分数与循环小数_学生篇

配套有

- 分数与循环小数_作业
- 分数与循环小数_练习
- 分数与循环小数_提高
- 分数与循环小数_拓展

本篇主要了解相关知识点，提供高质量例题讲解。

一、知识点

小数分类

- 有限小数
- 无限小数
    - 无限循环小数
    - 无限不循环小数

以上除了无限不循环小数不能化为分数外，其他小数都可以化成分数。

无限不循环小数

无限不循环小数(英文名:infinite non-repeating decimals)就是小数点后有无数位,但和无限循环小数不同,它没有周期性的重复,换句话说就是没有规律,所以数学上又称无限不循环小数叫做**无理数**(如圆周率π,它就是一个无理数，π 读 pài)。
特点：**无限不循环小数是不能转化成分数的。**

无限循环小数与分数

从小数点后某一位开始，一个或多个十进制数字不断重复出现的小数，叫做**无限循环小数**, 数学上也称为**有理数**。譬如 $3.141414\ldots$，$1.333\ldots$，$0.142857142857\ldots$。既然是有理数(rational number)，就是可以化成分数的数。

特点：(1) **无限循环小数可以转化为分数**; (2) 带小数点，且小数位数无限； (3) 重复出现一个或多个数字。

所谓**循环节**，指的是循环小数的小数部分中，依次不断重复出现的一段数字。上面三个例子中的循环节分别为 14，3，142857。

循环节从小数点后第一位开始的循环小数，叫做**纯循环小数**，如 $0.\dot{3}$，$0.\dot{0}\dot{9}$; 不是从第一位开始的循环小数，叫做**混循环小数**，如 $1.0\dot{3}$，$3.75\dot{3}$

由于循环小数的小数部分位数是无限的，显然不可能像**有限小数**那样写成十分之几、百分之几、千分之几、……的数。
循环小数化为分数，其难点在无限的小数位数，所以从这里入手，想办法“剪掉”无限循环小数的“大尾巴”。

策略：用**扩倍法**，把无限循环小数扩大十倍、一百倍或一千倍……，使扩大后的无限循环小数与原无限循环小数的“**大尾巴**”完全相同，然后这两个数相减，这样“大尾巴”就剪掉了！

1. 纯循环小数化分数,它的小数部分可以写成这样的分数：*分母* 就是由若干个9组成的数，且9的个数恰好等于纯循环小数的单个循环节的位数；*分子* 是纯循环小数中一个循环节组成的数。如：$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$0.\dot{5}\dot{1}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$，$21.\dot{5}=21\frac{5}{9}$，$35.\dot{6}\dot{0}=35\frac{60}{99}=35\frac{20}{33}$.
2. 混循环小数可以先化成有限小数+纯循环小数，然后利用纯循环小数化分数的办法得到。如：$1.1\dot{2}=1.1+0.0\dot{2}=1\frac{1}{10}+0.\dot{2}\div 10=1\frac{1}{10}+\frac{2}{9}\div 10=1\frac{1}{10}+\frac{1}{45}=1\frac{9}{90}+\frac{2}{90}=1\frac{11}{90}$
3. 上述方法似乎有点复杂，有没有更简便一点更直观一点的方法，有：还是可以从分子和分母来分析。分子是两数相减所得的差，其中被减数是从小数点后第一位到第一个循环节末位所组成的数，减数则是小数点后不循环的数字组成的数；分母由若干个9和若干个0组成，9的个数等于循环节的位数，9在0之前，0的个数等于小数点后不循环部分的位数。 如： $0.3\dot{5}=\frac{35-3}{90}=\frac{32}{90}=\frac{16}{45}$，$0.012\dot{5}\dot{2}=\frac{1252-12}{99000}=\frac{1240}{99000}=\frac{31}{2475}$

如果是带整数部分的小数，应该拆成整数与分数之和。
请注意 **无限** 这个概念，需要发挥想象力。首先明确一点：既然都是无限循环小数，那么在小数点后面的循环节中数的个数也没有区别的。

例题

循环小数化为分数，有多种方法，常见的有：

1. 代数法，通过扩倍法来进行求差；
2. 方程法，通过建立一元一次方程求解；
3. 无穷级数求和公式

小学阶段只讲代数法。

例题1 把纯循环小数 $0.3636\ldots$和$0.33\ldots$化成分数

（1）循环节为36，共两位数，扩倍法的倍数为100。

$0.3636\ldots\times 100=36.3636\ldots$

$0.3636\ldots\times 100 - 0.3636\ldots=36.3636\ldots - 0.3636\ldots$

得到$(100 - 1)\times 0.3636\ldots=36$
即$99\times 0.3636\ldots=36$
那么$0.3636\ldots=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$

（2）循环节为3，共一位数，扩倍法的倍数为10.

