第十二届“中环杯”中学生思维能力训练活动

初二年级模拟练习题(一)

说明:图形都是由免费的二维平面几何软件 Geogebra 得到.

一. 填空题:

1. 若 M 为整数，且满足 M= $\dfrac{16+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{11}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}}$，则 M=(23)。

解：多出一个条件 M 为整数，是提示同学考虑使用**同余的知识**来解决这道题目。变形后得到 $\dfrac{M-2}{3}+\dfrac{M-3}{5}+\dfrac{M-2}{7}+\dfrac{M-1}{11}=16$。

得到 $\dfrac{M-23}{3}+\dfrac{M-23}{5}+\dfrac{M-23}{7}+\dfrac{M-23}{11}=0$，所以 M=23。

方法 2：不等式估算法。

2. 在实数集 R 中定义运算*，满足(1)x*0=1(任意 x∈R)；(2)(x*y)*z=(z*xy)+z(任意 x，y，z∈R)。则 31*32 的值是(993)。

解：思考路线:**求出 1*x→(1*x)*1→x*1→x*y.**

令 y=0，得 1*z=1+z。从而有

(1*y)*1=[1*(1 • y)]+1=(1*y)+1=(1+y)+1=y+ 2，

也等于(1*y)*1=(1+y)*1=y+2⇒x*1=x+1。

∴ (x*y)*1=(x*y)+1=(1*xy)+1=xy+2⇒x*y=xy+1。

∴ 31*32=31×32+1=993。

目的：符号运算

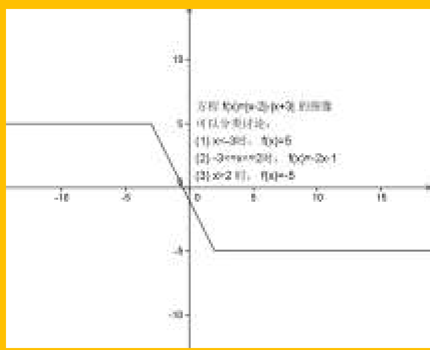
3. *若不等式|2-x|-|x+3|<a 有解，则 a 的取值范围为(a>-5)。

解:||x-2|-|x-3||≤|(x-2)-(x+3)|=|-5|=5,

∴-5≤|x-2|-|x-3|≤5,

∴|2-x|-|x+3|<a 有解的 a 的范围是 a>-5。

注：方程图像如右图：

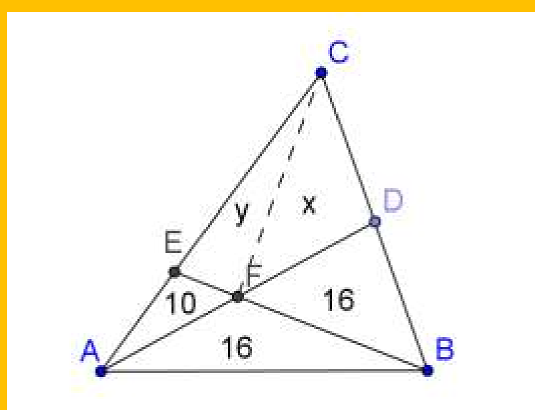


4. △ABC 中，D 在 BC 上，E 在 AC 上，BE 交 AD 于 F。已知 $S_{\triangle AEF}=10$，$S_{\triangle AFB}=16$，$S_{\triangle BFD}=16$，则 $S_{\triangle ABC}=(\dfrac{416}{3})$。

解 1：设未知数，解二元一次方程。

连接 FC，$S_{\triangle EFC}$ 为 y，$S_{\triangle DFC}$ 为 x;因为三角形 AFB 和 BFD 面积相等，都为 16，它们是同高的两个三角形，所以 AF=FD，即 F 为 AD 的中点.

