2、运用公式法进行因式分解

【知识精读】

把乘法公式反过来，就可以得到因式分解的公式。

	基本乘法公式及恒等式（因式分解）
分配律	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
和平方	基本 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
	三数 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
差平方	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
平方差	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
平方和	$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$，这里 $i^2=-1$ (虚数范围内分解因式)
和立方	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
差立方	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
立方和	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
立方差	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
欧拉公式	$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2-ab+b^2-bc+c^2-ca)$
	$=0.5(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$
同 n 次方差	若 n 是正整数，则 $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$
同奇数次方和	若 n 是正奇数，则（在上式中用 $-y$ 代换 y） $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1})$
二项展开式	逆运算：$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k=(a+b)^n$ （杨辉三角中，系数具有对称性和递推规律）
其他公式	$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

欧拉公式中，特别地：

（1）当 $a+b+c=0$ 时，有 $a^3+b^3+c^3=3abc$，*如果令* $x=a^3\geqslant0, y=b^3\geqslant0, z=c^3\geqslant0$，则有不等式

$$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}, \quad \frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$$ （算术平均数不小于几何平均数，均值不等式）

（2）当 $c=0$ 时，欧拉公式变为两数立方和公式

（3）推导过程 （两次利用立方和公式）：

$$
\begin{aligned}
&=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc\\
&=(a+b)(a+b)^2-3ab(a+b)-3abc+c^3\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2)]-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

运用公式法分解因式的关键是要弄清各个公式的形式和特点，熟练地掌握公式。但有时需要经过适当的组合、变形后，方可使用公式。

用公式法因式分解在求代数式的值，解方程、几何综合题中也有广泛的应用。因此，正确掌握公式法因式分解，熟练灵活地运用它，对今后的学习很有帮助。

下面我们就来学习用公式法进行因式分解

【分类解析】

1. 把 a^2+2a-b^2-2b 分解因式的结果是（　　）

A. $(a-b)(a+2)(b+2)$　　*B.* $(a-b)(a+b+2)$　　*C.* $(a-b)(a+b)+2$　　*D.* $(a^2-2b)(b^2-2a)$

分析：　$a^2+2a-b^2-2b=a^2+2a+1-b^2-2b-1=(a+1)^2-(b+1)^2$，　或者

$a^2-b^2+2a-2b=(a-b)(a+b)+2(a-b)=(a-b)(a+b+2)$

再利用平方差公式进行分解，最后得到$(a-b)(a+b+2)$，故选择 *B*。

说明：解这类题目时，一般先观察现有项的特征，通过添加项凑成符合公式的形式。同时要注意分解一定要彻底。

2. 在简便计算、求代数式的值、解方程、判断多项式的整除等方面的应用

例：已知多项式 $2x^3-x^2+m$ 有一个因式是 $2x+1$，求 m 的值。

分析：由整式的乘法与因式分解互为逆运算，可假设另一个因式，再用待定系数法即可求出 m 的值。

解：根据已知条件，设 $2x^3-x^2+m=(2x+1)(x^2+ax+b)$

则 $2x^3-x^2+m=2x^3+(2a+1)x^2+(a+2b)x+b$

由此可得 $\begin{cases}2a+1=-1 & (1)\\ a+2b=0 & (2)\\ m=b & (3)\end{cases}$

由（1）得 $a=-1$

把 $a=-1$ 代入（2），得 $b=0.5$，　把 $b=0.5$ 代入（3），得 $m=0.5$

或者 $2x^3-x^2+m=(2x+1)g(x)$，将 $x=-0.5$ 代入，得 $2(-0.5)^3-(-0.5)^2+m=0$，可得 $m=0.5$

3. 在几何题中的应用。

例：已知 a、b、c 是 ΔABC 的三条边，且满足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$，试判断 ΔABC 的形状。

分析：因为题中有 a^2、b^2、 $-ab$，考虑到要用完全平方公式，首先要把 $-ab$ 转成 $-2ab$。所以两边同乘以 2，然后拆开搭配得完全平方公式之和为 0，从而得解。

解：$\because a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$

$\therefore (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\because (a-b)^2\ge 0$，$(b-c)^2\ge 0$，$(c-a)^2\ge 0$

$\therefore a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$

$\therefore a=b=c$

$\therefore \Delta ABC$ 为等边三角形。

4. 在代数证明题中应用

例：两个连续奇数的平方差一定是 8 的倍数。

分析：先根据已知条件把奇数表示出来，然后进行变形和讨论。

解：设这两个连续奇数分别为 $2n+1$, $2n+3$（n 为整数）

则 $(2n+3)^2-(2n+1)^2=(2n+3+2n+1)(2n+3-2n-1)=2(4n+4)=8(n+1)$

由此可见，$(2n+3)^2-(2n+1)^2$ 一定是 8 的倍数。

注: 本题实际上可以改为：**任意两个奇数的平方差是 8 的倍数**。 利用同余定理可得到：

因为 $(2n+1)^2\equiv(2m+1)^2\equiv 1(\bmod 8)$, 所以 **8|** $\mathbf{[(2n+1)^2-(2m+1)^2]}$

或者 $(2n+1)^2-(2m+1)^2=4(n-m)(n+m+1)$, $n-m$ 与 $n+m$ 同奇偶，当 $n-m$ 为偶数，所以 $8|4(n-m)$, 当 $n-m$ 为奇数时，$n+m+1$ 是偶数，所以 $8|4(n+m+1)$。

