

## 第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

## 高一 第 1 试

2012 年 3 月 11 日 上午 8:30 至 10:00 得分\_\_\_\_\_

未经“希望杯”组委会授权，任何单位和个人均不准翻印或销售此试卷，  
也不准以任何形式(包括网络)转载。翔文学习数学频道 QQ2254237433

一. 选择题(每小题 4 分，共 40 分。)以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将正确答案前的英文字母写在下面的表格内。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	共得分
答案											

1. 集合  $M = \{x | y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $N = \{y | y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}, x, y \in \mathbb{R}\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )

- (A)  $\emptyset$ . (B)  $[-1, 4]$ . (C)  $[-1, 7]$ . (D)  $[0, 4]$ .

2. 设  $m, n$  是自然数，条件甲： $m^3 + n^2$  是偶数；条件乙： $m - n$  是偶数，则甲是乙的( )

- (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分且必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

3. 已知直二面角  $\beta - l - \gamma$ ，直线  $a \subset$  平面  $\beta$ ，直线  $b \subset$  平面  $\gamma$ ，且  $a$  和  $b$  不垂直于  $l$ ，那么， $a$  与  $b$  ( )

- (A) 可能垂直，但不可能平行. (B) 不可能垂直，但可能平行.  
(C) 可能垂直，也可能垂直. (D) 不可能垂直，也不可能平行.

4. 设  $S_n$  是等比例数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的乘积，若  $a_9 = 1$ ，则下面的等式中正确的是( )

- (A)  $S_1 = S_{19}$ . (B)  $S_3 = S_{17}$ . (C)  $S_8 = S_{12}$ . (D)  $S_8 = S_{11}$ .

5. 已知数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 0$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，则  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2012} =$  ( )

- (A)  $-\sqrt{3}$ . (B) 0. (C)  $\sqrt{3}$ . (D)  $1006\sqrt{3}$ .

6. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 60^\circ$   $2AB = 3BC$ ，则  $\tan A$  的值等于( )

- (A)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

7. Suppose  $\triangle ABC$  is a triangle with the side length of 2, D and E are moving points on the sides BC and AC.  $AD \perp BE$  at point M, then the length of M's trajectory (轨迹) is ( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ . (B)  $\frac{\pi}{3}$ . (C)  $\frac{\pi}{4}$ . (D)  $\frac{\pi}{6}$ .

8. 若  $f(1, 1) = 1234$ ,  $f(x, y) = k$ ,  $f(x, y+1) = k-3$ , 则  $f(1, 2012) =$  ( )

- (A) -6033. (B) -4799. (C) 1235. (D) 2012.

9. 下面判断正确的是( )

(A)  $b^2-4ac \geq 0$  是方程  $ax^2+bx+c=0$  有解的充分且必要条件.

(B)  $b^2-4ac < 0$  是方程  $ax^2+bx+c=0$  无解的充分且必要条件.

(C)  $c \neq 0$  是方程  $ax^2+bx+c=0$  无解的必要不充分条件.

(D)  $b^2-4ac > 0$  是方程  $ax^2+bx+c=0$  有解的必要不充分条件.

10. 已知函数  $f(x) = m|x-1|$  ( $m \in \mathbb{R}$ , 且  $m \neq 0$ ). 设向量  $\mathbf{a} = (1, \cos \theta)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 2\sin \theta)$ ,  $\mathbf{c} = (4\sin \theta, 1)$ ,  $\mathbf{d} = (\frac{1}{2}\sin \theta, 1)$ . 当  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  与  $f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$  的大小关系是( )

(A)  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .

(B)  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .

(C)  $m > 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ;  $m < 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .

(D)  $m > 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ;  $m < 0$  时,  $f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) < f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .

## 二. A 组填空题 (每小题 4 分, 共 40 分.)

11. 设  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , 则在  $[0, 2\pi)$  内, 终边与  $\alpha$  角的终边关于  $x$  轴对称的角是\_\_\_\_\_。

12. 函数  $f(x) = 3^{-|\log_2 x|} - 4|x-1|$  的值域是\_\_\_\_\_。

13. 若  $a, b, c$  是三个互不相等的实数, 且满足关系式  $b^2+c^2=2a^2+16a+14$ ,  $bc=a^2-4a-5$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

14. 若  $a, b$  是正实数, 且  $a+b=2$ , 则  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$  的最小值是\_\_\_\_\_。

15.  $y = a \sin(ax+b) + b$ , if the minimum value of  $y$  is  $\frac{1}{2}$ , the maximum value is  $\frac{5}{2}$ , then  $ab =$ \_\_\_\_\_。

16. 设点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心,  $GA=2\sqrt{3}$ ,  $GB=2\sqrt{2}$ ,  $GC=2$ . 则  $\triangle ABC$  的面积=\_\_\_\_\_。

17. 已知  $0.8 < x < 0.9$ , 若将  $x, x^x, x^{x^x}$  按从小到大的顺序排列, 应当是\_\_\_\_\_。

18. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项之和是  $S_n$ , 若  $S_8 \leq 5$ ,  $S_{11} \geq 23$ , 则  $a_{10}$  的最小值是\_\_\_\_\_。

19. 若  $a \# b = a + b - ab$ , 则下列等式中:

①  $a \# b = b \# a$ .

②  $a \# 0 = a$ .

③  $(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$ .

正确的是\_\_\_\_\_。(填序号)

20.  $\odot O$  与  $\odot D$  相交于  $A, B$  两点,  $BC$  是  $\odot D$  的切线, 点  $C$  在  $\odot O$  上, 且  $AB=BC$ . 若  $\triangle ABC$  的面积是  $S$ , 则  $\odot D$  的半径的最小值是\_\_\_\_\_。

## 三. B 组填空题 (每小题 8 分, 共 40 分.)

21. 已知  $1 \leq x \leq 8$ , 则函数  $f(x) = |x-3| + |x-5| + |x-7|$  的最大值是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_。

22.  $\alpha, \beta$  是关于  $x$  的方程  $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$  的两个实根, 设  $y = \alpha^2 + \beta^2$ ,

则  $y=f(m)$  的解析式是\_\_\_\_\_，值域是\_\_\_\_\_。

23. 已知  $\triangle ABC$  三条边长分别为  $a=t^2+3$ ,  $b=-t^2-2t+3$ ,  $c=4t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 则  $\triangle ABC$  的最大内角是角\_\_\_\_\_, 它的度数等于\_\_\_\_\_。

24. 方程  $x^2+\log_{16}x=0$  的解是\_\_\_\_\_；使不等式  $x^2-\log_ax < 0$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上恒成立的  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

25. 若函数  $f(x)=\log_a(x^2-2ax+1-2a^2)$  ( $a>0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在  $\mathbf{R}$  上的最大值是 2, 则  $a=$ \_\_\_\_\_,  $f(x)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_。

## 参考答案

### (1) 选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	C	A	C	B	B	C	D

### (2) A 组填空题

题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	$2\pi - \alpha$	$(-\infty, 1]$	$(-1, +\infty)$	1	$\pm \frac{3}{2}$	$6\sqrt{2}$	$x < x^{x^x} < x^x$	6	①②③	$\frac{\sqrt{2S}}{2}$

### (3) B 组填空题

题号	21	22	23	24	25
答案	12; 4	$y=2m^2-8m+12$ ( $m \leq \frac{5}{2}$ ); $[4, +\infty)$	A; $120^\circ$	$\frac{1}{2}$ ; $[\frac{1}{16}, 1)$	$\frac{1}{2}$ ; $(-\infty, \frac{1}{2})$