分数乘除法讲解

学习过分数后，除法就可以化为乘法来解决。
为此我们需要引入一个新的数——**倒数**，拼音是dào shù

倒数 reciprocal / multiplicative inverse

1. 非零整数 n 的倒数是分数 $\frac{1}{n}$
2. 分数 $\frac{b}{a}$ 的倒数是 $\frac{a}{b}$, 此处 $a \neq 0, b \neq 0$
3. 互为倒数的两个数的乘积为1，即 $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$
4. 带分数的倒数求法，先化成假分数，然后利用第2条规则即可得到
5. 除0以外的数都有倒数，乘积为1的两个数是互为倒数关系。

举例：

1. 15的倒数是 $\frac{1}{15}$
2. 分数$\frac{3}{4}$的倒数是 $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
3. 带分数 $3\frac{2}{5}$的倒数是 (1) 化成假分数$\frac{17}{5}$，(2) 再颠倒就是 $\frac{5}{17}$
4. 倒数是本身的数 即 $x = \frac{1}{x}$, 所以 $x^2 = 1, x = \pm 1$

分数分类

1. 分数值**小于1**的分数，为**真分数**(< 1)，即 分子小于分母的分数为真分数(proper fraction)，真分数都小于1
2. 分数值**大于或等于1**的分数，为**假分数**(≥ 1)，即 分子大于或等于分母的分数为假分数（improper fraction），**假分数不小于1**
3. 整数和真分数合成的数叫带分数, 带分数都大于1

   例如：$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$是真分数

   $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{13}{11}$是假分数

   $2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{7}, 3\frac{16}{113}$是带分数

例题

1. 写出所有分母是7的真分数
   - $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$
2. 写出所有分子是7的假分数
   - $\frac{7}{1}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{7}$
3. 写出6个分母是7的假分数
   - $\frac{10}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{14}{7}, \frac{15}{7}, \frac{16}{7}$

4. 分母是7的所有真分数有 6 个，其中最大的是 $\frac{6}{7}$, 最小的是 $\frac{1}{7}$
5. 分子是7的假分数有 7 个，最大的是 $\frac{7}{7}$
6. 分数单位是 $\frac{1}{9}$ 的最大真分数是 $\frac{8}{9}$, 最小假分数是 $\frac{9}{9}$

分数乘法 Fractional multiplication

乘法法则

分数的分子与分子相乘，分母与分母相乘，**能约分的要先约分**，分子不能和分母乘。

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

乘法分类

1. 分数乘整数时，用分数的分子和整数相乘的积作为分子，分母不变。**能约分的要先约分。**
   - $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
   - $5 \times \frac{3}{7} = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$
   - $\frac{5}{\cancel{8}^{2}} \times \cancel{4}^{1} = \frac{5}{2} \times 1 = 2\frac{1}{2}$,先约分后相乘
   - $\frac{a}{b} \times c = c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$
2. 带分数乘以整数时
   - 将带分数化成假分数，用分类1的方法做乘法
     如 $2\frac{1}{5} \times 4 = \frac{11}{5} \times 4 = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$
   - 或者 将带分数看成是“整数+真分数”，利用 **乘法分配律** 进行简便运算
     如 $2\frac{1}{5} \times 4 = (2 + \frac{1}{5}) \times 4 = 8 + \frac{4}{5} = 8\frac{4}{5}$

     如 $5 \times 3\frac{2}{7} = 5 \times (3 + \frac{2}{7}) = 15 + \frac{10}{7} = 15 + 1\frac{3}{7} = 16\frac{3}{7}$

     如 $3 \times 4\frac{3}{5} = 3 \times (4 + \frac{3}{5}) = 12 + \frac{9}{5} = 12 + 1\frac{4}{5} = 13\frac{4}{5}$
3. 分数乘分数, 用分子相乘的积作为分子，分母相乘的积作为分母, **能约分的先约分**, 带分数必须化成假分数。
   - $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$
   - $\frac{\cancel{355}^{71}}{113} \times \frac{2}{\cancel{5}^{1}} = \frac{71}{113} \times \frac{2}{1} = \frac{142}{113} = 1\frac{29}{113}$
   - $1\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{5} = \frac{\cancel{5}^{1}}{3} \times \frac{13}{\cancel{5}^{1}} = \frac{1}{3} \times \frac{13}{1} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

分数除法 Fraction division

除法法则

分数除法实际上可以化成分数乘法，除以一个数，等于乘以这个数的**倒数**

分数乘除法结果要求化为最简, **除数不能为 0。**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c},\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

除法分类

1. 分数除以整数：如果分子是整数的倍数，则用分子除以整数，分母不变，否则，分子不变，分母乘以整数，结果都要化成最简分数。
    - $\frac{42}{30} \div 7 = \frac{42 \div 7}{30} = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{30}^5} = \frac{1}{5}$
    - $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$
2. 分数除以分数：等于乘以除数的倒数，整数可以看成分母为1的假分数，带分数要化成假分数。
    - $\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$
    - $\frac{7}{12} \div 1\frac{2}{3} = \frac{7}{12} \div \frac{5}{3} = \frac{7}{\cancel{12}^4} \times \frac{\cancel{3}^1}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$
    - $2\frac{3}{5} \div 5\frac{1}{5} = \frac{13}{5} \div \frac{26}{5} = \frac{\cancel{13}^1}{\cancel{5}^1} \times \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{26}^2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

几个特殊情况

1. $0 \div a = 0,\ a \neq 0$
2. $b \times 0 = 0 \times b = 0$
3. $c + 0 = 0 + c = c$
4. $d - d = 0, d + d = 2d$
5. $e \times 1 = e, e \times e = e^2$
6. $f \div 1 = f$

本节总结

1. 了解倒数概念，并懂得其在除法中的应用
2. 分数的几种表现形式，了解真分数、假分数和带分数的区别
3. 分数乘法法则和约分准则，结果必须化简，即结果是最简分数或整数
4. 分数除法转化为分数乘法，即乘以除数的倒数