2007 年"新知杯"上海市初中数学竞赛

答案详解

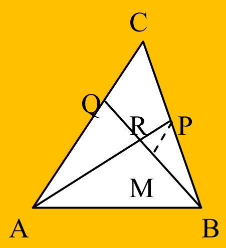
一、 填空题

1、【答案】$\frac{2}{x}-1>1$

【解析】$-1<2x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-1>1$

2、【答案】$\frac{2}{5}$

【解析】如图，



过点 P 作 PM∥AC，交 BQ 于点 M，由题设 $PM=\frac{1}{2}CQ=\frac{1}{4}AQ$，

得 $\frac{PR}{RA}=\frac{PM}{AQ}=\frac{1}{4}$，$\frac{AR}{AP}=\frac{4}{5}$

故 $S_{\triangle ABR}=\frac{4}{5}S_{\triangle ABP}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{5}$

3、【答案】$\sqrt{15}$

【解析】已知方程变形为$(c-a)x^2-2\sqrt{2}bx+(c+a)=0$，由$\triangle=8b^2-4(c^2-a^2)=4b^2>0$，知方程有两实根 x_1、x_2，且 $x_1^2+x_2^2=(\frac{2\sqrt{2}b}{c-a})^2-2\times\frac{c+a}{c-a}$.

$$=8\frac{c^2-a^2}{(c-a)^2}-2\times\frac{c+a}{c-a}$$

$$=6\times\frac{c+a}{c-a}$$

$$=10$$

故

$c=4a$, $b=\sqrt{15}a \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{15}$

4、【答案】$\frac{650}{49}$

【解析】设 $S=x_1+x_2+\cdots+x_{100}$，则 $x_k=(S-x_k)-k$ $(k=1, 2, \cdots, 100)$，即 $k+2x_k=S$。对 k 求和得

$(1+2+\cdots+100)+2S=100S \Rightarrow S=\frac{2525}{49} \Rightarrow x_{25}=\frac{S-25}{2}=\frac{650}{49}$

5、【答案】$\frac{c^2+a^3}{b}$

【解析】由题设得（$x_2y_1-x_1y_2$）$^2=a^2$,即 $2x_1x_2y_1y_2+a^2=x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2$.故

$$
\begin{aligned}
b(y_1^2+ay_2^2)&=(x_1^2+ax_2^2)(y_1^2+ay_2^2)\\
&=x_1^2y_1^2+a(x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2)+a^2x_2^2y_2^2\\
&=x_1^2y_1^2+a(2x_1x_2y_1y_2+a^2)+a^2x_2^2y_2^2\\
&=(x_1y_1+ax_2y_2)^2+a^3\\
&=c^2+a^3
\end{aligned}
$$

因为 $b\neq0$，所以，$y_1^2+ay_2^2=\dfrac{c^2+a^3}{b}$

6、【答案】34

【解析】由勾股定理得

$PA^2-AH^2=PD^2-DH^2$, $PD^2-DG^2=PC^2-CG^2$, $PC^2-CF^2=PB^2-BF^2$, $PB^2-BE^2=PA^2-AE^2$

上面四式相加得

$AH^2+DG^2+CF^2+BE^2=AE^2+BF^2+CG^2+DH^2$

$\Rightarrow 9+1+36+BE^2=AE^2+16+25$

$\Rightarrow$ $(BE-AE)(BE+AE)=11$

因为 BE-AE=1，所以，BE+AE=11，即 AB=11，故四边形 ABCD 的周长为 34.

7、【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】设 $\dfrac{AD}{AB}=x$，则 $\dfrac{BD}{BA}=1-x=\dfrac{CG}{CA}$.于是，由三角形相似得

$S_{\triangle ADG}:S_{\triangle ABC}=x^2$ $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ABC}=(1-x)^2=S_{\triangle CFG}:S_{\triangle ABC}$

因为 $S_{\triangle ABC}=1$，所以，$S_{梯形DEFG}=1-x^2-2(1-x)^2=-3x^2+4x-1=-3(x-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{1}{3}$

当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，$S_{梯形DEFG}$ 取最大值 $\dfrac{1}{3}$

8、【答案】46

【解析】显然，$x\neq1000$，设 $x=\overline{abc}$，其中，a、b、c∈（0,1，…,9），且不全为零，S（x）=a+b+c 是 x 的数字和。

（1） 若 $c\neq9$，则 S（x）=a+b+c，S（x+1）=a+b+c+1

（2） 若 c=9，$b\neq9$，则 S（x）=a+b+9，S（x+1）=a+b+1

（3） 若 b=c=9，$a\neq9$，则 S（x）=a+18，S（x+1）=a+1

（4） 若 a=b=c=9,则 S（x）=27，S（x+1）=1

由此可见，S（x）和 S（x+1）都是奇数仅是情形（2）和（4）。

在情形（2）中，a+b 为偶数，从而，a、b 同奇偶，这样有 45 个 x 满足题意。

在情形（4）中，仅有一个 x=999 满足题意。

综上，满足题意的 x 共有 46 个。

9、【答案】7

【解析】$2\times3^{6n}+k\times2^{3n+1}-1=2\times27^{2n}+2k\times8n-1=2\times(-1)^{2n}+2k-1=2k+1\pmod 7$，但 $2\times3^{6n}+k\times2^{3n+1}-1=0\pmod 7$，则 $2k+1=0\pmod 7$，即 2k+1=7m（m 为奇数），因为 $1\leqslant k\leqslant50$，所以，$3\leqslant7m\leqslant101$，故 m=1, 3，…，13，相应的 k=3，10，…，45，共 7 个

