

# 分 数

分数是上海市六年级上学期数学教育中很重要的一课。

要求：掌握分数的四则运算；分数的大小比较；分数与无限循环小数的互化；分数计算常用方法。

- 1、**裂项法**：是计算中需要发现规律、利用公式的过程，裂项与通项归纳是密不可分的，本讲要求学生掌握裂项技巧及寻找通项进行解题的能力；
- 2、**错项法**：通过交叉相减得到更简便的结果；
- 3、**换元法**：让学生能够掌握等量代换的概念，通过等量代换将复杂算式变成简单算式；
- 4、**循环小数与分数拆分**：掌握循环小数与分数的互化，循环小数之间简单的加、减运算，涉及循环小数与分数的主要利用运算定律进行简算的问题；
- 4、**通项归纳法**

通项归纳法也要借助于代数，将算式化简，但换元法只是将“形同”的算式用字母代替并参与计算，使计算过程更加简便，而通项归纳法能将“形似”的复杂算式，用字母表示后化简为常见的一般形式。

## 一、裂项法

### 1.1 “裂差”型运算

(1) 对于分母可以写作两个因数乘积的分数，即  $\frac{1}{a \times b}$  形式的，这里我们把较小的数写在前面，

即  $a < b$ ，那么有  $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

(2) 对于分母上为 3 个或 4 个连续自然数乘积形式的分数，即：

$\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)}$ ， $\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$  形式的，我们有：

$$\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n \times (n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$\frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} - \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} \right]$$

### 1.2 裂差型裂项的三大关键特征：

(1) 分子全部相同，最简单形式都是 1 的，复杂形式可都是  $x$  ( $x$  为任意自然数) 的，但是只要将  $x$  提取出来即可转化为分子都是 1 的运算；

(2) 分母上均为几个自然数的乘积形式，并且满足相邻 2 个分母上的因数“首尾相接”；

(3) 分母上几个因数间的差是一个定值。

### 1.3 “裂和”型运算：

常见的裂和型运算主要有以下两种形式：

$$(1) \frac{a+b}{a \times b} = \frac{a}{a \times b} + \frac{b}{a \times b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad (2) \frac{a^2+b^2}{a \times b} = \frac{a^2}{a \times b} + \frac{b^2}{a \times b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

裂和型运算与裂差型运算的对比：

裂差型运算的核心环节是“两两抵消达到简化的目的”，裂和型运算的题目不仅有“两两抵消”型的，同时还有转化为“分数凑整”型的，以达到简化目的。

### 1.4 整数裂项：

$$(1) 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1) \times n = \frac{1}{3}(n-1) \times n \times (n+1)$$

$$(2) 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots + (n-2) \times (n-1) \times n = \frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$$1.5 \text{ 基本题型, T1 计算: } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2010 \times 2011}$$

$$1.6 \text{ 课堂练习, T2 计算: } \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots + \frac{1}{2008 \times 2009}$$

$$1.7 \text{ 拓展训练, T3 计算: } \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100}$$

$$T4 \text{ 计算: } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$$

T5 计算：从 1, 2, 3, ..., 100 中取 10 个不同的数，使它们的倒数和等于 1，这 10 个数可以是：\_\_\_\_\_

T6 计算:  $\frac{5}{1 \times 2 \times 3} + \frac{7}{2 \times 3 \times 4} + \frac{9}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{19}{8 \times 9 \times 10}$

T7 计算:  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{3}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{9}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots}$

## 二、错项法

2.1 基本题型, T8 计算:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$

【分析】设  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$  设, 不难得到  $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{101}}$

从而  $S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{101}}$ ,  $S = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

2.2 课堂练习, T9 计算:  $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{100}$

2.3 拓展训练, T10 计算:  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$

T11 计算:  $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^8}) + \frac{1}{2^{15}}$

## 2.4 延伸说明

等比数列求和,  $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$ , 该数列是比值为  $q$  的等比数列。

其和  $S_n = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = a(1 - q^n)/(1 - q)$ , ( $q \neq 1$ ) 就是用错项相减得到的。

### 三、换元法与公式应用

#### 3.1 基本题型，T12 计算：

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2001} + \cdots + \frac{1}{2002} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

【分析】设  $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2002}\right)$ ，原式 =  $a(1 + a - \frac{1}{2002}) - (1 + a)(a - \frac{1}{2002})$

展开就是：  $\frac{1}{2002}$

#### 3.2 课堂练习，T13 计算：

$$\left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975}\right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}\right) - \left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}\right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975}\right)$$

#### 3.3 拓展训练

##### (1) 大小比较

T14 比较  $\frac{778899}{778901}$  与  $\frac{777776}{777778}$  的大小？

T15 若  $A = \frac{1}{1998^2 - 1998 + 1}$ ， $B = \frac{1}{1998^2 - 1997 \times 1998 + 1997^2}$ ，比较 A 与 B 的大小。

