立体几何题型与方法(理科)

1．平面

平面的基本性质：掌握三个公理及推论，会说明共点、共线、共面问题。

（1）. 证明点共线的问题，一般转化为证明这些点是某两个平面的公共点（依据：由点在线上，线在面内 ，推出点在面内）， 这样可根据公理 2 证明这些点都在这两个平面的公共直线上。

（2）. 证明共点问题，一般是先证明两条直线交于一点，再证明这点在第三条直线上，而这一点是两个平面的公共点，这第三条直线是这两个平面的交线。

（3）. 证共面问题一般先根据一部分条件确定一个平面，然后再证明其余的也在这个平面内，或者用同一法证明两平面重合

2. 空间直线.

（1）. 空间直线位置关系三种：相交、平行、异面. 相交直线：共面有且仅有一个公共点；平行直线：共面没有公共点；异面直线：不同在任一平面内，无公共点

[注]：①两条异面直线在同一平面内射影一定是相交的两条直线.（×）（也可能两条直线平行，也可能是点和直线等）

②直线在平面外，指的位置关系是平行或相交

③若直线 a、b 异面，a 平行于平面 α，b 与 α 的关系是相交、平行、在平面 α 内.

④两条平行线在同一平面内的射影图形是一条直线或两条平行线或两点.

⑤在平面内射影是直线的图形一定是直线.（×）（射影不一定只有直线，也可以是其他图形）

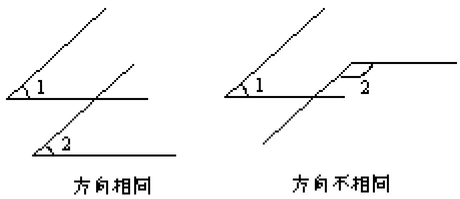
⑥在同一平面内的射影长相等，则斜线长相等.（×）（并非是从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段）

⑦ a,b 是夹在两平行平面间的线段，若 $a=b$，则 a,b 的位置关系为相交或平行或异面.

⑧异面直线判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.（不在任何一个平面内的两条直线）

（2）. 平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等（如右图）.



（直线与直线所成角 $\theta\in[0^\circ,90^\circ]$）

（向量与向量所成角 $\theta\in[0^\circ,180^\circ]$)

推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成锐角（或直角）相等.

（3）. 两异面直线的距离：公垂线段的长度.

空间两条直线垂直的情况：相交（共面）垂直和异面垂直.

[注]：l_1,l_2 是异面直线，则过 l_1,l_2 外一点 P，过点 P 且与 l_1,l_2 都平行平面有一个或没有，但与 l_1,l_2 距离相等的

点在同一平面内．（L_1或L_2在这个做出的平面内不能叫L_1与L_2平行的平面）

3．直线与平面平行、直线与平面垂直.

（1）．空间直线与平面位置分三种：相交、平行、在平面内.

（2）．直线与平面平行判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.（“线线平行$\Rightarrow$线面平行”）

[注]：①直线a与平面α内一条直线平行，则a∥α．（×）（平面外一条直线）

②直线a与平面α内一条直线相交，则a与平面α相交．（×）（平面外一条直线）

③若直线a与平面α平行，则α内必存在无数条直线与a平行．（√）（不是任意一条直线，可利用平行的传递性证之）

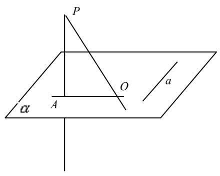
④两条平行线中一条平行于一个平面，那么另一条也平行于这个平面．（×）（可能在此平面内）

⑤平行于同一个平面的两直线平行.（×）（两直线可能相交或者异面）

⑥直线l与平面α、β所成角相等，则α∥β.（×）（α、β可能相交）

（3）．直线和平面平行性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.（“线面平行$\Rightarrow$线线平行”）

（4）．直线与平面垂直是指直线与平面任何一条直线垂直，过一点有且只有一条直线和一个平面垂直，过一点有且只有一个平面和一条直线垂直.



- 若$PA \perp \alpha$，$a \perp AO$，得$a \perp PO$（三垂线定理），
- 三垂线定理的逆定理亦成立.

直线与平面垂直的判定定理一：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这两条直线垂直于这个平面.（“线线垂直$\Rightarrow$线面垂直”）

直线与平面垂直的判定定理二：如果平行线中一条直线垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

性质：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

（5）. a. 垂线段和斜线段长定理：从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，①射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段较长；②相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段射影较长；③垂线段比任何一条斜线段短.

[注]：垂线在平面的射影为一个点.［一条直线在平面内的射影是一条直线.（×）］

b. 射影定理推论：如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等，那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上。

4．平面平行与平面垂直.

（1）．空间两个平面的位置关系：相交、平行.

（2）．平面平行判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.（“线面平行$\Rightarrow$面面平行”）

推论：垂直于同一条直线的两个平面互相平行；平行于同一平面的两个平面平行.

[注]：一平面内的任一直线平行于另一平面.

