微积分习题册参考答案

大学数学习题册第三版

作者：$\mathcal{YiShao}$
时间：February 29, 2024
单位：$\mathcal{SCU}$&Shishi Experimental School of Chengdu Eastern New Area

海纳百川，有容乃大

前言

该参考答案讲义采用了ElegantLaTeX模板，官网：https://elegantlatex.org/，在此向开发者表示诚挚的谢意。

该参考答案仅供内部交流使用，不建议随意发布到网上。（水平有限）

目前更新进度主要适用于微积分 2 下册的同学哈！有任何疑问，请联系左博团队的艺少.

邮箱：571136772@qq.com

目录

第一章 定积分的概念与性质

一、利用定积分的定义计算下列定积分.

1. $\int_a^b x\,\mathrm{d}x(a<b)$;

解

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\left(na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).
\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

解

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n\cdot\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

对分母有：$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)\xlongequal{令x=\frac{1}{n}}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot(1-e^x)=-1.$

因此：$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=e-1.$

二、利用定积分的几何意义,求下列定积分.

1. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

解 相当于是一个半径为 a 的半圆的面积，答案为 $\frac{\pi}{2}a^2$.

2. $\int_{-1}^{3}x\,\mathrm{d}x$;

解 作图可知答案为 4.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$;

解 画图可知答案为 0.

4. $\int_a^b (kx+m)\mathrm{d}x(0\leqslant a<b)$;

解 画图可知梯形面积为: $\frac{k}{2}(b^2-a^2)+m(b-a)\Rightarrow I=\frac{k}{2}(b^2-a^2)+m(b-a)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加, $f(0)=0, x=g(y)$ 是其反函数, 试用定积分的几何意义说明下式成立:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant ab(a>0,b>0). \qquad [Young\text{不等式}]$$

证明 ① 先证当 $b=f(a)$ 时等号成立.

将区间 $[0,a]$ 作划分: $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=a$, 记 $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,2,\cdots,n)$, 则 $0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=b$, 再记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, 于是

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i=\sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n x_i(y_i-y_{i-1})=x_ny_n-x_0y_0=ab,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b=f(a)$ 时,

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=ab,$$

② 在一般情况下, 设

$$F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab.$$

则 $F'(a)=f(a)-b$, 记 $f(T)=b$, 可知当 $0<a<T$ 时, $F(a)$ 单调减少, 当 $a>T$ 时, $F(a)$ 单调增加, 所以 $F(a)$ 在 $a=T$ 处取到最小值。由上面的讨论, 可知最小值 $F(T)=0$, 从而 $F(a)\ge 0$, 这就是所要证明的. □

作图方法见习题课. 如果暂时看不懂证明也没关系, 微积分 2 期末考试一般是不会考 Young 不等式的证明, 但是习题课还是会讲我们是如何进行分析的. 关于积分不等式的证明我们会单独列一个专题讲解.

三、用定积分表示下列数列极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{1+\frac{n}{n}}\right)$;

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^n\sqrt[3]{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt[3]{1+x}dx.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{\sin a+\sin\left(a+\frac{h}{n}\right)+\sin\left(a+\frac{2h}{n}\right)+\cdots+\sin\left[a+\frac{(n-1)h}{n}\right]\right\}.$

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{a\to\infty}\frac{h}{n}\left\{\sin a+\sin\left(a+\frac{h}{n}\right)+\cdots+\sin\left(a+\frac{n}{n}h\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+h)-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n\sin\left(a+\frac{i}{n}\cdot h\right)\\&=\int_a^{a+h}\sin xdx.\end{aligned}$$

四、试用定积分的几何意义解释以下性质.

1. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$;
2. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x]$. [区间再现公式]

1 和 2 比较平凡, 其中第 3 个非常重要! 习题课将会作为专题讲解!

五、利用定积分的定义证明以下性质.

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(k \text{ 是常数}).$$

证明 $\int_a^b k\cdot f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}k\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right) = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) = k\cdot\int_a^b f(x)dx.$ □

六、设 $D(x)$ 是狄利克雷函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当} x \text{ 是有理数},\\ 0, \text{当} x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

问: 定积分 $\int_a^b D(x)\mathrm{d}x(a<b)$ 是否存在? 为什么?

解 先假设存在. $I=\int_a^b D(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}D\left(x_i\right), x_i=a+\frac{b-a}{n}\cdot i.$

① 取 $x_i\in Q$. $D\left(x_i\right)=1$. $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot n=b-a>0.$

② 取 $x_i\notin Q$. $D\left(x_i\right)=0$. $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot 0=0.$

与假设矛盾，故不存在.

注 这说明 Dirichlet 函数不是 Riemann 可积的，因为其在区间 $[a,b]$ 上任何一点都不连续，间断点的测度为大于零，故不可积，学有余力的同学可以去知乎上搜一下黎曼可积与勒贝格可积. 当然这个跟我们微积分 2 期末考试没有任何关系哈!

