第二十三届（2012年）希望杯

初一培训题

答案·提示

说明：来源于希望杯命题委员会。图形全部用二维免费软件Geogebra完成。更改了部分解题步骤。翔文学习提供。

完成日期：2012-1-21

一. 选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	C	D	D	B	A
题号	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	A	D	B
题号	13	14	15	16	17	18
答案	B	C	C	C	D	D
题号	19	20	21	22	23	24
答案	D	C	A	D	A	A
题号	25	26	27	28	29	30
答案	C	C	B	B	B	A

提示：

1. 原式=1-4+(-1)=-4。于是选(C)。

2. 若以“千米”为计量单位，则730.13米=0.73013千米，
用科学计数法表示是 7.3013×10^{-1} 千米，故选(C)。

3. 因为阴影部分面积是小圆面积的3倍，
所以　大圆面积是小圆面积的4倍。
即　$\pi R^2=4\pi r^2$，

所以　$\frac{r^2}{R^2}=\frac{1}{4}$，

因此　$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$.

故选(D)。

4. 由图2可知
$-\frac{3}{2}<a<-1$，$\frac{3}{2}<b<2$.
故知(A)，(B)，(C)都不成立。故选(D)

5. 若想题目中的绝对值数值最小，则分数a的数值应与分数 $\frac{3}{5}$ 相差最小。

假设 $a=\frac{3}{5}=\frac{3\times(2012\div5)}{2012}$

$=\frac{3\times402.4}{2012}=\frac{1207.2}{2012}$，

则　a的分子应为1207，
所以选(B)。

6. 设绝对值不等于0或1的有理数为x，则它的相反数为-x，其负倒数为 $-\frac{1}{-x}$，

由题意得　$-\frac{1}{-x}=a$，

所以　$x=\frac{1}{a}$

故选(A)。

7. 观察算式中符号出现的周期性规律，应用分组法。

解法1 从第一个数2012开始，每四个数分成一组，一共分成2012÷4=503(组)，每一组的计算结果都是4.
原式
=(2012+2011-2010-2009)+(2008+2007-2006-2005)+…+(4+3-2-1)
=4+4+4+…+4
=4×503=2012.
故选(B)。

解法2 从第二个数2011开始，每4个数分成一组，每一组的结果为0，在算式的末尾补上+0这一项。
原式
=2012+(2011-2010-2009+2008)+(2007-2006-2005+2004)+…
+(7-6-5+4)+(3-2-1+0)
=2012+0+0+…+0
=2012.

故选(B)。

8. 译文 如果 $a<-2$，$-1<b<0$，$H=-a-b$，$O=a^2+b^2$，$P=-a+b^2$，$E=a^2-b$，那么数 H，O，P 和 E 的大小关系是( )

(A) $H<O<P<E$. (B) $P<H<O<E$.

(C) $H<E<P<O$. (D) $O<P<E<H$.

解法1 因为 $a<-2$，

所以 $-a>2$，$a^2>4$，$-a<a^2$.

由于 $-1<b<0$，

所以 $0<b^2<-b<1$.

显然，$P<H<E$，$P<O<E$.

$$H-O=-a-b-a^2-b^2$$
$$=-(a^2+a)-(b^2+b)$$
$$=-(a+\frac{1}{2})^2-(b+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$
$$<-(-2+\frac{1}{2})^2-(-1+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{9}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-2<0,$$

所以 $H<O$.

因此数 H，O，P，E 的大小关系是

$P<H<O<E$，

故选(B)。

解法2 不妨取 $a=-3$，$b=-\frac{1}{2}$，

则

$H=3\frac{1}{2}$，$O=9\frac{1}{4}$，$P=3\frac{1}{4}$，$E=9\frac{1}{2}$，

所以 $P<H<O<E$.

故选(B)。

9. 根据题意列出方程，

原式$=[(x☆2)+1]\times3$

$=[(x+1)\times2+1]\times3$

$=27$，

经过计算得 $x=3$，

故选(C)。

10. 如图18所示，**连接AF和BE，由三角形内角和定理知**[1]

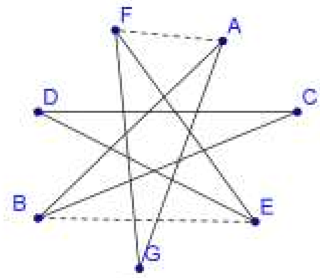


图18

$\angle C+\angle D=\angle CBE+\angle BED$，

$\angle BAF+\angle AFE=\angle ABE+\angle BEF$，

$\angle G+\angle GAF+\angle AFG=180°$，

所以$\angle G+(\angle GAB+\angle BAF)+(\angle AFE+\angle EFG)=180°$，

$\angle G+\angle GAB+\angle EFG+(\angle ABE+\angle BEF)=180°$，

$\angle G+\angle GAB+\angle EFG+(\angle ABC+\angle CBE)+(\angle DEF+\angle BED)=180°$，

$\angle G+\angle GAB+\angle EFG+\angle ABC+\angle DEF+(\angle C+(\ +\angle D)=180°$.

