2002年“宇振杯”上海市初中数学竞赛

答案

一、填空题

1、【答案】2或9

【解析】设“□”中数字为 a，那么五位数 20□02 的数值为 2×10000+a×100+2=20002+a×100. 因为20002除以7的余数为3，所有，要使得五位数20□02能被7整除，那么a×100除以7的余数必须为4，而0, 100, 200, 300，…，900中，被7除余数为4的只有200和900，即a=2或者9，所有，嵌入的数码“□”是2或9.

2、【答案】$x<\dfrac{1-a}{1+a}$

【解析】已知 $a^3<a<a^2$,即$\begin{cases}a-a^2=a(1-a)<0\\a^3-a=a(a^2-1)<0\end{cases}$

（1） 如果a>0，上不等式组等价于$\begin{cases}a>0\\1-a<0\\a^2-1<0\end{cases}$,即,$\begin{cases}a>0\\a>1\\-1<a<1\end{cases}$ 。这是一个矛盾不等式组，

所以，这种情况应舍去。

（2） 如果a<0,上不等式组等价于$\begin{cases}a>0\\1-a>0\\a^2-1>0\end{cases}$,即,$\begin{cases}a<0\\a<1\\a<-1\text{或}a>1\end{cases}$ ，解得 a<-1

此时，不等式x+a>1-ax等价于（1+a）x>1-a,因为a<-1，即1+a<0，那么（1+a）x>1-a等价于x<$\dfrac{1-a}{1+a}$,所以，原不等式的解为x<$\dfrac{1-a}{1+a}$

3、【答案】9

【解析】由纸片的折叠方式知，△A′BC≌△ABC，所以，过A点到BC的高等于过A′点到BC的高，即△ABC中BC上的高与△ADE中DE上的高的比为-1:2，又因为DE∥BC,所以，△ABC∽△ADE,由相似三角形的性质得△ABC 的面积：△ADE 的面积=$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，从而，梯形BDEC的面积为△ABC面积的3倍。已知AB=2，AC=3，所以，△ABC的面积为$\dfrac{1}{2}$×2×3=3，从而，梯形BDEC的面积为3×3=9.

4、【答案】-11<a<-9

5、【答案】221

【解析】已知A（10,0）、B（0,10），所以，直线AB的方程为y=-x+10

在△ABO内，当一个点的横坐标为1时，如果这个点在直线AB上，那么这个点的纵坐标为-1+10=9，所以，只要横坐标为1，纵坐标大于等于0小于等于9的点都在△ABO的内部或者AB边或者AO边上，共10个点，显然这些点均符合题意。

同理，当一个点的横坐标为2时，如果这个点在直线AB上，那么这个点的纵坐标为-2+10=8，所以，只要横坐标为2，纵坐标大于等于0小于等于8的点都在△ABO的内部或者AB边或者AO边上，共9个点，显然这些点均符合题意。

…

当一个点的横坐标为 9 时，如果这个点在直线 AB 上，那么这个点的纵坐标为-9+10=1，所以，只要横坐标为 9，纵坐标大于等于 0 小于等于 1 的点都在△ABO 的内部或者 AB 边或者 AO 边上，共 2 个点，显然这些点均符合题意，当一个点的横坐标为 10 时，只有（10,0）点符合题意，所以，在△ABO 内，共有 10+9+8+⋯+1=11×5=55 个点符合题意。由正方形的对称性知，△BOC,△DOC,△AOD 中各有 55 个点符合题意，显然，（0,0）点也符合题意。
综上，符合题意的点共有 55×4+1=221 个。

6、【答案】$\frac{5}{12}$

7、【答案】$\sqrt{6}$

8、【答案】99

9、【答案】4

【解析】因为 x，y，z>0，则（x+y）（y+z）=xy+yy+xz+yz=(x+y+z)y+yz

令（x+y+z）y=a,yz=b,则（x+y）（y+z）=xy+yy+xz+yz=(x+y+z)y+yz=a+b

又因为 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}=\sqrt{(x+y+z)xyz}=\sqrt{4}=2$，所以，a+b 的最小值为 4，即(x+y)(y+z)的最小值为 4.