而三角形 AFC 和 FCD 也是同高的两个三



角形，底边相等，所以面积也相等，即：x=y+10　　　　　　(1)
又等高的三角形面积之比等于底边之比，得到：

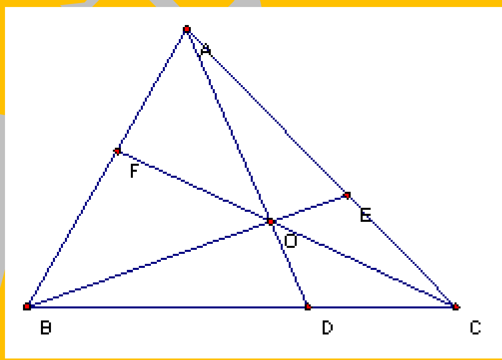
$$\frac{x+16}{y}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}=\frac{16}{10} \qquad (2)$$

解二元一次方程组(1)(2)，得 $y=\frac{130}{3}$，$x=\frac{160}{3}$，

故 $S==16+16+10+\frac{130+190}{3}=\frac{416}{3}$。

解 2：利用三角形的**燕尾定理**。
16 ：(10+y)=16：x=BD：DC ➔x=10+y　（3）
（16+x）：16=y:10=CE：EA　➔8y=5x+80　（4）
同样解方程组：x=160/3，y=130/3，S=416/3

塞瓦共点定理：



塞瓦线段（cevian）是各顶点与其对边或对边延长线上的一点连接而成的直线段。

塞瓦定理指出：如果$\triangle ABC$的塞瓦线段 *AD*、*BE*、*CF* 通过同一点 *O*，则

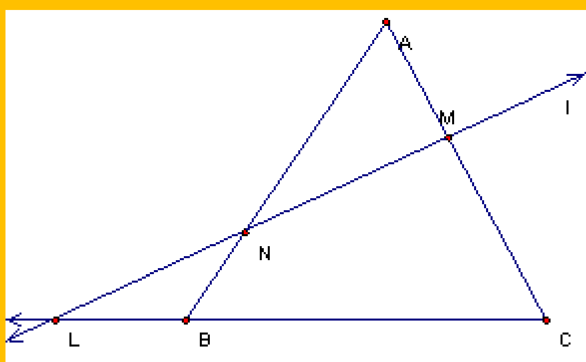
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

它的逆定理同样成立：若 D、E、F 分别在$\triangle ABC$的边 *BC*、*CA*、*AB* 或其延长线上，且满足

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

则直线 *AD*、*BE*、*CF* 共点或彼此平行（于无限远处共点）。当 AD、BE、CF 中的任意两直线交于一点时，则三直线共点；当 *AD*、*BE*、*CF* 中的任意两直线平行时，则三直线平行。

它最先由意大利数学家乔瓦尼·塞瓦证明。



梅涅劳斯共线定理（**Menelaus's theorem**）是由古希腊数学家梅涅劳斯首先证明的。它指出：如果一直线与$\triangle ABC$的边 *BC*、*CA*、*AB* 分别交于 *L*、*M*、*N*，则有：

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1。$$

它的逆定理也成立：若有三点 *L*、*M*、

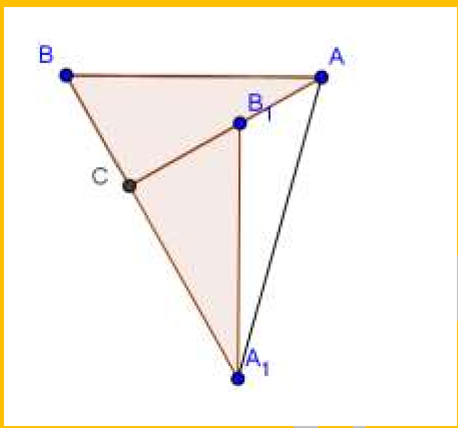
N 分别在 $\triangle ABC$ 的边 *BC*、*CA*、*AB* 或其延长线上（有一点或三点在延长线上），且满足

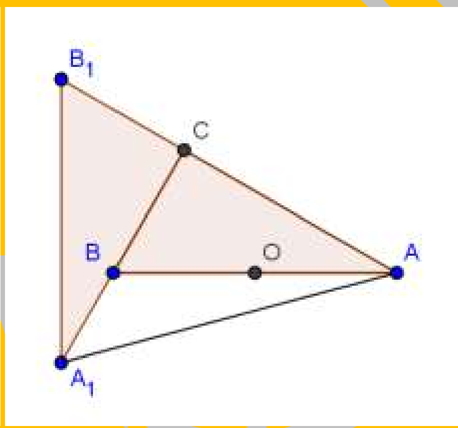
$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

则 *L*、*M*、*N* 三点共线。利用这个逆定理，可以判断三点共线。

5. 在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠B=60°，若将 Rt△ABC 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90 度，点 A、B 分别旋转至 A_1、B_1，连接 AA_1，则 $\angle AA_1B_1$=(**15° 或 75°**)。