选(C)。**【注：与标准答案不同，我们的解答更具有一般性】**

11. 由 5a 与 7b 互为相反数知

$5a+7b=0$，

所以 $\frac{a}{b}=-\frac{7}{5}$，

故选(D)。

12. 正整数 ab 一定是 a 和 b 的公倍数，但不一定是最小公倍数，所以排除(C)；

当 a 和 b 的最大公约数是 1 时，他们的最小公倍数就是 ab，所以说法(A)不全面；

正整数 a 和 b 的公约数一定同时是 a 和 b 各自的约数，所以不能大于 a，排除(D)。

故选(B)。

13. 设 $x=BC+CD+DE$，则

四边形 BCDE 的周长为 $x+21$，

因为四边形 BCDE 的周长是△ABE 周长的两倍，

所以 $x+21=21\times3\times2$，

解得 $x=105$，

所以五边形 ABCDE 的周长是

[1] 本题 在标准答案中提供的解题思路不具备一般性，中间的交点不一定是相交于一点，我们对其进行了修改。

105+21+21=147.选(B)。

14. 若a，b同为正数，则

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=3;$$

若a为正数，b为负数，或a为负数，b为正数，都有 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1$;

若a，b同为负数，也有

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1.$$

故选(C)。

15. 译文 若a+b=0，则关于x的方程ax+b=0(　　)

(A)只有一个根

(B)只有一个根或没有根

(C)只有一个根或无穷多个根

(D)没有根或无穷多个根

解 由a+b=0知a和b是一对相反数。

若a和b都等于0，则方程有无穷多解;

若a和b不等于0，则方程有唯一解：

$x=-\frac{b}{a}$。

所以选择(C)。

16. 若星期一是29号，星期二是30号，星期三为1号，则周一到周五这五天的号数之和是

29+30+1+2+3=65.

若星期一是30号，星期二是31号，则从周一到周五这五天的号数之和是

30+31+1+2+3=67.

所以 五天的号数是连续自然数，于是第三天，即周三为70÷5=14号，从而这周的星期六是17号。

故选(C)。

17. 如图19，∠1，∠2，∠3，∠4，∠5，∠6，∠7，这7个角都是30°.

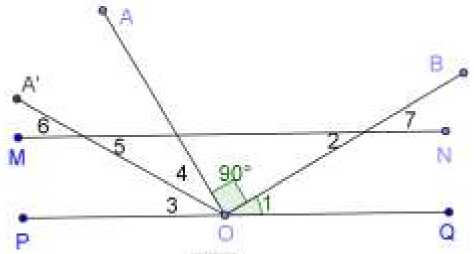


图19

18. 由题意知

$3\leqslant\frac{3x+a}{2}<4$，

所以 $6\leqslant 3x+a<8$，

因为有正整数x满足上式，易见，x只能取1，2.

若x=1时，则 $3\leqslant a<5$;

若x=2时，注意a为正数，则

$0<a<2$

故选(D)。

19. 依题意，2008年的平均房价是每平方米(6800−3000)元，3年后，即2011年上涨到每平方米6800元。所以关于x的方程是

$(6800-3000)(1+x)^3=6800.$

故选(D)。

20. 不妨设△ABC中A=2(B+C)，则

$B+C=\frac{A}{2}$

由三角形的内角和定理知A+B+C=180°，

于是 $A+\frac{A}{2}=180°$，A=120°.

显然 A是最大角，

于是此三角形的最大角是120度。选(C)。

21. 因为 $2012=2^2\times503^1$，

所以 2012 约数共有(2+1)(1+1)=6(个)。

它们分别是：1，2，4，503，1006，2012.

其和为1+2+4+503+1006+2012=3528.

故选(A)。

22. 因为△ABC的一个外角是100°，所以与这个外角相邻的内角是80°.

又因为 △ABC 是等腰三角形，
所以当 80° 的角是顶角时，另外两个角都是 50°；

当 80° 的角是底角时，另外两个角是 80° 和 20°.

故等腰△ABC 的三个内角的度数分别是 80°，50°，50°；或 20°，80°，80°.

于是三个内角中最大角与最小角的度数的差是 30° 或 60°.选(D)。

23. 已知 $a(a+2)=k\neq0$(定值)。

因为 当 $a=2$ 时，$b=1$，所以

$k=2(1+2)=6$.

将 $b=4$ 代入 $a(b+2)=6$，得 $a=1$. 故选(A)。

24. 对任意整数 x，y，x^2 被 4 整除余 0 或 1，$4y^2$ 被 4 整除余 0，所以等式左端被 4 整除余 0 或 1.而右端的 2011 被 4 整除余 3，因此对任意整数 x，y，等式都不成立。因此，满足 $x^2-4y^2=2011$ 的整数对(x,y)的组数是 0.选(A)。

25. 设这个多边形是 n 边形，则从某个顶点出发的对角线的条数是 n-3，于是

$\frac{n}{n-3}=\frac{4}{3}$，解得 n=12.

于是这个多边形是 12 边形，其内角和是

$(12-2)\times180°=1800°$.

