2005 年“宇振杯”上海市初中数学竞赛

答案详解

一、填空题

1、【答案】6 或 31

【题设】由题设知（3n+32）（4n+1）只能含质因数 2 或 5,4n+1 为奇数，且 5≤4n+1<401，故 4n+1=5 或 25 或 125，从而 n=1 或 6 或 31，当 n=1 时，3n+32=35=5×7，不满足条件，容易验证，n=6 或 31 时，满足条件。

2、【答案】4648、

【解析】A=111(c+d+e+f+g)+110b+100a+11h+i,

则当 c+d+e+f+g=9+8+7+6+5=35,b=4,a=3,h=2,i=1 时，A 的最大值为 4648.

3、【答案】18

【解析】依题设有 $73<\dfrac{29400}{400}<\overline{x5}\le\dfrac{29400}{300}=98$，则 $\overline{x5}$=75 或 85 或 95,

因为 85 和 95 都不能整除 29400，则只能是 $\overline{x5}$=75，当 $\overline{x5}$=75 时，$\overline{3yz}=\dfrac{29400}{75}=392$，

所以，x=7，y=9，z=2.

4、【答案】5

【解析】由已知两式消去 y 得 $3|\sqrt{x}-2|+|x-4|=-(2a^2+b^2)$。由此得 x=4，a=b=0，进而知 y=1

5、【答案】$10-2\sqrt{10}$

【解析】设 CD 交 AB 于点 E，交 OB 于点 F。因为直线 OB 的方程为 $y=\dfrac{1}{10}x$，所以，点 F 的坐标为（x，$\dfrac{1}{10}$）（这里 0<x<10）,则 $EF=1-\dfrac{1}{10}x=\dfrac{10-x}{10}$，EB=10-x，AB=10-2=8.

故 $S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10-x}{10}(10-x)=\dfrac{(10-x)^2}{20}$，又 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}AB\times1=4$，故 $\dfrac{(10-x)^2}{20}$=2.

6、【答案】a=1

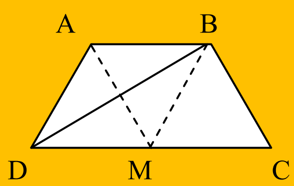
【解析】由题设知 m≠0，且△=1-4m>0,即 $m<\dfrac{1}{4}$ 且 m≠0.

同时 $a^2+a+m=0$,且 $ma^2+a+1=0$.相减得 $(1-m)a^2+(m-1)=0$.因为 m≠1，所以，$a^2=1$.

解得 a=±1. 若 a=-1，则 m=0，与题设矛盾，若 a=1，m= -2

7、【答案】18

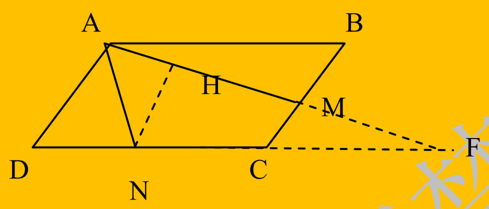
【解析】如图，



取 CD 的中点 M，连接 BM、AM.由题设易知四边形 ADMB 为菱形，四边形 AMCB 为平行四边形。于是，AM=BC=4，注意到△ADM≌△MBA≌△BMC，则 $S_{ABCD}=\frac{3}{2}S_{ADMB}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times 6\times 4=18$.

8、【答案】$\frac{2\sqrt{13}}{3}$

【解析】如图，



延长 AM 交 DC 的延长线于点 F，易证△AMB≌△FMC，则 CF=AB. 故 NF=$\frac{3}{2}$AB.过点 N 作 NH 垂直 AF 于 H，则 AH=$\frac{1}{2}$AN=$\frac{1}{2}$,NH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

故 HF=$2\times 2-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$,NF=$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{7}{2})^2}=\sqrt{13}$.进而，AB=$\frac{2}{3}NF=\frac{2\sqrt{13}}{3}$

9、【答案】$3\sqrt{3}-5$

【解析】设 $\frac{AF}{FC}$=t，则 $S_{\triangle CEF}=\frac{CF}{FA}S_{\triangle AEF}=\frac{1}{t}S_{\triangle AEF}$

因为△AEF∽△ABC，所以，$S_{\triangle AEF}=(\frac{AF}{AC})^2 S_{\triangle ABC}=(\frac{t}{1+t})^2$

$S_{\triangle EBC}=\frac{BE}{BA}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{1+t}$，由题设得 $(\frac{t}{1+t})^2=\frac{2}{1+t}, t=1+\sqrt{3}$

故 $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{t}S_{\triangle AEF}=\frac{1}{t}\times(\frac{t}{1+t})^2=\frac{t}{(1+t)^2}=3\sqrt{3}-5$

10、【答案】29

【解析】因为 x^2-px-580p=0 有两个整数根，所以，△=（-p）^{2}+4×580p=p（p+2320）为完全平方数。由此可知，p|2320，因为 2320=2^4×5×29，所以，p=2 或 5 或 29.

