



微积分习题册参考答案

大学数学习题册第三版

作者: YiShao

时间: February 28, 2024

单位: SCU&Shishi Experimental School of Chengdu Eastern New Area



海纳百川，有容乃大

前言

该参考答案讲义采用了Elegant \LaTeX 模板，官网：<https://elegantlatex.org/>，在此向开发者表示诚挚的谢意。

该参考答案仅供内部交流使用，不建议随意发布到网上。（水平有限）

目前更新进度主要适用于微积分 2 下册的同学哈！有任何疑问，请联系左博团队的艺少.

邮箱：571136772@qq.com

目录

第一章 定积分的概念与性质	1
第二章 微积分基本公式	7

第一章 定积分的概念与性质

一、利用定积分的定义计算下列定积分.

1. $\int_a^b x \, dx (a < b);$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \left(na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

2. $\int_0^1 e^x \, dx;$

解

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

$$\text{对分母有: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \stackrel{\text{令 } x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot (1 - e^x) = -1.$$

$$\text{因此: } \int_0^1 e^x \, dx = e - 1.$$

二、利用定积分的几何意义, 求下列定积分.

1. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx;$

解 相当于是一个半径为 a 的半圆的面积, 答案为 $\frac{\pi}{2}a^2$.

2. $\int_{-1}^3 x \, dx;$

解 作图可知答案为 4.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx;$

解 画图可知答案为 0.

4. $\int_a^b (kx + m) \, dx (0 \leq a < b);$

解 画图可知梯形面积为: $\frac{k}{2}(b^2 - a^2) + m(b - a) \Rightarrow I = \frac{k}{2}(b^2 - a^2) + m(b - a).$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加, $f(0) = 0, x = g(y)$ 是其反函数, 试用定积分的几何意义说明下式成立:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geq ab (a > 0, b > 0). \quad [\text{Young 不等式}]$$

证明 ① 先证当 $b = f(a)$ 时等号成立.

将区间 $[0, a]$ 作划分: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$, 记 $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 则

$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b$, 再记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 于是

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i) \Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_{i-1} (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i (y_i - y_{i-1}) = x_n y_n - x_0 y_0 = ab,$$

记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i) \Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b = f(a)$ 时,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = ab,$$

② 在一般情况下, 设

$$F(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy - ab.$$

则 $F'(a) = f(a) - b$, 记 $f(T) = b$, 可知当 $0 < a < T$ 时, $F(a)$ 单调减少, 当 $a > T$ 时, $F(a)$ 单调增加, 所以 $F(a)$ 在 $a = T$ 处取到最小值. 由上面的讨论, 可知最小值 $F(T) = 0$, 从而 $F(a) \geq 0$, 这就是所要证明的. \square

作图方法见习题课. 如果暂时看不懂证明也没关系, 微积分 2 期末考试一般是不会考 Young 不等式的证明, 但是习题课还是会讲我们是如何进行分析的. 关于积分不等式的证明我们会单独列一个专题讲解.

三、用定积分表示下列数列极限.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt[3]{1 + \frac{n}{n}} \right);$$

解 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx.$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{n} \left\{ \sin a + \sin \left(a + \frac{h}{n} \right) + \sin \left(a + \frac{2h}{n} \right) + \cdots + \sin \left[a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \right\}.$$

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{n} \left\{ \sin a + \sin \left(a + \frac{h}{n} \right) + \cdots + \sin \left(a + \frac{n}{n} h \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+h) - a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sin \left(a + \frac{i}{n} \cdot h \right) \\ &= \int_a^{a+h} \sin x dx. \end{aligned}$$

四、试用定积分的几何意义解释以下性质.

$$1. \text{若 } f(x) \text{ 是奇函数, 则 } \int_{-a}^a f(x)dx = 0;$$

$$2. \text{若 } f(x) \text{ 是偶函数, 则 } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx;$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(a+b-x)dx \right]. \quad [\text{区间再现公式}]$$

1 和 2 比较平凡, 其中第 3 个非常重要! 习题课将会作为专题讲解!

五、利用定积分的定义证明以下性质.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k \text{ 是常数}).$$

证明 $\int_a^b k \cdot f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) = k \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \square$

六、设 $D(x)$ 是狄利克雷函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

问: 定积分 $\int_a^b D(x) dx (a < b)$ 是否存在? 为什么?