故选(C)。

26. 因为 $a+b+c+d+e=6$，

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10$，

所以 $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-(a+b+c+d+e)$

$=10-6=4$，

因为 0 和 1 的平方都不变，

所以 这个变化是 2 造成的。

因为 $2^2=4$，

所以 a，b，c，d，e 中一定有两个 2。

由于有了 2 个 2，那么剩下三个数加起来应该是 2，这样五个数加起来才是 6.三个数加起来是 2，并且不是 0 就是 1，那么只有一种情况，1 个 0，2 个 1.

综上，a，b，c，d，e 的值中有 1 个 0，2 个 1，2 个 2.所以

$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0+1+1+8+8=18$.

故选(C)。

27. 因为 AHD 是∠BAC 的平分线，

令 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$

则 $\beta=\alpha+\theta$，$\alpha=\angle AHF=\gamma+\theta$。

两式相减，得 $\alpha-\beta=\gamma-\alpha$。

所以 $2\alpha-\beta=\gamma$。

故选(B)。

28. 当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时，均满足方程

$|x+1|+|x-2|=3$

此外，当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时，都有

$|x+1|+|x-2|>3$

所以方程 $|x+1|+|x-2|=3$ 有 4 个整数解，

$x=-1，0，1，2$

其中正整数解只有两个。故选(B)。

29. 分子、分母相加为 2，有 1 个；分子、分母相加为 3，有 2 个；分子、分母相加为 4，有 3 个；分子、分母相加为 5，有 4 个；分子、分母相加为 6，有 5 个；且分子、分母相加为 k 的 k-1 个分数，依次是

$\frac{k-1}{1}$，$\frac{k-2}{2}$，$\frac{k-3}{3}$，…，$\frac{2}{k-2}$，$\frac{1}{k-1}$。

依此规律，分子、分母相加为 14 的数有 13 个，排完这 13 个数，则数串中已有 $1+2+3+\cdots+13=91$ 个数，从第 92 个数开始，下面 14 个数的分子、分母相加为 15，易知，第 100 个数应是 $\frac{6}{9}$。

故选(B)。

30. 解法 1 每局三人中必有一人当裁判，另两人比赛。

设甲当裁判 x 局，乙当裁判 y 局，丙当裁判 z 局，则

乙或丙当裁判时，甲比赛

$y+z=12$(局)，

甲或丙当裁判时，乙比赛

$x+z=21$(局)，

现在　　z=8，
所以　　x=13，y=4.
甲共当了 13 次裁判，比赛共 x+y+z=25 局，但同一个人不可能连续当裁判，于是甲只能在第 1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25 局当裁判，甲在第 11 局当裁判，说明甲在第 10 局必是输者。故选(A)。

解法 2 如图 20，甲乙间的连线段上的数字表示甲、乙比赛的局数，即丙当裁判的局数。

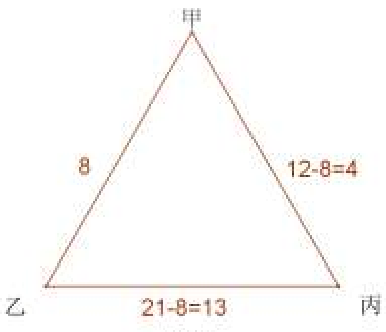
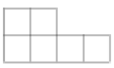


图20

因为甲比赛了 12 局，而比赛共有
8+4+13=25(场)，
又因为　　13>25÷2，
所以甲在第奇数局时当裁判，偶数局时比赛。
故第 10 局时甲在比赛，且该局他输了。故选(A)。

二. 填空题

31：$\frac{9}{64}$；**32**：30,120；**33**：4；**34**：$\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$；**35**：30；**36**:120；**37**:400；**38**:6；**39**：$-\frac{1}{3}$；**40**：；**41**：-10.24；**42**:1500；**43**：7；**44**：2,240；**45**:0；**46**：2c-2a；**47**：69,290；**48**：-72；**49**：C；**50**：3；**51**：亏损，5；**52**：12；**53**：35.02，2540；**54**：4；**55**:6；**56**：$\frac{4}{13}$；**57**：0,8；**58**：0；**59**：-2；**60**：$\frac{6}{7}$；**61:211**；**62:0**；**63**：3，3213212121；**64**：4，12；**65:-1,-90**；**66:7**；**67**:2，3 或 4；**68:1**；**69:1**；**70**：$\frac{161}{120}$；**71:2**；**72**：20；**73**：72,5；**74**：$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{23}{29}$，$\frac{11}{13}$，$\frac{17}{19}$；**75:2.7**

31. 原式

$$=[(\frac{1}{8}-\frac{3}{4})^2-(\frac{1}{8})^2]^2$$
$$=[(-\frac{5}{8})^2-(\frac{1}{8})^2]^2$$
$$=[(\frac{5}{8}+\frac{1}{8})(\frac{5}{8}-\frac{1}{8})]^2$$
$$=(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2})^2$$
$$=\frac{9}{64}$$

32. 设这个角是 x°，则这个角的余角是(90-x)°，补角是(180-x)°。由题意，得

$$90-x=\frac{1}{3}(180-x)-10,$$

解得　　x=60.
则这个角的余角是
90°-x°=30°，
这个角的补角是 180°-x°=120°.

