第三讲

圆的基本性质

模块一 圆的基本性质

知识要点

一、圆的定义

1．几何定义：平面上到定点的距离等于定长的所有点所成的图形

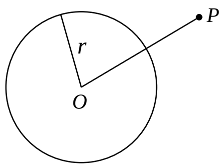
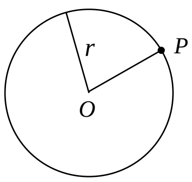
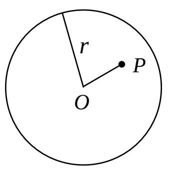
2．轨迹定义：平面上到定点的距离等于定长的点的轨迹

3．集合定义：平面上到定点的距离等于定长的点的集合

4．在圆所在的平面上，以圆周为分界线，含圆心的部分叫做圆的内部（简称圆内），不含圆心的部分叫做圆的外部（简称圆外）.

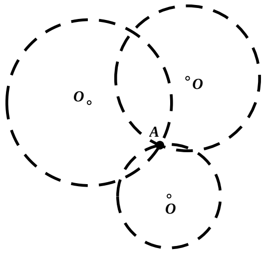
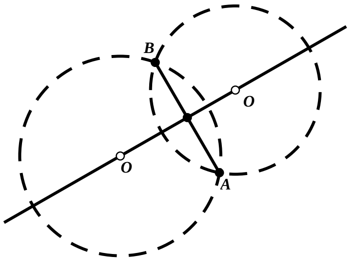
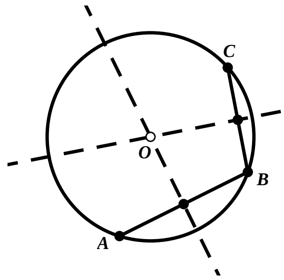
二、点与圆的位置关系：

设一个圆的半径为r，点P到圆心的距离为d，则

位置关系	图形	性质及判定
点在圆外		$d>r\Leftrightarrow$点P在$\odot O$外.
点在圆上		$d=r\Leftrightarrow$点P在$\odot O$上.
点在圆内		$0\le d<r\Leftrightarrow$点P在$\odot O$内.

三、确定圆的条件

1．确定一个圆有两个条件：①圆心（定点），确定圆的位置；②半径（定长），确定圆的大小．

		
经过点 A 的圆： 以点 A 以外的任意一点 O 为圆心，以 OA 的长为半径，即可作出过点 A 的圆，这样的圆有无数个．	经过两点 A、B 的圆： 以线段 AB 中垂线上任意一点 O 作为圆心，以 OA 的长为半径，即可作出过点 A、B 的圆，这样的圆也有无数个．	过三点的圆： ①若 A、B、C 三点共线时，过三点的圆不存在； ②若 A、B、C 三点不共线时，圆心是线段 AB 与 BC 的中垂线的交点（交轨法），而这个交点 O 是唯一存在的，这样的圆有唯一一个．

2．定理：不在同一直线上的三点确定一个圆．

注意：⑴“不在同一直线上”换句话说，在同一直线上的三点不能作圆；

⑵“确定”，即“唯一存在”．

3．三角形的外接圆

⑴三角形的三个顶点确定一个圆．经过一个三角形各顶点的圆叫做这个三角形的外接圆，外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，叫做三角形的外心，这个三角形叫做这个圆的内接三角形．

⑵三角形外心的性质：

①三角形的外心是三角形三条边的垂直平分线的交点，它到三角形各顶点的距离相等；

②三角形的外接圆有且只有一个，即对于给定的三角形，其外心是唯一的，但一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合．

⑶锐角三角形外接圆的圆心在它的内部；

直角三角形外接圆的圆心在斜边中点处（即直角三角形外接圆半径长为斜边的一半）；

钝角三角形外接圆的圆心在它的外部．

4. 多边形的外接圆

如果一个圆经过一个多边形的各个顶点，那么这个圆叫做这个多边形的外接圆，这个多边形叫做这个圆的内接多边形.

模块二 圆的有关概念

知识要点

一、同心圆、同圆、等圆：

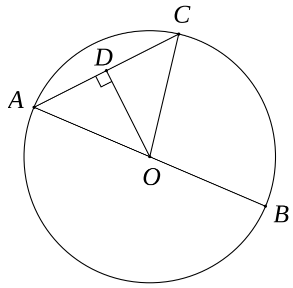
圆心相同、半径不相等的两个圆叫做同心圆.