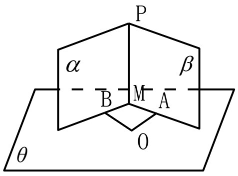
（3）．两个平面平行的性质定理：如果两个平面平行同时和第三个平面相交，那么它们交线平行.（“面面平行$\Rightarrow$线线平行”）

（4）．两个平面垂直判定一：两个平面所成的二面角是直二面角，则两个平面垂直.

两个平面垂直判定二：如果一条直线与一个平面垂直，那么经过这条直线的平面垂直于这个平面.（“线面垂直$\Rightarrow$面面垂直”）

注：如果两个二面角的平面分别对应互相垂直，则两个二面角没有什么关系.

（5）．两个平面垂直性质定理：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线也垂直于另一个平面.



推论：如果两个相交平面都垂直于第三平面，则它们交线垂直于第三平面.

简证：如图，在平面内过 O 作 OA、OB 分别垂直于l_1,l_2，

因为$PM\subset\beta,OA\perp\beta,PM\subset\alpha,OB\perp\alpha$则$PM\perp OA,PM\perp OB$.所以结论成立

（6）．两异面直线任意两点间的距离公式：$l=\sqrt{m^2+n^2+d^2-2mn\cos\theta}$（$\theta$为锐角取减，$\theta$为钝角取加，综上，都取减则必有$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$）

（1）．a.最小角定理：$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$（$\theta_1$为最小角，如图）

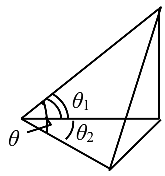


图1

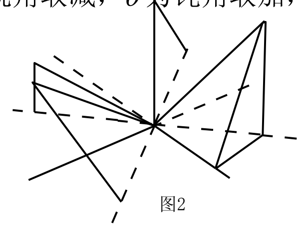


图2

b.最小角定理的应用（∠PBN 为最小角）

简记为：成角比交线夹角一半大，且又比交线夹角补角一半长，一定有 4 条.

成角比交线夹角一半大，又比交线夹角补角小，一定有 2 条.

成角比交线夹角一半大，又与交线夹角相等，一定有 3 条或者 2 条.

成角比交线夹角一半小，又与交线夹角一半小，一定有 1 条或者没有.

5.　棱柱. 棱锥

（1）．棱柱.

a.①直棱柱侧面积：$S=Ch$（C为底面周长，h是高）该公式是利用直棱柱的侧面展开图为矩形得出的.

②斜棱住侧面积：$S=C_1l$（C_1是斜棱柱直截面周长，l是斜棱柱的侧棱长）该公式是利用斜棱柱的侧面展开图为平行四边形得出的.

b.{四棱柱}$\supset${平行六面体}$\supset${直平行六面体}$\supset${长方体}$\supset${正四棱柱}$\supset${正方体}.

{直四棱柱}$\bigcap${平行六面体}={直平行六面体}.

$\text{四棱柱}\xrightarrow[\text{平行四边形}]{\text{底面是}}\text{平行六面体}\xrightarrow[\text{底面}]{\text{侧棱垂直}}\text{直平行六面体}\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面是}}\text{长方体}\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面是}}\text{正四棱柱}\xrightarrow[\text{底面边长相等}]{\text{侧面与}}\text{正方体}$

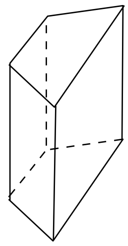
c.棱柱具有的性质：

①棱柱的各个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的各个侧面都是矩形；正棱柱的各个侧面都是全等的矩形.

②棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形.

③过棱柱不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.

注：①棱柱有一个侧面和底面的一条边垂直可推测是直棱柱. （×）



（直棱柱不能保证底面是矩形,可如图）

②（直棱柱定义）棱柱有一条侧棱和底面垂直.

d. 平行六面体：

定理一：平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分.

[注]：四棱柱的对角线不一定相交于一点.

定理二：长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

推论一：长方体一条对角线与同一个顶点的三条棱所成的角为α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

推论二：长方体一条对角线与同一个顶点的三各侧面所成的角为α,β,γ，则$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

[注]：①有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱.（×）（斜四棱柱的两个平行的平面可以为矩形）

②各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱.（×）（应是各侧面都是正方形的直棱柱才行）

③对角面都是全等的矩形的直四棱柱一定是长方体.（×）（只能推出对角线相等，推不出底面为矩形）

④棱柱成为直棱柱的一个必要不充分条件是棱柱有一条侧棱与底面的两条边垂直. （两条边可能相交，可能不相交，若两条边相交，则应是充要条件）

（2）. 棱锥：棱锥是一个面为多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形.

[注]：①一个三棱锥四个面可以都为直角三角形.

②一个棱柱可以分成等体积的三个三棱锥；所以$V_{棱柱}=Sh=3V_{棱柱}$.

a. ①正棱锥定义：底面是正多边形；顶点在底面的射影为底面正多边形的中心.

