排列与组合(A6004)

［基础梳理］

1．排列

(1)排列的概念：从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$个元素(这里的被取元素各不相同)按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

(2)排列数的定义：从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m表示(Array, Permutation)．

(3)排列数公式

$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$．

(4)全排列数公式

$P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$ (叫做 n 的阶乘)，定义 $0!=1$．

2．组合

(1)组合的定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素并成一组(堆)，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合．

(2)组合数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数．用符号 C_n^m表示(Combination)．

(3)组合数公式

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$(n，m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n)$．特别地 $C_n^0=1$．

(4)组合数的性质：①$C_n^m=C_n^{n-m}$；②$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

3．区别

排列与组合，排列与组合最根本的区别在于“有序”和“无序”．取出元素后交换顺序，如果与顺序有关是排列，如果与顺序无关即是组合．

两个公式

(1)排列数公式 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

(2)组合数公式 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$利用这两个公式可计算排列问题中的排列数和组合问题中的组合数．

①解决排列组合问题可遵循“先组合后排列”的原则，区分排列组合问题主要是判断“有序”和“无序”，更重要的是弄清怎样的算法有序，怎样的算法无序，关键是在计算中体现“有序”和“无序”．

②要能够写出所有符合条件的排列或组合，尽可能使写出的排列或组合与计算的排列数相符，使复杂问题简单化，这样既可以加深对问题的理解，检验算法的正确与否，又可以对排列数或组合数较小的问题的解决起到事半功倍的效果．

4．四字口诀

求解排列组合问题的思路："排组分清，加乘明确；有序排列，无序组合；分类相加，分步相乘．"

[选择填空]

1．8 名运动员参加男子 100 米的决赛．已知运动场有从内到外编号依次为 1,2,3,4,5,6,7,8 的八条跑道，若指定的 3 名运动员所在的跑道编号必须是三个连续数字(如：4,5,6)，则参加比赛的这 8 名运动员安排跑道的方式共有(　　)．

A．360 种　　B．4 320 种　　C．720 种　　D．2 160 种

（答案）

2．以一个正五棱柱的顶点为顶点的四面体共有(　　)．

A．200 个　　B．190 个　　C．185 个　　D．180 个

（答案）

3．某台小型晚会由 6 个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位．该台晚会节目演出顺序的编排方案共有(　　)．

A．36 种　　B．42 种　　C．48 种　　D．54 种

（答案）

4. *如图，将 1,2,3 填入 3×3 的方格中，要求每行、每列都没有重复数字，右面是一种填法，则不同的填写方法共有(　　)．

1	2	3
3	1	2
2	3	1

A．6 种　　B．12 种　　C．24 种　　D．48 种

（答案）

5．**某工程队有 6 项工程需要先后单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后才能进行，又工程丁必须在工程丙完成后**立即**进行，那么安排这 6 项工程的不同排法种数是________(用数字作答)．（答案）

一 排列问题

【例 1】▸六个人按下列要求站成一排，分别有多少种不同的站法？

(1)甲不站在两端；(2)甲、乙必须相邻；(3)甲、乙不相邻；(4)甲、乙之间恰有两人；

(5)甲不站在左端，乙不站在右端；(6)甲、乙、丙三人顺序已定．（答案）

【练习 1】 用 0,1,2,3,4,5 六个数字排成没有重复数字的 6 位数，分别有多少个？(1)0 不在个位；(2)1 与 2 相邻；(3)1 与 2 不相邻；(4)0 与 1 之间恰有两个数；(5)1 不在个位；(6)偶数数字从左向右从小到大排列．（答案）

二 组合问题

【例 2】▸某医院有内科医生 12 名，外科医生 8 名，现选派 5 名参加赈灾医疗队，其中

(1)某内科医生甲与某外科医生乙必须参加，共有多少种不同选法？

(2)甲、乙均不能参加，有多少种选法？

(3)甲、乙两人至少有一人参加，有多少种选法？

(4)队中至少有一名内科医生和一名外科医生，有几种选法？

（答案）

【练习 2】 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，(1)甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有多少种？(2)甲、乙所选的课程中至少有一门不相同的选法有多少种？（答案）

三 排列、组合的综合应用

【例 3】▸(1)7 个相同的小球，任意放入 4 个不同的盒子中，试问：每个盒子都不空的放法共有多少种？

(2)计算 $x+y+z=6$ 的正整数解有多少组；

(3)计算 $x+y+z=6$ 的非负整数解有多少组．

（答案）

【练习 3】 有 6 本不同的书按下列分配方式分配，问共有多少种不同的分配方式?