圆心相同、半径相等的圆叫做同圆.

能够重合的两个圆叫做等圆.

注：同圆或等圆的半径相等.

二、弧和弦：



圆上任意两点之间的部分叫做圆弧，简称弧（arc）；

联结圆上任意两点的线段叫做弦(chord) ；过圆心的弦是直径

圆心到弦的距离叫做弦心距（apothem）

圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆

大于半圆的弧叫做优弧；小于半圆的弧叫做劣弧

由弦及其所对的弧组成的图形叫做弓形

三、圆心角和圆周角

1. 圆心角：以圆心为顶点的角；
2. 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理：

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对弦的弦心距相等.

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦或两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量分别相等.

即：在同圆或等圆中，圆心角相等$\Leftrightarrow$劣弧（或优弧）相等$\Leftrightarrow$弦相等$\Leftrightarrow$弦心距相等

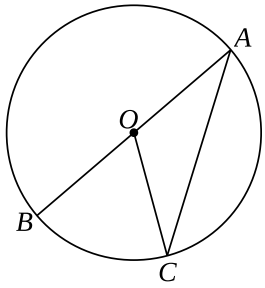
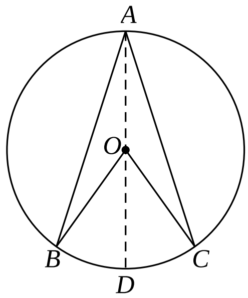
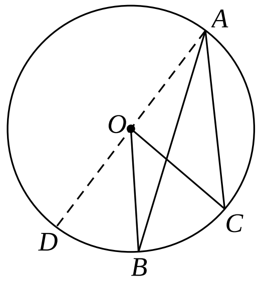
注意：①前提条件是在同圆或等圆中；

②在由等弦推出等弧时应注意：优弧与优弧相等；劣弧与劣弧相等.

3. 圆周角：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角

圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半(中考不能直接用，需要证明)

证明定理：已知在$\odot O$中，$\angle BOC$与圆周角$\angle BAC$同对弧BC，求证：$\angle BOC=2\angle BAC$

如图，当O在$\angle BAC$的一边上时， 即A、O、B在同一直线上时： $\because OA$、OC是半径，即$OA=OC$ $\therefore \angle BAC=\angle ACO$（等边对等角） $\because \angle BOC$是$\triangle OAC$的外角 $\therefore \angle BOC=\angle BAC+\angle ACO=2\angle BAC$	
如图，当O在$\angle BAC$的内部时： 联结AO并延长交$\odot O$于D $\because OA$、OB、OC是半径 $\therefore OA=OB=OC$ $\therefore \angle BAD=\angle ABO$，$\angle CAD=\angle ACO$（等边对等角） $\because \angle BOD$、$\angle COD$分别是$\triangle AOB$、$\triangle AOC$的外角 $\therefore \angle BOD=\angle BAD+\angle ABO=2\angle BAD$ $\angle COD=\angle CAD+\angle ACO=2\angle CAD$ $\therefore \angle BOC=\angle BOD+\angle COD=2\left(\angle BAD+\angle CAD\right)=2\angle BAC$	
如图，当$\odot O$在$\angle BAC$的外部时： 联结AO并延长交$\odot O$于D $\because OA$、OB、OC是半径 $\therefore \angle BAD=\angle ABO$、$\angle CAD=\angle ACO$（等边对等角） $\because \angle DOB$、$\angle DOC$分别是$\triangle AOB$、$\triangle AOC$的外角 $\therefore \angle DOB=\angle BAD+\angle ABO=2\angle BAD$ $\angle DOC=\angle CAD+\angle ACO=2\angle CAD$ $\because \angle BOC=\angle DOC-\angle DOB=2\left(\angle CAD-\angle BAD\right)=2\angle BAC$	

推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等；

同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等.

推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径

推论3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形

（拓）由圆周角定理，还可得到圆内接四边形的性质定理：

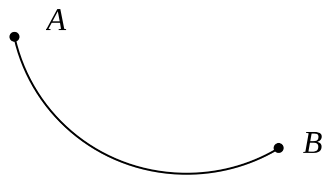
圆内接四边形的对角互补，并且任一外角都等于它的内对角.

八升九衔接班

例题精讲

【例题1】

作出$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心，并补全整个圆.