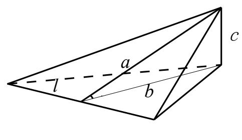
[注]：i. 正四棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形.（不是等边三角形）

ii. 正四面体是各棱相等，而正三棱锥是底面为正三角形，侧棱与底棱不一定相等

iii. 正棱锥定义的推论：若一个棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形（即侧棱相等）；底面为正多边形.

②正棱锥的侧面积：$S=\frac{1}{2}Ch'$（底面周长为C，斜高为h'）

③棱锥的侧面积与底面积的射影公式：$S_{侧}=\frac{S_{底}}{\cos\alpha}$（侧面与底面成的二面角为$\alpha$）



附：以知$c\perp l$，$\cos\alpha\cdot a=b$，α 为二面角$a-l-b$.

则$S_1=\frac{1}{2}a\cdot l$①，$S_2=\frac{1}{2}l\cdot b$②，$\cos\alpha\cdot a=b$③ $\Longrightarrow$①②③得$S_{侧}=\frac{S_{底}}{\cos\alpha}$.

注：S 为任意多边形的面积（可分别求多个三角形面积和的方法）.

b. 棱锥具有的性质：①正棱锥各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等（它叫做正棱锥的斜高）.

②正棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形，正棱锥的高、侧棱、侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形.

c.特殊棱锥的顶点在底面的射影位置：

①棱锥的侧棱长均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.

②棱锥的侧棱与底面所成的角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.

③棱锥的各侧面与底面所成角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.

④棱锥的顶点到底面各边距离相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.

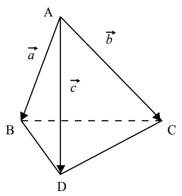
⑤三棱锥有两组对棱垂直，则顶点在底面的射影为三角形垂心.

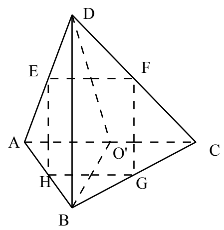
⑥三棱锥的三条侧棱两两垂直，则顶点在底面上的射影为三角形的垂心.

⑦每个四面体都有外接球，球心 0 是各条棱的中垂面的交点，此点到各顶点的距离等于球半径；

⑧每个四面体都有内切球，球心 I 是四面体各个二面角的平分面的交点，到各面的距离等于半径.

[注]：i. 各个侧面都是等腰三角形，且底面是正方形的棱锥是正四棱锥.（×）（各个侧面的等腰三角形不知是否全等）





ii. 若一个三棱锥，两条相对棱互相垂直，则第三组相对棱必然垂直.

简证：AB⊥CD，AC⊥BD⇒ BC⊥AD. 令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$

得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{b}\vec{c}-\vec{a}\vec{c}$，已知 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0,\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

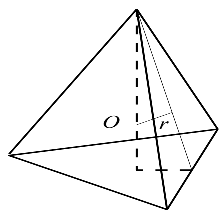
$\Rightarrow\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}=0$ 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

iii. 空间四边形 OABC 且四边长相等，则顺次连结各边的中点的四边形一定是矩形.

iv. 若是四边长与对角线分别相等，则顺次连结各边的中点的四边是一定是正方形.

简证：取 AC 中点 O'，则 $oo'\perp AC,BO'\perp AC\Rightarrow AC\perp$ 平面 $OO'B\Rightarrow AC\perp BO\Rightarrow\angle FGH=90^\circ$ 易知 EFGH 为平行四边形 ⇒ EFGH 为长方形.若对角线等，则

$EF=FG\Rightarrow EFGH$ 为正方形.



（3）. 球：

a.球的截面是一个圆面.

①球的表面积公式：$S=4\pi R^2$.②球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

b.纬度、经度：

①纬度：地球上一点 P 的纬度是指经过 P 点的球半径与赤道面所成的角的度数.

②经度：地球上 A,B 两点的经度差，是指分别经过这两点的经线与地轴所确定的二个半平面的二面角的度数，特别地，当经过点 A 的经线是本初子午线时，这个二面角的度数就是 B 点的经度.

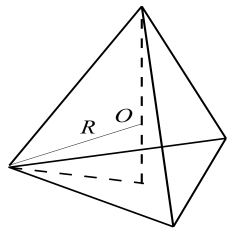
附：①圆柱体积：$V=\pi r^2h$（r 为半径，h 为高）

②圆锥体积：$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$（r 为半径，h 为高）

③锥体体积：$V=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为高）

（1）．①内切球：当四面体为正四面体时，设边长为 a，$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$S_{底}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_{侧}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，得

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R\Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{4}a/\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$$



注：球内切于四面体：$V_{B-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{侧}\cdot R\cdot 3+\frac{1}{3}S_{底}\cdot R=S_{底}\cdot h$。

②外接球：球外接于正四面体，可如图建立关系式.

6. 空间向量.

（1）．a. 共线向量：共线向量亦称平行向量，指空间向量的有向线段所在直线互相平行或重合.

