第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

初二年级培训题 参考答案

一. 选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	C	C	B	A	A
题号	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	D	D	D
题号	13	14	15	16	17	18
答案	C	C	C	C	B	C
题号	19	20	21	22	23	24
答案	A	C	D	C	B	B
题号	25	26	27	28	29	30
答案	A	B	A	C	C	C

提示:

1. $a^2\cdot a^3=a^5$,
$a^6\cdot a^3=a^9$,
$(a^2)^3=a^6$,
$(a+2)(a-2)=a^2-4$.

故选(C)。

2. 利用完全平方公式，原式可化为 $|x-2|+|x-10|=8$,
利用数轴的几何意义，可知
$2\leqslant x\leqslant 10$,
故所求代数式的最大整数值是 2. 选(C)。

3. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{6}+2+\sqrt{2}-3-\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$

$=\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$

$=\frac{1}{3-2-2\sqrt{2}-1}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选(C)。

4. 由 $a-b=1$，得 $a=b+1$，
所以 $a^2=(b+1)^2=b^2+2b+1$,
于是 a^2-b^2-2b
$=b^2+2b+1-b^2-2b=1$.

故选(B)。

5. 因为 $0<a<1$，且
$\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$,
所以 $1-a<x^2<1-a^2$,
$a>1-x^2$,
又 $0<x<1$,
所以 $0<x^2<x$,
所以 $1-x^2>1-x$,
从而 $a>1-x$.

故选(A)。

6. $\frac{2x-3}{4-x}=\frac{-(2x-3)}{-(4-x)}=-\frac{2x-3}{x-4}$.

故选(A)。

7. **译文：** 如果 $0<m<1$，那么 m 一定小于它的(　　)
(A)相反数. (B)倒数.
(C)绝对值. (D)平方.

解 由于 $0<m<1$,
所以 $m>-m$,
$m=|m|$,
$m>m^2$,
只有 $m<\frac{1}{m}$，选(B)。

8. 由不等式 $|x+1|>2$，解得
$x>1$ 或 $x<-3$,
不等式 $|x|\leqslant a$ 的解集为
$-a\leqslant x\leqslant a$,
由于 这两个解没有公共部分,
所以 $\begin{cases}a\leq 1,\\-a\geq -3,\end{cases}$

又 $a\geqslant 0$，

则 $0\leqslant a\leqslant 1$.选(A)。

9. 方程两边同时乘以

$$x^2-5x+6,$$

得 $3-x(x-2)+3(x-3)=0$，

整理得 $x^2-5x+6=0$，

所以 $(x-2)(x-3)=0$，

解得 $x_1=2$，$x_2=3$.

经检验，此两根均为增根。

所以，原方程没有实数根，选(D)。

10. 由 $91=13\times 7$ 可知，

91 有 4 个因数：1，7，13，91.

首先考虑正整数解。

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=91,$$

所以

$$\begin{cases}x+y=13,\\x-y=7,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=10,\\y=3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=91,\\x-y=1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=46,\\y=45.\end{cases}$$

其次，考虑整数解。

由于 x，y 在原方程中都是以平方项出现，所以都可以取负值：

$$\begin{cases}x=10,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=10,\\y=-3,\end{cases}\begin{cases}x=-10,\\y=-3,\end{cases}\begin{cases}x=-10,\\y=3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=46,\\y=45,\end{cases}\begin{cases}x=-46,\\y=45,\end{cases}\begin{cases}x=46,\\y=-45,\end{cases}\begin{cases}x=-46,\\y=-45.\end{cases}$$

故选(D)。

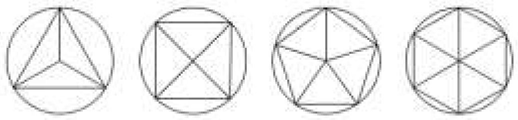
11. 对于(A)：若两条对角线不互相平分，则该四边形不是矩形；

对于(B)：若两条对角线不互相平分，则该四边形不是菱形；

对于(C)：若两条对角线不互相平分，则该四边形不是正方形。

只有(D)是对的。故选(D)。

12. 译文：下列图形中，是中心对称图形的是(　　　)



① ② ③ ④

(A)①②.　(B)③④.

(C)①③.　(D)②④.

解 圆、正方形与正六边形是中心对称图形，所以图②、④是中心对称图形，选(D)。

13. 锐角三角形各边中垂线的交点、高的交点在三角形内部；直角三角形各边中垂线的交点、高的交点在三角形上；钝角三角形各边中垂线的交点、高的交点在三角形外部。只有①和④一定在该三角形内部。故选(C)。

14. 由已知等式，得

$$\left|\frac{a}{4}-2\right|+\left|\frac{a}{4}-3\right|=1.$$

此式的几何意义是：数轴上的动点 $\frac{a}{4}$ 到点 2 和点 3 的距离之和是 1.而当点 $\frac{a}{4}$ 在点 2 和 3 之间移动时，点 $\frac{a}{4}$ 到点 2 和 3 的距离之和是 1.即

$$2\leqslant\frac{a}{4}\leqslant 3，8\leqslant a\leqslant 12.$$

所以，满足关系式的整数 a 有 5 个，分别是 8，9，10，11，12.故选(C)。

15. 由角平分线的性质知，角平分线的交点到三边的距离都是 2.

如图 18，在△ABC 中，三条内角平分线的交点 O 到三边的距离都是 2.连接 AO，BO，CO，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times AB+\frac{1}{2}\times 2\times BC+\frac{1}{2}\times 2\times AC$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times(AB+BC+AC)$$

$$=30,$$

所以 周长=AB+BC+AC=30.