(1)分成 1 本、2 本、3 本三组；

(2)分给甲、乙、丙三人，其中一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本；

(3)分成每组都是 2 本的三组；

(4)分给甲、乙、丙三人，每人 2 本.（答案）

四　问题所在

实际问题意义不清，计算重复、遗漏致误

【问题诊断】排列组合问题由于其思想方法独特计算量庞大， 对结果的检验困难，所以在解决这类问题时就要遵循一定的解题原则，如特殊元素、位置优先原则、先取后排原则、先分组后分配原则、正难则反 原则等，只有这样我们才能有明确的解题方向.同时解答组合问题时必须心思细腻，考虑周全，这样才能做到不重不漏，正确解题.

【防范措施】 “至少、至多型”问题不能利用分步计数原理求解，多采用分类求解或转化为它的对立事件求解

【例 4】▸ 有 20 个零件，其中 16 个一等品，4 个二等品，若从 20 个零件中任意取 3 个，那么至少有 1 个一等品的不同取法有多少种？（答案）

【练习 4】 在 10 名演员中，5 人能歌，8 人善舞，从中选出 5 人，使这 5 人能演出一个由 1 人独唱 4 人伴舞的节目，共有几种选法？（答案）

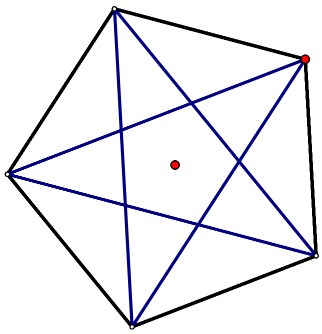
《排列与组合》参考答案

1. **解析** 本题考查排列组合知识，可**分步**完成，先从 8 个数字中取出 3 个连续的三个数字共有 6 种可能（如 123,234,345,456,567,678），将指定的 3 名运动员安排在这三个编号的跑道上 P_3^3，最后剩下的 5 个排在其他的编号的 5 个跑道上，故共有 $6P_3^3P_5^5=6A_3^3A_5^5=4\ 320$ 种方式.

答案 B

（返回）

2. **解析** **正五棱柱**（两个底面都是正五边形）共有 10 个顶点，若每四个顶点构成一个四面体，共可构成 $C_{10}^4=210$ 个四面体. 其中**四点在同一平面内的有三类**：



(1)每一底面的五点中选四点的组合方法有 $2C_5^4$个.

(2)五条侧棱中的任意两条棱(两两平行)上的四点有 C_5^2个.

(3)一个底面的一边与另一个底面相应的一条对角线平行

(例如 $AB /\!/ E_1C_1$)，这样共面的四点共有 $2C_5^1$个.

所以 $C_{10}^4-2C_5^4-C_5^2-2C_5^1=180$(个)，选 D.

答案 D

（返回）

3. **解析** 因为丙必须排在最后一位，因此只需考虑其余五人在前五位上的排法. 当甲排在第一位时，有 $A_4^4=24$ 种排法；当甲排在第二位时，有 $A_3^1\cdot A_3^3=18$ 种排法，（也可以 甲排第二位时，剩下 4 人有 $P_4^4=24$，其中乙排第一位的有 $P_3^3=6$，满足条件的有 24-6=18），所以共有方案 $24+18=42$(种)，故选 B.

答案 B

（返回）

4. **解析** 只需要填写第一行第一列，其余即确定了. 因此共有 $A_3^3A_2^2=12$(种).

答案 B

（返回）

5. **解析** 可将 6 项工程分别用甲、乙、丙、丁、a、b 表示，要求是甲在乙前，乙在丙前，并且丙丁相邻丙在丁前（二者是立即进行，可以捆绑法，将丙丁捆绑成一个工程），可看作甲、乙、丙丁、a、b 五个元素的排列，可先排 a、b，再排甲、乙、丙丁共 $A_5^2C_3^3=20$ 种排法，也可先排甲、乙、丙丁，再排 a、b，共 $C_5^3A_2^2=20$ 种排法.