注：①若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{b}$与$\vec{c}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{c}$共线.（×）　[当$\vec{b}=\vec{0}$时，不成立]

②向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面即它们所在直线共面.（×）[可能异面]

③若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则存在小任一实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.（×）[与$\vec{b}=\vec{0}$不成立]

④若$\vec{a}$为非零向量，则$0\vec{a}=\vec{0}$.（√）[这里用到$\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$之积仍为向量]

b. 共线向量定理：对空间任意两个向量$\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$的充要条件是存在实数$\lambda$（具有唯一性），使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

c. 共面向量：若向量$\vec{a}$使之平行于平面α或$\vec{a}$在α内，则$\vec{a}$与α的关系是平行，记作$\vec{a}\parallel\alpha$.

d. ①共面向量定理：如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，则向量$\vec{P}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在实数对 x、y 使$\vec{P}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

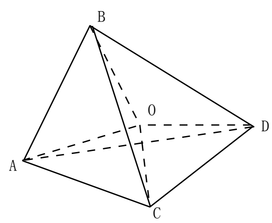
②空间任一点 O 和不共线三点 A、B、C，则$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$是$PABC$四点共面的充要条件.

（简证：$\overrightarrow{OP}=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}\rightarrow P$、$A$、$B$、$C$四点共面）

注：①②是证明四点共面的常用方法.

（2）．空间向量基本定理：如果三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，那么对空间任一向量$\vec{P}$，存在一个唯一的有序实数组 x、y、z，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

推论：设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P, 都存在唯一的有序实数组 x、y、z 使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（这里隐含 x+y+z≠1）.



注：设四面体 ABCD 的三条棱，$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d},$其中 Q 是△BCD 的重心，则向量$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$用$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}$即证.

对空间任一点 O 和不共线的三点 A、B、C，满足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，

则四点 P、A、B、C 是共面$\Leftrightarrow x+y+z=1$

（3）. a. 空间向量的坐标：空间直角坐标系的 x 轴是横轴（对应为横坐标），y 轴是纵轴（对应为纵坐标），z 轴是竖轴（对应为竖坐标）.

①令 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，

$\vec{a}\ //\ \vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$。

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$。

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$（向量模与向量之间的转化：$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\bullet\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}$）

空间两个向量的夹角公式 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

（$a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$）。

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

b. 法向量：若向量 $\vec{a}$ 所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{a}\perp\alpha$，如果 $\vec{a}\perp\alpha$ 那么向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量.

c. 向量的常用方法：

①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面 α 的法向量，AB 是平面 α 的一条射线，其中 $A\in\alpha$，则点 B 到平面 α 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$.

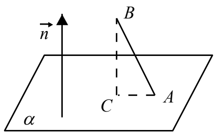
②. 异面直线间的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{CD}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$（$l_1,l_2$ 是两异面直线，其公垂向量为 $\vec{n}$，C、D 分别是 l_1,l_2 上任一点，d 为 l_1,l_2 间的距离）.

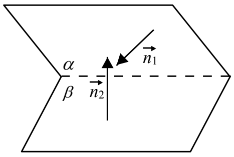
③. 直线 AB 与平面所成角 $\beta=arc\sin\dfrac{\overrightarrow{}\ \vec{}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{m}|}$（$\vec{m}$ 为平面 α 的法向量）.

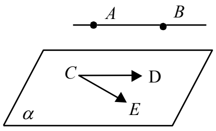
④. 利用法向量求二面角的平面角定理：设 $\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 中平面 α,β 的法向量，则 $\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 方向相同，则为补角，$\vec{n}_1,\overrightarrow{n_2}$ 反方，则为其夹角）.

二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 $\theta=arc\cos\dfrac{\vec{}\ \vec{}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$ 或 $\pi-arc\cos\dfrac{\vec{}\ \vec{}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$（$\vec{m}$，$\vec{n}$ 为平面 α，β 的法向量）.