故选(C)。

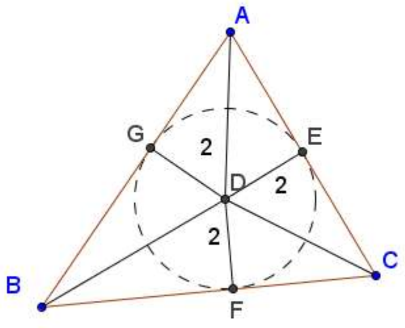


图18

16. 如图 19，过点 D 作 DE⊥AB 于 E，则易知

Rt△ADE≌Rt△ADC，

所以　DE=DC=m，

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}mn$.

故选(C)。

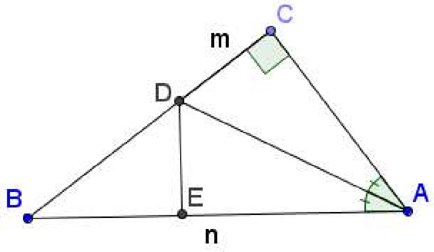


图19

17. 如图 20，取 BC 的中点 E，连接 AE，EP，作 EF⊥AP 于 F。则

△ABE≌△ADQ，

所以∠BAE=∠QAD.

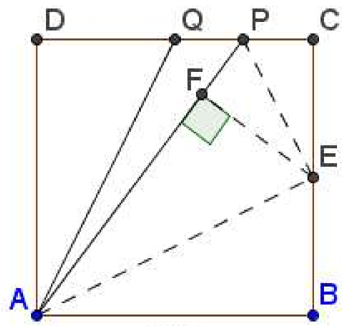


图20

设正方形 ABCD 的边长 AB=4，则

BE=CE=CQ=QD=2，

CP=PQ=1.

在△ABE 中，

AE=$\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$；

在△CEP 中，

EP=$\sqrt{CE^2+CP^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

在△ADP 中，

AP=$\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{16+9}=5$

所以　$AP^2=AE^2+EP^2$，

∠AEP 是直角三角形。

由　$S_{\triangle AEP}=\frac{1}{2}AE\cdot EP=\frac{1}{2}AP\cdot EF$，

得　EF=$\frac{AE\bullet}{AP}$=2，

于是　BE=EF，

则　Rt△BAE≌Rt△FAE，

∠BAE=∠EAF，

所以　∠BAP=2∠BAE=2∠QAD，

故选(B)。

18. 如图 21，由菱形的轴对称性，可知 BF=DF，

故 EF+BF=EF+DE，

因此，EF+BF 的最小值为 DE。

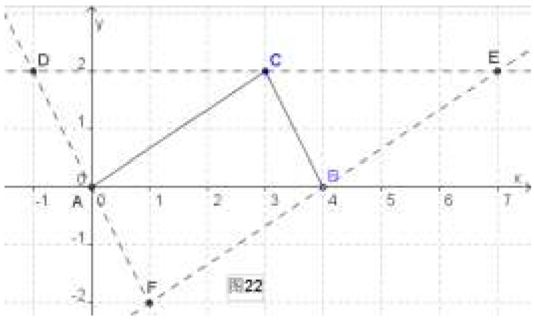
由勾股定理，得

DE=$\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{5^2-(5-2)^2}=4$.

故选(C)。

19. 与“96”成中心对称的图形是“96”，选(A)。

20. 如图 22，以 A、B、C 三点为顶点画平行四边形，则第四个顶点可以是 E(7, 2)，或 D(-1, 2)，或 F(1, -2)，所以第四个顶点不可能在第三象限，选(C)。



21. 设 C 点的坐标是(m, n)，又 A 点的坐标是(-2, -2)，

所以 B、D 两点的坐标分别是

B(-2,n)，D(m,-2).

因为　对角线 BD 经过坐标原点，

所以　$\dfrac{n}{-2}=\dfrac{-2}{m}$，即 mn=4，

又　点 C 在反比例函数 y=$\dfrac{k^2}{x}$ 的图象上，

所以　n=$\dfrac{k^2}{m}$，即 mn=k^2，

所以　k^2=4，k=±2，选(D)。

22. 如果给定一个 x 值，相应地就确定了一个 y 值，那么 y 是 x 的函数。据此可知，y 是 x 的函数的有：①③④。故选(C)。

23. 当 a+b+c≠0 时，由

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k,$$

得

a=k(b+c)，

b=k(c+a)，

c=k(a+b)，

三式相加，得

a+b+c=2k(a+b+c)，

则　k=$\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}$=$\dfrac{1}{2}$，

直线 y=$\dfrac{1}{2}$x+$\dfrac{1}{2}$ 过第一、二、三象限；

当 a+b+c=0 时，

k=$\dfrac{a}{b+c}$=$\dfrac{a}{-a}$=-1，

直线 y=-x-1 过第二、三、四象限。

综上，直线 y=kx+k 必经过第二、三象限。故选(B)。

24. 解方程组 $\begin{cases} y=-\dfrac{k}{x}, \\ y=-kx, \end{cases}$

得　$\begin{cases} x=1, \\ y=-k, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1, \\ y=k, \end{cases}$

所以，函数 y=-$\dfrac{k}{x}$ 和 y=-kx 的图象有两个交点：(1,-k)和(-1,k)。选(B)。

25. 由　　a_1=0，

依次可得　$a_2=2a_1+1=1$，

$a_3=2a_2+1=3$，

$a_4=2a_3+1=7$，

$a_5=2a_4+1=15$，

$a_6=2a_5+1=31$，

……

由此可知，n 个数 a_1，a_2，a_3，…，a_n 中，其个位上的数从 a_2 开始形成每 4 个就循环的规律。

因为　2011=2+4×502+1，

所以　a_{2011} 的个位数字是 3；

同理　a_{2010} 的个位数字是 1.

所以　$a_{2011}-a_{2010}$ 的个位数字是 2.

