态分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ，设当前训练样本集为 $X = \{\hat{x}_i | i = 1, \dots, N\}, Y = \{y_i | i = 1, \dots, N\}$ ；
 - (1) 试推导 \hat{w} 的最大似然解的数学形式；
 - (2) 假设 \hat{w} 的先验分布服从 $d + 1$ 元正态分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_{(d+1) \times (d+1)})$ ，试采用最大后验概率估计法推导 \hat{w} 的最优解的数学形式。
18. 如何防止线性回归模型出现过拟合现象，请给出具体的方案
19. 请给出逻辑回归模型中 sigmoid 函数形式的推导过程，并说明其概率解释。
20. 请给出逻辑回归模型梯度下降法更新公式的推导过程。

五、计算（画图）题

21. 已知两个类别 ω_1 和 ω_2 ，其先验概率相等，两类的类条件概率密度服从正态分布，有 $p(x|\omega_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma)$ 和 $p(x|\omega_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma)$ ，且 $\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $\Sigma = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0.3 & 1.9 \end{bmatrix}$ ，试写出上述问题每一类的判别函数 $g_i(x), i = 1, 2$ 的线性形式以及整个分类问题的决策面方程的线性形式。并判断样本 $x = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.9 \end{bmatrix}$ 属于哪一类，给出计算过程。
22. 已知决策面方程： $5x_1 - x_2 - 1 = 0$ ，当前错分样本为： $(0.4, 0.6)$ ， $(0.1 - 0.25)$ 。
 - (1) 写出参数向量 w ，并设定合适的学习步长 η ；

- (2) 列出迭代公式和计算结果
- (3) 列出迭代后的决策面方程
- (4) 画出相应的决策面 (虚线)
- (5) 给出结论与分析

23. 以 Iris 数据库每类的 70% 的样本为训练集，基于线性回归模型，使用花萼长度、花萼宽度和花瓣宽度特征来估计其花瓣长度特征，请写出线性回归模型参数的封闭解的数学形式，标明每个变量的矩阵大小或矢量维度。

24. 已知 3 个样本坐标为 $x^{(1)} = [1, 0]$, $x^{(2)} = [0, 1]$, $x^{(3)} = [1, 1]$ ，其中 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \omega_1$, $x^{(3)} \in \omega_2$ ，初始化逻辑回归模型对应的线性决策面为： $x_1 = 0.5$ 。设学习步长为 0.2。请计算基于逻辑回归梯度下降法进行一次迭代后的决策面方程，并在下图中画出相应的决策面直线。

