

目录

| | |
|-----------------------------|---|
| 【数据结构】 | 3 |
| 线性表..... | 3 |
| 栈..... | 3 |
| 队列..... | 3 |
| 树和二叉树..... | 3 |
| 图..... | 5 |
| 【二叉搜索树与红黑树】 | 5 |
| 二叉搜索树..... | 5 |
| 红黑树..... | 5 |
| 【插入排序&归并排序】 | 5 |
| 插入排序..... | 5 |
| 分治法..... | 5 |
| 归并排序..... | 5 |
| 【最大子数组 & Strassen 算法】 | 5 |
| 最大子数组..... | 5 |
| Strassen 算法 | 5 |
| 【堆排序】 | 6 |
| 堆..... | 6 |
| 几个核心算法..... | 6 |
| Priority queue..... | 6 |
| 【快速排序、决策树、计数排序】 | 6 |
| 快速排序..... | 6 |
| 决策树..... | 6 |
| 计数排序..... | 6 |
| 【算法复杂度】 | 6 |
| 【递归式求解】 | 7 |
| 代换法..... | 7 |
| 递归树法..... | 7 |
| 主方法..... | 7 |
| 【动态规划】 | 7 |
| 矩阵乘..... | 7 |
| DP 性质 | 7 |

| | |
|------------------------------|---|
| 最长公共子序列 (LCS) | 7 |
| 【贪心策略】 | 7 |
| 整数背包&分数背包 | 7 |
| 相关性质 | 7 |
| 哈夫曼编码 | 7 |
| 【图的表示与搜索】 | 8 |
| 图的表示 | 8 |
| 图的搜索 | 8 |
| 【Dijkstra 算法&MST】 | 8 |
| Dijkstra 算法 | 8 |
| MST | 8 |
| 【NP 完全性】 | 8 |
| 几个关键概念 | 8 |
| 两种问题 | 8 |
| 几个关键词 | 8 |
| 【近似算法】 | 9 |
| 概念 | 9 |
| 定点覆盖 | 9 |
| TSP | 9 |
| 【其它】 | 9 |
| 斐波那契数列 | 9 |

【数据结构】

线性表

【写代码或者计算程序的复杂度】

对于一个线性表，如果需要频繁使用插入操作，则更优的实现方式是_____（顺序存储/链式存储）。

答案：链式存储

栈

王道（改） 假定使用数组 $a[n]$ 存储一个栈，用 top 表示栈顶指针，用 $top == -1$ 表示栈空，并已知栈未满，则元素 x 进栈时执行的操作为 $a[top++] = x$ 。（ ）

答案：F。应为 $a[++top] = x$

王道（改） 3 个不同元素依次进栈，中途可以出栈，能得到_____种不同的出栈序列。

答案：5

~~TAOCP 2.2.1-2 [15]（改）按照 123456 的顺序入栈，中途可以弹出，问能否得到出栈顺序 154623？~~

~~——答案：不能。因为只有在 3 插入之前从栈中移出 2，才能让 2 排在 3 前~~

队列

408 真题（改） 工厂里某一道工序内有 n 条传送带，每个传送带的入口和出口每次均只能通过一个货物，工序开头和末尾各有一个分拣机，每次可以选择某一条传送带将一个货物送入或传出，传送带上货物的数量不限。现在有编号为 1~9 的货物，达到该工序的顺序是 8, 4, 2, 5, 3, 9, 1, 6, 7，若期望货物传出的顺序为 1~9，则 n 至少为_____。

答案：4。

树和二叉树

TAOCP 2.3-21 [M22]

如果一棵树具有 n_1 个 1 度结点， n_2 个 2 度结点， \dots ， n_m 个 m 度结点，那么它有多少个叶结点？

答案： $1 + 0 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + \dots + (m - 1) \cdot n_m$

【注：简化版本是二叉树的结论，叶结点数=度为 2 的结点数+1，或者考察上式的特例， $n_0 = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 1$ 】

TAOCP 2.3.1-4 [20]

定义一种新的遍历顺序：(a) 访问根 (b) 遍历右子树 (c) 遍历左子树。这种新的顺序与已经讨论的三种序有什么简单的关系吗？

答案：它是后序的逆

TAOCP 2.3.2-4 [19]