答案 20

（返回）

【例 1】[审题视点] 根据题目具体要求，选择恰当的方法，如捆绑法、插空法等．

解　(1a)从除甲外的 5 人中，取 2 人排两端，有 P_5^2；剩下 4 人全排列为 P_4^4；由乘法原理得到 $A_5^2A_4^4=480$；(1b)先将甲排在中间 4 个位置，有 P_4^1，剩下 5 人全排列为 P_5^5，共 $P_4^1\ P_5^5=480$，

(2)捆绑甲乙，看成一个人，原来 6 人变成 5 人的全排列为 P_5^5，而且甲乙交换位置，有 P_2^2，共 $A_2^2A_5^5=240$；

(3a)先排甲乙之外的 4 个人，有 P_4^4，要求甲乙不相邻，只能将甲乙排在前面 4 个人的空隙中，有 5 个空隙，取 2 个，有 P_5^2，故共有 $A_4^4A_5^2=480$；

（3b）6 人的全排列 P_6^6，减去（2）中甲乙相邻的 240，就是 $P_6^6-P_5^5\ P_2^2=720-240=480$

(4 a)先排甲乙，有 P_2^2，再在剩下 4 人中，取 2 人排在甲乙之间，有 P_4^2，这时将甲 XX 乙捆绑，与剩下的 2 人的全排列为 P_3^3，由乘法原理得 $A_2^2A_4^2A_3^3=144$；

（4b）先排甲乙以外的 4 个人，有 $P_4^4=4!$ 种，再排甲乙，保证甲乙之间有 2 人的排法有 $3\times2=6$ 种，共 $6\times4!=144$；

(5 a) 6 人的全排列为 $P_6^6=6!$，减去甲在左端的排列为 P_5^5 和乙在右端的排列 P_5^5，加上甲在左端，乙在右端的排列有 P_4^4，故共有 $A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$；

（5b）将甲排在中间 4 个位置，有 P_4^1，乙排在除右端和甲以后的 4 个位置，有 P_4^1，剩下 4 人的全排列为 P_4^4，共 $P_4^1\ P_4^1\ P_4^4=16\times4!=384$；

将甲排在右端，其余 5 人的全排列为 $P_5^5=120$；

由加法原理，共 $384+120=504$；

(6)先将 6 个位置排好，取 3 个给除甲乙丙外的 3 人，有 P_5^3，剩下 3 个位置留给甲乙丙，但是甲乙丙顺序固定，故只有 1 种，由乘法原理，共 $A_6^3=120$.

方法总结：有条件的排列问题大致分四种类型.

(1)某元素不在某个位置上问题，①可从位置考虑用其它元素占上该位置，②可考虑该元素的去向(要注意是否是全排列问题)；③可间接计算即从排列总数中减去不符合条件的排列个数.

(2)某些元素相邻，可将这些元素排好看作一个元素(即**捆绑法**)然后与其它元素排列.

(3)某些元素互不相邻，可将其它剩余元素排列，然后用这些元素进行插空(即**插空法**).

(4*)某些元素顺序一定，可在所有排列位置中取若干个位置，先排上剩余的其它元素，这个元素也就一种排法.

（返回）

【练习 1】解　(1*a*)先取两个非 0 的数排在首末两个位置，有 P_5^2，剩下 4 个的全排列为 P_4^4，故由乘法原理得 $P_5^2\ P_4^4=480$；(1*b*)6 个数的全排列为 P_6^6，0 不在首末两个位置的排列有 $2P_5^5$，故 0 不在个位和首位的 6 位数有 $P_6^6-2P_5^5=4\ P_5^5=480$；

(2*a*)捆绑 1、2，先将 0 排在除首位外的排法有 P_4^1，剩下（1,2），3,4,5 排在剩下的 4 个位为 P_4^4，捆绑的（1,2）全排列为 P_2^2，共有 $A_2^2A_4^1A_4^4=192$；　(2*b*)捆绑法，将 1 和 2 捆绑，看成一个数，原来的 6 个数，看成 5 个数，全排列有 $P_5^5P_2^2$，其中首位为 0 的排列有 $P_4^4P_2^2$，共有 $P_5^5\ P_2^2-P_4^4P_2^2=192$；