选(A)。

26. 设分成 x 个小组，则

$$\begin{cases} 8x<43, \\ 9x>43, \end{cases}$$

由此可得　$\dfrac{43}{9}<x<\dfrac{43}{8}$，

又 x 需要取整数，所以共有 5 个小组。故选(B)。

27. 画树状图：

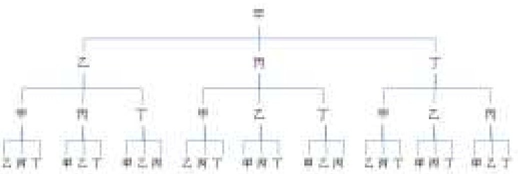


图 23

要使第四次传球给甲，则第三次传球不能给甲。由图可知，第三次传球给甲的有 6 种情况，所以，满足条件的有 27-6=21(种)情况。而 4 次传球的所有可能情况有 3^4 种，故满足条件的概率是 $\dfrac{21}{3^4}$=$\dfrac{7}{27}$。故选(A)。

28. 译文： 某球队有六名队员：A，B，C，D，E，F。已知 A，E，F 中有两人是优秀球员；A，B 中至少有一人是优秀球员；B，C 中有一人若是优秀球

员，另一人必定也是优秀球员；A，D 不可能都是优秀球员；C，D 中有且仅有一人是优秀球员；如果 D 不是优秀球员，则 E 也不是优秀球员。则优秀球员是(　　　)

(A)A，B，D，F.(B)B，C，D，E.

(C)A，B，C，F.(D)C，D，E，F.

解 由条件“C，D 中有且仅有一人是优秀球员”，若假设 D 是优秀球员，则 C 不是优秀球员；

由条件“B，C 中有一人若是优秀球员，另一人必定也是优秀球员”，可知 B 不是优秀球员；

再由条件“A，B 中至少有一人是优秀球员”，可知 A 是优秀球员；

再由“A，D 不可能都是优秀球员”，导致矛盾。因此，D 不是优秀球员，于是得出 C 是优秀球员。

由“B，C 中有一人若是优秀球员，另一人必定也是优秀球员”，则 B 也是优秀球员；

由条件“如果 D 不是优秀球员，则 E 也不是优秀球员”可知 E 不是优秀球员；

再由条件“A，E，F 中有两人是优秀球员”，可知 A，F 必是优秀球员。

所以，A，B，C 和 F 是优秀球员。故选(C)。

29. 在 1×2×3×…×120 中，2 因子的个数是(符号[a]表示不大于 a 的最大整数)

$[\frac{120}{2}]+[\frac{120}{2^2}]+[\frac{120}{2^3}]+[\frac{120}{2^4}]+[\frac{120}{2^5}]+[\frac{120}{2^6}]=116$，

5 因子的个数是$[\frac{120}{5}]+[\frac{120}{5^2}]=28$.

所以，将 1×2×3×…×120 中的每一个数都分解质因数后，共有 116 个 2 相乘，28 个 5 相乘，而 1 个 2 和 1 个 5 相乘，末尾就产生 1 个 0，所以 1×2×3×…×120 的乘积的末尾有 28 个 0。故选(C)。

30. 14=2×7，除 14 外，在不大于 20 的正偶数中，没有 7 的倍数。因此，将 14 放在第一组，除得的商一定含有因子 7.

下面证明最小的商是 7.

$2\times4\times\cdots\times20$

$=2^{10}\times10\times9\times\cdots\times2\times1$

$=2^{15}\times(1\times3\times5\times7\times9)\times(5\times4\times3\times2\times1)$

$=2^{18}\times3^4\times5^2\times7$

$7=\frac{2^9\times3^2\times5\times7}{2^9\times3^2\times5}=\frac{14\times6\times8\times12\times20}{2\times4\times10\times16\times18}$.

故选(C)。

二．填空题

题号	31	32	33	34	35
答案	2012	$<$	-8	2	±5
题号	36	37	38	39	40
答案	$\frac{1}{2012}$	-2	3	$\frac{1}{4}$	9
题号	41	42	43	44	45
答案	m≠-2，$-\frac{3}{2}$	5 或 7	15	x>-3	$\frac{1}{2}<a\leqslant1$
题号	46	47	48	49	50
答案	-48	180°	$\frac{50}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	60°
题号	51	52	53	54	55
答案	$\frac{1}{10}a^2$	$2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$	$\frac{10}{3}\sqrt{2}$	10	$2\sqrt{5}$
题	56	57	58	59	60

号						
答案	80°		40	y=−2x+3	(0,8)或(0,$\frac{8}{3}$)	±$\frac{4}{5}\sqrt{5}$，−2，4
题号	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	
答案	y=3x−1	63954	3	12；$\frac{51}{2}$	60°	
题号	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	
答案	89	9或11	2	60	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$	
题号	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	
答案	111	略	792	25；15	2015029	

提示：

31. 利用平方差公式，可知

$2012^2-2011\times2013$

$=2012^2-(2012-1)(2012+1)$

$=2012^2-(2012^2-1)$

$=1$

故原式的值是 2012.

32. $\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{124}$

$<\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{125}$

$=4+5=9$，

所以 $\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{124}<9$.

33. $(x+4)(x+n)$

$=x^2+(4+n)x+4n$

$=x^2+mx-24$，

所以 $4n=-24$，$n=-6$，

$m=4+n=-2$，

故 $m+n=-8$.

34. 由题意，得

x^3-x^2-x-2

$=x^3-(a-1)x^2-(a-1)x-a$，

所以 $a=2$，

并满足 $a-1=1$.

35. $(x-2y)^2=x^2+4y^2-4xy=225$，

故 $x-2y=\pm15$.

36. 设 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012}$，

$b=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2011}$，

则原式可化为 $ab-(a+1)(b-1)$，

即 $a-b+1$，

故原式的值是 $\frac{1}{2012}$.

37. 两式相减，得

$m^2-n^2=n-m$，

因为 $m\neq n$，

所以 $m+n=-1$，

于是 $m^3-2mn+n^3$

$=m(m^2-n)+n(n^2-m)$

$=2m+2n$

$=2(m+n)=-2$.

38. 因为 $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$，

所以 $\frac{1}{1+a}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{1+b}$，

得 $\frac{1+b}{1+a}=\frac{1+b}{b-a}+1$.