5、中考点拨：

例 1：因式分解：$x^3-4xy^2=$________。

解：$x^3-4xy^2=x(x^2-4y^2)=x(x+2y)(x-2y)$

说明：因式分解时，先看有没有公因式。此题应先提取公因式，再用平方差公式分解彻底。

例 2：分解因式：$2x^3y+8x^2y^2+8xy^3=$_________。

解：$2x^3y+8x^2y^2+8xy^3=2xy(x^2+4xy+4y^2)=2xy(x+2y)^2$

说明：先提取公因式，再用完全平方公式分解彻底。

题型展示：

例 1. 已知：$a=\frac{1}{2}m+1$，$b=\frac{1}{2}m+2$，$c=\frac{1}{2}m+3$，

求 $a^2+2ab+b^2-2ac+c^2-2bc$ 的值。

解：$a^2+2ab+b^2-2ac+c^2-2bc$

$=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2$

$=(a+b-c)^2$

$\because a=\frac{1}{2}m+1$，$b=\frac{1}{2}m+2$，$c=\frac{1}{2}m+3$

$\therefore$ 原式 $=(a+b-c)^2$

$=\left[(\frac{1}{2}m+1)+(\frac{1}{2}m+2)-(\frac{1}{2}m+3)\right]^2$

$=\frac{1}{4}m^2$

说明：本题属于条件求值问题，解题时没有把条件直接代入代数式求值，而是把代数式因式分解，变形后再把条件带入，从而简化计算过程。

例 2. 已知 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，

求证：$a^5+b^5+c^5=0$

证明：$\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore$ 把 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$ 代入上式，

可得 $abc=0$，即 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$

若 $a=0$，则 $b=-c$，

$\therefore a^5+b^5+c^5=0$

若 $b=0$ 或 $c=0$，同理也有 $a^5+b^5+c^5=0$

说明：利用补充公式确定 a，b，c 的值，命题得证。

例 3. 若 $x^3+y^3=27$, $x^2-xy+y^2=9$，求 x^2+y^2 的值。

解：因为 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=27$,　　且 $x^2-xy+y^2=9$

所以　　$x+y=3$, $x^2+2xy+y^2=9$　　（1）

又　　　$x^2-xy+y^2=9$　　　　　　（2）

两式相减得 $xy=0$, 所以 $x^2+y^2=9$

或者（1）+（2）×2, 3（x^2+y^2）=27，所以 $x^2+y^2=9$

说明：按常规需求出 x，y 的值，此路行不通。用因式分解变形已知条件，简化计算过程。

【实战模拟】

1. 分解因式：

（1）$(a+2)^2-(3a-1)^2$　　（2）$x^5(x-2y)+x^2(2y-x)$

（3）$a^2(x-y)^2+2a(x-y)^3+(x-y)^4$　　(4)x^3-8y^3-z^3-6xyz　(利用欧拉公式)

（5）$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$　　(6) $a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$

(7)x^6-y^6 (多种方法分解，平方差，立方差)　　（8）$x^4+x^2y^2+y^4$

2. 已知：$x+\dfrac{1}{x}=-3$，求$x^4+\dfrac{1}{x^4}$的值。

3. 若a，b，c是三角形的三条边，求证：$a^2-b^2-c^2-2bc<0$

4. 已知：$\omega^2+\omega+1=0$，求ω^{2001}的值。

5. 已知a，b，c是不全相等的实数，且$abc\neq0$，$a^3+b^3+c^3=3abc$，试求

（1）$a+b+c$的值；（2）$a(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})+b(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a})+c(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$的值。

【试题答案】

1. （1）解：原式$=[(a+2)+(3a-1)][(a+2)-(3a-1)]$

$=(4a+1)(-2a+3)$

$=-(4a+1)(2a-3)$

说明：把$a+2$，$3a-1$看成整体，利用平方差公式分解。

（2）解：原式$=x^5(x-2y)-x^2(x-2y)$

$=x^2(x-2y)(x^3-1)$

$=x^2(x-2y)(x-1)(x^2+x+1)$

（3）解：原式$=(x-y)^2[a^2+2a(x-y)+(x-y)^2]$

$=(x-y)^2(a+x-y)^2$

2. 解：$\because (x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(-3)^2-2=7$

$\therefore (x^2+\frac{1}{x^2})^2=49$，$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}+2=49$　　$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=47$

3. 分析与解答：由于对三角形而言，需满足两边之差小于第三边，因此要证明结论就需要把问题转化为两边差小于第三边求得证明。

证明：$\because a^2-b^2-c^2-2bc$

$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$

$=a^2-(b+c)^2$

$=(a+b+c)(a-b-c)$

$\because a$，b，c是三角形三边

$\therefore a+b+c>0$且$a<b+c$

$\therefore (a+b+c)(a-b-c)<0$

即$a^2-b^2-c^2-2bc<0$

4. 解$\because \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$，即$\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1 \qquad \therefore \omega^{2001}=(\omega^3)^{667}=1$

5. 分析与解答：（1）由因式分解可知

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

故需考虑 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 值的情况，

（2）所求代数式较复杂，考虑恒等变形。

解：（1）$\because a^3+b^3+c^3=3abc \qquad \therefore a^3+b^3+c^3-3abc=0$

又 $\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

而 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$\because a$，b，c 不全相等

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$

$\therefore a+b+c=0$

（2）$\because abc\neq 0$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{abc}[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]$

而 $a+b+c=0$，即 $a=-(b+c)$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式}&=\frac{1}{abc}[(b+c)^3-b^3-c^3]\\&=\frac{1}{abc}[3bc(b+c)]\\&=\frac{1}{abc}(-3abc)\\&=-3\end{aligned}$$

另解: 原式=$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$-3=-3

说明：因式分解与配方法是在代数式的化简与求值中常用的方法。