七、估计下列定积分的值.

1. $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

   解 记$f(x)=x\cdot e^{-x}, f'(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$, 故$0<x<1$ 时$f'(x)>0; 1<x<2$ 时$f'(x)<0$.
   因此 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}, f(x)_{\min}=\min\{f(0)\cdot f(2)\}=0.$
   故$0\leqslant\int_0^2 x\cdot e^{-x}dx\leqslant\frac{2}{e}.$

2. $\int_{\frac14}^{\frac12} x^x dx.$

   解 记$f(x)=x^x=e^{x\cdot\ln x}, f'(x)=x^x\cdot(1+\ln x)$. 故$\frac14<x<\frac1e$ 时. $f'(x)<0, \frac1e<x<\frac12$ 时, $f'(x)>0$.
   因此 $f(x)_{\min}=f\left(\frac1e\right)=e^{-\frac1e}$, $f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(\frac12\right), f\left(\frac14\right)\right\}=\frac{\sqrt2}{2}.$
   故$\frac14\cdot e^{-\frac1e}\leqslant\int_{\frac14}^{\frac12}x^x dx\leqslant\frac{\sqrt2}{8}.$

八、证明下列不等式.

1. $\frac{\pi}{12}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{12}\sqrt3;$

   证明 当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\tan x\in[1,\sqrt3]$. 因此: $\frac{\pi}{12}\leq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx\leq\frac{\pi}{12}\sqrt3.$ □

2. $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 当$x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\dfrac{\sin x}{x} \in \left[\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\right]$. 故$\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{2}{\pi} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} dx \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{4}$. 得证. □

九、比较下列各对定积分的大小.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$;

解 当 $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 时. $\sin^2 x \in [0,1)$, 故 $0 \leqslant \sin^4 x \leqslant \sin^2 x$. 因此：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$.

2. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x} dx$ 与 $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$;

解 当$x \in [1,2]$时,$\sqrt{5-x} \geqslant \sqrt{3}$且$\sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{3}$. 即：$\sqrt{5-x} \geqslant \sqrt{x+1} \geqslant 0$. 所以有:$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x} dx \geqslant \int_1^2 \sqrt{x+1} dx$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}$ 与 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\sin x}$;

解 当$x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时. $\sin x \leq x$, $0 \leq e^{-x} \leq e^{-\sin x}$ 故 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\sin x}$.

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin(\sin x) dx$ 与 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \cos(\sin x) dx$.

解

Solution 1. 注意到 $(\forall x > 0)\ \sin x < x$, 以及 $\cos x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上递减，于是 $\sin\cos x < \cos x < \cos\sin x$. 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\cos x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Solution 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} > 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Solution 3. 其实画图也可以，这里不好画，习题课上讲！

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$ 与 $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} dx$.

解 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 R 上单调递减，利用定积分的几何意义易知：$\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx > \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} dx$.

十、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

1. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$, 且至少有一点 $c \in [a,b]$, 使得 $f(c) > 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

2. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant g(x)$, 且至少有一点 $c \in [a,b]$, 使得 $f(c) > g(c)$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明 1. 由连续性. $\exists x = c$ 的小邻域：$[c-\delta, c+\delta]$. s.t. $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2} f(c) > 0$. 又在 $x \in [a,b]$ 上 , $f(x) \geqslant 0$.

故 $\displaystyle\int_a^b f(x) dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geqslant 2\delta \cdot \frac{1}{2} f(c) = \delta \cdot \delta(c) > 0$. 故得证. □

证明 2. 设 $F(x)=f(x)-g(x)$. 故 $F(x)$ 连续. 由第 1 问的证明可得: $\int_a^b F(x)dx>0$. 故 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$.□

十一、

1. 设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=m, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x=n$, 则 $\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=(C)$.

   A. $m+n$　　B. $m-n$　　C. $n-m$　　D. 0

2. 初等函数 $f(x)$ 在其定义区间 $[a,b]$ 上不一定 (B).
   A. 连续　　B. 可导　　C. 存在原函数　　D. 可积

3. 下列函数中, 在区间 $[-1,3]$ 上不可积的是 (D).
   A. $f(x)=\begin{cases}3,-1<x<3,\\0,x=-1,x=3\end{cases}$　B. $f(x)=[x]$　C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},x\neq 0,\\1,x=0\end{cases}$　D. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},x\neq 0,\\1,x=0\end{cases}$

十二、求数列极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{x^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}p\cdot\dfrac{\xi^2}{\xi^2+a^2}\quad(n\leqslant\xi\leqslant n+p)=\lim\limits_{\xi\to\infty}p\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{a^2}{\xi^2}}=p.$

十三、设函数 $f(x)$ 连续, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot hf(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant a+h)\\
&=\lim_{\xi\to a}f(\xi)\\
&=f(a).
\end{aligned}
$$

第二章 微积分基本公式