2010 年（新知杯）上海市初中数学竞赛试卷参考答案

（2010 年 12 月 12 日　上午 9:00~11:00）

题号	一	二				总分
	（1~10）	11	12	13	14	
得分						
评卷						
复核						

解答本试卷可以使用计算器

一、　填空题（第 1-5 小题，每题 8 分，第 6-10 小题，每题 10 分，共 90 分）

1、已知 $x+\frac{1}{x}=3$，则 $x^5+x^{10}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^{10}}=15250$

解　$\because x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$　　即 $x^2+\frac{1}{x^2}=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\times3-3=18$

$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=7^2-2=47$

$x^5+\frac{1}{x^5}=(x^4+\frac{1}{x^4})(x+\frac{1}{x})-(x^3+\frac{1}{x^3})=47\times3-18=123$

$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=(x^5+\frac{1}{x^5})^2-2=123^2-2=15127$

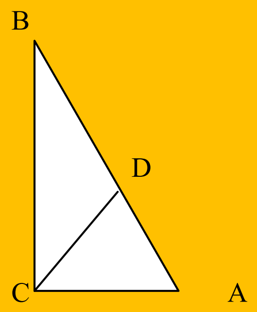
原式=15127+123=15250

2、满足方程 $(x+3)^2+y^2+(x-y)^2=3$ 的所有实数对（x，y）为<u>（-2，-1）</u>.

解、由题知 $2x^2+(6-2y)x+2y^2+6=0$

$\triangle=(6-2y)^2-8(2y^2+6)=-12(y+1)^2\geqslant0$

$\therefore y^2+2y+1\leqslant0$　　$\therefore y=-1$　可得 $x=-2$



3、已知直角三角形 ABC 中，∠C=90°，BC=6，CA=3，CD 为∠C 的角平分线，则 $CD=2\sqrt{2}$

解、令 CD=x，由面积正弦定理可知：

$S_{\triangle ABC}=9=\frac{1}{2}\times3\times x\times\sin45^\circ+\frac{1}{2}\times6\times x\times\sin45^\circ$

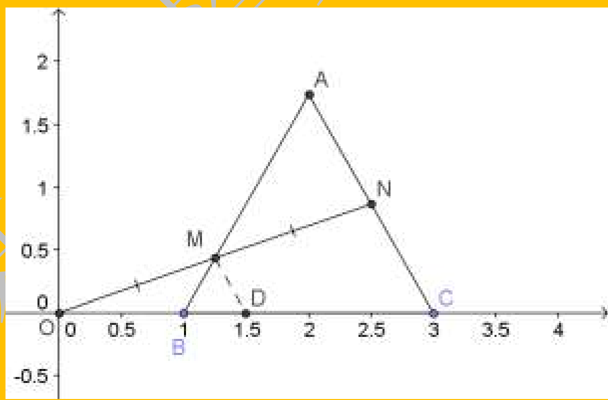
$\therefore x=2\sqrt{2}$

4、若前 2011 个正整数的乘积 1×2×…×2011 能被 2010^k 整除，则正整数 k 的最大值为 30.

解、2010=2×3×5×67　　$\left[\frac{2011}{67}\right]=30$

$\therefore k_{max}=30$

5、如图，平面直角坐标系内，正三角形 ABC 的顶点 B，C 的坐标分别为（1,0），（3,0），过坐标原点 o 的一条直线分别与边 AB，AC 交于点 M，N，若 OM=MN，则点 M 的坐标为（$\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}$）

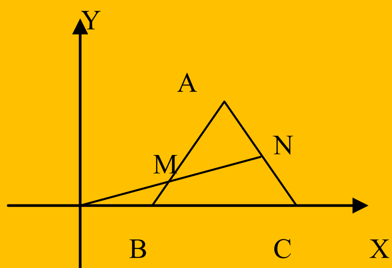


解 1：过 M 作 MD//AC,交 BC 于点 D。
Δ BDM 为等边三角形，设|BM|=|MD|=|BD|=x，
∵M 为 ON 的中点，∴D 也为 OC 的中点，且
MD：NC=OD： OC=OM：MN=1:2
故 NC=2x，2（2-x）=OB+2
OB=2-2x=1，
从而 x=0.5
点 M 的横坐标为 1+x/2=1.25,纵坐标为 √3x/2= √3/4
同学们也可以作 NE//AB,交 BC 于点 E,则 B 就是 OE 的中点.
NE:BM=ON:OM=2:1, NE=2x
OB=BE=BC-EC=BC-NC==BC-NE=2-2x=1.
以上充分利用了大正三角形套小正三角形的特点．再利用中位线或相似形原理．将点坐标计算化为了求线段长.