同理 $\frac{1}{1+b}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{b-a}$，

得 $\frac{1+a}{1+b}=1-\frac{1+a}{b-a}$，

所以 $\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$

$=\frac{1+b}{b-a}+1+1-\frac{1+a}{b-a}=3$.

39. 因为

$$a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot}{4}$$

$=\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{4}$

$=\dfrac{b}{4}$，

所以 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{4}$.

40. 因为 $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{6}{5}$，

所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}$， ①

同理 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}$， ②

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{12}$. ③

由③-①，得 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$，

解得 z=4.

由③-②，得 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$，

解得 y=3，

再代入③，求得 x=2.

所以 x+y+z=9.

41. 将原方程去分母，整理得

$2x^2-2m-5=x^2-1$，

得 $m=\dfrac{x^2-4}{2}$.

因为 原方程不会产生增根，

则 $x(x-1)\neq 0$，

即 $x\neq 0$，$x\neq 1$，

代入 $m=\dfrac{x^2-4}{2}$，求得

$m\neq -2$，$m\neq -\dfrac{3}{2}$.

42. 将 m 看作常数，解关于 x，y 的方程组，

得 $\begin{cases} x=\dfrac{23-3m}{2}, \\ y=\dfrac{5m-23}{2}. \end{cases}$

因为 x>0，y>0，

所以 $\begin{cases} \dfrac{23-3m}{2}>0, \\ \dfrac{5m-23}{2}>0, \end{cases}$

解得 $4\dfrac{3}{5}<m<7\dfrac{2}{3}$.

又因为 x，y 是正整数，

所以 23-3m，5m-23 是 2 的倍数，

因此 m=5 或 7.

43. 由已知条件，得

$8^x=(2^3)^x=2^{3x}=3$，

$32^y=(2^5)^y=2^{5y}=5$，

则 $2^{3x+5y}=2^{3x}\cdot 2^{5y}=15$.

44. 直线 y=kx+b 与坐标轴交于 A(-3,0)，B(0,5)两点，

所以 $\begin{cases} -3k+b=0, \\ b=5, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=\dfrac{5}{3}, \\ b=5, \end{cases}$

则不等式-kx-b<0 即是

$-\dfrac{5}{3}x-5<0$，

解得 x>-3.

另解 如图 24，做直线 y=kx+b 和 y=-kx-b 的图象。易知，当 x>-3 时，

y=-kx-b<0.

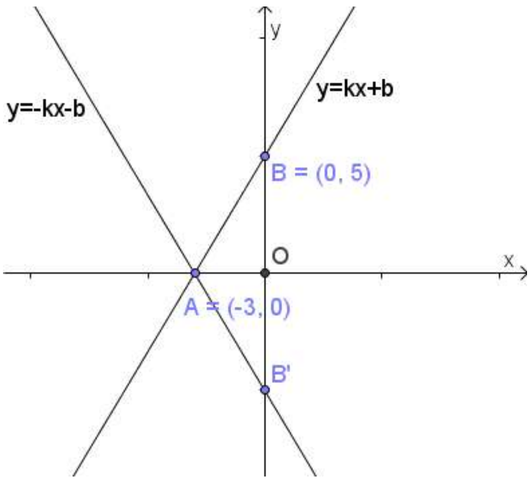


图 24

45. 由 $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}>0$，

两边同时乘以 6，得

$3x+2(x+1)>0$，

解得 $x>-\frac{2}{5}$.

由 $x+\frac{5a+4}{3}>\frac{4}{3}(x+1)+a$，

两边同时乘以 3，得

$3x+5a+4>4(x+1)+3a$，

解得 $x<2a$.

又因为 原不等式组恰有 2 个整数解，

所以不等式组的解是

$-\frac{2}{5}<x<2a$，

所以 $x=0$，1，

于是 $1<2a\leqslant 2$，

解得 $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$

46. 解方程组

$$\begin{cases}2(5x-7)=3y+2,\\4x-1=3(y-3),\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}10x-3y-16=0,\\4xy-3y+8=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=4,\\y=8.\end{cases}$$

所以 $x^2-y^2=-48$.

47. 由图知，∠E′EA 是△A′EC′的外角，所以∠E′EA=∠A′+∠C′.

同理 ∠E′AE 是△D′AB′的外角，

所以 ∠E′AE=∠B′+∠D′.

又 ∠E′+∠E′AE+∠E′EA=180°，

所以∠A′+∠B′+∠C′+∠D′+∠E′=180°.

48. 在直角△ADC 中，

AD=3，CD=4，

所以 AC=5.

设 BD=x，则 AB=3+x.

在直角△BCD 中，

$BC^2=CD^2+BD^2=16+x^2$，

在直角△ABC 中，

$AB^2=AC^2+BC^2$，

所以 $(3+x)^2=25+16+x^2$，

解得 $x=\frac{16}{3}$，

所以 $AB=\frac{16}{3}+3=\frac{25}{3}$，

则△ABC 的面积是

$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times 4=\frac{50}{3}$.

49. $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{c^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，

所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，

于是 $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2ab}$

$\geqslant\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+a^2+b^2}=\frac{1}{2}$，

由于 a，b，c 均大于 0，

则 $\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

50. 因为 AB=BC，AE=BD，

∠EAB=∠DBC=120°

所以 △ABE≌△BCD，

$\angle E=\angle D$，

又　　$\angle DBF=\angle EBA$，

所以$\angle BFC=\angle DBF+\angle D$

$=\angle EBA+\angle E$

$=\angle BAC=60^\circ$.