$0.33\ldots\times 10=3.33\ldots$

$0.33\ldots\times 10 - 0.33\ldots=3.33\ldots - 0.33\ldots$

得到$(10-1)\times 0.33\ldots=3$
即$9\times 0.33\ldots=3$
那么$0.33\ldots=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

分数化为小数的几个特别情形举例：

$$\frac{1}{9}=0.\dot{1},\ \frac{2}{9}=0.\dot{2},\ \frac{3}{9}=\frac{1}{3}=0.\dot{3},\ \frac{4}{9}=0.\dot{4},\ \frac{5}{9}=0.\dot{5},$$

$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=0.\dot{6}$, $\frac{7}{9}=0.\dot{7}$, $\frac{8}{9}=0.\dot{8}$, $\frac{9}{9}=1=0.\dot{9}$, $\frac{10}{9}=1+0.\dot{1}=1.\dot{1}$

$\frac{1}{99}=0.\dot{0}\dot{1}$, $\frac{2}{99}=0.\dot{0}\dot{2}$, $\frac{3}{99}=\frac{1}{33}=0.\dot{0}\dot{3}$, $\frac{4}{99}=0.\dot{0}\dot{4}$, $\frac{5}{99}=0.\dot{0}\dot{5}$,

$\frac{6}{99}=\frac{2}{33}=0.\dot{0}\dot{6}$, $\frac{7}{99}=0.\dot{0}\dot{7}$, $\frac{8}{99}=0.\dot{0}\dot{8}$, $\frac{9}{99}=\frac{1}{11}=0.\dot{0}\dot{9}$, $\frac{10}{99}=0.\dot{1}\dot{0}$, $\cdots\cdots$

以此类推分母为11的分数化为小数的方法如下：

$\frac{1}{11}=0.\dot{0}\dot{9}$, $\frac{2}{11}=0.\dot{1}\dot{8}$, $\frac{3}{11}=0.\dot{2}\dot{7}$, $\frac{4}{11}=0.\dot{3}\dot{6}$, $\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$,

$\frac{6}{11}=0.\dot{5}\dot{4}$, $\frac{7}{11}=0.\dot{6}\dot{3}$, $\frac{8}{11}=0.\dot{7}\dot{2}$, $\frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}$, $\frac{10}{11}=0.\dot{9}\dot{0}$

循环节为分子乘以9所得的两位数，不够在前面凑0.

还可以推导出分母为3个9，4个9，...... 的情形。

例题2 把混循环小数$0.4777...$和$0.325656...$化成分数

（1）循环节为7，一位数，小数点后没有循环的数为4，共一位数。扩倍法分别为10和100

$$0.4777...\times 10=4.777\cdots\cdots①$$
$$0.4777...\times 100=47.77\cdots\cdots②$$

用② - ①即得：

$0.4777...\times 90=47-4$

所以 $0.4777...=\frac{43}{90}$

（2）小数点后没有循环的数为32，共两位数，循环节为56，也是两位数，扩倍法分别为100和10000，

$$0.325656...\times 100=32.5656\cdots\cdots①$$
$$0.325656...\times 10000=3256.56\cdots\cdots②$$

用② - ①即得：

$0.325656...\times 9900=3256.5656...-32.5656...$

$0.325656...\times 9900=3256-32$

所以 $0.325656...=\frac{3224}{9900}=\frac{806}{2475}$

例题3 循环小数化分数

$0.\dot{4}\dot{8}$, $0.\dot{1}35\dot{3}$, $3.1\dot{7}0\dot{3}$, $6.36\dot{5}3846\dot{1}$

