Lecture 5：

60. 已知函数矩阵

$$A(x)=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x & x\\ \dfrac{\sin x}{x} & e^x & x^2\\ 1 & 0 & x^3\end{bmatrix}$$

其中 $x\neq0$，试求 $\lim\limits_{x\to0}A(x)$，$\dfrac{dA(x)}{dx}$，$\dfrac{d^2A(x)}{dx^2}$，$\left|\dfrac{dA(x)}{dx}\right|$.

68. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad X(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

(1) 求 e^{At}；

(2) 求解 $\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)\\ X(0)=(1,0,0,-1)^T.\end{cases}$

70. 设 $f(A)=\|A\|_F^2=\operatorname{tr}(A^TA)$，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是矩阵变量，求 $\dfrac{df}{dA}$.

77. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$b\in\mathbb{R}^m$，$X\in\mathbb{R}^n$ 是向量变量，$f(X)=\|AX-b\|_2^2$，试求 $\dfrac{df}{dX}$.

Lecture 6:

3. 判断下列两个 λ 矩阵是否相抵：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1\\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2\\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda\end{bmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda\\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

9. 求下列 λ 矩阵的史密斯(Smith)标准形：

(1) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ \lambda & 0 & \lambda+1\\ 0 & 0 & -\lambda+2\end{bmatrix}$； (2) $B(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$.

12 设 $A_1=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\ 2 & 6 & -10\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}6 & 20 & -34\\ 6 & 32 & -51\\ 4 & 20 & -32\end{bmatrix}$，分别求 $\lambda I-A_1$ 与 $\lambda I-A_2$ 的史密斯标准形以及 A_1 与 A_2 的不变因子、行列式因子.

Lecture 7:

19. 求出下列矩阵的若尔当标准形：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$；

44. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为 5 阶 λ 矩阵，其秩为 4，初等因子为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$. 试求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子并写出其标准形.

45. 已知 7 阶 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 5，初等因子是 $1,\lambda,\lambda^3,\lambda-2,(\lambda-2)^4,(\lambda-2)^4$. 求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的各阶子式的最高公因子.