下面的陈述是真还是假？“在前序和后序下，一棵树的叶结点皆以相同的相对次序出现”

答案：为真。

TAOCP 2.3.2-20 [M22] (改)

——证明：树中结点 u 是 v 的祖先，当且仅当前序遍历序列中 u 在 v 之前，且后序遍历中 u 在 v 之后。

【注：简化版本可以改成判断题】

TAOCP 2.3-8 [03] (改) 以两个结点一个为根一个为叶结点的二叉树为例，可以看到，二叉树不是树的特殊情况 ()

答案：正确。对于二叉树而言，子结点在左和在右是不一样的，因为对于二叉树而言，空结点也是结点。然而在有序树中，这两棵树是一样的。

【注：或许直接问二叉树就是度为 2 的树，更不容易做错？】

王道 (改) 约定只有一个结点的二叉树其深度为 1。设二叉树只有度为 0 和 2 的结点，其总的结点个数为 13，则该二叉树的最大深度为_____。

答案：7

王道 (改) 表达式二叉树 $T = (\text{第一操作数})(\text{运算符})(\text{第二操作数})$ ，其中第一操作数、第二操作数也是表达式二叉树，分别为表达式二叉树 T 的左子树和右子树。

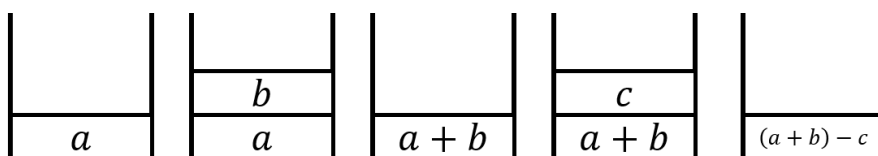
绘制表达式二叉树时，需要注意计算的优先级。因为使用表达式二叉树时，先分别计算左右子树的值，再对其使用运算符。

对于表达式：

$$a \times (b + c) - d$$

- 绘制其表达式二叉树，若有多种可能的形式，画出任意一种即可。
- 写出该表达式的后缀表达式。
- 我们可以使用栈来计算后缀表达式，从左至右依次读取后缀表达式中的元素，遇到数就将其入栈，如果遇到运算符，则从栈中弹出两个值，用运算符对其进行计算，后将计算结果入栈。

例如，后缀表达式 $ab + c -$ 的计算过程如下所示



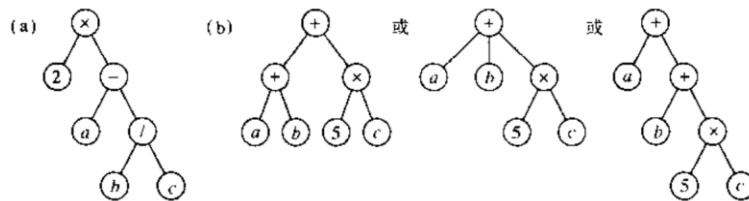
请画出 b) 得出的后缀表达式的计算过程，

TAOCP 2.3-16 [20] (改) (这个难度有点高估了)

——表达式二叉树 $T = (\text{第一操作数})(\text{运算符})(\text{第二操作数})$ ，其中第一操作数、第二操作数也是表达式二叉树，分别为表达式二叉树 T 的左子树和右子树

——绘制下面算术表达式的表达式二叉树：(a) $2(a-b/c)$ (b) $a+b+5c$ 。如果有多种可能的形式，画出任意一种即可。

答案：



图

【二叉搜索树与红黑树】

二叉搜索树

红黑树

【插入排序&归并排序】

插入排序

分治法

归并排序

【最大子数组 & Strassen 算法】

最大子数组

Strassen 算法

矩阵分解 Strassen 算法的复杂度可以表示为 $\underline{\quad}(n^{2.8})$ 或 $\underline{\quad}(n^{\log_2 7})$ 。(从 O, Θ, Ω 中选择填入)

答案： Ω Θ

矩阵分解 Strassen 算法的时间复杂度为 $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$, 可以表示为 $\underline{\hspace{1cm}}(n^{2.85})$ 。(从 O, Θ, Ω 中选择填入)
答案: O

【堆排序】

堆

算法导论 6.1-5 一个已经排好序的数组是一个最小堆吗?

答案: 是

算法导论 6.1-6 值为<23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12>的数组是一个最大堆吗?