51. 如图 25，将△ADB 逆时针旋转 90°，则点 B 到达点 C，点 D 到达点 E，四边形 ABDC 的面积等于直角梯形 AECD 的面积。

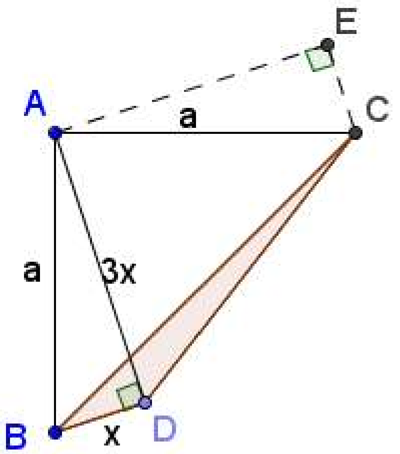


图25

设 BD 的长是 x，则在△ABD 中，由勾股定理，得　$x^2+(3x)^2=a^2$，

$x^2=\frac{a^2}{10}$.

梯形 AECD 的面积

$S_{梯形AECD}=\frac{(x+3x)\bullet}{2}=6x^2=\frac{3}{5}a^2$，

即　　$S_{四边形ABDC}=\frac{3}{5}a^2$，

则　　$S_{\triangle BCD}=S_{四边形ABDC}-S_{\triangle ABC}$

$=\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{10}a^2$.

52. 如图 26，已知菱形 ABCD 的边长是 6，$\angle A=60^\circ$，所以

BD=6，BO=DO=3，

$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=3\sqrt{3}$，

又 $PB=PD=2\sqrt{3}$，

所以 P 点在 BD 的中垂线 AC 上，

且 $PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{3}$，

所以 $AP=AO-PO=2\sqrt{3}$，

或 $AP=AO+PO=4\sqrt{3}$.

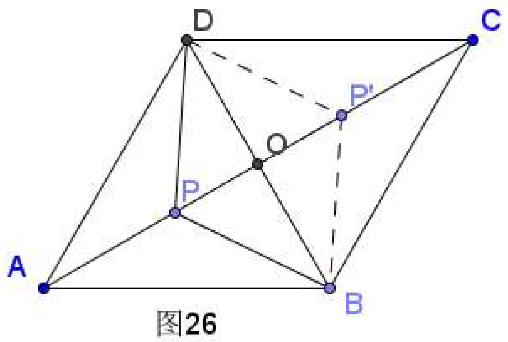


图26

53. 如图 27，过 C 作 CE∥AD 交 AB 于 E，作 CF⊥AB 于 F。

则四边形 ABCD 是平行四边形，

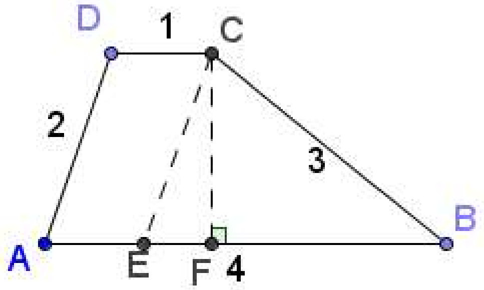


图27

CE=AD=2，

AE=CD=1，

所以 BE=AB−AE=3.

在△BCE 中，

BE=BC=3，CE=2，

所以△BCE 是等腰三角形，它的面积是

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot\sqrt{BC^2-(\frac{1}{2}CE)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{9-1}$

$=2\sqrt{2}$，

又　CF 是△BCE 的 BE 边上的高，

所以　　$\frac{1}{2}BE\cdot CF=2\sqrt{2}$，

解得　　$CF=\frac{4}{3}\sqrt{2}$，

所以梯形 ABCD 的面积是

$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot CF=\frac{10}{3}\sqrt{2}$.

54. 设 AC=2，则 BC=6，于是

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$=\sqrt{4+36}$

$=2\sqrt{10}$

半圆面积 $S_1=\frac{1}{2}\pi\cdot(\frac{1}{2}AB)^2=5\pi$，

$S_2=\frac{1}{2}\pi\cdot(\frac{1}{2}AC)^2=\frac{1}{2}\pi$，

所以　$S_1=10S_2$.

55. 如图 28，设 FD=x.

在 Rt△AD′F 中，

$D'F^2+AD'^2=AF^2$，

即　$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得　　x=3.

由　∠AEF=∠FEC=∠AFE，

得　EC=AE=AF=5.

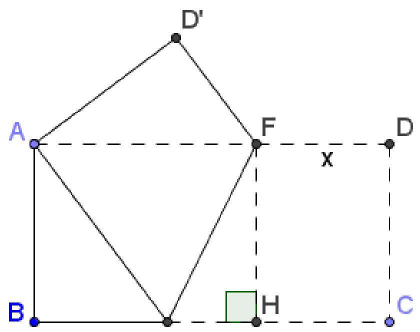


图28

在 Rt△EFH 中，

$EF=\sqrt{EH^2+FH^2}$

$=\sqrt{4+16}$

$=2\sqrt{5}$.

56. 由题意，可设∠1，∠2，∠3 的度数分别是 28k，5k 和 3k.

则　　28k+5k+3k=180°，

解得　　k=5°，

于是　　∠2+∠3=5k+3k=40°.

由轴对称的性质，知

∠ABE=∠2，∠ACD=∠3.

由三角形外角的性质，可知

∠α =∠EBC+∠DCB

=2(∠2+∠3)

=80°.

57. 如图 29，连接 BD，过点 B 作 BH⊥DN，交 DN 的延长线于 H。

因为　　BM⊥MN，MN⊥DN，BH⊥NH，

所以四边形 BMNH 是矩形，

则有 BH=MN=4，HN=MB=3.

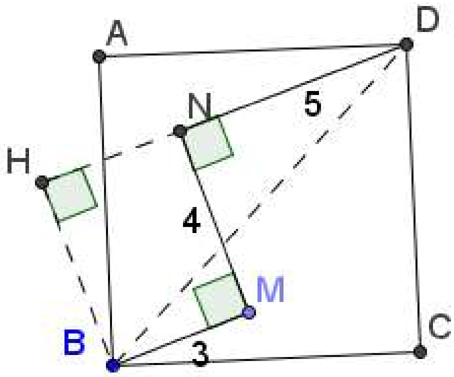


图29

又　　DN=5，

所以　　DH=8.