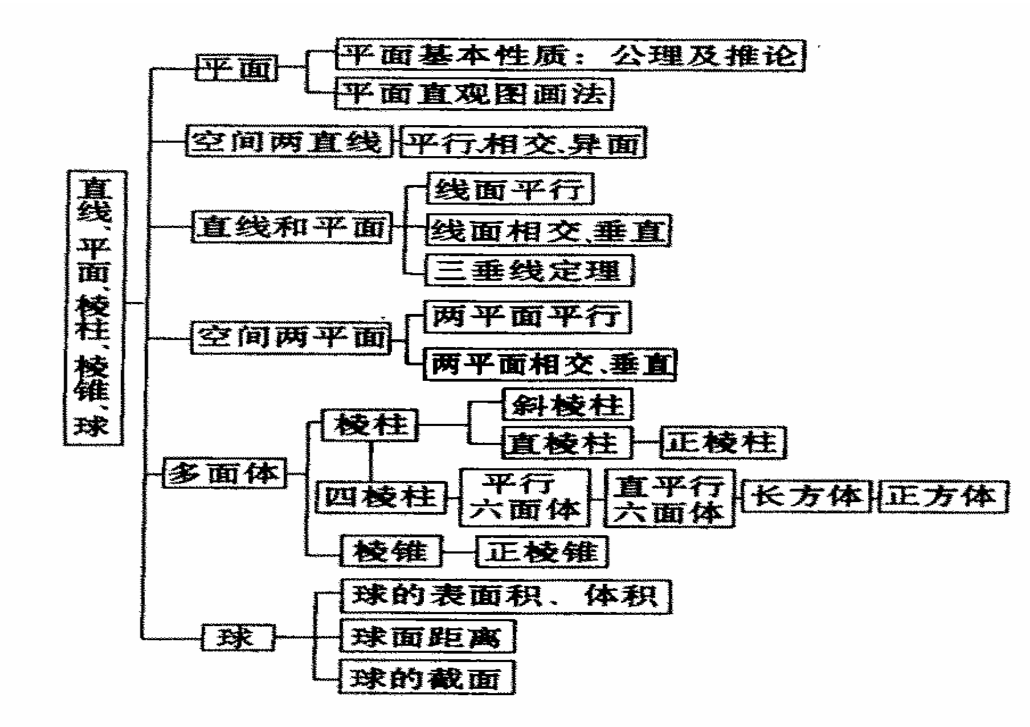
d. 证直线和平面平行定理：已知直线 $a\not\subset$ 平面 α，$A,B\in a,C,D\in\alpha$，且 C、D、E 三点不共线，则 a// α 的充要条件是存在有序实数对 λ,μ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$.（常设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$ 求解 λ,μ 若 λ,μ 存在即证毕，若 λ,μ 不存在，则直线 AB 与平面相交）.

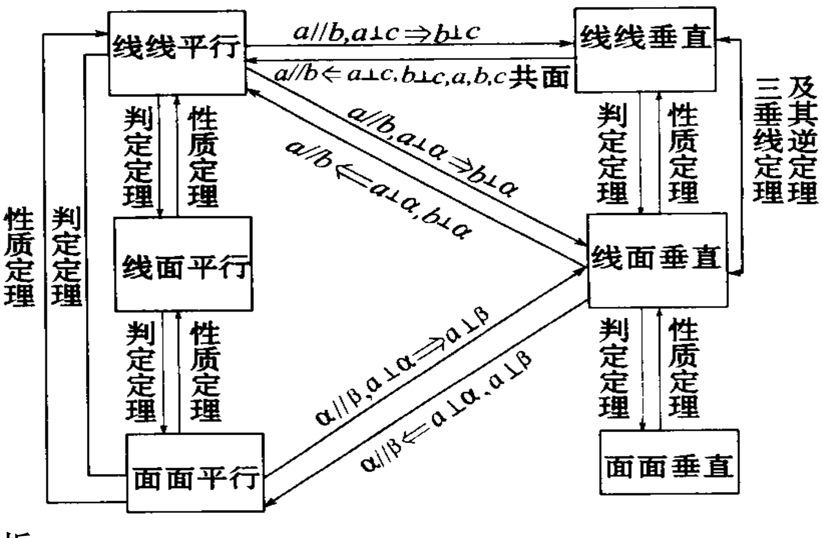






7．知识网络





一、　经典例题剖析

考点一 空间向量及其运算

1．已知 A,B,C 三点不共线，对平面外任一点，满足条件 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$，

试判断：点 P 与 A,B,C 是否一定共面？

解析：要判断点 P 与 A,B,C 是否一定共面，即是要判断是否存在有序实数对 x,y 使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 或对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。

答案：由题意：$5\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$，

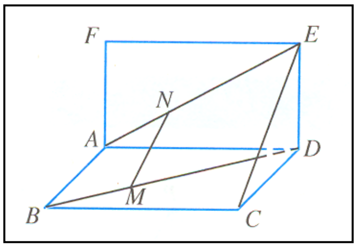
$\therefore (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}$，即 $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$，

所以，点 P 与 A,B,C 共面.

点评：在用共面向量定理及其推论的充要条件进行向量共面判断的时候，首先要选择恰当的充要条件形式，然后对照形式将已知条件进行转化运算.

2. 如图，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直，点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，$AN=\frac{1}{3}AE$．求证：MN // 平面 CDE.



解析：要证明 MN // 平面 CDE，只要证明向量 $\overrightarrow{NM}$ 可以用平面 CDE 内的两个不共线的向量 $\overrightarrow{DE}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 线性表示.

答案:证明：如图，因为 M 在 BD 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，所以

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$．同理 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，又

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$

$=(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BA}+(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$．又 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 不共线，根据共面向量定理，可知 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$ 共面．由于 MN 不在平面 CDE 内，所以 MN // 平面 CDE.

点评：空间任意的两向量都是共面的．与空间的任两条直线不一定共面要区别开.

考点二 证明空间线面平行与垂直

3. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$AA_1=4$，点 D 是 AB 的中点，（I）求证：$AC\perp BC_1$；（II）求证：AC_1//平面 CDB_1；

解析：（1）证明线线垂直方法有两类：一是通过三垂线定理或逆定理证明，二是通过线面垂直来证明线线垂直；（2）证明线面平行也有两类：一是通过线线平行得到线面平行，二是通过面面平行得到线面平行.