答案: 不是

几个核心算法

Priority queue

【快速排序、决策树、计数排序】

快速排序

决策树

计数排序

【算法复杂度】

具体数学 9.3 热身 (改)

下面的推理问题出在哪里? “由于 $n = O(n)$ 以及 $2n = O(n)$, 如此等等, 我们有 $\sum_{k=1}^n kn = \sum_{k=1}^n O(n) = O(n^2)$ ”。并给出正确的结论。

答案: 用 $O(n)$ 代替 kn 要求对每个 k 有一个不同的 C , 但每个 O 只表示一个 C , 事实上, 这个 O 的上下文要求它代表一组两个变量 k 和 n 的函数。正确结论为 $\sum_{k=1}^n kn = \sum_{k=1}^n O(n^2) = O(n^3)$

具体数学 9.5 热身 (改)

试推翻下述结论: 若对于所有 n , 有 $f(n), g(n)$ 都是正的, 则有 $O(f(n) + g(n)) = f(n) + O(g(n))$

答案: 设 $f(n) = n^2, g(n) = 1$, n 在左边的集合, 不在右边的集合

【注: 也出现在 TAOCp 中。1.2.11.1-6[M20], 1.2.11.1-5[M20]】

【递归式求解】

代换法

递归树法

算法导论 4.4-9（改） 对递归式 $T(n) = T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) + cn$ ，利用递归树给出一个渐进紧确界，其中 $0 < \alpha < 1$ 和 $c > 0$ 是常数。

答案：可以假设 $0 < \alpha \leq 1/2$ ，因为否则我们可以令 $\beta = 1 - \alpha$ 同理可得。

每层的代价是 cn ，

主方法

【动态规划】

矩阵乘

DP 性质

最长公共子序列（LCS）

【贪心策略】

整数背包&分数背包

相关性质

哈夫曼编码

王道（改） 设哈夫曼编码的长度最大为 4，若已经对两个字符编码为 1 和 01，则最多还可以对____个字符编码。

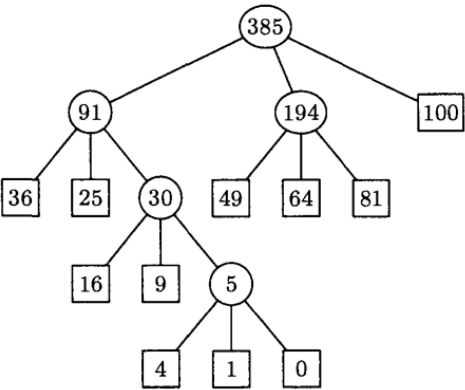
答案：4

哈夫曼方法可以推广到 t 叉树。对于权重 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 构建一棵最优三叉树。

答案：

10. By adding extra *zero* weights, if necessary, we may assume that $m \bmod (t - 1) = 1$. To obtain a t -ary tree with minimum weighted path length, combine the smallest t values at each step and replace them by their sum. The proof is essentially the same as the binary case. The desired ternary tree is shown.

F. K. Hwang has observed [SIAM J. Appl. Math. 37 (1979), 124-127] that a similar procedure is valid for minimum weighted path length trees having any prescribed multiset of degrees: Combine the smallest t weights at each step, where t is as small as possible.



【图的表示与搜索】

图的表示

图的搜索

【Dijkstra 算法&MST】

Dijkstra 算法

MST

【NP 完全性】

几个关键概念

两种问题

几个关键词

【近似算法】

概念

定点覆盖

TSP

【其它】

斐波那契数列

TAOCP 1.2.8-8 [15]

在很多情况下，假定 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 对于所有整数 n 成立，从而对于负整数 n 定义 F_n ，这样做是很方便的。探讨这种做法：求出 F_{-1}, F_{-2} ，并将 F_{-n} 用 F_n 简单地表示

答案： $F_{-1} = 1, F_{-2} = -1, F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$

TAOCP 1.2.8-20 [M16] (改)

证明 $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$

答案： $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_n$
 $= F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n$
 $= F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n$
 $= F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n$
 $= \dots$
 $= F_2 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$

$$= F_2 - F_0 + \sum_{k=0}^n F_k = \sum_{k=0}^n F_k + 1$$

【原题为用 F 简单地表示这个和式】