T16 试比较  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}$  与  $\frac{1}{10}$  的大小。

##### (2) 估值取整

T17 求  $\frac{1}{\frac{1}{1339} + \frac{1}{1340} + \cdots + \frac{1}{2000}}$  的整数部分是\_\_\_\_\_。

T18 求证:  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2000^2} < 2$

T19 设  $A = 48 \times \left( \frac{1}{3^2 - 4} + \frac{1}{4^2 - 4} + \cdots + \frac{1}{1999^2 - 4} \right)$ , 求 A 的整数部分 (2005 年全国初中数学竞赛题)

## 四、循环小数与分数拆分

### 4.1 循环小数化分数结论

	纯循环小数	混循环小数
分子	循环节中的数字所组成的数	循环小数去掉小数点后的数字所组成的数与不循环部分数字所组成的数的差
分母	n 个 9, 其中 n 等于循环节所含的数字个数	按循环位数添 9, 不循环位数添 0, 组成分母, 其中 9 在 0 的左侧

$$0.\dot{a} = \frac{a}{9}; \quad 0.\dot{a}\dot{b} = \frac{\overline{ab}}{99}; \quad 0.0\dot{a}\dot{b} = \frac{\overline{ab}}{99} \times \frac{1}{10} = \frac{\overline{ab}}{990}; \quad 0.\dot{a}b\dot{c} = \frac{\overline{abc} - a}{990}, \dots\dots$$

### 4.2 单位分数的拆分

分析: 分数单位的拆分, 主要方法是:

从分母 N 的约数中任意找出两个 m 和 n, 有:

$$\frac{1}{N} = \frac{1(m+n)}{N(m+n)} = \frac{m}{N(m+n)} + \frac{n}{N(m+n)} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \quad (\text{和})$$

从分母 N 的约数中任意找出两个 m 和 n ( $m > n$ ), 有:

$$\frac{1}{N} = \frac{m-n}{N(m-n)} = \frac{m}{N(m-n)} - \frac{n}{N(m-n)} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \quad (\text{差})$$

### 4.3 基本题型

T20 例:  $\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$

本题 10 的约数有: 1, 10, 2, 5.。

例如: 选 1 和 2, 有:

$$\frac{1}{10} = \frac{1(1+2)}{10(1+2)} = \frac{1}{10(1+2)} + \frac{2}{10(1+2)} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15}$$

从上面变化的过程可以看出, 如果取出的两组不同的  $m$  和  $n$ , 它们的数值虽然不同, 但是如果  $m$  和  $n$  的比值相同, 那么最后得到的  $A$  和  $B$  也是相同的. 本题中, 从 10 的约数中任取两个数, 共有  $C_4^2 = 6$  种, 但是其中比值不同的只有 5 组: (1, 1); (1, 2); (1, 5); (1, 10); (2, 5), 所以本题共可拆分成 5 组 (包括相同分母一组). 具体的解如下:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110} = \frac{1}{12} + \frac{1}{60} = \frac{1}{14} + \frac{1}{35} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$$

T21 计算:  $0.5\dot{4} + 0.\dot{3}\ddot{6} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $1.\dot{2} \times 1.\dot{2}\ddot{4} + \frac{19}{27} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

T22 某学生将  $1.2\dot{\phantom{0}}$  乘以一个数  $a$  时, 把  $1.2\dot{\phantom{0}}$  误看成  $1.23$ , 使乘积比正确结果减少 0.3. 则正确结果该是多少?

### 4.4 课堂练习

T23 将  $\frac{1}{15}$  写成分母不同而分子是 1 的两个单位分数之和, 最多有几种?

T24 将循环小数  $0.\dot{\phantom{0}}\dot{\phantom{0}}$  与  $0.\dot{\phantom{0}}\ddot{\phantom{0}}$  相乘, 取近似值, 要求保留一百位小数, 那么该近似值的最后一位小数是多少?

T25  $0.\dot{d}2\dot{5} = \frac{n}{810}$ , 求正整数  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 4.5 拓展训练

**T26** 已知：真分数  $\frac{a}{7}$  化为小数后，如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是 1992，那么  $a$  是多少？

**T27** 已知：真分数  $\frac{a}{7}$  化成循环小数之后，小数点后第 2009 位数字为 7，则  $a$  是多少？

**T28** 如果  $\frac{1}{2009} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ ， $A, B$  均为正整数，则  $B$  最大是多少？

**T29** 填空  $\frac{1}{10} = \frac{1}{(\quad)} - \frac{1}{(\quad)} - \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$  (2 个扩充到 3 个)