33. 设 a=2006，则

$$原式=\frac{(a+2)^2+a}{a^2-a-2}\times\frac{(2a-2)^2-4(a-1)}{a\times(a+3)-4}$$

$$=\frac{(a+1)(a+4)}{(a-2)(a+1)}\times\frac{4(a-1)(a-2)}{(a+4)(a-1)}$$

=4.

34. 设斜坡长度为 s(m)，则

$t_{上}=\frac{s}{v_1}$(s)，$t_{下}=\frac{s}{v_2}$(s)，

所以　　$t_{总}=t_{上}+t_{下}=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$(s)。

于是 $v=\frac{2s}{t_{总}}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ (m/s)。

35. 因为 $|x-y+1|\geqslant 0$，

$(y+5)^2\geqslant 0$，

而 $|x-y+1|+(y+5)^2=0$，

所以 $|x-y+1|=(y+5)^2=0$.

于是 $x-y=-1$，$y=-5$，

即 $x=-6$，$y=-5$.

所以 $xy=30$.

36. 事实上，三角形CAB是底角为30°的等腰三角形，故顶角∠BCA=120°。

37. 设A，B两地的距离为4s，则

$\frac{s}{60}+\frac{3s}{90}=5$，

解得 s=100.

所以A，B两地的距离是400千米。

38. 解法1 设直角三角形两直角边长为a，b(a≥b)，则

$$\begin{cases}a-b=1, & ①\\ a^2+b^2=25. & ②\end{cases}$$

②-①²，得 2ab=24，

故所求面积为$\frac{1}{2}$ab=6.

解法2 如图21，用四个题目所述直角三角形做弦图，则这个直角三角形的面积是

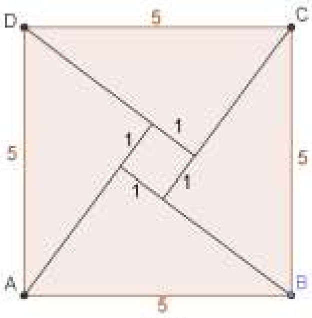


图21

$(5^2-1^2)\div 4=6$.

39. 由已知条件得

$\frac{1}{m+3}+\frac{n-3}{9}=0$.

即 $\frac{1}{m+3}=\frac{3-n}{9}$，

$(m+3)(3-n)=9$，

所以 $mn+3(n-m)=0$，

$\frac{m-n}{mn}=\frac{1}{3}$，

因此 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{3}$。

40. 如图22.

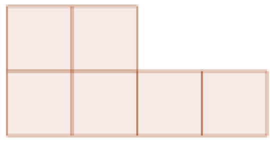


图22

41. 2006年的投资额为

140.48-109.13=31.35(亿美元)

2007年的投资额为

168.62-140.48=28.14(亿美元)

2007年比2006年的投资增长了

$\frac{28.14-31.35}{31.35}\times 100\%=-10.24\%$

42. 解法1 设A与B出发t小时后相遇，两地距离为s，则

(80+70)t=s，

(50+70)(t+2.5)=s，

得 t=10(小时)

s=150×10=1500(km)

解法2 设甲、乙两站相距x km，则

$\frac{x}{70+80}=\frac{x}{70+50}-2.5$，

x=1500

所以 甲、乙两站相距1500千米。

43. 质因数分解得

30030=2×3×5×7×11×13，

而2，3，5，7，11，13的算术平均数

$M=\frac{2+3+5+7+11+13}{6}\approx 6.8333$，

所以 与M最接近的整数是7.

44. 因为 $130\leqslant\overline{13x}\leqslant 139$，

$45540\leqslant\overline{4554z}\leqslant 45549$，

所以 $\frac{45540}{139}\leqslant\overline{3y5}\leqslant\frac{45549}{130}$

即 $327.6<\overline{3y5}<350.4$，

所以 y=3 或 4

若 y=3，则由 $\frac{45540}{335}\leqslant\overline{13x}\leqslant\frac{45549}{335}$

即 $135.9\leqslant\overline{13x}\leqslant135.97$，无解

若 y=4，由 $\frac{45540}{345}\leqslant\overline{13x}\leqslant\frac{45549}{345}$

即 $132.0\leqslant\overline{13x}\leqslant132.03$，x=2.

故 x=2，y=4，z=0

于是 $\overline{xyz}=240$.

45. 因为 $(x+1)^2+(x-3)^2$
$=(1+x)^2+(3-x)^2$
$=[(1+x)+(3-x)]^2-2(1+x)(3-x)$
$=16-2(1+x)(3-x)$
=16，
所以 $2(1+x)(3-x)=0$.
于是 $(1+x)(3-x)=0$，
所以 $(3-x)^2(1+x)^2=0$

46. 译文 如果实数 a，b，c 满足 a<b<c，那么 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=$______。

解 由 a<b<c 知，
$|a-b|=b-a$，
$|b-c|=c-b$，$|c-a|=c-a$.
所以原式 $=(b-a)+(c-b)+(c-a)$
$=2c-2a$.

