关键词：数，分类，数轴，整数，整除，质数（素数），合数，奇数，偶数，应用

整除规则 Divisibility Rule

定义 Definition

（**带余除法**）对于任意整数 a 和非零整数 b，必有唯一一对整数（p，r），使得 a=bp+r （0≤r＜b),其中 p 为商，r 为余数，特别地，当 r=0 时，即 a=bp,则称 a 被 b 整除，或称 b 整除 a，记为 b|a. 若 r≠0，则称 b 不整除 a，记为 $b \nmid a$。

描述了两个自然数之间的一种特殊关系。

表示方法：

b|a 表示 b 整除 a，即 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数（或因数）。如 3|15

整除规律

被 2，3,5 整除规律.

被 4,6，8,9,10,25，100，125 整除规律

被 7,11,12，13，17,19 整除规律

整除基本性质（以下 a,b,c 都是整数）

性质 1. 如果 c|a, c|b，那么 c|（a±b）；推广至一般:若 a|b_i,则 a|$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i$，其中 c_i∈Z,i=1,2,…,n [推广到**同余定理**:如果 a、b 除以 c，余数相同，则 c|(a-b)]

性质 2. 如果 n 是非零整数，（1）若 b|a，则 nb|na；（2）若 nb|na，则 b|a;

性质 3. 如果 c|b，b|a 那么 c|a;

性质 4. 如果 a 有一个小于$\sqrt{a}$的约数 c，则必有一个大于$\sqrt{a}$的约数 d$\left(=\dfrac{a}{c}\right)$.

证明 因为 c 是 a 的约数，因此，就有 a＝cd，

又 c＜$\sqrt{a}$，则

$$a＝cd＜\sqrt{a}\,d，即\quad d＞\sqrt{a}.$$

这表明 a 的约数（除$\sqrt{a}$外），可以成对出现。

性质 4 给出了判别一个数是否为质数的方法（通常称为**筛法**）：

判别n是否为质数，仅需判别≤$\sqrt{n}$的质数是否为n的约数. 如果这些质数（≤$\sqrt{n}$）均不是 n 的约数，就说明 n 是质数。

概念：质数和合数

整数的质因数分解

性质 5 算术基本定理（也叫唯一分解定理）

任一整数 n>1，可以分解成： $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_k^{a_k}$ ， $k \geqslant 1$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相同的质数，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是正整数，而且在不考虑 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的顺序时，这样的分解只有一种。

这个定理在数论中有着广泛的应用，其实在小学阶段学的分解质因数，就是采用的这一算术基本定理。

求正约数个数的推论：求大于 1 的正整数 n 的正约数个数的一般方法如下：

先将 n 分解成 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_k^{a_k}$，（$p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为质数，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是非负整数），则 n 的正约数个数为：$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1) = \prod_{i=1}^{k}(a_i+1)$

正约数包括了 1。

所有约数的和为 $S(n) = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$

性质 6 任一整数 a 可以写为 $a = 2^a j$，这里 a≥0，j 为奇数.(?)

最大公约数与最小公倍数

如果 d|a，d|b，那么称 d 是 a、b 的公约数，公约数中最大的数叫做**最大公约数** greatest common divisor(GCD)，记为（a，b），如（3，5）＝1，（8，108）＝

4.

如果 a|c，b|c，那么称 c 是 a 与 b 的公倍数。公倍数中最小的数叫做 Least Common Multiple，缩写 L.C.M，记作[a，b]。

如 [3，5]＝15，[8，108]＝216。

重要性质： gcd(a,b)=gcd(b,a), gcd(-a,b)=gcd(a,b), gcd(a,a)=|a|, gcd(a,0)=|a|, gcd(a,1)=1, gcd(a,b)=gcd(b, a mod b), gcd(a,b)=gcd(b,a-b)

Gcd(ma,mb)=m*gcd(a,b), gcd(a+mb,b)=gcd(a,b), m 是自然数

Gcd(a/m,b/m)=gcd(a,b)/m, 此处 m=gcd(a,b)

Gcd(ab,m)=gcd(a,m)*gcd(b,m)

Gcd(a,b)*Lcm(a,b)=ab

Gcd(a,lcm(b,c))=lcm(gcd(a,b),gcd(a,c))

Lcm(a,gcd(b,c))=gcd(lcm(a,b),lcm(a,c))

在坐标系里，将点（0,0）和(a,b)连起来，通过整数坐标的点的数目（除了（0,0）一点外）就是 gcd（a，b）

性质 7 a 与 b 两个数的最小公倍数能整数这两个数的任一公倍数。

证明 设 $a=da_1,b=da_2,(a,b)=d$，则 $(a_1,a_2)=1$（否则与 d 的最大性矛盾）。于是，

令 c 为 a 的任一公倍数，则 a|c，b|c，所以，

$$da_1a_2\,|\,c\,,$$

即 [a，b]|c.

