8、分式方程及其应用

【知识精读】

1. 解分式方程的基本思想：把分式方程转化为整式方程。

2. 解分式方程的一般步骤：

（1）在方程的两边都乘以最简公分母，约去分母，化成整式方程；

（2）解这个整式方程；

（3）验根：把整式方程的根代入最简公分母，看结果是否等于零，使最简公分母等于零的根是原方程的增根，必须舍去，但对于含有字母系数的分式方程，一般不要求检验。

3. 列分式方程解应用题和列整式方程解应用题步骤基本相同，但必须注意，要检验求得的解是否为原方程的根，以及是否符合题意。

【增根与无解】

增根与无解是分式方程中常见的两个不同概念，同学们在学习分式方程后，常常会对这两个概念混淆不清，认为分式方程无解和分式方程有增根是同一回事，事实上并非如此.

分式方程有增根，指的是在解分式方程时，把分式方程转化为整式方程的变形过程中，方程的两边都乘了一个可能使分母为零的整式，从而扩大了未知数的取值范围而产生的未知数的值；而分式方程无解则是指不论未知数取何值，都不能使方程两边的值相等．它包含两种情形：（一）原方程化去分母后的整式方程无解；（二）原方程化去分母后的整式方程有解，但这个解却使原方程的分母为 0，它是原方程的增根，从而原方程无解.

下面我们来学习可化为一元一次方程的分式方程的解法、应用以及增根产生的情形。

【分类解析】

例 1. 解方程：$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=1$

分析：首先要确定各分式分母的最简公分母，在方程两边乘这个公分母时不要漏乘，解完后必须要验根。

例 1 解：方程两边都乘以 $(x+1)(x-1)$，得

$$x^2+x-2(x-1)=(x+1)(x-1),$$
$$\text{即}x^2+x-2x-x^2=-1-2,$$
$$\therefore x=3$$
经检验：$x=3$是原方程的根。

或者

$$\frac{x}{x-1}-1=\frac{2}{x+1}$$
$$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$$
$$x+1=2(x-1)$$
$$x=3$$

例 2. 解方程 $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$

分析：直接去分母，可能出现高次方程，给求解造成困难，观察四个分式的分母发现

$(x+6)$与$(x+7)$、$(x+2)$与$(x+3)$的值相差 1，而分子也有这个特点，因此，可将分母的值相差 1 的两个分式结合，然后再通分，把原方程两边化为分子相等的两个分式，利用分式的等值性质求值。

解：原方程变形为：$\dfrac{x+6}{x+7}-\dfrac{x+5}{x+6}=\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+2}$

方程两边通分，得

$$\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

所以$(x+6)(x+7)=(x+2)(x+3)$

即$8x=-36$

$\therefore x=-\dfrac{9}{2}$

经检验：原方程的根是 $x=-\dfrac{9}{2}$。

例 3. 解方程：$\dfrac{12x-10}{4x-3}+\dfrac{32x-34}{8x-9}=\dfrac{24x-23}{8x-7}+\dfrac{16x-19}{4x-5}$

分析：方程中的每个分式都相当于一个假分数，因此，可化为一个整数与一个简单的分数式之和。

解：由原方程得：$3-\dfrac{1}{4x-3}+4+\dfrac{2}{8x-9}=3-\dfrac{2}{8x-7}+4+\dfrac{1}{4x-5}$

即 $\dfrac{2}{8x-9}-\dfrac{2}{8x-6}=\dfrac{2}{8x-10}-\dfrac{2}{8x-7}$

于是 $\dfrac{1}{(8x-9)(8x-6)}=\dfrac{1}{(8x-10)(8x-7)}$，

所以$(8x-9)(8x-6)=(8x-10)(8x-7)$

解得：$x=1$

经检验：$x=1$是原方程的根。

例 4. 解方程：$\dfrac{6y+12}{y^2+4y+4}-\dfrac{y^2-4}{y^2-4y+4}+\dfrac{y^2}{y^2-4}=0$

分析：此题若用一般解法，则计算量较大。当把分子、分母分解因式后，会发现分子与分母有相同的因式，于是可先约分。

解：原方程变形为：$\dfrac{6(y+2)}{(y+2)^2}-\dfrac{(y+2)(y-2)}{(y-2)^2}+\dfrac{y^2}{(y+2)(y-2)}=0$