在 Rt△DHB 中，

$BD^2=BH^2+DH^2=4^2+8^2=80$.

在 Rt△BCD 中，

$BC^2+DC^2=BD^2$，

即　　$BC^2=\frac{1}{2}BD^2=40$，

所以　　$S_{正方形ABCD}=BC^2=40$.

【注】试着连接 AC 也是可以的。

58. 当 x=1 时，y=1，

代入 y=kx+b，得

1=k+b；　　　①

当 x=2 时，y=−1，

代入 y=kx+b，得

−1=2k+b.　　　②

联立①，②，解得

k=−2，b=3.

所以，这个一次函数的解析式是

y=-2x+3.

59. 由题意可知 A(2,4).
又△AOB 的面积是 8，可得 OB=4，
则 B 点的横坐标是 4 或-4，
由此可知，AB 所在的直线的解析式是

$y=-2x+8$ 或 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$，

直线与 y 轴的交点的坐标是(0,8)或 $(0,\dfrac{8}{3})$.

60. 当△PAB 是直角三角形时，AB 可以是直角边，也可以是斜边。

当 AB 是直角边时，m=-2 或 4；
当 AB 是斜边时，PA⊥PB.
如图 30，AB 的中点是 C(1,0)，

$PC=\dfrac{1}{2}AB=3$.

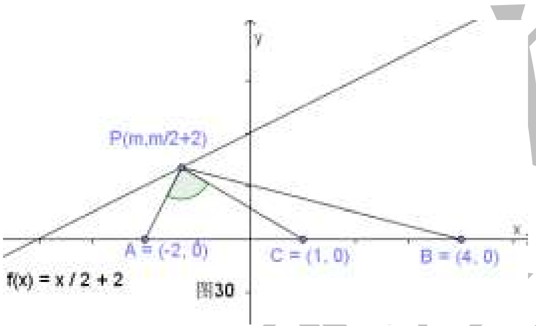


图30

由勾股定理，得

$$PC=\sqrt{(1-m)^2+(\frac{1}{2}m+2)^2}=3,$$

解得 $m=\pm\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

61. 设 $y_1=k_1x+b_1$，$y_2=k_2x+b_2$，
则有 $y=y_1+y_2$
$= k_1x+b_1+k_2x+b_2$
$=(k_1+k_2)x+(b_1+b_2)$.
不妨设 $k=k_1+k_2$，
$b=b_1+b_2$，
则 y 与 x 的函数关系仍是 y=kx+b.
把题给的条件分别代入，得

$$\begin{cases} k+b=2, \\ 4k+b=11, \end{cases}$$

所以 k=3，b=-1，
函数的解析式是 y=3x-1.

62. 设这个五位数是 $\overline{a3b5c}$，则 $9|\overline{5c}$ (a|b，表示 a 能整除 b，下同)。
所以 9|(5+c).
因为 5≤5+c≤14，
从而 5+c=9，c=4.
同理 $9|\overline{a3}$，
则 9|(a+3).
因为 4≤a+3≤12，
所以 a=6.
又 $9|\overline{a3b5c}$，
则 9|(a+3+b+5+c)，
即 9|(18+b)
因为 18≤18+b≤27，
所以 b=0 或 9.
又 $11|\overline{a3b5c}$，
则 11|(a+b+c-5-3).
故 11|(2+b)，
从而 b=9.
所以，这个五位数是 63954.

63. 若只计算一次即输出 y，则有 4x+3=121，解得 x=29.5；

若需计算 2 次才输出 y，则有 4(4x+3)+3=121，
解得 x=6.625；

若需计算 3 次才输出 y，则有 4[4(4x+3)+3]+3=121，
解得 x=0.90625；

若需计算 4 次或更多次才输出 y，则解得的 x 是负数。

所以，满足条件的正数 x 有 3 个不同的值。

64. 如图 31，当两张矩形纸片互相垂直时，菱形 ABCD 是边长为 3cm 的正方形，此时，周长有最小值 3×4=12(cm)。

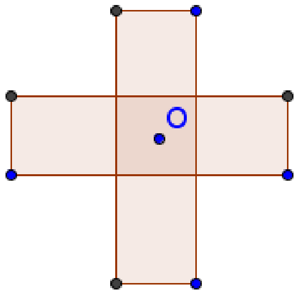


图31

如图 32，当两张矩形纸片交叉摆放到有一条对角线互相重合时，菱形 ABCD 的周长有最大值。设此时菱形 ABCD 的边长是 xcm，由题意，有

DC=BC=x，

CE=12-x，DE=3.

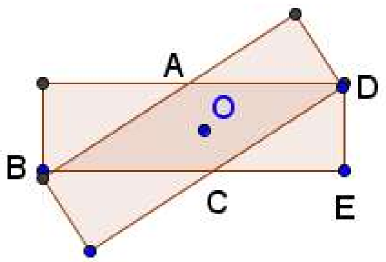


图32

在 Rt△DEC 中，

$3^2+(12-x)=x^2$，

解得 $x=\dfrac{51}{8}$.

因此，菱形 ABCD 的周长最大是

$4\times\dfrac{51}{8}=\dfrac{51}{2}$(cm).

65. AB 和 BC 分别垂直于正六边形上 A 点和 C 点所在的边，又正六边形的一个内角等于

$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{6}=120^\circ$，

所以∠ABC=360°-90°-90°-120°=60°.

66. 译文：某校规定：学生的平时作业、期中练习、期末考试三项成绩分别按 30%，30%，40%的比例计入学期总评成绩。大卫的平时作业、期中练习、期末考试的数学成绩依次是 90 分，80 分，95 分，则大卫这学期的数学总评成绩是______分。

解 90×30%+80×30%+95×40%

=89(分).

67. (1)假设 x=10，则众数是 10，平均数是 10，众数和平均数的差的绝对值是 0，不符合题意。

(2) 假设 x=8，则众数是 8，平均数是 9.5，众数和平均数的差的绝对值是 1.5，此时中位数是 9.