10、【答案】2 或 5

【解析】设 $\frac{p(p+1)+2}{2}=k^2$（$k\in Z^+$,则 p(p+1)=2k^2-2=2(k+1)(k-1)）.

(1) 当 p=2 时，3=k^2-1,k=2;

(2) 当 p≠2 时，p|（k+1）或 p|(k-1)

若 p|（k+1），则 p+1≥2（k−1），从而，k+2≥p+1≥2（k−1）⇒k≤4

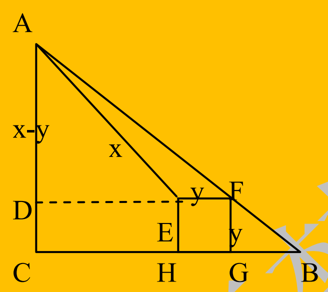
当 k=3 时，p（p+1）=16，无质数解；

当 k=4 时，p（p+1）=30，p=5

若 p|(k-1),则 k≥p+1≥2（k+1），不可能。

综上，p=2 或 5.

二、【解答】如图，



延长 FE，交 AC 于点 D，显然，DF∥BC,则 Rt△ADF∽Rt△ACB，注意到 AE=AC=x，知

DE=$\sqrt{x^2-(x-y)^2}=\sqrt{2xy-y^2}$，$\frac{x-y}{x}=\frac{\sqrt{2xy-y^2}+y}{2}\Rightarrow 2x-2y-xy=x\sqrt{2xy-y^2}$

两边平方并整理得（x^2+2x+2）y^2-(x^3+2x^2+4x)y+2x^2=0,解得 $y=\frac{2x}{x^2+2x+2}$（另一解 y=x 舍）。

（2）由（1）得 $y=\frac{2}{x+\frac{2}{x}+2}\le\frac{2}{2\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1$.当且仅当 x=$\frac{2}{x}$，即 x=$\sqrt{2}$ 时，上式等号成立，故当 x=$\sqrt{2}$ 时，y 取最大值 $\sqrt{2}$ -1

三、【解答】设 f（x）=$\frac{1}{n}x^2+ax+b$ 对任意整数 x，f（x）都是整数，则

g（x）=f（x+1）-f（x）=[$\frac{1}{n}$ (x+1)^2+a(x+1)+b]-($\frac{1}{n}$+ax+b)= $\frac{2}{n}$x+$\frac{1}{n}$+a 也为整数，

进而，g（x+1）-g（x）=$\frac{2}{n}$也是整数，所以，n=1 或 2.

当 n=1 时，取整数 a、b，则 f（x）=x^2+ax+b 对任意整数 x，f（x）都是整数；

当 n=2 时，取 a=$\frac{1}{2}$，b 为整数，则 f（x）=$\frac{1}{2}$x^2+$\frac{1}{2}$x+b=$\frac{1}{2}$x(x+1)+b 对任意整数 x，f（x）都是整数，

综上所述，n=1 或 2.

四、【解答】首先证明：只取 43 个球是不够的。

事实上，当盒子中有 42 个红球、41 个黄球、5 个黑球时，任取 24 个球，则红球与黄球至少有 24-5=19 个，从而，红球或黄球中必有一种大于或等于 10 个；而取 19 个洪秋菊，19 个黄球，5 个黑球，共 43 个球，但其中没有 20 个是同色的。其次证明：从中取 44 个小球，则其中 一定有 20 个小球同色，记盒子中红、黄、黑球的个数分别为 x、y、z，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$

（1） 若 $z\leqslant 5$，则取出的 44 个球中，红球与黄球至少有 44-5=39 个，从而，红球或黄球中一定有一种大于或等于 20 个，

（2） 若 $z=6$，当 $y\leqslant 8$ 时，44 个球中红球的个数大于或等于 $44-8-6>20$；当 $y\geqslant 9$ 时，取 9 个红球，9 个黄球，6 个黑球，24 个球中无 10 个同色球，不满足题设条件。

（3） 若 $z=7$，当 $y\geqslant 8$ 时，取 9 个红球，8 个黄球，7 个黑球，24 个球中无 10 个同色球，不满足题设条件：当 $y=7$ 时，44 个球中红球个数大于或等于 $44-7-7>20$

（4） 若 $z\geqslant 8$，则红球、黄球、黑球各取 8 个，即知不满足题设条件。

综上所述，至少取出 44 个球才能保证有 20 个小球同色。

=================================