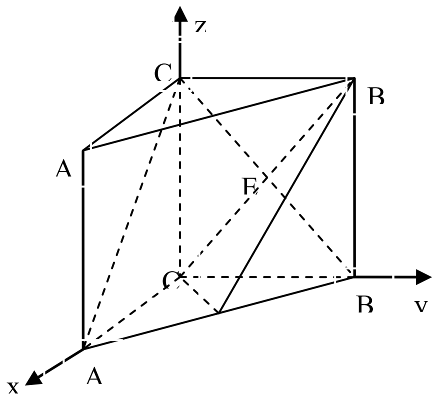
答案:解法一：（I）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面三边长 $AC=3$，$BC=4$ $AB=5$，

∴ $AC\perp BC$，且 BC_1 在平面 ABC 内的射影为 BC，∴ $AC\perp BC_1$；

（II）设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E，连结 DE，∵ D 是 AB 的中点，E 是 BC_1 的中点，

∴ DE//AC_1，∵ DE$\subset$平面 CDB_1，$AC_1\not\subset$平面 CDB_1，

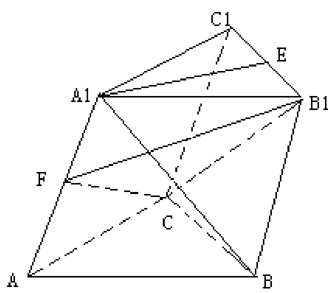
∴ AC_1//平面 CDB_1；



解法二：∵直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面三边长 $AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，∴AC、BC、C_1C 两两垂直，如图，以 C 为坐标原点，直线 CA、CB、C_1C 分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，则 C（0,0，0），A（3,0，0），C_1（0,0，4），B（0,4，0），B_1（0,4，4），D（$\frac{3}{2}$，2,0）

（1）∵ $\overrightarrow{AC}$ =（−3,0，0），$\overrightarrow{BC_1}$ =（0，−4,0），∴ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC_1}$ =0，

∴$AC\perp BC_1$.



（2）设 CB_1 与 C_1B 的交战为 E，则 E（0,2，2）. ∵ $\overrightarrow{DE}$ =（$-\frac{3}{2}$，0,2），$\overrightarrow{AC_1}$ =

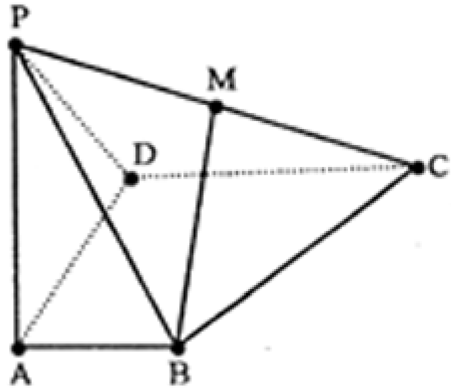
（－3, 0，4），∴ $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$，∴DE∥$AC_1$.

点评：2．平行问题的转化：

面面平行$\overset{\text{转化}}{\Longleftrightarrow}$线面平行$\overset{\text{转化}}{\Longleftrightarrow}$线线平行;

主要依据是有关的定义及判定定理和性质定理.

4.（**2007武汉3月**）如图所示，四棱锥P—ABCD中，AB⊥AD，CD⊥AD，PA⊥底面ABCD，PA=AD=CD=2AB=2，M为PC的中点。

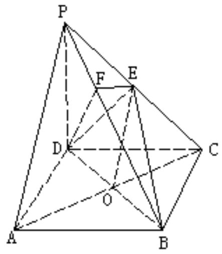


(1)求证：BM∥平面PAD;

(2)在侧面PAD内找一点N，使MN⊥平面PBD;

(3)求直线PC与平面PBD所成角的正弦。

解析：本小题考查直线与平面平行，直线与平面垂直，二面角等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力.



答案：（1）∵ M 是 PC 的中点，取PD的中点 E，则

$ME \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CD$，又 $AB \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CD$

$\therefore$ 四边形 $ABME$ 为平行四边形

$\therefore BM \parallel EA$，$BM \not\subset$ 平面PAD

$EA \subset$ 平面PAD

$\therefore BM \parallel$ 平面PAD　　（4分）

（2）以 A 为原点，以 AB、AD、AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图，则 $B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$M(1,1,1)$，$E(0,1,1)$

在平面 PAD 内设 $N(0,y,z)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,y-1,z-1)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{DB}=(1,-2,0)$　由 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{PB}$

$\therefore \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PB}=-1-2z+2=0$　　$\therefore z=\frac{1}{2}$

由 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DB}$　　$\therefore \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DB}=-1-2y+2=0$　　$\therefore y=\frac{1}{2}$

$\therefore N\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\therefore N$ 是 AE 的中点，此时 $MN\perp$ 平面PBD　　（8分）

（3）设直线 PC 与平面 PBD 所成的角为 θ

$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{MN}=\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，设 $\left\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{MN}\right\rangle$ 为 α

