微积分习题册参考答案

大学数学习题册第三版

作者：*YiShao*
时间：February 27, 2024
单位：*SCU*

海纳百川，有容乃大

前言

该参考答案讲义采用了ElegantLATEX模板，官网：https://elegantlatex.org/，在此向开发者表示诚挚的谢意。

该参考答案仅供内部交流使用，不建议随意发布到网上。(水平有限)

目前更新进度主要适用于微积分 2 下册的同学哈！有任何疑问，请联系左博团队的艺少.

邮箱：571136772@qq.com

目录

第一章 定积分的定义及性质

一、利用定积分的定义计算下列定积分.

1. $\int_a^b x\,\mathrm{d}x(a<b)$;

解

$$\begin{aligned}I &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\left(na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\ &=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

解

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n\cdot\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

对分母有: $\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)\xlongequal{令x=\frac{1}{n}}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot(1-e^x)=-1.$

因此: $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=e-1.$

二、利用定积分的几何意义,求下列定积分.

1. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

解 相当于是一个半径为 a 的半圆的面积,答案为 $\frac{\pi}{2}a^2$.

2. $\int_{-1}^{3}x\,\mathrm{d}x$;

解 作图可知答案为 4.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$;

解 画图可知答案为 0.

4. $\int_a^b(kx+m)\mathrm{d}x(0\leqslant a<b)$;

解 画图可知梯形面积为: $\frac{k}{2}(b^2-a^2)+m(b-a)\Rightarrow I=\frac{k}{2}(b^2-a^2)+m(b-a).$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, $f(0)=0, x=g(y)$ 是其反函数, 试用定积分的几何意义说明下式

成立:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant ab(a>0,b>0). \qquad [Young\text{不等式}]$$

证明 ① 先证当 $b=f(a)$ 时等号成立.

将区间 $[0,a]$ 作划分: $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=a$, 记 $y_i=f\left(x_i\right)(i=0,1,2,\cdots,n)$, 则 $0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=b$, 再记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, 于是

$$\sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}\left(y_i\right)\Delta y_i=\sum_{i=1}^n y_{i-1}\left(x_i-x_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^n x_i\left(y_i-y_{i-1}\right)=x_n y_n-x_0 y_0=ab,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, $\sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}\left(y_i\right)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b=f(a)$ 时,

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab,$$

② 在一般情况下, 设

$$F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab.$$

则 $F'(a)=f(a)-b$, 记 $f(T)=b$, 可知当 $0<a<T$ 时, $F(a)$ 单调减少, 当 $a>T$ 时, $F(a)$ 单调增加, 所以 $F(a)$ 在 $a=T$ 处取到最小值。由上面的讨论, 可知最小值 $F(T)=0$, 从而 $F(a)\geq 0$, 这就是所要证明的. □

作图方法见习题课.

三、用定积分表示下列数列极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{1+\frac{n}{n}}\right)$;

   解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n\sqrt[3]{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt[3]{1+x}dx.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{\sin a+\sin\left(a+\frac{h}{n}\right)+\sin\left(a+\frac{2h}{n}\right)+\cdots+\sin\left[a+\frac{(n-1)h}{n}\right]\right\}.$

   解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{a\to\infty}\frac{h}{n}\left\{\sin a+\sin\left(a+\frac{h}{n}\right)+\cdots+\sin\left(a+\frac{n}{n}h\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+h)-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\sin\left(a+\frac{i}{n}\cdot h\right)\\&=\int_a^{a+h}\sin x dx.\end{aligned}$$

四、试用定积分的几何意义解释以下性质.

1. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$;
2. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x]$. [区间再现公式]

五、利用定积分的定义证明以下性质.

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(k \text{ 是常数}).$$

证明 $\int_a^b k\cdot f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}k\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right) = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) = k\cdot\int_a^b f(x)dx.$ □

六、设 $D(x)$ 是狄利克雷函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{当}x\text{ 是有理数}, \\ 0, \text{当}x\text{ 是无理数}. \end{cases}$$

问: 定积分 $\int_a^b D(x)\mathrm{d}x(a<b)$ 是否存在? 为什么?

解 先假设存在. $I = \int_a^b D(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}D(x_i), x_i = a+\frac{b-a}{n}\cdot i.$

① 取 $x_i\in Q$. $D(x_i)=1$. $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot n = b-a>0.$

② 取 $x_i\notin Q$. $D(x_i)=0$. $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot 0 = 0.$

与假设矛盾，故不存在.