10、【答案】a≥0 或 a= $-\frac{3}{16}$

【解析】令 $\sqrt[4]{x^2}=y,则\sqrt{x^2}=y^2$，那么原方程等价于

$y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}-a=0$ （1）

已知原方程有两个不同的实数解，因为 $\sqrt[4]{x^2}$ =y，所以，$y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}-a=0$ 必有一个实数根，

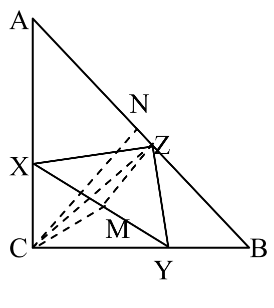
未完

二、【解答】因为已知整系数二次方程有整数根，所以△=$4p^2-4(p^2-5p-1)=4(5p+1)$为完全平方。从而，5p+1 为完全平方，令 $5p+1=n^2$,注意到 p≥2，故 n≥4，且 n 为整数，于是 5p=（n+1）（n−1）。则 n+1、n−1 中至少有一个是 5 的倍数，即 n=5k±1（k 为正整数）。因此 $5p+1=25k^2$±10k+1，p=k（5k±2），由 p 为质数，5k±2>1，知 k=1，p=3 或 7

当 p=3 时，已知方程变成 $x^2-6x-7=0$，解得 $x_1=-1,x_2=7$;

当 p=7 时，已知方程变成 $x^2-14x+13=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=13$，所以 p=3 或 7.

三、【解答】（1）如图，

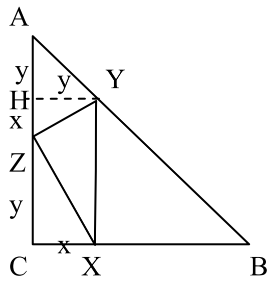


顶点 Z 在斜边 AB 上，取 XY 的中点 M，连 CM、ZM、CZ，并作边 AB 上的高 CN，则

$CZ \leqslant CM+MZ=\frac{1}{2}XY+\frac{1}{2}XY=XY=\sqrt{2}$

又 $CN \leqslant CZ$，所以 $CN \leqslant \sqrt{2}$，$CA=\sqrt{2}CN \leqslant 2$.

(2)如图，



顶点 Z 在直角边 CA（或 CB）上，由对称性，不妨设 Z 在 CA 上，设 CX=x，CZ=y，并过 Y 作 YH⊥CA 于 H，易证△ZYH≌△XZC，得 HZ=CX=x，HY=CZ=y，又显然△AHY 为等腰三角形，则 AH=y，设 AC=b，则 2y+x=b，则 x=b-2y，在△CXZ 中，由勾股定理有 $y^2+(b-2y)^2=1^2$,即 $5y^2-4by+b^2-1=0$,因为 y 为实数，则 $\Delta=16b^2-20(b^2-1)=20-4b^2 \geqslant 0$，$b \leqslant \sqrt{5}$，当 $b=\sqrt{5}$ 时，

$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$。

综合（1)、(2）知，b 的最大值为 $\sqrt{5}$

四、【解答】(1）若 7 个点中，有一点孤立（即它不与其他点连线)，则剩下 6 点每 2 点必须连线，此时至少要连 15 条。

（2）若 7 点中，有一点只与另一点连线，则剩下 5 点每 2 点必须连线，此时至少要连 11 条。

（3）若每一点至少引出 3 条线段，则至少要连 $\frac{7\times3}{2}$ 条线段，由于线段数为整数，故此时至少要连 11 条。

（4）若每点至少引出 2 条线段，且确有一点（记为 A）只引出 2 条线段 AB、AC，则不与 A 相连的 4 点每 2 点必须连线，要连 $\frac{4\times3}{2}$=6 条，由 B 引出的线段至少有 2 条，即除 BA 外海至少有一条，因此，此时至少要连 6+2+1=9 条。图中所给除的是连 6+2+1=9 条线的情况。

综合（1）~（4)，至少要连 9 条线段，才能满足要求。