47. $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$
$=(x+y)^2-4xy=5^2-4\times(-11)$
$=25+44=69$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$
$=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$
$=5[5^2-3\times(-11)]=290$

48. 译文 若 x 和 y 是整数，定义 x&y=(x+y)(x-y)，则 3&(4&5)=________。

解 因为 4&5=(4+5)(4-5)=-9，

所以
3&(4&5)=3&(-9)=(3-9)(3+9)=-72

49. 找 F 的对面时要选好参照物，不难发现 D 正好在 F、C 之间，所以 F 的对面是 C。

50. 我们帮小聪思考一下究竟哪些基本图形可以形成对面。

经观察发现，这些基本图形如图 23：

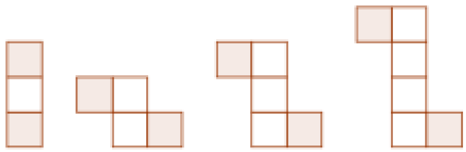


图23

于是我们可以发现，图 11 中的第三幅图红色和绿色成了对面，是错误的。

所以 正确的图形一共有 3 个。

51. 赚了 20%的原价是
60÷(1+20%)=50(元)，
亏了 20%的原价是
60÷(1-20%)=75(元)
所以这两块肉的原价之和是
50+75=125(元)，
而 卖出价之和是 120 元，
所以小明最后亏损了 5 元钱。

52. 设这个两位数为 x。
因为 x 乘以 9 以后是三位数，
所以 9x>99，
于是 x>11
又因为这个数乘以两次 9 以后仍然是三位数，
所以 81x<1000，解得 x<12.3
综上，x=12，
即 原来的两位数是 12.

53. 容易算出伤亡人口占总人口的
22.1%+12.92%=35.02%
战前阿富汗总人数是
2212 ÷ (1-12.92%)=25401929 ≈ 2540(万人)

54. 将 a+b=6 的等号两边同时平方得

$(a+b)^2=6^2$，

即 $a^2+b^2+2ab=36$

又由 $a^2+b^2=26$，

得 $ab=5$

所以 $(a-b)^2=(a^2+b^2)-2ab$

$=26-10=16$

于是 $|a-b|=4$

55. 按照题目要求，可以让“兵”和“卒”如图24摆放。

兵			
兵			
兵			
	卒	卒	卒

图24

则最多可以摆放“兵”和“卒”共6枚。

56. 连接BH，设 $S_{\triangle FHC}=a$。

则 $S_{\triangle BHF}=3a$，$S_{\triangle BCH}=4a$

由 $\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{S_{\Delta AHD}}{S_{\Delta BHD}}=\dfrac{3}{1}$，

$\dfrac{S_{\Delta ACD}-S_{\Delta AHD}}{S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BHD}}=\dfrac{S_{\Delta ACH}}{S_{\Delta BCH}}=\dfrac{3}{1}$，

得 $S_{\triangle ACH}=12a$

所以 $S_{\triangle ACF}=13a$

同理可得 $S_{\triangle BAG}=S_{\triangle CBI}=12a$

$S_{\triangle ABC}=13a\times4=52a$

所以 $S_{\triangle GHI}=52a-12a\times3=16a$，

所以 $\dfrac{S_{\Delta GHI}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{16a}{52a}=\dfrac{4}{13}$

57. 被打孔后正方体内部也被染绿的部分，恰一面有绿色的其实没有了(0个)。恰有两面是绿色的有8个。

58. 易知 $b-a=c-b=x+y$，

所以 $(a-b)^2-(b-c)^2$

$=(b-a)^2-(c-b)^2$

$=(x+y)^2-(x+y)^2$

$=0$

59. 由 $2x-3a=0$，得 $x=\dfrac{3}{2}a$

由 $3x+a-7=0$，得 $x=\dfrac{7-a}{3}$

因为关于x的方程 $2x-3a=0$ 与 $3x+a-7=0$ 的根互为相反数，

所以 $\dfrac{3}{2}a=-\dfrac{7-a}{3}$，

解得 $a=-2$

60. 解法1 由 $\dfrac{xy}{x+y}=3$ 得

$xy=3(x+y)$，

于是 $\dfrac{6x+4xy+6y}{9x+4xy+9y}=\dfrac{6(x+y)+4xy}{9(x+y)+4xy}$

$=\dfrac{6(x+y)+4\times3(x+y)}{9(x+y)+4\times3(x+y)}$

$=\dfrac{18(x+y)}{21(x+y)}=\dfrac{6}{7}$

解法2 因为 $\dfrac{xy}{x+y}=3$

所以 $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{3}$，

即 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$

显然 $x\neq0$，$y\neq0$

所以将待求式的分子分母除以xy，得

$$\frac{\frac{6}{y}+4+\frac{6}{x}}{\frac{9}{y}+4+\frac{9}{x}}=\frac{4+(\frac{6}{y}+\frac{6}{x})}{4+(\frac{9}{y}+\frac{9}{x})}$$

$$=\frac{4+6\times\frac{1}{3}}{4+9\times\frac{1}{3}}=\frac{6}{7}$$

61. 易知甲取的糖果数依次为奇数1，3，5，7，…，

而 $1+3+5+7+\cdots+17+19=100<101$，
$1+3+5+7+\cdots+17+19+21=121>101$，
所以甲的倒数第二次取了 19 枚糖果，最后一次只取剩下的 1 枚糖果。
所以开始时包裹中共有糖果
$1+2+3+4+\cdots+19+20+1=211$(枚)