解 先假设存在. $I = \int_a^b D(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n D(x_i), x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i.$

① 取 $x_i \in Q. D(x_i) = 1. I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot n = b-a > 0.$

② 取 $x_i \notin Q. D(x_i) = 0. I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot 0 = 0.$

与假设矛盾, 故不存在.

七、估计下列定积分的值.

1. $\int_0^2 x e^{-x} dx.$

解 记 $f(x) = x \cdot e^{-x}, f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$, 故 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0$; $1 < x < 2$ 时 $f'(x) < 0$.

因此 $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}, f(x)_{\min} = \min\{f(0), f(2)\} = 0.$

$$\text{故 } 0 \leq \int_0^2 x \cdot e^{-x} dx \leq \frac{2}{e}.$$

2. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^x dx.$

解 记 $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x}, f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$. 故 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$; $\frac{1}{e} < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$.

因此 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}, f(x)_{\max} = \max\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\text{故 } \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{e}} \leq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^x dx \leq \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

八、证明下列不等式.

1. $\frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \leq \frac{\pi}{12} \sqrt{3};$

证明 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\tan x \in [1, \sqrt{3}]$. 因此: $\frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \leq \frac{\pi}{12} \sqrt{3}.$

□

2. $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

证明 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\frac{\sin x}{x} \in \left[\frac{2}{\pi}, \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right]$. 故 $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}$. 得证. \square

九、比较下列各对定积分的大小.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$;

解 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\sin^2 x \in [0, 1)$, 故 $0 \leq \sin^4 x \leq \sin^2 x$. 因此: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$.

2. $\int_1^2 \sqrt{5-x} dx$ 与 $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$;

解 当 $x \in [1, 2]$ 时, $\sqrt{5-x} \geq \sqrt{3}$ 且 $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$. 即: $\sqrt{5-x} \geq \sqrt{x+1} \geq 0$. 所以有: $\int_1^2 \sqrt{5-x} dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1} dx$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\sin x} dx$;

解 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x \leq x$, $0 \leq e^{-x} \leq e^{-\sin x}$ 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\sin x} dx$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin(\sin x) dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \cos(\sin x) dx$.

解

Solution 1. 注意到 $(\forall x > 0) \sin x < x$, 以及 $\cos x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上递减, 于是 $\sin \cos x < \cos x < \cos \sin x$. 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sin x dx.$$

Solution 2.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \cos x dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{1 - \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8} > 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sin x dx &= \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1. \end{aligned}$$

Solution 3. 其实画图也可以, 这里不好画, 习题课上讲!

5. $\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$ 与 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} dx$.

解 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 R 上单调递减, 利用定积分的几何意义易知: $\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx > \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} dx$.

十、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 且至少有一点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

2. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 且至少有一点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > g(c)$, 则 $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

证明 1. 由连续性. $\exists x = c$ 的小邻域: $[c - \delta, c + \delta]$. s.t. $f(x) \geq \frac{1}{2}f(c) > 0$. 又在 $x \in [a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$.

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geq 2\delta \cdot \frac{1}{2}f(c) = \delta \cdot \delta(c) > 0. \text{ 故得证. } \square$$

证明 2. 设 $F(x) = f(x) - g(x)$. 故 $F(x)$ 连续. 由第 1 问的证明可得: $\int_a^b F(x) dx > 0$. 故 $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$. \square

十一、

1. 设 $\int_a^b f(x)dx = m$, $\int_c^b f(x)dx = n$, 则 $\int_c^a f(x)dx = (C)$.

A. $m+n$ B. $m-n$ C. $n-m$ D. 0

2. 初等函数 $f(x)$ 在其定义区间 $[a, b]$ 上不一定 (B).

A. 连续 B. 可导 C. 存在原函数 D. 可积

3. 下列函数中, 在区间 $[-1, 3]$ 上不可积的是 (D).

A. $f(x) = \begin{cases} 3, & -1 < x < 3, \\ 0, & x = -1, x = 3 \end{cases}$ B. $f(x) = [x]$ C. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ D. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

十二、求数列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx$

解 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} p \cdot \frac{\xi^2}{\xi^2 + a^2} \quad (n \leq \xi \leq n+p) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{\xi^2}} = p.$

十三、设函数 $f(x)$ 连续, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx$.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq a+h) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow a} f(\xi) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

第二章 微积分基本公式