性质 8 若 a、b 是正整数，则（a，b）[a，b]＝ab [gcd(a,b)*lcm(a,b)=ab]

由性质 5 易得性质 8.

性质 9 设 a＞b＞0，且 a＝bq＋r，0＜r＜b，其中 q，r 是正整数，那么

（a，b）＝（b，r）.

证明 设（a，b）＝d，则 d|a，d|b，于是由性质 3 得 d|(a－bq)，即

d|r.

从而 （b，r）≥d，即（b，r）≥（a，b）.

另一方面设（b，r）＝c，则 c|b，c|r, 于是也由性质 3 得

$$c\mid(bq+r),$$

即 $$c\mid a.$$

从而 （a，b）≥c，即（a，b）≥（b，r）.

因此，（a，b）＝（b，r）.

性质 9 给出了求最大公约数的一种方法，即**辗转相除法**。【求最大公约数的方法，利用了性质 gcd(a,b)=gcd(b,a mod b)】

辗转相除法：设 0＜b＜a，如果

$$a=bq+r_1,\quad 0\leqslant r_1<b,$$

$$b=r_1q_1+r_2,\quad 0\leqslant r_2<r_1,$$

$$r_1=r_2q_2+r_3,\quad 0\leqslant r_3<r_2,$$

……

$$r_{k-1}=r_kq_k+r_{k+1},\quad 0\leqslant r_{k+1}<r_k.$$

如此下去，必有 r_n，使得

$$r_{n-1}=r_nq_n,$$

且 $$(a,b)=r_n.$$

性质 10 若 a、b 是整数，b＞0，则有且仅有一对整数 q，r，使得

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<b.$$

证明 因为 b＞0，则 b 的倍数可以是

…，－3b，－2b，－b，0，b，2b，3b，….

当 a 是 b 的倍数时，r＝0，即存在一对整数 q，r，使得 a＝bq＋0.

当 a 不是 b 的倍数时，则比存在整数 q，使得

$$qb<a<(q+1)b.$$

即有一对整数 q，r，使得

$$a=qb+r.\quad 0<r<b.$$

故存在一对整数 q，r，使得 a＝qb＋r，0≤r＜b ①

再证明只有唯一的一对 q，r 满足 a＝qb＋r.

假设有一对 q_1，r_1，使得 a＝q_1b+r_1，0≤r_1＜b ②

那么

$$0=(q-q_1)b+(r-r_1)\text{，}$$

于是 $b\,|\,r-r_1$，

而 $|r-r_1|<b$

由此推得 $r-r_1=0$，即 $r=r_1$，

从而 $q=q_1$

性质 11

（1）如果 c|ab，且(c，a)＝1，那么 c|b；

（2）如果 a|c，b|c，(a，b)＝1，那么 ab|c；

（3）如果 a|c，b|c，那么[a，b]|c.

（4）若 a|b, 则|a|≤|b|，因此，若 a|b, 有 b|a，则 a=±b

（5） p 为质数，若 $p|a_1a_2\ldots\ldots a_n$, 则 p 必能整除 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 中的某一个。特别地，若 p 为质数，$p|a^n$, 则 p|a。

（6）n 个连续整数中有且只有一个是 n 的倍数。

（7）任何 n 个连续整数之积一定是 n 的倍数。

进位制

性质 12 任何一个正整数都可以写为如下形式

$$a=c_ng^n+c_{n-1}g^{n-1}+\cdots+c_1g+c_0\text{，}$$

n≥0，0≤c_i＜g，g＞1.

利用性质 12，我们可以得到一个数能被 3、9、4、25、11 等整除的判别法.

例题

1、若 a、b 都是正整数，且 a 除以 5 余 2，b 除以 5 余 3，则 a^2+4b 除以 5，得到的余数是（ ）

A、1 B、2 C、3 D、4

【解】特殊取 a=7，b=8，则 $a^2+4b=49+32=81$，除以 5 余 1. 选择 A。

或者 $a=5k+2, b=5m+3$， 则 $a^2+4b=25k^2+20k+4+20m+12=25k^2+20(k+m)+15+1$，除以 5 余 1.

今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物至少有几何？

此题出自《孙子算经》，是著名的“孙子问题”，也称“鬼谷算”，“剪管术”等，这个题目的答案是_____

2、如果四个互不相同的整数 m，n，p，q 满足（9+m）（9+n）（9+p）（9+q）=9，那么 m+n+p+q=____________

【解】9 只能写成 1*（-1）*（-3）*3 这样的 4 个不同的整数的乘积。

故可以假定 9+m=1, 9+n=-1, 9+p=3, 9+q=-3, 求和为 36+（m+n+p+q）=0

m+n+p+q=-36

3、在 100 以内同时被 2,3,5 整除的正整数有多少个？1000 以内同时被 3,4,5,6 整除的正整数个数？

【解】同时被 2,3,5 整除，因为（2,3,5）=1，[2,3,5]=30 所以就是求被 30 整除的数，100/30=3…10， 所以有 3 个，分别是 30,60,90.