(3) 假设 x=12，则众数是 12，平均数是 10.5，众数和平均数的差的绝对值是 1.5，此时中位数是 11.

因此，这组数据的中位数是 9 或 11.

【众数】一般来说，一组数据中，出现次数最多的数就叫这组数据的众数，不唯一。理解：一组数据中占比例最多的那个数。

【中位数】一组数据按从小到大(或从大到小）的顺序依次排列，处在中间位置的一个数（或最中间两个数据的平均数)。

68. 设购买股票 A 的股数是 a，购买股票 B 的股数是 b，则 A 的价格上涨时，赢利与目前相比至少多

a×(5.5-5)-b×1=0.5a-b(元)；

A 的价格下降时，赢利与目前相比至少多

a(4.5-5)+b×1=b-0.5a(元)。

如果要求股票 A 与 B 的价格变化时不减少目前的赢利，则

$$\begin{cases}0.5a-b\ge 0,\\ b-0.5a\ge 0,\end{cases}$$

即 0.5a=b，

$\dfrac{a}{b}=2$.

69. 设原计划每天种树 x 棵，则

$$\frac{960}{x}-\frac{960}{(1+\frac{1}{3})x}=4,$$

解得 x=60.

70. 设 $\frac{47}{30}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$，

其中 0<a<b<c，

(a, b)=(b, c)=(c, a)=1.

因为 abc=30，

所以 a=2，b=3，c=5.

于是 15x+10y+6z=47，

47-6z=15x+10y，是 5 的倍数，且是大于 25 的奇数，

所以 47-6z=35，z=2，

或 47-6z=45，

z 不是整数，不合题意.

由 15x+10y=35，

得 3x+2y=7，

3(x+y)=7+y.

设 y=3k-7，则

k=x+y=x+3k-7，

x=7-2k.

只有 k=3 时，x，y 同时为正数，

此时，x=1，y=2.

所以 $\frac{47}{30}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$.

71. 设 x 的最高位数是 a，其余 n-1 位数是 m，则

x= $\overline{am}$ =a×10^{n-1}+m，

y= $\overline{ma}$ =10m+a，

因为 $\frac{y}{x}=\frac{n}{3}$，

所以 $\frac{10m+a}{a\times10^{n-1}+m}=\frac{n}{3}$，

即 30m+3a=a×10^{n-1}×n+mn，

m(30-n)=a(10^{n-1}×n-3).

显然，n > 1.

当 n=2 时，

28m=17a，无符合条件的整数解；

当 n=3 时，

27m=297a，m=11a.

因此，x=111，222，333，…，999，

x 的最小值是 111.

72. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

$=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$；

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

$=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$；

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

$=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{4}+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}$；

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

$=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$；

类似地，还可以写出一些这样的等式，只要正确即可。

73. 由题知

$\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}$，

即 100a+10b+c=22(a+b+c)，

78a=12b+21c，

26a=4b+7c.

由于 b，c 的最大可能值是 9，

所以 26a=4b+7c≤99，a≤3，

即 a 的可能值是 1，2，3.

又 7c=26a-4b，则 c 是偶数。

(1)若 c=0，

26a=4b，b>9，不合题意。

(2)若 c=2，
26a=4b+14，
13a−7=2b，

a=1，b=3，$\overline{abc}$=132.

(3)若 c=4，
26a=4b+28，
13a=2b+14，

a=2，b=6，$\overline{abc}$=264.

(4)若 c=6，
26a=4b+42，
13a−21=2b，

a=3，b=9，$\overline{abc}$=396.

(5)若 c=8，
26a−56=4b，
13a−28=2b，
a 是偶数，a=2，b<0，不合题意。
因此，共有三个三位数满足条件：132，264，396，它们的和是 792.

74. 由②，①，得

$$\frac{70+(m,n)}{(m,n)}+m+n=55,$$

$$\frac{70}{(m,n)}+m+n=54.$$

显然，(m,n)是 70 的因数。
70=2×5×7.
若(m,n)=2，
m+n=19，19 不是 2 的倍数，不满足要求。
若(m,n)=5，
m+n=40=5×8=5×(5+3)，
m=25，n=15 满足要求。
若(m,n)=7，
m+n=44，44 不是 7 的倍数，不满足要求。
同理,若(m,n)不能等于 10，14，35.
又显然(m,n)≠1，(m,n)≠70.
故 m=25，n=15.

75. 设开始时，黑板上的 2007 个数的和是 S。显然，
S⩾1+2+3+…+2007
=2015028=3×671676.

经过一次操作，黑板上的数的个数减少，和也减少，和减少的数值是 3 的倍数，因此，每经过一次操作，黑板上留下的数的和除以 3 所得的余数是不变的。所以，S 除以 3 所得的余数等于黑板上最后剩下的 3 个数的和除以 3 所得的余数。
因为 736+254+1=991=3×330+1，
所以，开始时，黑板上的 2007 个数的和的最小值是 2015029.

三. 解答题

76. 若直角三角形的斜边的长是 12，设两条直角边的长分别是 a，b，有
$a^2+b^2=12^2=144$，
又 a，b 都是正整数，
由 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，
$5^2=25$，$6^2=36$，$7^2=49$，$8^2=64$，
$9^2=81$，$10^2=100$，$11^2=121$，
其中任意两个相加，和都不等于 144，所以斜边的长不等于 12.

设直角三角形的一条直角边的长是 12，另一条直角边的长是 a，斜边的长是 c，则
$c^2-a^2=144$，
(c+a)(c−a)=144.
由于 c+a 和 c−a 同奇同偶，
所以 c+a 和 c−a 都是偶数，
又 144=72×2=36×4
=24×6=18×8，

所以有$\begin{cases}c+a=72,\\c-a=2,\end{cases}$或$\begin{cases}c+a=36,\\c-a=4,\end{cases}$或

$\begin{cases}c+a=24,\\c-a=6,\end{cases}$或$\begin{cases}c+a=18,\\c-a=8.\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=37,\\a=35,\end{cases}$或$\begin{cases}c=20,\\a=16,\end{cases}$或$\begin{cases}c=15,\\a=9,\end{cases}$或

$$\begin{cases} c=13, \\ a=5. \end{cases}$$

因此，满足条件的直角三角形有 4 种。

77. (1)按甲种优惠办法，有
y=2.5×5+0.5x−0.5×5(x≥5)，
即 y=0.5+10.