62. 因为 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，
所以 $0-3abc=0\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，
于是 $abc=0$
又因为 $a+b+c=0$，
所以 a，b，c 三个数都为 0；
若一个为 0，另外两个互为相反数。
若 $a=b=c=0$，则
$a^{23}+b^{23}+c^{23}=0$，
设 $a=0$，则 $b=-c$，则
$a^{23}+b^{23}+c^{23}=0+(-c)^{23}+c^{23}=0$，
故 $a^{23}+b^{23}+c^{23}=0$.

63. 由被 9 整除的判别法知各个数位之和能被 9 整除的数能被 9 整除，而 321321321321 的各位数字之和是
$(3+2+1)\times4=24$，
要使之能被 9 整除，擦去的数码和应当等于 6.
而 6 大于给定的数中的最大数码 3，所以必须擦去两个 3.
要使得到的数最大，应去掉 321321321321 中最后两个 3.
即 3213212121 为所求。

64. 设两个多边形的边数分别为 n，3n，则由多边形内角和定理可求得这两个多边形的内角和分别为
$(n-2)\times180°$，$(3n-2)\times180°$，
于是 $\dfrac{(n-2)\times180°}{(3n-2)\times180°}=\dfrac{1}{5}$，
即 $\dfrac{n-2}{3n-2}=\dfrac{1}{5}$，
解得 $n=4$，$3n=12$
所以这两个多边形的边数是 4，12.

65. 令多项式中的 $x=1$，得
$(1-2)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，
即 $(-1)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，①
于是 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$
令 $x=0$，得
$(0-2)^5=a_0$，
即 $a_0=-32$
令 $x=-1$，得
$(-1-2)^5$
$=a_0+a_1\times(-1)+a_2\times(-1)^2+a_3\times(-1)^3+a_4\times(-1)^4+a_5\times(-1)^5$，
即 $(-3)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$. ②
①+②，得
$(-1)^5+(-3)^5=2a_0+2a_2+2a_4$，
即 $-244=2a_0+2a_2+2a_4$，
于是 a_2+a_4
$=(-244-2a_0)\div2$
$=(-244+2\times32)\div2$
$=-180\div2$
$=-90$

66. 因为 a，b，c 都是质数，
且 $a^2+b^2+c^2=78$ 是偶数，
所以 a，b，c 中必有一个是 2
(1)若 $c=2$，则 $a^2+b^2=74$，
又 $a^2-b^2=cd^2>0$，
所以 $a=7$，$b=5$
于是 $7^2-5^2=24=2d^2$，
$d^2=12$，d 无整数解。
所以 $c\neq2$
(2)因为 $a>b$，所以若 $b=2$，则
$a^2+c^2=74$，
知 $a=7$，$c=5$ 或 $a=5$，$c=7$
当 $a=7$，$c=5$ 时，
$a^2-b^2=7^2-2^2=5d^2$，$d^2=9$，$d=3$
当 $a=5$，$c=7$ 时，
$a^2-b^2=5^2-2^2=7d^2$，
$d^2=3$，d 无整数解。
综上 $a=7$，$b=2$，$c=5$，$d=3$，
故 $a-b+c-d=7-2+5-3=7$

67. 因为 $3\leqslant x<4$，
$1\leqslant y<2$，$1\leqslant z<2$
所以 $[x]+[y-z]\leqslant[x+y-z]<x+y-z$，
$3+(-1)\leqslant[x+y-z]<5$，
因此 $[x+y-z]=2$，3 或 4

68. 因为
$\dfrac{1}{7}[\dfrac{1}{5}(\dfrac{x+2}{3}+4)+6]+8=9$，

所以 $\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6=7$，

于是 $\frac{x+2}{3}+4=5$，

所以 x+2=3，

解得 x=1

69. $w-x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}$，

$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$，

$y-z=\frac{1}{w}-\frac{1}{z}=\frac{z-w}{zw}$，

$z-w=\frac{1}{x}-\frac{1}{w}=\frac{w-x}{wx}$.

所以 (w−x)(x−y)(y−z)(z−w)

$=\frac{(w-x)(x-y)(y-z)(z-w)}{xyyzwzwx}$，

因为 w、x、y、z 互不相等，

所以(w−x)(x−y)(y−z)(z−w)≠0，

故 $w^2x^2y^2z^2=1$

70. 因为 $5*3=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{25-9}{15}=\frac{16}{15}$，

所以 2*(5*3)

$=2*\frac{16}{15}=\frac{2}{\frac{16}{15}}-\frac{\frac{16}{15}}{2}=\frac{30}{16}-\frac{16}{30}$

$=\frac{15}{8}-\frac{8}{15}=\frac{225-64}{120}=\frac{161}{120}$

71. 表中数如下：

2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
−1	0	1	2
−4	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
−7	−3	1	5

于是表中 16 个数的总和为 2.