同理，因为（3,4,5,6）=1,[3,4,5,6]=60, 所以即求能被 60 整除的数个数。

1000/60=16…40。 所以有 16 个数。

4、证明：形如 $\overline{abcabc}$ 的六位数一定被 7,11,13 整除。

【解】因为 $\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1000+\overline{abc}=\overline{abc}\times1001$

其中 **1001 = 7**×11×13，故这个六位数能被 7,11,13 整除.

5、设五位数 $\overline{x679y}$ 被 72 整除，求数字 x 和 y。

【解】72=8x9，故能被 8 和 9 整除。

能被 8 整除，说明末尾 3 位能被 8 整除，试除一下，得到 y=2 才能满足。

又能被 9 整除，说明各位数字之和能是 9 的倍数，即 x+6+7+9+2=x+24 能被 9 整除，这里 0≤x≤9,所以 x=3.

6、令 N= 19991999……1999, （1999 个 1999 连写）求 N 被 11 除，所得的余数

【解】首先了解到被 11 整除的规则是：奇数位数字和与偶数位数字和之差能被 11 整除，则这个数能被 11 整除。

该题中，N 的奇数位数字和显然为(9+9)x1999，偶数位数字和为(1+9)x1999，它们的差=1999x8，除以 11，所得的余数为 9，故 N 除以 11，所得余数为 9.

证明：令 N-9 = 19991999……1990，显然 N-9 的奇数位数字之和减去偶数位数字之和等于 1999x8-9=15992-9=15983=1453x11，能被 11 整除，故 N-9 也能被 11 整除。所以 N 除以 11 所得余数就是 9.

【重点】**一个整数，被 3 或 9 除，所得的余数等于这个数的数字和除以 3 或 9 所得的余数。**
一个整数，被 11 除，所得的余数等于这个数的奇数位数字和减去偶数位数字和的差除以 11 所得的余数。

7、有 200 多本书，如果 7 本 7 本的搬，则余 5 本，如果 9 本 9 本的搬，则少 2 本，问有多少本书？
【解】如果我们增加 2 本书，则 7 本 7 本搬，刚好能够搬完，同样 9 本 9 本搬也刚好能搬完。说明书本数+2 能够被 7 和 9 整除。 而 7 和 9 互质，故书本数+2 是 63=7*9 的倍数，所以书本数=63k-2（k 为整数），已知是 200 多本，所以 k 可取 4，书本数为 250.

8、给你 0，4，5，6，7 可以组成几个能被 4 整除的三位数？（没有重复数字）
【解】4 的倍数特征是后两位数是 4 的倍数，因此后两位需要是：40，60，04，64，56，76。
后两位是 40，这样的三位数是 540，640，740；
后两位是 60，这样的三位数是 460，560，760；
后两位是 04，这样的三位数是 504，604，704；
后两位是 64，这样的三位数是 564，764；
后两位是 56，这样的三位数是 456，756；
后两位是 76，这样的三位数是 476，576。
这样的三位数共有 15 个。

9、能同时被 2、3、5 整除的最大四位数是(　　　),把它分解质因数是(　　　)
【解】 10000/30=333…1, 所以最大四位数为 333x30=9990=2x3x5x3x3x37

10、整数 2012 能被多少个不同的自然数整除？
【解】先熟悉几个与我们所处年代接近的质数年：1993，1997，1999，2003，2011，2017，2027，2029 是质数。
本题就是求 2012 有多少个约数。2012 分解质因数得到：$2x2x503=2^2x503^1$
所以 2012 的不同约数个数为（2+1）x（1+1）=6.

11、有多少个自然数除 200，余数为 8？
【解】设 n 为满题意的自然数，则存在一个数 p，使得 200=np+8 （n>8）
所以 np=192, 因此 n 应该是 192 的约数，原问题转化为求 192 的大于 8 的约数的个数。
因为 $192 = 2^6X3$，所以 192 的约数个数为（6+1）x（1+1）=14 个。
另外 n>8，故小于 8 的约数：1,2,3,4,6，8 不符合要求，故符合题意的自然数共有 14-6=8 个。