解 2 利用**梅涅劳斯定理** $\frac{OB}{BC}\times\frac{CA}{AN}\times\frac{NM}{MN}=1$

$\therefore\frac{1}{2}\times\frac{2}{AN}\times1=1$　　AN=1

∵B(1,0)，C（3,0)，且三角形 ABC 是正三角形，



∴A(2，$\sqrt{3}$)

∴N($\frac{5}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$) 则 M($\frac{5}{4}$,$\frac{\sqrt{3}}{4}$)

6、如图 1，矩形 ABCD 中，AB=5，BC=8，点 E，F，G，H 分别在边 AB,BC,CD,DA 上，使得 AE=2，BF=5，DG=3，AH=3，点 O 在线段 HF 上，使得四边形 AEOH 的面积为 9，则四边形 OFCG 的面积是 6.5

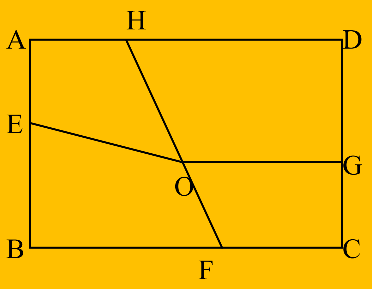


图 1

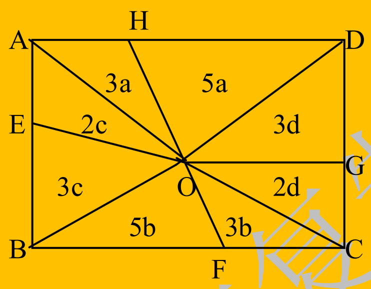


图 2

解、连结 AO,OD,BO,OC。面积比如图 2 所示。

且已知$\begin{cases} a+b=2.5 \\ c+d=4 \\ 2c+3a=9 \end{cases}$

∴2d+3b=2.5×3+4×2−9=6.5

7、整数 p，q 满足 p+q=2010，且关于 x 的一元二次方程 $67x^2+px+q=0$ 的两个根均为正整数，则 p=-2278

解 令 p=67a ，q=67b 可知 a+b=30

由根与系数的关系可知$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{p}{67}=-a \\ x_1x_2=\dfrac{q}{67}=b \end{cases}$

$x_1x_2-x_1-x_2=a+b=30$

$(x_1-1)(x_2-1)=31$

不妨设$\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=31 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=32 \end{cases}$

∴$\begin{cases} a=-34 \\ b=64 \end{cases}$

p=67a=67×(−34)=−2278

8、已知实数 a，b，c 满足 a≥b≥c，a+b+c=0, 且 a≠0，设 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，则平面直线坐标系内两点 $A(x_1, x_2)$，$B(x_2, x_1)$ 之间的距离的最大值为 $\underline{3\sqrt{2}}$

解、$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2}$

$$=\sqrt{2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(a-c)}{a}\quad (a>0)$$

$$=\sqrt{2}(1-\frac{c}{a})$$

∵a≥b≥c

∴a≥-a-c≥c

$-\frac{c}{2}\leqslant a\leqslant -2c$

$-2\leqslant\frac{c}{a}\leqslant-\frac{1}{2}$

$|AB|_{max}=\sqrt{2}\times(1+2)=3\sqrt{2}$

9、如图，设 ABCDE 是正五边形，五角星 ACEBD（阴影部分）的面积为 1，设 AC 与 BE 的交点为 P，BD 与 CE 的交点为 Q，则四边形 APQD 的面积等于 $\underline{\frac{1}{2}}$

解　连结 PQ，四边形 APQR 是平行四边形。

易知 $1=6S_1+2S_2$　　∴$S_{APQD}=3S_1+S_2=\frac{1}{2}$

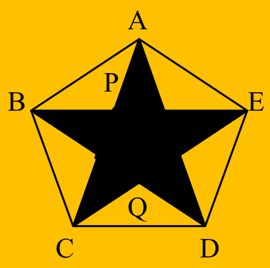


图 1

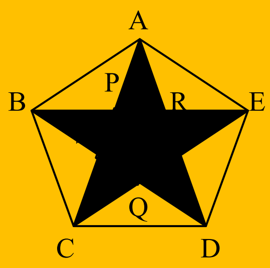


图 2

10、设 a，b，c 是整数，1≤a<b<c≤9，且 $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}+1$ 能被 9 整除，则

a+b+c 的最小值是 8，最大值是 23

解　易知 a+b+c 被 9 除余 2 或 5 或 8

∴（a+b+c）$_{min}$=1+2+5=8

（a+b+c）$_{max}$=9+8+6=23

二、　解答题（每题 15 分，共 60 分）

11、已知面积为 4 的△ABC 的边长分别为 BC=a，CA=b，AB=c, c>b, AD 是∠A 的角平分线，点 C′ 是点 C 关于直线 AD 的对称点，若△C′BD 与△ABC 相似，求△ABC 的周长的最小值。

解　∵△BDC′ 相似于△BCA.