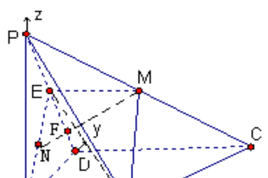
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\frac{-2}{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\qquad \sin\theta=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

故直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（12分）

解法二：

（1）∵ M 是 PC 的中点，取PD的中点 E，则

$ME \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CD$，又 $AB \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CD$



$\therefore$ 四边形 $ABME$ 为平行四边形

$\therefore BM \parallel EA$，$BM \not\subset$ 平面 PAD

$EA \subset$ 平面 PAD

$\therefore BM \parallel$ 平面 PAD　　（4 分）

（2）由（1）知 $ABME$ 为平行四边形

$PA \perp$ 底面 $ABCD$ $\therefore PA \perp AB$，又 $AB \perp AD$

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD　　同理 $CD \perp$ 平面 PAD，$AE \subset$ 平面PAD

$\therefore$ AB $\perp$ AE　　$\therefore$ ABME为矩形　　CD $\parallel$ ME，CD $\perp$ PD，又 PD $\perp$ AE

$\therefore$ ME $\perp PD$　　$\therefore PD \perp$ 平面ABME　　$PD \subset$ 平面 PBD

$\therefore$ 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABME$　　作 MF $\perp EB$ 故 MF $\perp$ 平面 PBD

MF 交 AE 于 N，在矩形 $ABME$ 内，$AB = ME = 1$，$AE = \sqrt{2}$

$\therefore MF = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$NE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　N 为 AE 的中点

$\therefore$ 当点 N 为 AE 的中点时，$MN \perp$ 平面PBD　　（8 分）

（3）由（2）知 MF 为点 M 到平面 PBD 的距离，$\angle MPF$ 为直线 PC 与平面 PBD 所成的角，设为 θ，

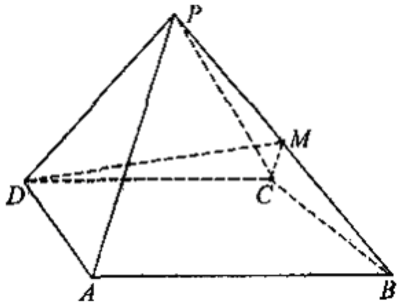
$$\sin\theta = \frac{MF}{MP} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$ 直线 PC 与平面 PBD 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

点评：（1）证明线面平行只需证明直线与平面内一条直线平行即可；（2）求斜线与平面所成的角只需在斜线上找一点作已知平面的垂线，斜线和射影所成的角，即为所求角；（3）证明线面垂直只需证此直线与平面内两条相交直线垂直变可. 这些从证法中都能十分明显地体现出来

考点三 求空间图形中的角与距离

根据定义找出或作出所求的角与距离，然后通过解三角形等方法求值，注意“作、证、算”的有机统一. 解题时注意各种角的范围：异面直线所成角的范围是 0°＜θ≤90°，其方法是平移法和补形法；直线与平面所成角的范围是 0°≤θ≤90°，其解法是作垂线、找射影；二面角 0°≤θ≤180°，其方法是：①定义法；②三垂线定理及其逆定理；③垂面法，另外也可借助空间向量求这三种角的大小.



5.（**四川省成都市 2007 届高中毕业班第三次诊断性检测**）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PDC 是边长为 2 的正三角形，且与底面垂直，底面 $ABCD$ 是 $\angle ADC = 60^\circ$ 的菱形，M 为 PB 的中点.

(Ⅰ)求 PA 与底面 $ABCD$ 所成角的大小；

(Ⅱ)求证：$PA \perp$ 平面 CDM；

(Ⅲ)求二面角 $D-MC-B$ 的余弦值.

解析：求线面角关键是作垂线，找射影，求异面直线所成的角采用平移法，求二面角的大小也可应用面积射影法，比较好的方法是向量法.

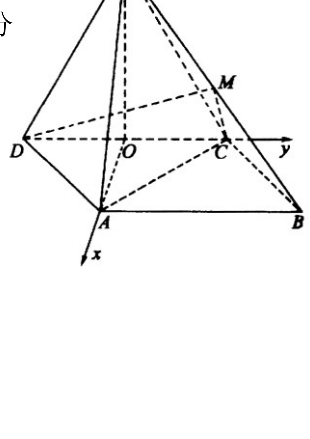
答案：(I)取 DC 的中点 O，由 ΔPDC 是正三角形，有 $PO \perp DC$.

又∵平面 $PDC \perp$ 底面 $ABCD$，∴$PO \perp$ 平面 $ABCD$ 于 O.

连结 OA，则 OA 是 PA 在底面上的射影．∴$\angle PAO$ 就是 PA 与底面所成角.

∵$\angle ADC$=60°，由已知 ΔPCD 和 ΔACD 是全等的正三角形，从而求得 $OA=OP=\sqrt{3}$.

∴$\angle PAO$=45°．∴PA 与底面 $ABCD$ 可成角的大小为 45°.　　……6 分



(II)由底面 $ABCD$ 为菱形且 $\angle ADC$=60°，DC=2，DO=1，有 $OA \perp DC$.