【分析】 1．取$\overset{\frown}{AB}$上任意一点C，联结AB、BC

2．作线段AB的垂直平分线l_1

3．作线段BC的垂直平分线l_2，设l_2与l_1相交于点O

4．以点O为圆心，OA为半径作$\odot O$

$\odot O$ 就是所求作的圆

【例题2】

⑴在坐标平面内，$A\left(4,-\tan 60^\circ\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{a^2}}{|a|},0\right)$，$\odot A$ 的半径为4，则点B与$\odot A$的位置关系为________.

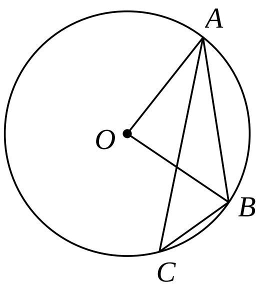
⑵已知以原点为圆心，半径为5的圆，则二次函数$y=x^2-6x+13$的顶点与圆的位置关系为________.

⑶一个点到圆的最大距离为13，最小距离为5，则圆的半径为________.

【分析】 ⑴点B在$\odot A$内；⑵顶点在圆上；⑶$4$或9；

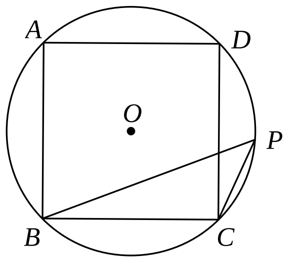
【例题3】

⑴如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，已知 $\angle ABO=50^\circ$，则 $\angle ACB$ 的大小为________.

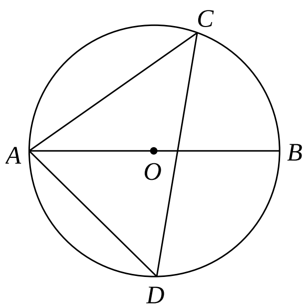


⑵已知：如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形，点 P 是劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上不同于点 C 的任意一点，则 $\angle BPC$ 的度数是（　　）

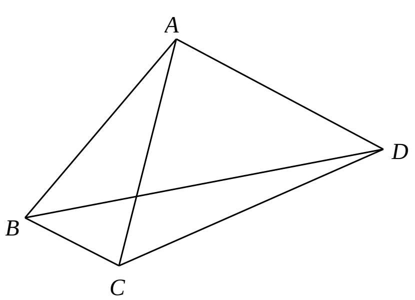
A． 45°　　B． 60°　　C． 75°　　D． 90°



⑶如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是 $\odot O$ 的弦，联结 AC 、AD，若 $\angle CAB=35^\circ$，则 $\angle ADC$ 的度数为________.



⑷如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD$，若 $\angle CAD=76^\circ$，$\angle BDC=13^\circ$，则 $\angle CBD=$ ________，$\angle BAC=$ ________.

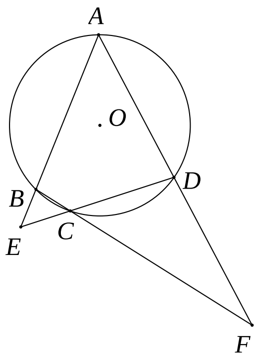


【分析】 ⑴ 40° ⑵ A ⑶ 55° ⑷ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle CAD=38^\circ$， $\angle BAC=2\angle BDC=26^\circ$.

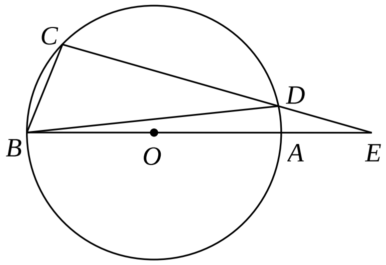
八升九衔接班

【例题4】

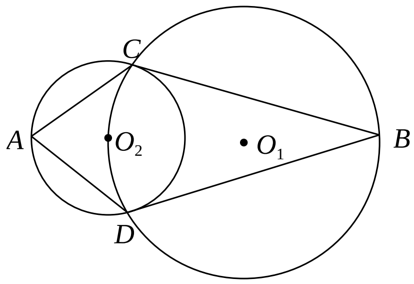
⑴如图，延长圆内接四边形$ABCD$ 的边AB、DC 相交于E，AD、BC 的延长线相交于F，若$\angle E=50^\circ$，$\angle F=30^\circ$，则$\angle A=$________.



⑵如图，已知AB为$\odot O$ 的直径，$\angle E=20^\circ$，$\angle DBC=50^\circ$，则$\angle CBE=$ ________.