情况（1）若 DC′ //AC

令∠DAC=α，则∠BAC=∠BC′D=2α

易知 AC′=C′D=CD=AC=b

显然 DC′=AC 矛盾。(DC′ 应小于 AC)

情况（2）∠BC′D=∠C

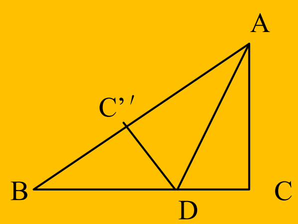
又∵∠DC′A=∠C

∴∠BC′D=∠C=90°

在面积为 4 的直角三角形中，显然，等腰直角三角形周长最小，

证法如下：a+b+c=a+b+ $\sqrt{a^2+b^2}$

$= \text{a+b+} \sqrt{(a+b)^2-2ab} = \text{a+b+} \sqrt{(a+b)^2-16}$



又 a+b≥$\sqrt{ab}$　即 a+b≥4$\sqrt{2}$，当且仅当 a=b=2$\sqrt{2}$ 成立

∴a+b+c≤4$\sqrt{2}$+4

注:面积一定的情况下，所有直角三角形中,等腰直角三角形周长最小.

证明还是用到**算术平均不小于几何平均**这个著名的不等式.

12、将 1,2，…9 这 9 个数字分别填入图 1 中的 9 个小方格，使得 7 个三位数 $\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi},\overline{beh},\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除，求三位数 $\overline{ceg}$ 的最大值。

解 这是一道技巧题

显然 11|(a+c-b+d+f-e+g+i-h)

∴11|[a+b+c+d+e+f+g+h+i-2(b+e+h)]

∴11|[45-2(b+e+h)]

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图 1

2	9	7
6	3	8
4	5	1

图 2

∴(b+e+h)≡6(mod 11)
又∵b+h≡e(mod 11)
∴e≡3(mod 11)
即 e=3
∴b+h, d+f, a+i 只能取 14 或 3.
因为 14=5+9=8+6
∴a，e，i，b，h，d，f，必须使用数字 1, 2, 9, 5, 8, 6, 3
c，g 只能取 7, 4

∴ $\overline{ceg}$ 最大值为 734

不考虑旋转，图 2 是唯一合理填法

13、设实数 x，y，z 满足 x+y+z=0，且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leqslant 2$，求 x 的最大值和最小值。
解　这是一道基础函数思想问题
把 z=-x-y 代入
$(x-y)^2+(2y+x)^2+(-2x-y)^2\leqslant 2$
∴ $3y^2+3xy+3x^2-1\leqslant 0$
开口向上抛物线，若有解
△ $=9x^2-12(3x^2-1)\geqslant 0$
∴ $-\frac{2}{3}\le x\le \frac{2}{3}$
$x_{max}=\frac{2}{3}$，当 $y=z=-\frac{1}{3}$ 满足
$x_{min}=-\frac{2}{3}$，当 $y=z=\frac{1}{3}$ 满足。

14、称具有 a^2+161b^2 形式的数为“好数”，其中 a，b 都是整数
（1）证明：100, 2010 都是“好数”。
（2）证明：存在正整数 x，y，使得 $x^{161}+y^{161}$ 是“好数”，而 x+y 不是“好数”。
解（1）显然 $100=10^2+161\times 0^2$
$2010=43^2+161\times 1^2$
∴100、2010 是好数。
（2）161=7×23
a^2+161b^2 除以 7 的余数可以是 0, 1, 2, 4
所以我们构造 x，y 时，最好让 x+y 除以 7 余 3.
又 $[p(p^{161}+1)]^{161}+(p^{161}+1)^{161}$
$=(p^{161}+1)^{161}(p^{161}+1)=(p^{161}+1)^{162}$ 是平方数。
可以令　$x=3\times(3^{161}+1)$　$y=3^{161}+1$
则易知　$x^{161}+y^{161}=(3^{161}+1)^{162}=[(3^{161}+1)^{81}]^2+161\times 0^2$ 是好数。
又 $3^{161}\equiv 5\pmod 7$
$x+y=3\times(3^{161}+1)+3^{161}+1\equiv 3\times(5+1)+6$
$\equiv 3\pmod 7$
∴x+y 不是好数，得证。