约分，得 $\dfrac{6}{y+2}-\dfrac{y+2}{y-2}+\dfrac{y^2}{(y+2)(y-2)}=0$

方程两边都乘以 $(y+2)(y-2)$，得

$6(y-2)-(y+2)^2+y^2=0$

整理，得$2y=16$

$\therefore y=8$

经检验：$y=8$是原方程的根。

注：**分式方程命题中一般渗透不等式，恒等变形，因式分解等知识**。因此要学会根据方程结构特点，用特殊方法解分式方程。

例 5 解方程$\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4}=\dfrac{3}{x+2}$. ①

解：方程两边都乘以（x+2）（x-2），得 2（x+2）-4x=3（x-2）． ②

解这个方程，得 x=2．

经检验：当 x=2 时，原方程无意义，所以 x=2 是原方程的增根．

所以原方程无解．

【说明】显然，方程①中未知数 x 的取值范围是 x≠2 且 x≠-2．而在去分母化为方程②后，此时未知数 x 的取值范围扩大为全体实数．所以当求得的 x 值恰好使最简公分母为零时，x 的值就是增根．本题中方程②的解是 x＝2，恰好使公分母为零，所以 x＝2 是原方程的增根，原方程无解．

例 6 解方程$\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3-x}{2+x}+2$.

解：去分母后化为 x－1＝3－x＋2（2＋x）．

整理得 0x＝8．

因为此方程无解，所以原分式方程无解．

【说明】此方程化为整式方程后，本身就无解，当然原分式方程肯定就无解了．由此可见，分式方程无解不一定就是产生增根．

例 7 若方程$\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{m}{2-x}$无解，则 m=______．

解：原方程可化为$\dfrac{x-3}{x-2}=-\dfrac{m}{x-2}$.

方程两边都乘以 x－2，得 x－3=－m．

解这个方程，得 x=3－m．

因为原方程无解，所以这个解应是原方程的增根．即 x=2，

所以 2=3－m，解得 m=1．

故当 m=1 时，原方程无解．

【说明】因为同学们目前所学的是能化为一元一次方程的分式方程，而一元一次方程只有一个根，所以如果这个根是原方程的增根，那么原方程无解．但是并不能因此认为有增根的分式方程一定无解，随着以后所学知识的加深，便会明白其中的道理．

例 8 当 a 为何值时，关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{ax}{x^2-4}=\dfrac{3}{x+2}$ ①会产生增根？

解：方程两边都乘以（x+2)（x-2)，得 2（x＋2）＋ax＝3（x－2）

整理得（a－1）x＝－10　　　　　　②

若原分式方程有增根，则 x＝2 或－2 是方程②的根.

把 x＝2 或－2 代入方程②中，解得，a＝－4 或 6.

【说明】做此类题首先将分式方程转化为整式方程，然后找出使公分母为零的未知数的值即为增根，最后将增根代入转化得到的整式方程中，求出原方程中所含字母的值．

若将此题“会产生增根”改为“无解”，即：

例 9 当 a 为何值时，关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{ax}{x^2-4}=\dfrac{3}{x+2}$ ①无解？

此时还要考虑转化后的整式方程（a－1）x＝－10 本身无解的情况，解法如下：

解：方程两边都乘以（x+2)（x-2)，得 2（x＋2）＋ax＝3（x－2）

整理得（a－1）x＝－10　　　　　②

若原方程无解，则有两种情形：

（1）当 a－1＝0（即 a＝1）时，方程②为 0x＝－10，此方程无解，所以原方程无解。

（2）如果方程②的解恰好是原分式方程的增根，那么原分式方程无解．原方程若有增根，增根为 x＝2 或－2，把 x＝2 或－2 代入方程②中，求出 a＝－4 或 6.

综上所述，a＝1 或 a＝一 4 或 a＝6 时，原分式方程无解.

结论：弄清分式方程的增根与无解的区别和联系,能帮助我们提高解分式方程的正确性,对判断方程解的情况有一定的指导意义．

【中考题解】

例 10．若解分式方程 $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{m+1}{x^2+x}=\dfrac{x+1}{x}$ 产生增根，则 m 的值是（　　）

A. -1或-2　　*B.* -1或2　　*C.* 1或2　　*D.* 1或-2

分析：分式方程产生的增根，是使分母为零的未知数的值。由题意得增根是：$x=0或x=-1$，化简原方程为：$2x^2-(m+1)=(x+1)^2$，把 $x=0或x=-1$ 代入解得 $m=-2或1$，故选择 D。

例 11. 甲、乙两班同学参加“绿化祖国”活动，已知乙班每小时比甲班多种 2 棵树，甲班种 60 棵所用的时间与乙班种 66 棵树所用的时间相等，求甲、乙两班每小时各种多少棵树？