当 p=2 时，△=2^2（1+1160）=2^2×1161=2^2×3^2×129 不是完全平方数；

当 p=5 时，△=5^2（1+464）=5^2×465 不是完全平方数；

当 p=29 时，△=29^2（1+80）=29^2×9^2，方程两根 x=$\frac{29\pm 29\times 9}{2}$

即 x_1=29×5=145, x_2=−29×4=−116, 满足题意

二、【解答】设矩形 A′B′C′D′的相邻两边长为 m、n，依题意有 m+n=$\frac{1}{3}$（a+b），mn=$\frac{1}{3}$ab，因此，m、n 是二次方程 $x^2-\frac{1}{3}(a+b)x+\frac{1}{3}ab=0$ 的两正根，因为 $\frac{1}{3}$（a+b）>0，$\frac{1}{3}$ab>0，所以，上述二次方程有两正根的条件是 △ = $\frac{1}{9}(a+b)^2-\frac{4}{3}ab$ = $\frac{1}{9}$（$a^2-10ab+b^2$）=$\frac{1}{9}[a-(5+2\sqrt{6})b][a-(5-2\sqrt{6})b]\geqslant 0$,

所以，当 a⩾（$5+2\sqrt{6}$）b 或 0<a⩽（$5-2\sqrt{6}$）b 时，满足条件的矩形 A′B′C′D′存在；

当（$5-2\sqrt{6}$）b<a<（$5+2\sqrt{6}$）b 时，满足条件的矩形 A′B′C′D′不存在。

三、【解答】（1）因为 c=2a+5b，所以，a+b+c=3a+6b=3（a+2b），又 a、b、c 都是大于 3 的质数，故 3|（a+b+c），即存在正整数 n>1，（例如 n=3），使 n|（a+b+c）。

（2）因为 a、b、c 都是大于 3 的质数，所以 a、b、c 都不是 3 的倍数，若 a≡1（mod3），b≡2（mod3），则 c=2a+5b=2+10≡0（mod3），这与 c 不是 3 的倍数矛盾。同理，a≡2（mod3），b≡1（mod3）也将导致矛盾，故只能 a≡b≡1（mod3）或 a≡b≡2（mod3）

于是，a+2b=3a≡0（mod3），从而，9|（a+b+c）。

当 a=7，b=13 时，c=2×7+5×13=79 为质数，a+b+c=99=9×11

当 a=7，b=19 时，c=2×7+5×19=109 为质数，a+b+c=135=9×15.

故在所有 n|（a+b+c）的 n 中，最大的为 9.

四、【解答】记正方形 CDEF 的边长为 x，正方形 KLMN 的边长为 y，则按题设 x=21，y=$2\sqrt{110}$

记 BC=a，CA=b,AB=c，则 $a^2+b^2=c^2$,注意到 ax+bx=2（$S_{\triangle CEB}+S_{\triangle CEA}$）=$2S_{\triangle ABC}$=ab，于是

x=$\frac{ab}{a+b}$ （1）

又由△AKL∽△ABC,得 AL=$\frac{b}{a}y$,同理，$MB=\frac{a}{b}y$，

因为 c=AL+LM+MB=$(\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b})x=\frac{c^2+ab}{ab}y$，所以 $y=\frac{abc}{c^2+ab}$ （2）

则 $\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}=(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab})^2-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2=(\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{c^2}{a^2b^2})-(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2})=\frac{1}{c^2}$

故 c=$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{440}-\frac{1}{441}}}=21\sqrt{440}=42\sqrt{110}$。将其带入式（2）可得 ab=$\frac{c^2y}{c-y}$=$21^2$×22。

进而，$a+b=\frac{ab}{x}=21\times22$ 于是，a、b 是二次方程 $t^2-21\times22t+21^2\times22=0$ 的两根。

因为 b>a, 所以，a=$231-63\sqrt{11}$，b=$231+63\sqrt{11}$