**物理竞赛试卷**

**（1）已知有一个质量分布均匀的正方体，当其绕一条棱和体对角线分别做匀速转动时，其动能相同，求转动周期之比.**

**答案：先分别求出正方体绕棱和体对角线的转动惯量**

**采用量纲分析法 设边长为a**

**先求绕体对角线的转动惯量**

**将立方体等分成8个小正方体，其中两个小正方体体对角线与大正方体的重合，另外六个小正方体体对角线到大立方体对角线距离为（立体几何）**

**设大立方体转动惯量表达式为**

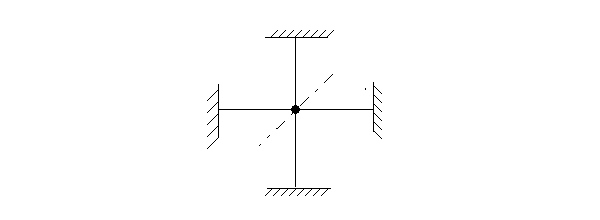
**则由于整体由个体组成，并有平行轴定理，可得方程**

**同理可求得绕棱的转动惯量**

**又有转动动能相等**

**得**

**所以 即为所求周期比值**

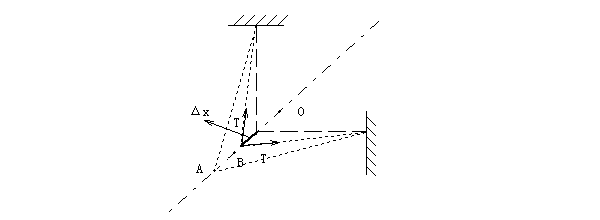
**（2）在光滑的水平桌面上,四根相同的弹性绳一端系在质量为m的小球上,另一端固定。如图，相邻的绳夹角90度。绳原长为L，弹性系数为k。小球在中心位置时，每根弹性绳的伸长量均为a（a），将小球沿图示虚线方向拉离平衡位置，位移为3 a并从静止释放，求振动周期.**

**答案：由于绳不可提供压力，只能提供拉力**

**所以分为两个阶段：只有2根绳绷紧/四根绳都绷紧**

**两根绳绷紧时，设位移为Δx**

**则易知Δx时，只有两根绳绷紧，此时，两紧绳分别伸长**

**如图**

**此时平衡位置为O点**

**回复力a）=k指向平衡位置**

**此段周期T1**

**从A到B相位改变量**

**所以时间t1=-arcsin**

**四根绳全部绷紧时，平衡位置为原位置**

**1,2伸长**

**3,4伸长**

**所以回复力k(a+-a+**

**所以 此段周期T 2=**

**求振幅：有能量守恒**

**a**

**时间t2=**

**所以 总周期T=4t1+2t2**

**即为所求**

**（3）如图所示，一个正方形轻体框架，边长为a，它的四个角处固定有1,2,3,4四个小球，其中球1质量为8m，球2,3,4质量均为m，以速度在水平方向做无转动的平动，现有一挡板，挡板与垂直，且与2-3杆的夹角为（）在某个时刻，小球3与挡板碰撞，碰撞结束时球3在垂直与挡板的方向的分速度为0，且球3与挡板不粘连，若使球3碰撞后，球1与球2同时与挡板相碰，讨论此可能性是否存在，若存在，求角.**