解： 左下图所示 $\angle AA_1B_1=15°$。右图所示 $\angle AA_1B_1=75°$。





6. 已知一次函数 y=ax+b(a 为整数)的图像经过点(88，17)，它与 x 轴的交点为(p，0)，与 y 轴的交点为(0，q)。若 p 为素数，q 为正整数，那么满足条件的所有一次函数的解析式的个数有(　　　)个。

[解]与 y 轴的交点为(0,q),说明 b=q,与 x 轴的交点为(p,0),则

ap+q=0　　　　　　　　　(1)

图像过点（88,17），则

88a+q=17　　　　　　　　(2)

（2）-（1）得到：　（88-p）a=17　　（3）

因为 a 是整数，由（1）知，　a 是负整数，

由（3）知：

88-p=-1，a=-17，　解得 p=89，是素数，q=-ap=17*89

或者 88-p=-17，a=-1，解得 p=105 不是素数，舍去。

这样的解析式只有一个，y=-x+17*89

7. *老师让小明算 108，B，396 这三个数的最小公倍数，小明将 108 看成 180，得出的结果与正确答案一致。B 最小等于(3^3x5=135)。

[解 1]108=2x2x3x3x3，180=2x2x3x3x5，396=2x2x3x3x11,由此可知:

[180,396]=2^2x3^2x5x11，[108,396]=2^2x3^3x11

[108，B，396]=[108*11,B]=[2^2*3^3*11,B]　　　　（1）

[180，B，396]=[180*11,B]=[2^2*3^2*5*11,B]　　　（2）

且（1）=（2），故[B,[180,396]] 与 [B,[108,396]]一致的话，

即[B,2^2x3^2x5x11]=[B,2^2x3^3x11]

最小公倍数特征：就高不就低，上述等式的值表示应该有 3 个 3 和 1 个 5 连乘的因数。

B 显然不必含有 11 的因数，但 B 必须有 3 个 3，否则两次计算不等，

B 也还得含有 5 的因数。

最后 B 最小等于 3*3*3*5=135

解 2：利用[a, b](a, b)=a*b 等式关系。转化为最大公约数的关系。

由上述分析知道： $[B, 2^2x3^2x5x11]=[B, 2^2x3^3x11]$

而 $[B, 2^2x3^2x5x11]$（B，2^2x3^2x5x11）$=Bx2^2x3^2x5x11$　　　（3）

$[B, 2^2x3^3x11]$　（B, 2^2x3^3x11）$=Bx2^2x3^3x11$　　　　　　　（4）

（3）:（4）得到：（B，2^2x3^2x5x11）:（B, 2^2x3^3x11）=5:3

即 5（B, 2^2x3^3x11）=3（B，2^2x3^2x5x11）

可见，B 必是 15 的倍数，设 B=15A，

两边约去公因数 15，得到：（5A，2^2x3^2x11）=（3A，2^2x3^2x11）

上式右边，可以看出，有公约数 3，故左边也是，

从而 5A 也必须有约数 3，而（3, 5）=1，所以 A 必定是 3 的倍数，记为 A=3C

则约去 3 的约数得到：（5C，2^2x3x11）=（3C，2^2x3x11）

同样，右边还是有 3 这个约数，故 C 还是 3 的倍数，记为 C=3D，

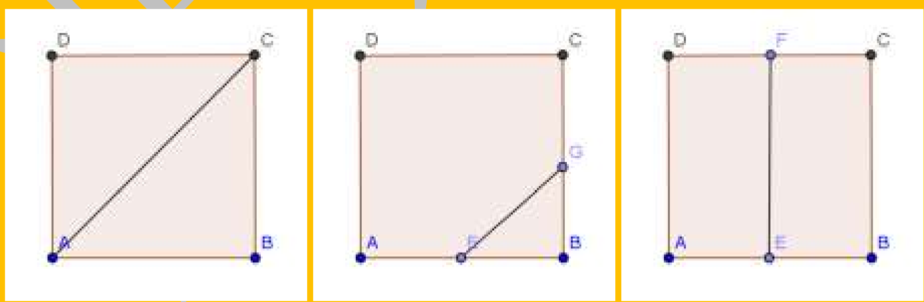
则（5D，2^2x11）=（3D，2^2x11）

这是 D=1 为最小值，上述最大公约数为 1.