72. 由条件知 a+b+c−3=9，

c=3a，b=2a，

整理，得 a+2a+3a=12，

解得 a=2

因此 b=4，c=6.

所以 3a+2b+c

=3×2+2×4+6=20

73. 由 $\frac{4m}{3}-75=n+\frac{2m}{9}$ 得

$\frac{10m}{9}-75=n$

因为 m，n 均为正整数，

所以 $\frac{10m}{9}$ 是大于 75 的正整数，

由于 (10,9)=1，所以 9|m

于是当 m=72 时，

$n=\frac{10m}{9}-75=80-75=5$

所以当 m≥72 且 m 是 9 的倍数时，

$n=\frac{10m}{9}-75\geq5$，

故当 m=72 时，n 取到最小值 5

74. 定理：若正整数 a，b，d 满足 a<b，则

$\frac{a}{b}<\frac{a+d}{b+d}$

事实上 $a(b+d)<b(a+d) \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+d}{b+d}$

根据定理得 $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}<\frac{15}{21}$

$=\frac{5}{7}<\frac{5+6}{7+6}=\frac{11}{13}<\frac{11+6}{13+6}=\frac{17}{19}$

而 5×29<5×30=150<161=7×23，

所以 $\frac{5}{7}<\frac{23}{29}$

又 23×13=(18+5)(18−5)

=324−25=299

=29×10+9<29×11，

所以 $\frac{23}{29}<\frac{11}{13}$

因此这五个分数由小到大依次是

$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{23}{29}$，$\frac{11}{13}$，$\frac{17}{19}$

注 本题用通分法也可解。

75. 由勾股定理知 AB=5.

因此 $BA_1=5$，

又 $BC_1=BC=4$，

$C_1A_1=CA=3$

如图 25，自 C_1 作 $C_1H\perp BA_1$ 于 H。则用两种方法计算直角三角形 BC_1A_1 的面积，

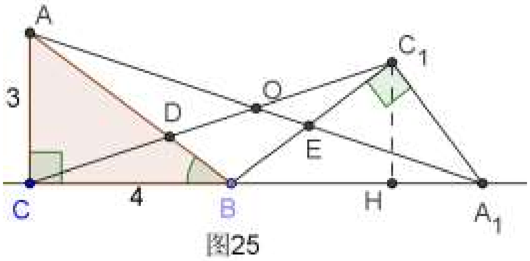


图25

得

$\frac{1}{2}BC_1\times C_1A_1=\frac{1}{2}BA_1\times C_1H$，

所以 $C_1H=\frac{BC_1\times C_1A_1}{BA_1}=\frac{4\times 3}{5}=2.4$

因此 $S_{\triangle CBC1}=\frac{1}{2}CB\times C_1H$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 2.4=4.8$

又 $S_{\triangle ABA1}=\frac{1}{2}BA_1\times AC$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 3=7.5$，

所以 $(S_{\triangle AOD}+_{\triangle A1BE})-(S_{\triangle C1OE}+S_{\triangle CBD})$