练习题

1、 一个六位数$\overline{3a123b}$被 88 整除，求 a 与 b 的值。

2、 当 x，y 是什么数字是，四位数$\overline{72xy}$同时被 2、3、4、5、6、9 整除。

3、 求 360 的所有正约数的个数。
4、 有多少个自然数除 732，余数为 12？
5、 有个三位数，减去 7 后能被 7 整除，减去 8 后能被 8 整除，减去 9 后，能被 9 整除，求这个三位数。
6、 有个二位数，被 3 除余 1，被 4 除余 1，被 5 除也余 1，求这个二位数。
7、 求 200 以内既不能被 3 整除，也不能被 4 整除的正整数个数。
8、 如果 92、118、157 被正整数 n（n≠1）除，所得的余数都相同，那么 n 应为多少？
9、 如果 67、88、116 被正整数 n（n≠1）除，所得的余数都相等，那么这个余数是多少？
10、 120 的正约数共有多少个？这些正约数的和为多少？
11、 从 5、6、7、8、9 这五个数中，选出四个数字组成一个四位数，它被 3、5、7 整除，在所有符合条件的四位数中，最大的一个是多少？
12、

魔鬼数字 666

中国人喜欢 66，六六大顺嘛。但是对于数字 666，这是大家都看到的，酒店的编号类似 666、999、888 之类的最讨人喜欢。不过西方很多人对这个数字确实相当的厌恶，他们认为这是一个魔鬼数字。主要是受宗教的影响，“6”被视为大凶数。

“666 这数字转换成罗马数字，将会变成：I =1 ，V =5 ，X = 10 ，L = 50 ，C =100 ，D = 500 ，M = 1000 ，VICARIUS = 5+1+100+1+5(the U in Roman letter is V) ，FILII = 50+3 ，DEI = 500+1 ，total =5+1+100+1+5+50+3+500+1 = 666 。在拉丁文中，‘VICARIUS FILII DEI’这个字有写在教宗的帽子上，源起于天主教. 法国人的说法是"‘the one who in this world wants to play God’，也就是在这世界上却想扮演上帝角色的人，就是指撒旦。在启示录 13:18 节中有这样的描述，指出反基督教的人具有一个特殊的数码，恶魔撒旦的代表符号就是 666。”所以在基督教中 6 代表混沌不堪。
英语习语 at sixes and sevens 乱七八糟；糊涂的，迷茫的。
Six penny 不值钱，six of one and half a dozen of the other 半斤八两，差不多。

首先，666=1+2+3+4+……+36。36 又刚好是 6^2。

666=1+2+3+4+567+89
=123+456+78+9
=9+87+6+543+21

$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$

这不是一个简单的平方和，你应该可以看到，这是前 7 个素数的平方和。而 7 这个数字，又是一个很有名的数字。

$666=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$

上面的立方和足以让你惊奇，最大的那个数字刚好又是 6。

10！=1×2×3×4×5×6×7×8×9×10=3628800，而这，刚好是六个星期的秒数。又是 6。

一个关于因子个数的有趣结论

任意取一个数，比如 14；
写出此数所有的因数：1，2，7，14；
写出每一个因数的因数个数：1，2，2，4；
那么必然有：$(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3$。
再来举一例子：比如 18.
所有的因数为 1，2，3，6，9，18
因数的因数个数为，1，2，2，4，3，6
那么必然有：$(1+2+2+4+3+6)^2=1^3+2^3+2^3+4^3+3^3+6^3$。

所以说，如果有人要你写出一个式子，几个数的和的平方等于这几个数的立方和的话，随便就可以写出来。这个规律也就告诉我们，对于任意一个数，写出其每

一个因数(也叫约数)的因数个数，那么这些数字的和的平方等于其立方和。

这不由得让我们想起另外一个公式：

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$，

那么这两个公式之间有什么关系呢？有的，其实这两个实在就是一个东西。

证明如下：

当 n 为 1 的时候，显然成立

现在设自然数 n 满足关系式，只要能够证明对于 n 的一个非约数 p，np^m 仍然满足上述关系，那么这个结论就得到了证明。我们首先需要看下面的定理：

如果设 F(n)为 n 的约数的约数个数，那么有下面的关系：

当 n 为素数时，F(n)=2；

当 n 和 m 互质时，F(nm)=F(n)F(m)。…………②

这个问题，咱们可以运用数论的最基本的方法就可以得到，在此忽略。

如果说 n 的约数的约数的个数分别是 a_1，a_2，...，a_n。并且满足

$(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3=x^2$。这个 x 为赋予的一个数值。

那么对于 np^m，利用式子②，a1 对应着就变成了 a1×1，a2 就变成了 a2×2……

左边$=(x+x*2+x*3+...+x*m)^2$

右边$=x^2+x^2*1^3+x^2*2^3+...+x^2*m^3$

要证明左边=右边，即证明$(1+2+3+...+m)^2=1^3+2^3+...+m^3$，显然，这个式子就刚好是式子①，这是显然成立的，于是定理得证。