故 B=15x3x3x1=135

8.　一个正方形纸片，用剪刀沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分；拿出其中一部分，再沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分；又从得到的三部分中拿出其中之一，还是沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分……如此下去，最后得到了 34 个六十二边形和一些多边形纸片。则至少要剪的刀数是(2005)。

解： 正方形被剪一刀，可以得到 3 角形（方法一、沿对角线剪，得 2 个三角形，排除，不合题意），5 边形（方法二、剪相邻的两边，及剪掉一个角，得到 3 角形和 5 边形）或 4 边形（方法三、对折剪，得到 2 个四边形）。



剪一刀变 5 边形，每次增加一刀就增加一边，故四边形必须剪 58 刀才能变成 62 边形。

假如我们已经有 34 个四边形，根据上述分析，需要剪 34x58=1972 刀，才能完成了 34 个 62 变形的制作。

那么，剩下的问题是：如何快速得到 34 个四边形？

显然，第一个四边形对折剪，变 2 个，这是最快的剪法（即方法三）。

这两个四边形分别再对折剪，需要 2 刀变成 4 个，每一刀最多只能增加一个

四边形，故至少33刀，才能得到34个四边形。

综上所述：共需要至少33+1972=2005刀，才能够得到34个62边形。

二. 动手动脑题

1. 一位教授为了考验本学期课程的成效，拿出16张扑克牌放在桌上，如下：

黑桃：A　7　Q

红心：3　4　7　9　J　Q

梅花：2　3　5　Q　K

方块：A　5

教授从中选出一张。把这张牌的数告诉了学生甲，把花色告诉乙。然后问甲："你知道是哪一张吗?"甲："我不能确定是哪张。"乙："我知道你会这样说。"甲："现在我知道了。"乙："现在我也知道了。"

教授高兴地点点头。甲、乙两人都有很强的逻辑推理能力，并且都说了实话。根据以上信息，通过你的推理，回答出这张牌是什么?

解：这张牌是方块5。

一)甲："我不能确定是哪张?"

所以，不可能是数字2、4、9、J。(数字排除，单一的数字就是这些了)

二)乙："我知道你会这样说。"

所以，花色不可能包含2、4、9或J的，排除红心和梅花。(花色排除)

这样可能性就剩下黑桃A、7、Q和方块A、5。

三)甲："现在我知道了。"

所以，排除A。因为，如果甲知道的数字是A的话，他无法确定是黑桃A还是方块A。现在，可能性就只剩下黑桃7、Q和方块5。

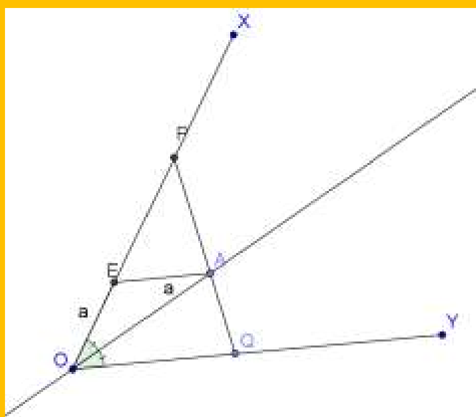
四)乙："现在我也知道了。"

如果乙知道的花色是黑桃，他无法确定究竟是黑桃7还是黑桃Q，所以，当乙也说知道了，只可能是方块5。

2. 如图，已知A是∠XOY的平分线上的定点，过点A任作一条直线分别交OX、OY于P、Q。

(1)证明：$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$是定值；

(2)求$\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$的最小值。



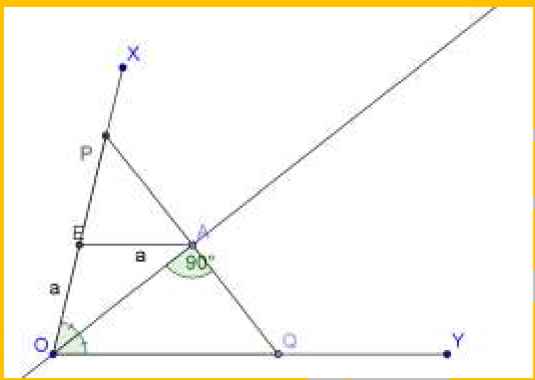
1. 解：过A作AM∥OY，交OX于M，易证得：AM=OM

设AM=OM=a，∵AM∥OY，∴即

$\dfrac{a}{OQ}=\dfrac{OP-a}{OP}$，整理得$\dfrac{1}{OQ}+\dfrac{1}{OP}=\dfrac{1}{a}$，∵已知∠A是∠XOY的平分线上的定点，∴a为定值。∴$\dfrac{1}{OQ}+\dfrac{1}{OP}$为定值。