**2**

**m**

1

8m

4

m

3

m

**答案：先求系统质心的位置，如图（a）**

**易知质心P在角平分线AC上，设CP=L，则由质心公式，有**

**8m·（**

**可解得L=**

**对于碰撞结束时的系统，如图（b）**

**以质心为参考系，系统做匀速转动，设转动角速度为，则以质心为参考系，球3转动速度为**

**V3=，由于转动与平动合成后水平速度为0，有**

**VP=**

**当1,2两球同时撞板时，如图（c）**

**可求得P到挡板的距离：初始 d0=Lcos（）……②**

**最终 dt=**

**而系统转过的角度为，由于平动时间等于转动时间，有**

**……④**

**联立可解得：=0.3842rad=22.013**

**所以，要使1,2同时碰板，需22.013 但到这里本题尚未结束，因为仍需论证在系统转至图（c）状态前，球2是否已经提前碰板**

**使用图（d）论证（不是很严密，但是够用了）**

**由几何关系：**

**当与板垂直时，系统转过角度为**

**转动时间**

**此时质心运动了x=**

**由于d**

**所以在22.013时，在球1,2同时碰板前，球2已碰挡板**

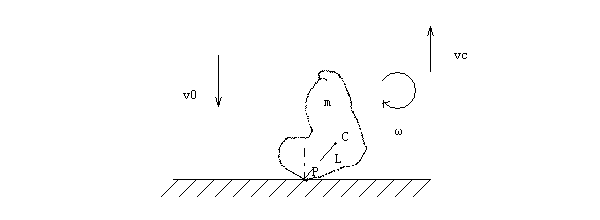
**所以，球1和球2同时碰板的可能性不存在。**

**（4）证明推论题：（1）证明两质点在同一方向发生弹性碰撞，接触速度等于远离速度**

1. **推导一个平动的刚体与地面发生完全弹性碰撞，垂直于接触面方向的速度在碰撞前后的关系（假设初速度方向垂直于地面）**
2. **由（1）（2）推出一个刚体间发生完全弹性碰撞碰撞前后所满足的速度关系.**

**答案：（1）略过**

**（2）如图所示**

****

**由平行轴定理 JP=JC+ml2…………①**

**对P点 ，角动量守恒mv0Lsin= JP-mvcLsin…………②**

**有弹性碰撞能量守恒有③**

**①②③联立可导出**

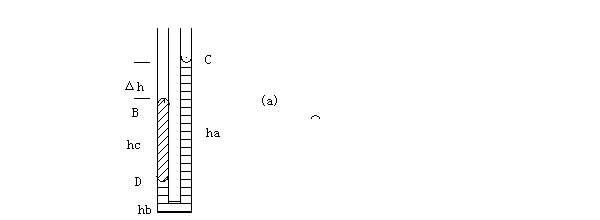
**亦即v接触=v远离**

**得证**

**（3）两平动刚体间发生完全弹性碰撞，在接触面的法向方向上，两刚体分别的碰撞点的接触速度等于远离速度**

**（5）在两端开口、内半径为r的U型玻璃毛细管中，从一端先注入水银再注入水，其中水柱长为水、水银与空气的接触面和水与水银的分界面的表面张力系数，水和水银的密度为.求：两臂中液面的高度差.**

**答案：**

**第一种情况，图（a）**

**有B**

**ghC…………②**

**…………③**

**b…………④**

**又有…………⑤**

**gha…………⑥**

**由①②③④得**

**+b+ghC**

**由⑤⑥,得**

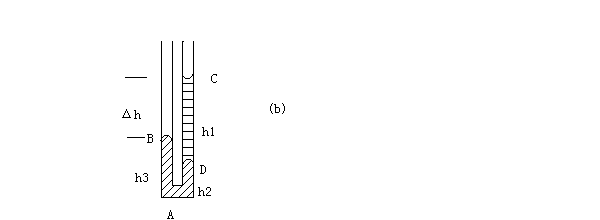
**gha**

**联立，得**

**又有ha+hb=h1…………⑧**

**ha-hb-hc=Δh…………⑨**

**⑦⑧⑨联立，无解，此情况不成立**

**第二种情况，图（b）**

**有**

**由⑩⑪得**

**⑫**

**又有h1+h2-h3=Δh…………⑬**

**由⑫⑬得**

**Δh=**

**即为所求液面高度差**

**（6）（1）在一个空间内，有一个无限大但有厚度H的电介质层，相对介电常数为此电介质层同时具有密度，在没有电介质的空间，距电介质层h（处有一点电荷，电荷q，质量m.现给点电荷一沿背离电介质层方向的初速度v0，求，v0为多大时，点电荷可以到达2h处？**