分析：利用所用时间相等这一等量关系列出方程。

解：设甲班每小时种 x 棵树，则乙班每小时种（x+2）棵树，

由题意得：$\dfrac{60}{x}=\dfrac{66}{x+2}$

$60x+120=66x$

$\therefore x=20$

经检验：$x=20$是原方程的根

$\therefore x+2=22$

或者 $\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{66}{60}$

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{6}{60}=\dfrac{1}{10}$

$x=20$

答：甲班每小时种树 20 棵，乙班每小时种树 22 棵。

说明：**在解分式方程应用题时一定要检验方程的根。**

【题型展示】

例 12. 轮船在一次航行中顺流航行 80 千米，逆流航行 42 千米，共用了 7 小时；在另一次航行中，用相同的时间，顺流航行 40 千米，逆流航行 70 千米。求这艘轮船在静水中的速度和水流速度

分析：在航行问题中的等量关系是“船实际速度=水速+静水速度”，有顺水、逆水，取水速正、负值，两次航行提供了两个等量关系。

解：设船在静水中的速度为 x 千米/小时，水流速度为 y 千米/小时

由题意，得$\begin{cases}\dfrac{80}{x+y}+\dfrac{42}{x-y}=7\\ \dfrac{40}{x+y}+\dfrac{70}{x-y}=7\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=17\\ y=3\end{cases}$

经检验：$\begin{cases}x=17\\ y=3\end{cases}$是原方程的根

答：水流速度为 3 千米/小时，船在静水中的速度为 17 千米/小时。

【实战模拟】

1. 甲、乙两地相距 S 千米，某人从甲地出发，以 v 千米/小时的速度步行，走了 a 小时后改乘汽车，又过 b 小时到达乙地，则汽车的速度（　　）

A. $\frac{S}{a+b}$　　B. $\frac{S-av}{b}$　　C. $\frac{S-av}{a+b}$　　D. $\frac{2S}{a+b}$

2. 如果关于 x 的方程 $\frac{2}{x-3}=1-\frac{m}{x-3}$ 有增根，则m的值等于（　　）

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 3

3. 解方程：

（1）$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots\frac{1}{(x+9)(x+10)}=2$

（2）$\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^4}=0$

4. 求 x 为何值时，代数式 $\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}$ 的值等于 2？

5. 甲、乙两个工程队共同完成一项工程，乙队先单独做 1 天后，再由两队合作 2 天就完成了全部工程。已知甲队单独完成工程所需的天数是乙队单独完成所需天数的 $\frac{2}{3}$，求甲、乙两队单独完成各需多少天？

【试题答案】

1. 由已知，此人步行的路程为 av 千米，所以乘车的路程为（$S-av$）千米。

又已知乘车的时间为 b 小时，故汽车的速度为 $\frac{S-av}{b}$ 千米 / 小时，应选B。

2. 把方程两边都乘以 $x-3$，得$2=x-3-m \quad \therefore x=5+m.$

若方程有增根，则 $x=3$，即$5+m=3$ $\therefore m=-2$ 应选B。

3. （1）分析：方程左边很特殊，从第二项起各分式的分母为两因式之积，两因式的值都相差 1，且相邻两项的分母中都有相同的因式。因此，可利用 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 裂项，即用“互为相反数的和为 0”将原方程化简

解：原方程可变为 $\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}=2$

$\therefore \frac{1}{x+1}=2$

即$2x+2=1$

$x=-\frac{1}{2}$

经检验：原方程的根是$x=-\frac{1}{2}$

（2）分析：用因式分解（提公因式法）简化解法

解：$x(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4})=0$

因为其中的 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}\neq 0$

$\therefore x=0$

经检验：$x=0$ 是原方程的根。

4. 解：由已知得 $\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=2$

即$2+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=2$

$\therefore \frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=0$

解得$x=\frac{3}{2}$

经检验：$x=\frac{3}{2}$是原方程的根。

$\therefore$ 当$x=\frac{3}{2}$时，代数式$\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}$的值等于 2。

5. 设：乙队单独完成所需天数 x 天，则甲队单独完成需$\frac{2}{3}x$ 天。

由题意，得$\frac{1}{x}+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{3}x})=1$

即$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1$

解得：$x=6$

经检验 $x=6$是原方程的根

$x=6$时，$\frac{2}{3}x=4$

答：甲、乙两队单独完成分别需 4 天，6 天。