(3*a*)0 不在首位的全排列有 $P_5^1P_5^5$，利用（2），减去 1、2 相邻的排列，就是 1、2 不相邻的排列，$A_5^1A_5^5-A_2^2A_4^1A_4^4=600-192=408$，(3*b*)先将 0,3,4,5 全排列，有 P_4^4，排好后有 5 个空，插入 1 和 2，有 P_5^2，共 $P_4^4\ P_5^2$；其中包括了 0 在首位的情况，这时先排 3，4,5，有 P_3^3，这时有 4 个空格可供 1,2 插入，有 P_4^2，共 $P_3^3\ P_4^2$；符合条件的排列有 $P_4^4\ P_5^2-P_3^3\ P_4^2=408$；

(4 *a*) $A_4^2A_2^1A_2^2+A_4^2A_3^3=120$；　(4 *b*) 先排 2,3,4,5，有 P_4^4，要求 0,1 之间恰有 2 个数，则有 $3P_2^2$，共有 $3P_2^2P_4^4$，这里包含了 0 在首位的情况，这时可以先排好 0,1，有 1 种（0 在前，1 在后），再从 2,3,4,5 中取 2 个排在 0 和 1 之间，有 P_4^2，剩下的两个全排列为 P_2^2，共有 $P_4^2P_2^2$，故符合条件的排列有 $3P_2^2P_4^4-P_4^2P_2^2=144-24=120$；

(5) $A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$；　(6) $A_6^3-A_5^3=60$.（返回）

【例 2】[审题视点]“无序问题”用组合，注意分类处理．

解　(1)只需从其他 18 人中选 3 人即可，共有 $C_{18}^3=816$(种)；

(2)只需从其他 18 人中选 5 人即可，共有 $C_{18}^5=8\ 568$(种)；

(3)分两类：甲、乙中有一人参加，甲、乙都参加，共有 $C_2^1C_{18}^4+C_{18}^3=6\ 936$(种)；

(4)法一(直接法)：至少有一名内科医生和一名外科医生的选法可分四类：一内四外；二内三外；三内二外；四内一外，所以共有 $C_{12}^1C_8^4+C_{12}^2C_8^3+C_{12}^3C_8^2+C_{12}^4C_8^1=14\ 656$(种)．

法二　(间接法)：由总数中减去五名都是内科医生和五名都是外科医生的选法种数，得 $C_{20}^5-(C_{12}^5+C_8^5)=14\ 656$(种)．

方法总结：对于有条件的组合问题，可能遇到含某个(些)元素与不含某个(些)元素问题；也可能遇到“至多”或“至少”等组合问题的计算，此类问题要注意分类处理或间接计算，切

记不要因为“先取再后取”产生顺序造成计算错误．（返回）

【练习 2】解　(1)甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，且甲、乙所选课程中恰有 1 门相同的选法种数共有 $C_4^2C_2^1C_2^1$＝24(种)．或先从 4 门中选 1 门公共的课，再从剩下的 3 门中选 1 门给甲，最后从余下的 2 门中选 1 门给乙，为 $C_4^1C_3^1C_2^1$；

(2)甲、乙两人从 4 门课程中各选两门不同的选法种数为 $C_4^2C_4^2$，又甲乙两人所选的两门课程都相同的选法种数为 C_4^2种，因此满足条件的不同选法种数为 $C_4^2C_4^2-C_4^2$＝30(种)．（返回）

【例 3】[审题视点] 根据题目要求分类求解，做到不重不漏．

解　(1)**法一**　先将其中 4 个相同的小球放入 4 个盒子中，有 1 种放法；再将其余 3 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，有以下 3 种情况：

①某一个盒子放 3 个小球，就可从这 4 个不同的盒子中任选一个放入这 3 个小球，有 C_4^1种不同的放法；

②这 3 个小球分别放入其中的 3 个盒子中，就相当于从 4 个不同的盒子中任选 3 个盒子，分别放入这 3 个相同的小球，有 C_4^3种不同放法；

③这 3 个小球中有两个小球放在 1 个盒子中，另 1 个小球放在另一个盒子中，从这 4 个不同的盒子中任选两个盒子排成一列，有 A_4^2种不同的方法．

综上可知，满足题设条件的放法为 $C_4^1+C_4^3+A_4^2$＝20(种)．

法二　“每个盒子都不空”的含义是“每个盒子中至少有一个小球”，若用“挡板法”，可易得 C_6^3＝20.

