

## 一元一次方程

1. “一沙一世界”，你怎么看字母“ $a$ ”和数字“1”？
2. 如何利用字母  $x$  和数字 1，采用已学过的数学运算符号和等号“ $=$ ”列出等式呢？
3. 我们发现 (1)  $1 \times a = a$ , (2)  $0 + a = a$ , 不要小看这样两个基本式子，下面我们经常用到。
4. 对于简单的式子  $x=2$ ，我们可以根据 3 (1) 来变形， $1 \times x = 2$ ，再根据 3 (2) 来变形，得到  $1 \times x + 0 = 2$ 。如果我们稍作变换，将 1 视为  $a$ ，0 视为  $b$ ，2 视为  $c$ ，就有  $ax + b = c$ ，这是一个等式，就像天平的两边放了相等的砝码一样，天平平衡了，左边是  $ax + b$ ，右边是  $c$ 。如何求解  $x$  呢？
5. 现在 我们对天平两端作如下操作：
  - (1) 各拿掉质量为  $b$  的砝码，左边就是  $ax + b - b = ax$ ，右边就是  $c - b$ ，天平应该还是平衡的，即  $ax = c - b$ ；
  - (2) 或者 当  $a \neq 0$  时，我们将 (1) 中天平两边的砝码平均分成  $a$  份，都保留 1 份在 天平上，左边剩下就是  $x$ ，右边剩下  $(c - b)/a$ ，天平继续保持平衡，即  $x = (c - b)/a$
  - (3) 如果  $a = 0$ ，则  $0 \times x = c - b$ ，这时如果  $c = b$ ，则  $x$  有无数解，否则，无解。
6. 归纳总结 一元一次方程的解法如下：
 

**$Ax = B$  求解：**(1)  $A \neq 0$ ，有一个解  $x = B/A$ ，(2)  $A = 0$ ，如果  $B$  也等于 0，有无数解，(3) 否则，如果  $B \neq 0$ ，无解。

【例 1】解方程  $\frac{3}{4} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) - 8 \right] = \frac{3}{2}x + 1$

【例 2】解方程  $2|x - 0.5| - 3 = \frac{2}{3}$

## 含字母系数的一元一次方程

【例 3】解关于  $x$  的方程  $4a^2 - x = 2ax + 1$ ,

【例 3a】关于  $x$  的方程  $(k+1)x - 2 = 1 - k(4-x)$  的解不大于 2，求  $k$  的取值范围

【例 4】解关于  $x$  的方程  $m^2(1-x) = mx + 1$

【例 5】若  $abc=1$ ，解方程  $\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1$

【例 6】若一元一次方程  $ax=b$  有两个不相等的解，求证：这个方程有无数多个解。

## 一元一次方程的应用

【例 7】上海第一百货商店的一种商品的进价降低了 8%，而售价保持不变，可使得商店的利润提高 10%，问：原来的利润率是百分之几？

【例 8】《孙子算经》卷下第十七问，“荡杯问题”，题曰：“今有妇人河上荡杯。津吏问曰：‘杯何以多？’妇人曰：‘有客。’津吏曰：‘客几何？’妇人曰：‘二人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五。不知客几何？’”

注：其有“术曰：置六十五杯，以一十二乘之，得七百八十，以十三除之，即得”

【例 9】10 个人围成一个圆圈做游戏，游戏的规则是：每个人心里都想好一个数，并把自己想好的数如实地告诉他两旁相邻的两个人，然后每个人将他两旁的两个人告诉他的数的平均数报出来，若报出来的数如图所示，则报 3 的人心里想的数是几？

10 1  
 9        2  
 8        3  
 7        4  
 6 5

【例 10】如图，一个高为  $10\text{cm}$ ，半径为  $6\text{cm}$  的圆柱，以每分钟一圈的速度旋转，一个宽为  $3\text{cm}$  的刷子，从圆柱侧面的顶端以每分钟移动  $1\text{cm}$  的速度垂直向

下移动，那么刷子刷过圆柱侧面 50% 的面积所花的时间是多少分钟？

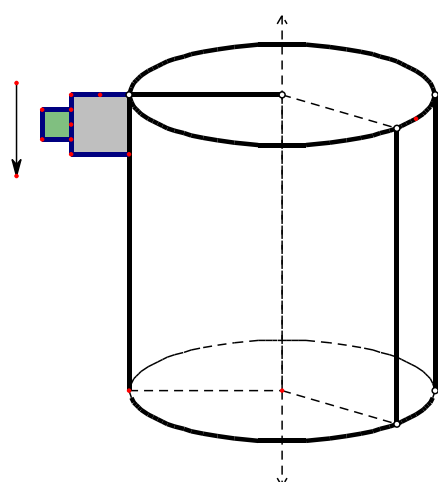


图 (1)

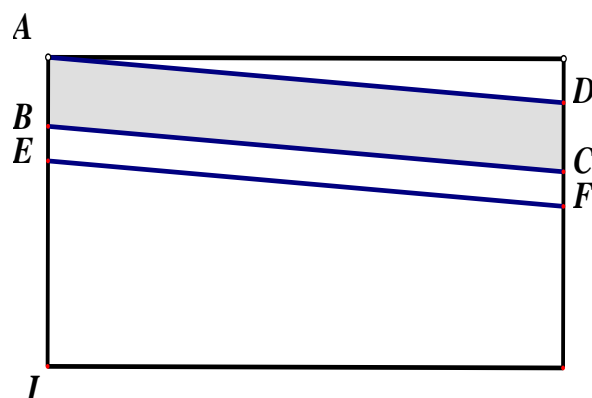


图 (2)

## 回家练习

### 1. 解方程

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = 1$$

$$x - \frac{1}{3} \left[ x - \frac{1}{3} (x-9) \right] = \frac{1}{9} (x-9) \quad |x+1| + 3 = 5$$

### 2. 解关于 $x$ 的方程

$$(1) \quad ax+1=bx \quad (2) \quad (ax-b)(a+b)=0$$

$$(3) \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b-a} = \frac{a}{a+b} \quad (a \neq 0, a^2 \neq b^2)$$

(4) 设  $a$  为整数，已知关于  $x$  的方程  $|x|=ax+1$  既有一个正根，又有一个负根，求  $a$  的值。

(5) 已知关于  $x$  的方程  $3m(x+3)=9x+4$  无解，求  $m$  的值。

3. 已知一个多边形的内角和等于其外角和的 3 倍，求此多边形的边数。

4. 0~9 这 10 个数，每个数字恰用一次，组成若干个数，它们的和为 100，问有多少种方法？

5. 甲乙两个机器人同时从起点出发，沿跑道匀速向终点行进，电子记录仪表明：当甲距离终点 1 米时，乙距离终点 2 米，当甲到达终点时，乙距离终点 1.01 米，那么，跑道的长度为多少米？