2004 年“宇振杯”上海市初中数学竞赛
答案

一、填空题

1、【答案】$a<-2$

2、【答案】$6,4\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3、【答案】63

4、【答案】$\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

5、【答案】14

6、【答案】$\dfrac{3}{7}$

7、【答案】12,52,69

8、【答案】40

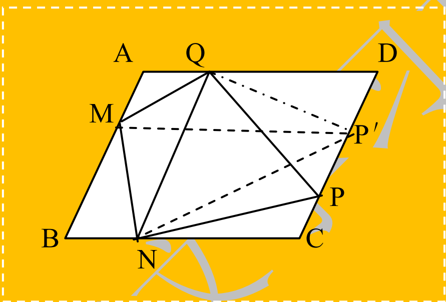
9、【答案】$\sqrt{3}<d<2\sqrt{3}$

10、【答案】20°

二、【解答】（1）不妨设 MP∥BC，则 $S_{\triangle QMP}=S_{\triangle AMP}=\dfrac{1}{2}S_{\square AMPD}$,同理，$S_{\triangle NMP}=\dfrac{1}{2}S_{\square MBCP}$

故 $S_{四边形PQMN}=\dfrac{1}{2}$（$S_{\square AMPD}+S_{\square MBCP}$）$=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$

(2)一定能推出 MP∥BC 或 NQ∥AB，如图，



若 MP∥BC, 则断言已经成立。

若 MP 与 BC 不平行，过 M 作 MP′∥BC，交 CD 与 P′，P′与 P 不重合。

由题设及（1）的结论有 $S_{四边形PQMN}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}+S_{\square PQMN}$，

所以，$S_{\triangle QNP}=S_{\triangle QNP'}$.

从而，PP′∥QN, 故 QN∥AB.

三、【答案】130

【解析】若 n 为奇数，则 d_1, d_2, d_3, d_4 都是奇数，故 $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=1+1+1+1\equiv 0$（mod4），矛盾。

若 4|n，则有 $d_1=1,d_2=2$,由 $d_i^2\equiv 0$ 或 1（mod4）知，$n\equiv 1+0+d_3^2+d_4^2\neq 0(\text{mod}4)$,也矛盾。

从而，$n=2(2n_1-1)$,n_1 为某正整数，且数组（d_1,d_2,d_3,d_4）=(1,2,p,q)或（1,2，p，2p)，其中 p，q 为奇质数。

在前一种情形，有 $n=1^2+2^2+p^2+q^2\equiv 3$（mod4），矛盾。

则只能是 $n=1^2+2^2+p^2+(2p)^2\equiv 5(1+p^2)$. 故 5|n.

若 $d_3=3$,则 $d_4=5$，这将回到前一种情形，因此，只能是 $d_3=p=5$,则 $n=1^2+2^2+5^2+10^2=130$.

容易验证，130 的四个连续最小的正约数就是 1,2，5,10，满足条件，因此，n=130.

四、【答案】$\dfrac{1}{18}$

【解析】设 $\frac{AE}{AB}$=x, $\frac{AD}{AC}$=y, $S_{\triangle AED}$: $S_{\triangle ABC}$ =(AE・AD) : (AB・AC)=xy

因为 $S_{\triangle ABC}$ =1, 所以 $S_{\triangle ADE}$ =xy，$S_{\square BCDE}$ =1-xy

在△ABC 中，有**梅涅劳斯定理**的 $\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DC}{CA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$,则

$$\frac{BP}{PD}=\frac{CA}{DC}\cdot\frac{EB}{AE}=\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{1-x}{x(1-y)} \quad (1)$$

同理，$\frac{CP}{PE}=\frac{1-y}{y(1-x)}$，于是

$S_{\triangle DEP}$: $S_{\triangle BPC}=\frac{PD}{PB}\cdot\frac{PE}{PC}=\frac{x(1-y)}{1-x}\cdot\frac{y(1-x)}{1-y}$=xy。

同时，由式（1）得 $\frac{BP}{BD}=\frac{BP}{BP+PD}=\frac{1-x}{1-xy}$

故 $S_{\triangle BPC}=\frac{BP}{BD}S_{\triangle BCD}=\frac{1-x}{1-xy}\cdot\frac{CD}{CA}S_{\triangle ABC}=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$

由题设有 $\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}=S_{\triangle BPC}=\frac{9}{16}S_{\square BCDE}=\frac{9}{16}$（1-xy）

令 u=xy,则 $9(1-u)^2=16[1+u-(x+y)]\leqslant 16(1-\sqrt{u})^2$

注意到 0<u<1, 得 3（1-u）≤4（1-$\sqrt{u}$），3（1+$\sqrt{u}$）≤4，解得 0<u≤$\frac{1}{9}$

当且仅当 x=y=$\frac{1}{3}$，u=xy=$\frac{1}{9}$

则 $S_{\triangle DEP}$ =xy $S_{\triangle BPC}=xy\frac{9}{16}(1-xy)=\frac{9}{16}(-u^2+u)=\frac{9}{16}[-(u-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]$

故当 u=$\frac{1}{9}$，即 x=y=$\frac{1}{3}$ 时，$S_{\triangle DEP}$ 取最大值 $\frac{1}{18}$