$=S_{\triangle ABA1}-S_{\triangle CBC1}=7.5-4.8=2.7$

三. 解答题

76. 对任意正整数 n，三个相邻奇数可写为

$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$

则 $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$

$=(2n-1)\times 2n\times(2n+1)+3(2n-1)(2n+1)$

因为 **三个连续整数中必有一个是 3 的倍数**，

所以 $(2n-1)2n\times(2n+1)$ 能被 3 整除，

而 $3|[3(2n-1)(2n+1)]$，

故 $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ 能被 3 整除。

77. 设 E，F 是 AB 的三等分点，G，H 是 CD 的三等分点，则 EG，FH 三等分矩形 ABCD。

下面分类讨论：

(1) 如图 26，

若点 P 与 E 或 F 重合，不妨设点 P 与 E 重合，那么 PG 和 PC 为所求。

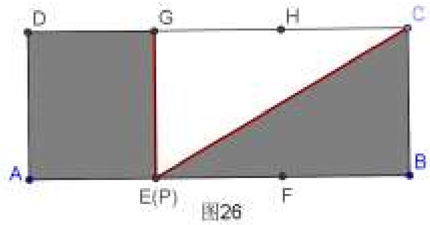


图26

(2) 如图 27，

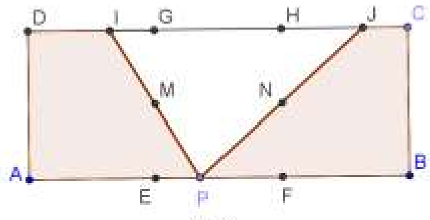


图27

若点 P 在线段 EF 上，过点 P 的两条等分面积的直线分别与 EG，FH 相交。

设 EG，FH 的中点分别是 M，N，则直线 PM 和 PN 为所求。

(3) 如图 28，

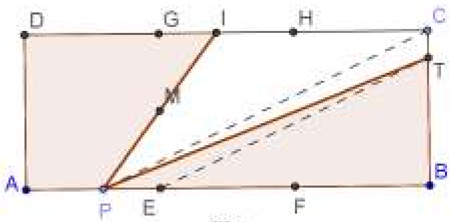


图28

若 P 在线段 AE 或 FB 上，不妨设 P 在 AE 上取 GE 中点 M，则 PM 为所求之一，另一线段必与 EG 和 FH 相交，

$S_{\triangle EBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$，由此可连接 PC，过 E 作 ET∥PC，交 BC 于 T，连接 PT，则 PT 为所求之二，事实上，

$S_{\triangle PTE}=S_{\triangle CTE}$.

78. 我们发现，$12=2^2\times 3^1$，

而 $54=2\times 3^3$.

由题意，每分钟 $2^2\times 3^1$ 的幂指数改变 1，即每分钟幂指数的和改变一次奇偶性。

由此推得，通过 1 小时，即 60 分钟，

幂指数的和的奇偶性与初始的数(12)相同。

然而初始数(12)的幂指数的和等于3，是奇数，而最后得到的数(54)的幂指数的和等于4，是偶数，

所以恰经过 1 小时，写在题板上的数不会等于54.

79. 如图29，

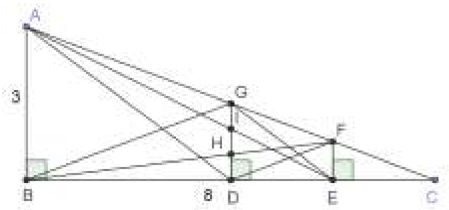


图29

BG=AG=CG，

DF=GF=FC，

AB∥GD∥FE，

BG∥DF，AD∥GE.

图中构成不同的互为余角的对子有：

∠C与∠CFE；∠GED与∠EGD；

∠AEB与∠EAB；∠FBE与∠BFE.

共4组。分类计数：

(1)注意∠C=∠EDF=∠GBD，共3个；∠CFE=∠DEF=∠GDF=∠FGD=∠BGD=∠ABG=∠BAG，共7个，所以此类互余的角共3×7=21(对)。

(2)∠GED=∠ADB.共2个；∠EGD=∠FEG=∠GDA=∠DAB.共4个。所以此类互余的角共2×4=8(对)。

(3)∠AEB，1个；∠EAB=∠FEA=∠EID=∠GIA.共4个。所以此类互余的角共1×4=4(对)。

(4) ∠FBE，1个；∠BFE=∠ABF=∠BHD=∠GHF.共4个。所以此类互余的角共1×4=4(对)。

故图中不同的互余的角共有

21+8+4+4=37(对)

80. (1)因为

$12^2+25^2+54^2+46^2+61^2$

$=144+625+2916+2116+3721$

$=9522$,

而 $16^2+64^2+45^2+52^2+21^2$

$=256+4096+2025+2704+441$

$=9522$,

所以 $12^2+25^2+54^2+46^2+61^2$

$=16^2+64^2+45^2+52^2+21^2$

(2)如图30,一般地,对任意5个不等的非零数字a,b,c,d,e,

因为 $\overline{ab}^2+\overline{bc}^2+\overline{cd}^2+\overline{de}^2+\overline{ea}^2$

$=(10a+b)^2+(10b+c)^2+(10c+d)^2+(10d+e)^2+(10e+a)^2$

$=(100a^2+20ab+b^2)+(100b^2+20bc+c^2)+(100c^2+20cd+d^2)+(100d^2+20de+e^2)+(100e^2+20ea+a^2)$

$=101(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+20(ab+bc+cd+de+ea)$

而 $\overline{ae}^2+\overline{ed}^2+\overline{dc}^2+\overline{cb}^2+\overline{ba}^2$

$=(10a+e)^2+(10e+d)^2+(10d+c)^2+(10c+b)^2+(10b+a)^2$

$=(100a^2+20ae+e^2)+(100e^2+20ed+d^2)+(100d^2+20dc+c^2)+(100c^2+20cb+b^2)+(100b^2+20ba+a^2)$

$=101(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+20(ab+bc+cd+de+ea)$

所以

$$\overline{ab}^2+\overline{bc}^2+\overline{cd}^2+\overline{de}^2+\overline{ea}^2=$$

$$\overline{ae}^2+\overline{ed}^2+\overline{dc}^2+\overline{cb}^2+\overline{ba}^2$$

(3)按（2）中证明的规律，比如给出5个不等的非零数字3,1,6,8,4，即可以写出

31,16,68,84,43 和

34,48,86,61,13，这10个彼此不等的两位数，一定满足：

$31^2+16^2+68^2+84^2+43^2=34^2+48^2+86^2+61^2+13^2$

经验证，两端的值都等于14746.

来源：《数理天地》初中版2011增刊，请购买书籍，6元。
完成日期：2012-1-21