解：$0.\dot{4}\dot{8}=\frac{48}{99}=\frac{16}{33}$, $0.\dot{1}35\dot{3}=\frac{1353}{9999}=\frac{1353\div 33}{9999\div 33}=\frac{41}{303}$,

$3.1\dot{7}0\dot{3}=3+\frac{1703-1}{9990}=3+\frac{1702}{9990}=3+\frac{1702\div 74}{9990\div 74}=3+\frac{23}{135}=3\frac{23}{135}$,

$6.36\dot{5}3846\dot{1}=6+\frac{36538461-36}{99999900}=6+\frac{36538425}{99999900}=6+\frac{36538425\div 1923075}{99999900\div 1923075}=6+\frac{19}{52}=6\frac{19}{52}$

例题4 循环小数加减运算

(1) $0.\dot{0}\dot{2}+0.\dot{3}\dot{1}+0.\dot{5}\dot{4}$;　　　　(2) $0.\dot{1}+0.1\dot{2}+0.12\dot{3}\dot{4}$

(3) $0.\dot{1}\dot{2}+0.\dot{5}\dot{3}+0.\dot{6}\dot{9}$;　　(4) $0.\dot{6}\dot{7}+0.\dot{2}1\dot{2}+0.\dot{1}1102\dot{0}$

提示：适当放宽循环小数位数，然后对齐位数后，再进行加减运算。

解：（1）$=\dot{8}\dot{7}$;　　（2）$=0.11\dot{1}\dot{1}+0.12\dot{2}\dot{2}+0.12\dot{3}\dot{4}=0.35\dot{6}\dot{7}$

（3）$=0.\dot{6}\dot{5}+\dot{6}\dot{9}$　　（4）$=0.676767\dot{6}7676\dot{7}+0.212212\dot{2}1221\dot{2}+$
$0.111020\dot{1}1102\dot{0}$

$=\frac{65}{99}+\frac{69}{99}=1\frac{35}{99}$　　$=0.999999\dot{9}9999\dot{9}=0.\dot{9}=1$

注意事项：

一定要将数位对齐，并且多写出几位后再加减，然后看最后的和或差的数字规律。记得省略号后还有无穷多位数字。

也可以尝试化为分数后再计算。

例题5 循环小数乘除运算

先化为分数再计算。

(1) $(4.\dot{2}-0.\dot{4}\dot{8})\div 2.0\dot{5}$;　　(2) $0.\dot{1}3\dot{2}\times(0.1\dot{3}\dot{5}+0.13\dot{5})$

解：（1）$=(4\frac{2}{9}-\frac{48}{99})\div 2\frac{5}{90}$　　（2）$=\frac{132}{999}\times(\frac{135-1}{990}+\frac{135-13}{900})$

$=(3\frac{121}{99}-\frac{48}{99})\div\frac{37}{18}$　　$=\frac{44}{333}\times(\frac{67}{495}+\frac{61}{450})$

$=\frac{370}{\cancel{99}^{11}}\times\frac{\cancel{18}^{2}}{37}$　　$=\frac{44}{333}\times\frac{67\times10+61\times11}{4950}$

$=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}$　　$=\frac{\cancel{44}^{2}}{\cancel{333}^{37}}\times\frac{\cancel{1341}^{149}}{\cancel{4950}^{225}}=\frac{298}{8325}$

例题6 循环与周期

将最简真分数 $\frac{a}{7}$ 化成小数后，从小数点后第一位开始的连续 n 位数字之和为 9006，a与n 分别为多少?

解：依题意，a 只能取1,2,3,4,5,6. 我们知道
$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$，$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$，$\frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8}$，$\frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}$，$\frac{6}{7}=$
$0.\dot{8}5714\dot{2}$,

以上几个最简真分数的循环节位数一致，都是6位，且数字之和一样，都是27，而 9006 mod 27=15.
只有两种可能：

（1）$a=1$，最后一个循环节上只取4位1428，其和为15. 此时 $n=27\times333+4=8995$, 其中333是 $9006\div27$的取整。

（2）$a=2$, 最后一个循环节上只取前3位285，其和为15. 此时 $n=27\times333+3=8994$

答：a与n分别为 1,8995 或 2,8994.