⑶如图所示，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于C、D两点，且$\odot O_1$ 过$\odot O_2$ 的圆心O_2，若$\angle B=32^\circ$，则$\angle A$的度数为________.



【分析】 ⑴$50^\circ$；⑵联结AC，60°或联结OC、OD；⑶$74^\circ$，辅助线：联结CO_2，DO_2.

模块三 垂径定理

知识要点

一、圆的对称性

1. 圆的轴对称性：圆是轴对称图形，对称轴是经过圆心的任意一条直线.

2. 圆的中心对称性：圆是中心对称图形，对称中心是圆心.

3. 圆的旋转对称性：圆是旋转对称图形，无论绕圆心旋转多少角度，都能与其自身重合.

二、垂径定理（圆心到弦的距离叫做弦心距）

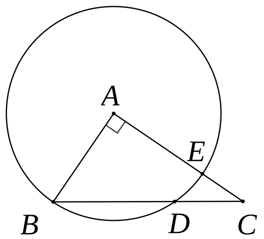
1. 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.
2. 推论 1：⑴ 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；
   ⑵ 弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；
   ⑶ 平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.
3. 推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

注意：若“过圆心的直线”、“垂直于弦”、“平分弦（非直径）”、“平分弦所对的优弧”、“平分弦所对的劣弧”中的任意两个成立，则另外三个都成立.

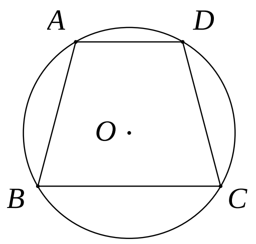
例题精讲

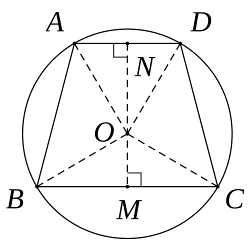
【例题5】

⑴如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^{\circ}$，以A为圆心，以AB为半径的圆分别交BC、AC于点D、E，若$BD=10$，$DC=6$，则$AC^2=$________.



⑵如图所示，$AD/\!/BC$，$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$，若$AD=4$，$BC=6$，则四边形$ABCD$的面积是________.





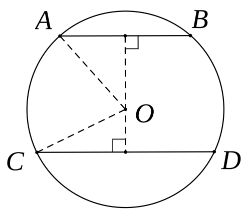
【分析】 ⑴176，过A作BD的垂线，利用射影定理．⑵25，三垂直全等

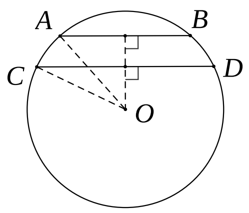
【例题6】

⑴已知$\odot O$ 半径$OB=13$，AB、CD是弦，$AB//CD$，$AB=10$，$CD=24$，则AB与CD的距离是________.

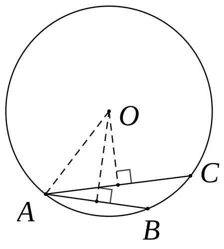
⑵在半径为1的$\odot O$ 中，弦AB，AC的长分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，$\angle BAC$的度数是________.

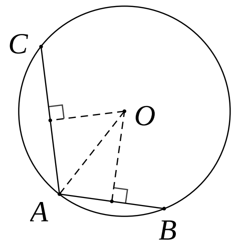
【分析】 ⑴ AB、CD之间的距离为7或者17.





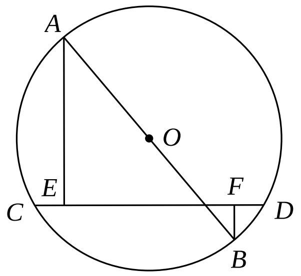
⑵$15°$或$75°$.



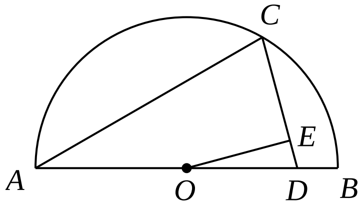


【例题7】

⑴如图所示，AB是$\odot O$ 的直径，CD是弦，$AE\perp CD$于E，$BF\perp CD$于F，$AB=26$厘米，$CD=24$厘米，则$AE-BF=$________.



⑵如图所示，AB是半圆O的直径，$AC=AD$，$OD=2$，$\angle CAB=30°$，则点O到CD的距离$OE=$________.