**(2)在一个空间内，有两个无限大厚度均为H的电介质层，相距为2h，其中一个参数为 ,另一个参数为 ，现把一个质量m，电荷q的点电荷，在两电介质层中间空间达到平衡位置，请问，此平衡位置是否稳定，若稳定，求出周期，若不稳定，说明理由。**

**答案：（1）由于 ，只需考虑上表面的影响，产生一个像电荷**

**（电介质像电荷推导过程略）**

**所以引力f=**

**积分得此间电荷引力做功We**

**由于所以必须考虑万有引力**

**类比库仑力**

**fG=**

**无限均匀带电板的场强**

**所以对本题，介质层的引力场强**

**所以万有引力大小**

**万有引力做功…………⑦**

**由能量守恒，有**

**解得**

**即为所求**

**（2）直接定性分析，1.上下介质所给均为引力**

**2.万有引力为恒力不变，库仑力与位置平方反比**

**3.若向A侧移动一个小位移，则A侧引力变大，B侧引力变小，合力指向位移方向，背离平衡位置。**

**4.若向B侧移动，同理**

**5.所以，此平衡位置为不稳定平衡**

**（7）现有一黑色球壳，质量为m，半径为r，球心处放置一可控制开、关的点光源（光源并不与球壳固连）。点光源总功率为P。现有两种操作：**

1. **打开光源，将球壳移动x(x)**
2. **先将球壳移动x0 (x0)，再打开光源**

**试求在这两种情况下，球壳在操作后的运动状况（不考虑重力）**

**答案：（1）设r处光强为**

**则R处光强=**

**所以力的表达式可写为F**

**与库仑力的表达式类似**

**若先打开光源，再将球壳移动x，则从始到终可完全类比库仑力作用**

**因此球壳所受的合力为0，球壳在操作后静止**

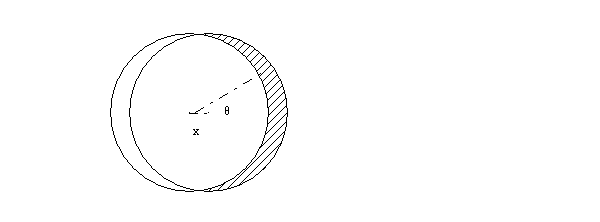
**若先移动x，再打开光源**

**则由于光粒子并不同时到达球壁，因而有段时间受合力不为0**

**只需求出非球对称部分的光子对于球壳的作用**

**光粒子球半径达到r时，与求导体球电荷分布的方法相同，此时只需求出阴影部分动量即可（其余总动量为0）**

**有动量守恒p光=mv…………①**

****

**阴影部分p光=**

**由几何关系dr=x**

**d=**

**故**

**=**

**=**

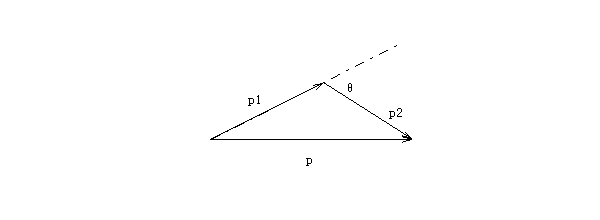
**代入①式，得**

**解此微分方程，得运动公式为**

**即为所求运动方程，可知随时间推移，球会慢慢无限接近原位置**

**（8）一个粒子运动中衰变为两个粒子，其运动夹角为，静止质量m01，m02.动量分别为p1，p2，求此粒子静止时的质量M0.**

**答案：两种解法，普通解法和四维矢量解法，四维矢量解法不详细讲解，自己去看**

**法1：如图所示**

**由动量守恒，可画出如图矢量关系**

**有余弦定理p2=p12+p22+2p1p2cos………………①**

**由相对论动量能量关系 原粒子：E2=p2c2=M02c2…………②**

**粒子1：E12=p12c2=m012c2…………③**

**粒子2：E22=p22c2=m022c2…………④**

**能量守恒：E=E1+E2…………⑤**

**由①到⑤联立得**

**即为所求**

**法2：建立四维μ矢量**

**E2=p2c2=M02c2**

**E12=p12c2=m012c2**

**E22=p22c2=m022c2**

**有………………\***

**还可写为**

**同理，可有**

**并有**

**带入\*式，得**

**四维矢量法好处就是可以忽略很多几何关系，所以算起来会比较简略，而且套路比较明晰，这个题虽然用起来略嫌麻烦，但是如果遇到几何关系稍乱的题，完全可以用这种方法来计算，大家可以自己找辅导书补充此方法**