(2)按乙种优惠办法，有
y=(2.5×5+0.5x)×85%(x≥5)，
即 y=0.425x+10.625.

(3)当 0.5x+10<0.425x+10.625 时，

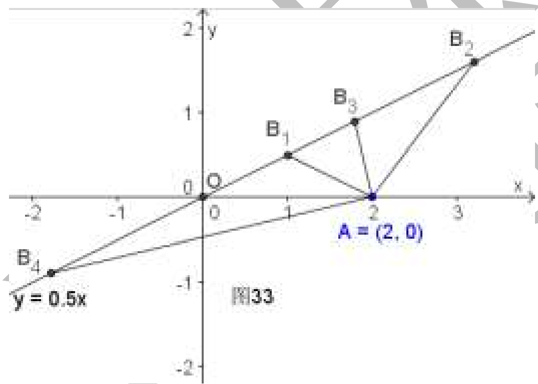
x<8.33.

所以，当 x≤8 本时，应该选择甲种方式购买。

x≥9 本时，应该选择乙种方式购买。

78. (1)若△OAB 是轴对称图形，则它是一个等腰三角形。

如图 33，当 OA 是等腰△OAB 的底边时，点 B_1 在 OA 的中垂线上，易知 $B_1(1,\ \frac{1}{2})$。



当 OB 是等腰△OAB 的底边，设点 $B(x,\ \frac{1}{2}x)$，则由勾股定理，得

$(x-2)^2+(\frac{1}{2}x)^2=4$，

解得 x=0(舍去)，或 $x=\frac{16}{5}$.

故 $B_2(\frac{16}{5},\ \frac{8}{5})$.

当 AB 是等腰△OAB 的底边时，设点 $B(x,\ \frac{1}{2}x)$。

由 OB=OA，

得 $\sqrt{x^2+(\frac{1}{2}x)^2}=2$，

解得 $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

故 $B_3(\frac{4}{5}\sqrt{5},\ \frac{2}{5}\sqrt{5})$，

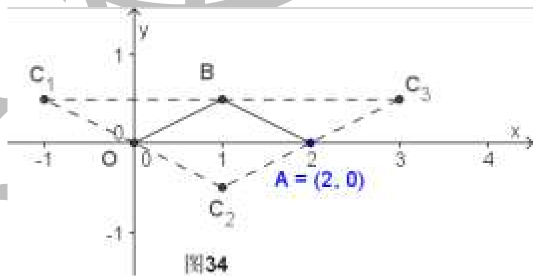
$B_4(-\frac{4}{5}\sqrt{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{5})$.

(2)当点 $B(1,\ \frac{1}{2})$时，△OAB 的对称轴与 y 轴平行。

如图 34，当 OB，AB，OA 分别是平行四边形的一条对角线时，对应的顶点 C 的坐标分别是

$C_1(-1,\ \frac{1}{2})$，$C_2(3,\ \frac{1}{2})$，$C_3(1,\ -\frac{1}{2})$，

又 A(2,0)，



则直线 AC 的解析式分别是

$y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$，

$y=\frac{1}{2}x-1$(直线 AC_2 和 AC_3 重合).

79. 一个整数除以 5 所得的余数只能是 0，1，2，3，4，也就是说，一个整数一定可以写成下列形式之一：
5k，5k+1，5k+2，5k+3，5k+4(k 是自然数)。
[这里根据需要对整数分类,有时候只要分成 2 类,就是奇数 2k+1 和偶数 2k,有时候分成 3 类,……]
其中 $(5k)^2=5\times(5k^2)$；
$(5k+1)^2=5\times(5k^2+2k)+1$；
$(5k+2)^2=5\times(5k^2+4k)+4$；

$(5k+3)^2=5\times(5k^2+6k+1)+4$;

$(5k+4)^2=5\times(5k^2+8k+3)+1$.

也就是说，一个完全平方数除以 5 所得的余数只能是 0 或 1 或 4，而不能是 2 或 3，

所以，一个整数除以 5 所得的余数是 2 或 3，那么这个整数一定不是完全平方数。

80. 设 3 月 1 日是第 0 天，3 月 2 日是第 1 天，……，则 B 去图书馆的日子是第 $15k$ 天，A 去图书馆的日子是第 $7m$ 天。因此，

$$15k+r=7m,\ r=1 \text{ 或 } 2,$$

所以 $$k=7(m-2k)-r.$$

令 $k=7n-r$，则

$$m=15n-2r.$$

当 $r=1$ 时，

若 $n=1$，$k=7n-1=6$，$15k=90$，这是在 3 月 1 日后 90 天有题设情况发生的一天。

若 $n=2$，$k=7n-1=13$，$15k=195$，这是在 3 月 1 日后 195 天有题设情况发生的一天。

当 $r=2$ 时，

若 $n=1$，$k=7n-2=5$，$15k=75$，这是在 3 月 1 日后 75 天有题设情况发生的一天。

若 $n=2$，$k=7n-2=12$，$15k=180$，这是在 3 月 1 日后 180 天有题设情况发生的一天。

由此可见，3 月 1 日以后，A 在 B 后一天或后二天去图书馆的情况第一次发生时，B 去图书馆的日子是 5 月 15 日，第二次则是 5 月 30 日。因此今天是 5 月 30 日。

翔文学习提供录入校对
xiangwenjy@gmail.com
，QQ：2254237433

来源：《数理天地》初中版 2011 增刊，请购买书籍，6 元。