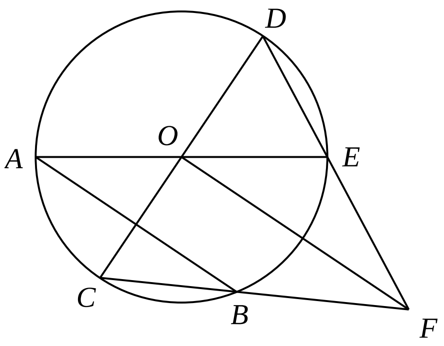


【分析】 ⑴$10$厘米；⑵$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

八升九衔接班

【例题8】

如图，AE、CD是$\odot O$的两条直径，弦$AB\perp CD$，BC、DE交于点F，求证：$OF\parallel AB$.



【分析】　联结BE，$\because AE$是直径，$\therefore BE\perp AB$．$\because \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$，$\therefore \overset{\frown}{CBE}=\overset{\frown}{DEB}$，$\therefore \angle C=\angle D$．

又$\because O$为CD中点，$\therefore OF\perp CO$，$\therefore OF\parallel AB$.

本讲巩固

【巩固1】

⑴已知$\odot O$外一点A和圆上的点最大距离为23厘米，最小距离为10厘米，则$\odot O$的半径为________.

⑵已知以点$(2,0)$为圆心，半径为3的圆，则二次函数$y=x^2-5x+3$的顶点与圆的位置关系为________.

⑶在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D、E分别是AB、AC的中点，$AC=7$，$BC=4$．若以点C为圆心，BC为半径作圆，则点D、E与$\odot C$的位置关系分别为________，________.

⑷若$\odot O$的半径为5，圆心O的坐标为$(1,1)$，点$A(1,y)$在圆上，$y=$________.

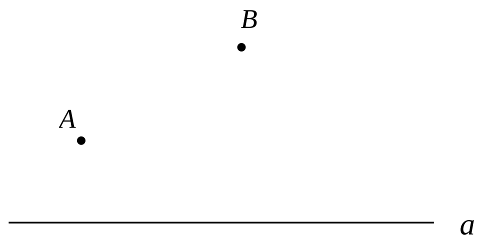
【分析】　⑴$6.5$厘米；⑵顶点在圆外．顶点$\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$，顶点到圆心距离$\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{13}{4}\right)^2}>3$

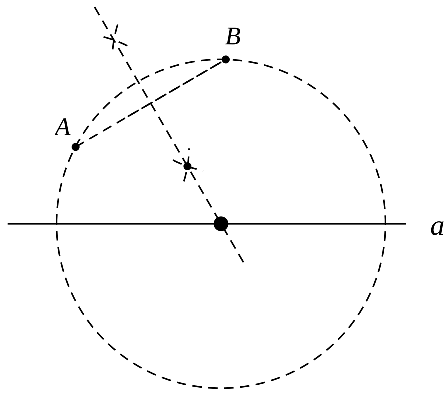
⑶点D在$\odot C$外，点E在$\odot C$内；⑷$6$或-4．

【巩固2】

已知直线a和直线外的两点A、B，经过A、B作一圆，使它的圆心在直线a上.

八升九衔接班

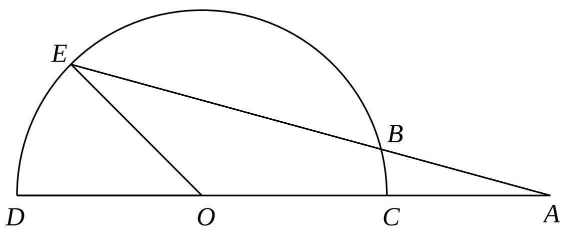




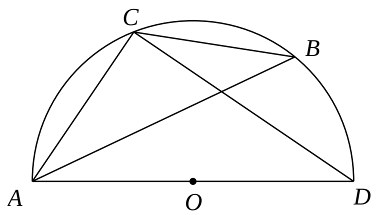
【分析】 如图

【巩固3】

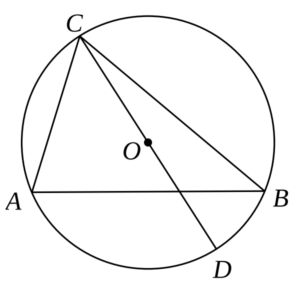
⑴如图，CD是半圆的直径，O是圆心，E是半圆上一点，且$\angle EOD=45^\circ$，A是DC延长线上一点，AE与半圆交于B，若$AB=OC$，则$\angle EAD=$________.