七、估计下列定积分的值.

1. $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

   解 记$f(x)=x\cdot e^{-x}, f'(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$, 故$0<x<1$ 时$f'(x)>0; 1<x<2$ 时$f'(x)<0$.
   因此 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}, f(x)_{\min}=\min\{f(0)\cdot f(2)\}=0.$
   故$0\leqslant\int_0^2 x\cdot e^{-x}dx\leqslant\frac{2}{e}.$

2. $\int_{\frac14}^{\frac12} x^x dx.$

   解 记$f(x)=x^x=e^{x\cdot\ln x}, f'(x)=x^x\cdot(1+\ln x)$. 故$\frac14<x<\frac1e$ 时. $f'(x)<0, \frac1e<x<\frac12$ 时, $f'(x)>0$.
   因此 $f(x)_{\min}=f\left(\frac1e\right)=e^{-\frac1e}$ ， $f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(\frac12\right), f\left(\frac14\right)\right\}=\frac{\sqrt2}{2}.$
   故$\frac14\cdot e^{-\frac1e}\leqslant\int_{\frac14}^{\frac12}x^xdx\leqslant\frac{\sqrt2}{8}.$

九、比较下列各对定积分的大小.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$;

   解 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时. $\sin^2 x\in[0,1)$, 故 $0\leqslant\sin^4 x\leqslant\sin^2 x$. 因此: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx.$

2. $\int_1^2\sqrt{5-x}dx$ 与 $\int_1^2\sqrt{x+1}dx$;

   解 当$x\in[1,2]$时,$\sqrt{5-x}\geqslant\sqrt3$且$\sqrt{x+1}\leqslant\sqrt3$. 即: $\sqrt{5-x}\geqslant\sqrt{x+1}\geqslant0$. 所以有: $\int_1^2\sqrt{5-x}dx\geqslant\int_1^2\sqrt{x+1}dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\sin x}$;

解 当$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时. $\sin x \le x$, $0 \le e^{-x} \le e^{-\sin x}$ 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\sin x}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin(\sin x)dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \cos(\sin x)dx$.

解

Solution 1. 注意到 $(\forall x > 0)\sin x < x$, 以及 $\cos x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上递减，于是 $\sin\cos x < \cos x < \cos\sin x$. 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\cos x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Solution 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x > \int_0^1 .\frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} > 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 1.$$

Solution 3 . 其实画图也可以，这里不好画，习题课上讲！

5. $\int_0^{\pi} e^{-x^2}dx$ 与 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}dx$.

解 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 R 上单调递减，利用定积分的几何意义易知：$\int_0^{\pi} e^{-x^2}dx > \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}dx$.

十、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$, 且至少有一点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

2. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant g(x)$, 且至少有一点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > g(c)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明 1. 由连续性. $\exists x = c$ 的小邻域：$[c-\delta, c+\delta]$. S.t. $f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(c) > 0$. 又在 $x \in [a, b]$ 上 , $f(x) \geqslant 0$.
故 $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geqslant 2\delta \cdot \frac{1}{2}f(c) = \delta \cdot \delta(c) > 0$. 故得证. □

证明 2. 设 $F(x) = f(x) - g(x)$. 故 $F(x)$ 连续. 由第 1 问的证明可得：$\int_a^b F(x)dx > 0$. 故 $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.□

十一、

1. 设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = m$, $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = n$, 则 $\int_c^a f(x)\mathrm{d}x = (C)$.

A. $m+n$ B. $m-n$ C. $n-m$ D. 0

2. 初等函数 $f(x)$ 在其定义区间 $[a, b]$ 上不一定 (B).

A. 连续 B. 可导 C. 存在原函数 D. 可积

3. 下列函数中, 在区间 $[-1, 3]$ 上不可积的是 (D).

A. $f(x) = \begin{cases} 3, -1 < x < 3, \\ 0, x = -1, x = 3 \end{cases}$ B. $f(x) = [x]$ C. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$ D. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$

十二、求数列极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{x^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} p\cdot\dfrac{\xi^2}{\xi^2+a^2}\quad(n\leqslant\xi\leqslant n+p) = \lim\limits_{\xi\to\infty} p\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{a^2}{\xi^2}} = p.$

十三、设函数 $f(x)$ 连续, 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x.$

解 原式 $= \lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)dx = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\cdot hf(\xi).\quad(a\leqslant\xi\leqslant a+h) = \lim\limits_{\xi\to a} f(\xi) = f(a).$