(2) 因为 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=(\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OP})^2-2\frac{1}{OQ\cdot OP}$，其中 $\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OP}$ 为定值，要使 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$ 的值最小，则必须使分母 OQ • OP 的值最小。

由均值不等式得到：$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}\geqslant 2\frac{1}{OQ\cdot OP}$ 当且仅当 $\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OP}=\frac{1}{2a}$ 时取等号，即 OP=OQ=2OE 时，取最小值 $1/(2a^2)=1/(2OE^2)$，即点 PQ 垂直 OA 时，有 OP •OQ 最小值 $4OE^2$。此时 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$ 有最小值 $\frac{1}{2OE^2}$。



【提示】直接利用均值不等式（代数式）：$(a+b)/2\geqslant\sqrt{ab}$ （变形就是 $a^2+b^2\geqslant 2ab$）当且仅当 a=b 时，取等号。

均值不等式满足：一正 二定 三相等 规则。一正指字母数值都是正数，二定指和或积是定值，三相等指当每个都相等时取等号。

3. 小明为书房买灯，现有两种可供选择，其中一种是 9 瓦(即 0.009 千瓦)的节能灯，售价为每盏 69.8 元；另一种是 40 瓦(即 0.04 千瓦)的白炽灯，售价为每盏 32.6 元。假设两种灯的照明亮度一样，使用寿命都可以达到 2800 小时，已知小明家所在地的电价是每千瓦时 0.6 元。

(1) 设照明时间是 x 小时，请用含有 x 的代数式分别表示用一盏节能灯的费用和用一盏白炽灯的费用(注：费用=灯的售价+电费)。

(2) 小明想在这两种灯中选购一盏，如何选择，可以使费用最低?

(3) 假定照明时间是 3000 小时，此时小明想在这两种灯中选购两盏，又如何选择，可以使费用最低?

解答： (1)用一盏节能灯的费用是(69.8+0.0054x)元；

用一盏白炽灯的费用是(32.6+0.024x)元。

(2)由题意：69.8+0.0054x=32.6+0.024x，x=2000。

所以，当照明时间小于 2000 小时时，选用白炽灯费用较低，当使用时间大于 2000 小时时，选用节能灯费用较低。

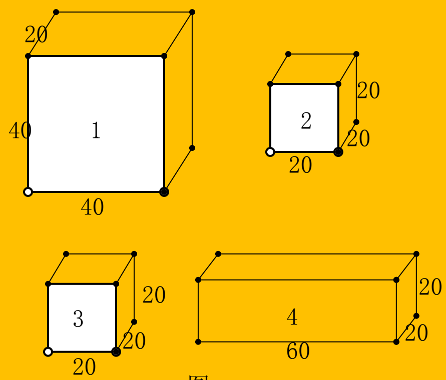
(3)分三种情况讨论：（使用寿命只有 2800 小时，所以必须要 2 盏灯）

如果选用两盏节能灯，费用为 69.8×2+0.0054×3000=155.8 元；

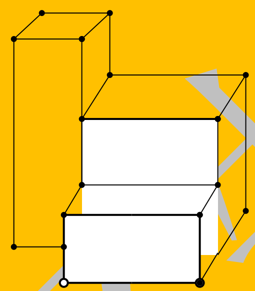
如果选用两盏白炽灯，费用为 32.6×2+0.024×3000=137.2 元。

如果选用一盏白炽灯，一盏节能灯，由于照明时间大于 2000 小时，由(2)已求应该选用节能灯，且节能灯用足 2800 小时（用足使用寿命），余下 200 小时使用白炽灯，费用最低为 69.8+32.6+0.0054×2800+0.024×200=122.32 元。

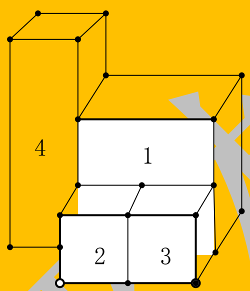
4. 图一中是编号 1～4 的四块立体积木，请你用它们拼搭出图二中立体图形。每块积木只能用一次，可翻转拼搭。请在图二上用粗线条画出你的拼法，并标上每块积木的编号。



图一


图二

解答：答案如图所示。



另解：1 躺下，2、3 在上面。