⑵如图所示，AD是直径，且$AD=3$，$CD=2$，则$\sin B=$________.

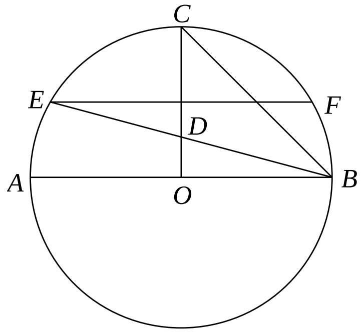


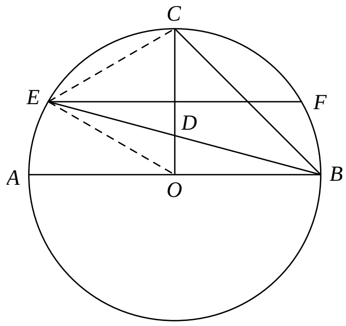
⑶如图，$\odot O$ 是$\triangle ABC$的外接圆，CD是直径，$\angle B=40^\circ$，则$\angle ACD$的度数是________.



⑷已知：如图，AB是$\odot O$ 的直径，半径$OC\perp AB$，过OC的中点D作$EF//AB$.

求证：$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle CBE$．





【分析】 ⑴联结 OB，$OB=OC=AB\Rightarrow\angle EBO=2\angle A$

$OB=OE\Rightarrow\angle EBO=\angle OEB\Rightarrow\angle EOD=\angle OEB+\angle A=3\angle A\Rightarrow\angle A=15^\circ$

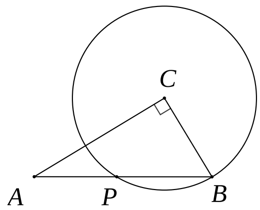
⑵ $\frac{\sqrt{5}}{3}$．

⑶联结 BD（或 AD），$\angle ACD=\angle ABD=\angle DBC-\angle ABC=90^\circ-40^\circ=50^\circ$

⑷易证 $\triangle OCE$ 为正三角形，$\angle CBE=\frac{1}{2}\angle COE=30^\circ$， $\angle ABE=\angle OBC-\angle CBE=15^\circ$

【巩固4】

如图所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=1$，若以 C 为圆心、CB 的长为半径的圆交 AB 于 P，则 $AP=$________．



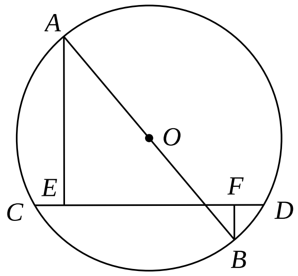
【分析】 过 C 作 $CM\perp PB$ 于 M，即 $MP=MB$，设为 $MB=x$，

$Rt\triangle ABC$ 中，有 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3}$，$\triangle ABC\backsim\triangle BMC$，

得 $BC^2=BM\cdot AB$，即 $1^2=\sqrt{3}x$，$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 故 $AP=AB-2x=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【巩固5】

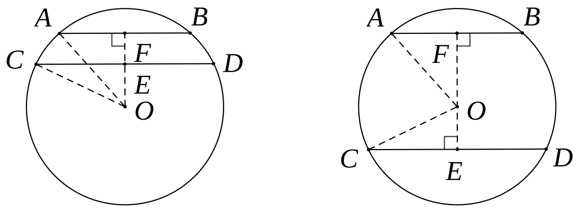
如图所示，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，$AE\perp CD$ 于 E，$BF\perp CD$ 于 F，求证：$CE=DF$．



【分析】 提示：过O作$OM\perp CD$于M，则$CM=DM$，根据平行线分线段成比例，$EM=FM$

【巩固6】

已知⊙O的直径是50，⊙O的两条平行弦$AB=40$，$CD=48$，求弦AB与CD间的距离.



【分析】 分类讨论，本题有两种情况：

⑴ AB，CD在圆心O的同侧，作$OF\perp AB$于F，交CD于E如图所示.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore OE\perp CD$由垂径定理知：$AF=\dfrac{1}{2}AB=20$，$CE=\dfrac{1}{2}CD=24$.

联结OA与OC，$OA=OC=25$．$\therefore OE=\sqrt{25^2-24^2}=7$，$OF=\sqrt{25^2-20^2}=15$

$\therefore AB$与CD之间的距离$EF=15-7=8$

⑵ AB，CD在圆心O的两侧，如右图所示，AB与CD之间的距离$EF=15+7=22$.