(2)可看做将 6 个相同小球放入三个不同盒子中，每盒非空有多少种放法．转化为 6 个 0（代表球）,2 个 1（代表隔板）的排列，**要求 1 不排在两端且不相邻**，共有 C_5^2＝10 种排法，因此方程 $x+y+z=6$ 有 10 组不同的正整数解；

(3)可看做将 6 个相同小球放入三个不同的盒子中，转化为 6 个 0,2 个 1 的排列，共有 C_8^2＝28 种排法，因此方程 $x+y+z=6$ 有 28 组不同的非负整数解．

方法总结：排列与组合的根本区别在于是“有序”还是“无序”，对于将若干个相同小球放入几个不同的盒子中，此类问题可利用“挡板法”求解，实质上是最终转化为组合问题．(2)在计算排列组合问题时，可能会遇到“**分组**”问题，要特别注意是平均分组还是不平均分组．可从排列与组合的关系出发，用类比的方法去理解分组问题，比如将 4 个元素分为两组，若一组一个、一组三个共有 $C_4^1C_3^3$种不同的分法；

而平均分为两组则有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$种不同的分法．（返回）

【练习 3】解　(1)分三步：先选一本有 C_6^1种选法；再从余下的 5 本中选 2 本有 C_5^2种选法；对于余下的三本全选有 C_3^3种选法，由分步乘法计数原理知有 $C_6^1C_5^2C_3^3$＝60 种选法．或 $C_6^3C_3^2C_1^1$

(2)由于甲、乙、丙是不同的三人，在(1)的基础上，还应考虑再分配的问题，因此共有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3$＝360 种选法．

(3)**先分三步，则应是 $C_6^2C_4^2C_2^2$种选法，但是这里面出现了重复，不妨记 6 本书为分别 A、B、C、D、E、F，若第一步取了(AB，CD，EF)，则 $C_6^2C_4^2C_2^2$种分法中还有(AB、CD、EF)，(AB、EF、CD)，(CD、AB、EF)、(CD、EF、AB)、(EF、CD、AB)、(EF、AB、CD)共有 A_3^3种情况，而且这 A_3^3种情况仅是 AB、CD、EF 的顺序不同，因此，只算作一种情况，故分配方式有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$＝15(种)．

(4)在问题(3)的基础上再分配，故分配方式有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3$＝$C_6^2C_4^2C_2^2$＝90(种)．（返回）

【例 4】错因　第二步若取出一等品则与第一步取出的一等品有了先后顺序，从而使取法重复．

实录　按分步原理，第一步确保 1 个一等品，有 C_{16}^1种取法；第二步从余下的 19 个零件中任意取 2 个，有 C_{19}^2种不同的取法，故共有 $C_{16}^1C_{19}^2$＝2 736 种取法．

正解　法一　将“至少有 1 个是一等品的不同取法”分三类：“恰有 1 个一等品”，“恰有 2 个一等品”，“恰有 3 个一等品”，由分类计数原理有：$C_{16}^1C_4^2+C_{16}^2C_4^1+C_{16}^3$＝1 136(种)．

法二　考虑其对立事件“3 个都是二等品”，用间接法：$C_{20}^3-C_4^3$＝1 136(种)．（返回）

【练习 4】[尝试解答]　本题中的“双面手”有 3 个，仅能歌的 2 人，仅善舞的 5 人．把问题分为：(1)独唱演员从双面手中选，剩下的 2 个双面手和只能善舞的 5 个演员一起参加伴舞人员的选拔；(2)独唱演员不从双面手中选拔，即从只能唱歌的 2 人中选拔，这样 3 个双面手就可以和只能善舞的 5 个演员一起参加伴舞人员的选拔．故选法种数是 $C_3^1C_7^4+C_2^1C_8^4$＝105+140=245.（返回）