

## 2009年新知杯上海市初中数学竞赛

### 一、填空题（第1-5小题每题8分，第6-10小题每题10分，共90分）

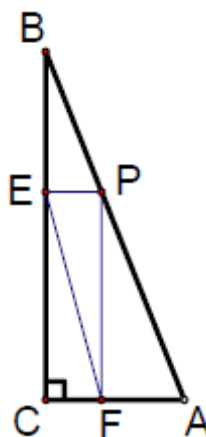
1、对于任意实数 $a, b$ ，定义 $a*b = a(a+b)+b$ ，已知 $a*2.5=28.5$ ，则实数 $a$ 的值是\_\_\_\_\_。

2、在三角形 $ABC$ 中， $AB=b^2-1$ ， $BC=a^2$ ， $CA=2a$ ，其中 $a, b$ 是大于1的整数，则 $b-a=$ \_\_\_\_\_。

3、一个平行四边形可以被分成92个边长为1的正三角形，它的周长可能是\_\_\_\_\_。

4、已知关于 $x$ 的方程 $x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$ 有实根，并且所有实根的乘积为-2，则所有实根的平方和为\_\_\_\_\_。

5、如图，直角三角形 $ABC$ 中  $AC = 1$ ， $BC = 2$ ， $P$ 为斜边 $AB$ 上一动点。 $PE \perp BC$ ， $PF \perp CA$ ，则线段  $EF$ 长的最小值为 \_\_\_\_\_。

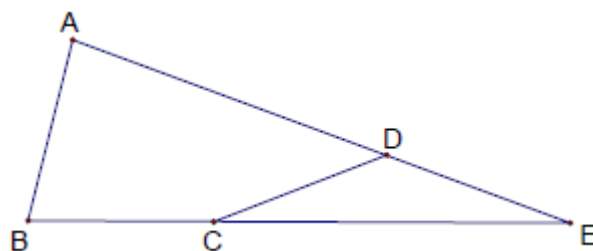


6、设 $a, b$ 是方程 $x^2+68x+1=0$ 的两个根， $c, d$ 是方程 $x^2-86x+1=0$ 的两个根，则 $(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)$ 的值为\_\_\_\_\_。

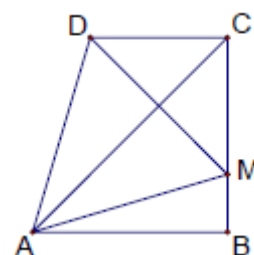
7、在平面直角坐标系中有两点 $P(-1, 1)$ ， $Q(2, 2)$ ，函数 $y = kx - 1$ 的图像与线段 $PQ$ 延长线相交（交点不包括 $Q$ ），则实数 $k$ 的取值范围是\_\_\_\_\_。

8、方程 $xyz=2009$ 的所有整数解有\_\_\_\_\_组。

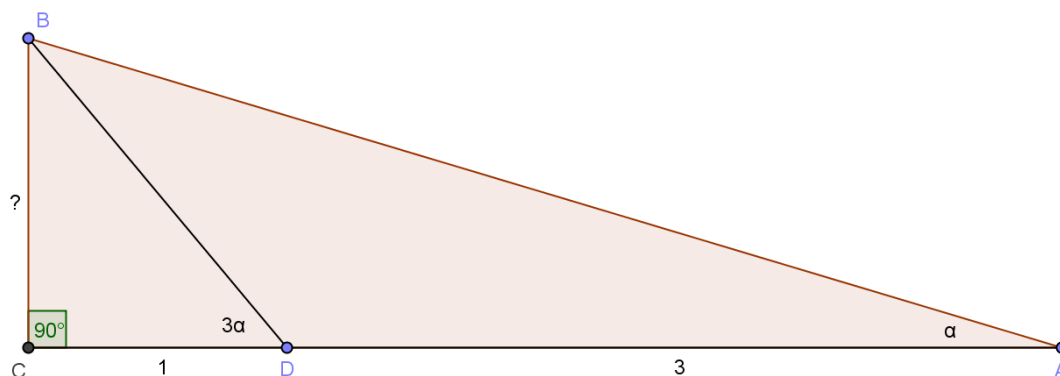
9、如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB=BC=CD$ ， $\angle ABC = 78^\circ$ ， $\angle BCD = 162^\circ$ 。设 $AD$ ， $BC$ 延长线交于 $E$ ，则 $\angle AEB=$ \_\_\_\_\_。



10、如图，在直角梯形ABCD中， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB=BC=10$ ，点M在BC上，使得 $\triangle ADM$ 是正三角形，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle DCM$ 的面积和是\_\_\_\_\_。



二、（本题15分）如图， $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 90^\circ$ ，点D在CA上，使得 $CD=1$ ， $AD=3$ ，并且 $\angle BDC=3\angle BAC$ ，求BC的长。



三、（本题15分）求所有满足下列条件的四位数 $abcd$ ： $abcd = (ab+ed)^2$ ，其中数字c可以是0。

四、（本题15分）正整数n满足以下条件：任意n个大于1且不超过2009的两两互素的正整数中，至少有一个素数，求最小的n。

五、（本题15分）若两个实数 $a, b$ 使得 $a^2+b$ 与 $a+b^2$ 都是有理数，称数对 $(a, b)$ 是和谐的。

①试找出一对无理数，使得 $(a, b)$ 是和谐的；

②证明：若 $(a, b)$ 是和谐的，且 $a+b$ 是不等于1的有理数，则 $a, b$ 都是有理数；

③证明：若 $(a, b)$ 是和谐的，且 $a/b$ 是有理数，则 $a, b$ 都是有理数。