建立空间直角坐标系如图，则 $A(\sqrt{3},0,0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$, $D(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},2,0)$, $C(0,1,0)$.

由 M 为 PB 中点，∴$M(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

∴$\overrightarrow{DM}=(\frac{\sqrt{3}}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+2\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})=0$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{DC}=0\times\sqrt{3}+2\times0+0\times(-\sqrt{3})=0$.

∴$PA\perp DM$，$PA\perp DC$.　　∴$PA\perp$平面 DMC.　　……4 分

(III) $\overrightarrow{CM}=(\frac{[illegible]}{2},0,\frac{[illegible]}{2})$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},1,0)$．令平面 BMC 的法向量 [illegible] $z)$，

则 [illegible]，从而 $x+z=0$；　……①，　[illegible]，从而 $\sqrt{3}x+y=0$．　……②

由①、②，取 $x=-1$，则 $y=\sqrt{3},\ z=1$．　∴可取 [illegible] $\sqrt{3},1)$．

由(II)知平面 CDM 的法向量可取 $\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，

∴ $\cos<$ [illegible] $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$．　∴所求二面角的余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{5}$．　……6 分

法二：（Ⅰ）方法同上

（Ⅱ）取 AP 的中点 N，连接 MN，由（Ⅰ）知，在菱形 $ABCD$ 中，由于 $\angle ADC=60^\circ$，

则 $AO\perp CD$，又 $PO\perp CD$，则 $CD\perp$平面APO，即 $CD\perp PA$，

又在 ΔPAB 中，中位线 $MN \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AB$，$CO \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AB$，则 $MN \underline{\underline{//}} CO$，

则四边形 $OCMN$ 为▱，所以 $MC // ON$，在 ΔAPO 中，$AO=PO$，

则 $ON\perp AP$，故 $AP\perp MC$ 而 $MC\cap$ 　　　　，

则 $PA\perp$平面MCD

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 $MC\perp$平面PAB，则 $\angle NMB$ 为二面角 $D-MC-B$ 的平面角，

在 $Rt\ \Delta PAB$ 中，易得 $PA=\sqrt{6},\ PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{\sqrt{6}^2+2^2}=\sqrt{10}$，$\cos\angle PBA=\frac{AB}{PB}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

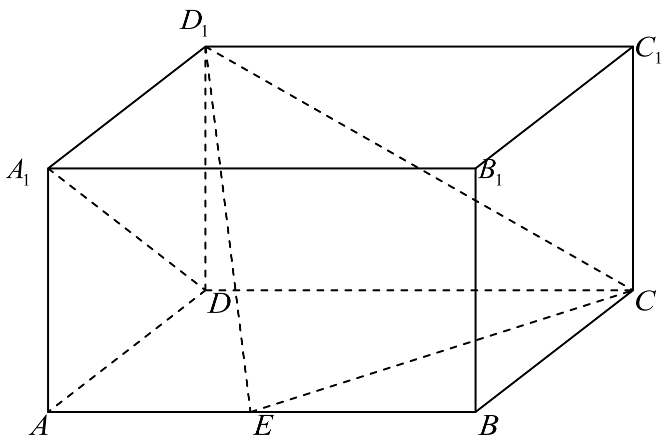
$\cos\angle NMB=\cos(\pi-\angle PBA)=-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 故，所求二面角的余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{5}$

点评：本题主要考查异面直线所成的角、线面角及二面角的一般求法，综合性较强． 用平移法求异面直线所成的角，利用三垂线定理求作二面角的平面角，是常用的方法.

6. （**2007 河北省唐山市三模**）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1$, $AB=2$, 点 E 在线段 AB 上.

（Ⅰ）求异面直线 D_1E 与 A_1D 所成的角；

（Ⅱ）若二面角 D_1-EC-D 的大小为 $45°$，求点 B 到平面 D_1EC 的距离.



解析：本题涉及立体几何线面关系的有关知识，本题实质上求角度和距离，在求此类问题中，要将这些量归结到三角形中，最好是直角三角形，这样有利于问题的解决，此外用向量也是一种比较好的方法.

答案：解法一：（Ⅰ）连结 AD_1。由已知，AA_1D_1D 是正方形，有 $AD_1\perp A_1D$。

∵ $AB\perp$平面 AA_1D_1D，∴ AD_1 是 D_1E 在平面 AA_1D_1D 内的射影。

根据三垂线定理，$AD_1\perp D_1E$ 得，则异面直线 D_1E 与 A_1D 所成的角为 $90°$。

作 $DF\perp CE$，垂足为 F，连结 D_1F，则 $CE\perp D_1F$

所以$\angle DFD_1$为二面角D_1-EC-D的平面角，$\angle DFD_1=45°$.

于是$DF=DD_1=1, D_1F=\sqrt{2}$

易得$\mathrm{Rt}\,\Delta BCE\cong\mathrm{Rt}\,\Delta CDF$，所以$CE=CD=2$，又$BC=1$，所以$BE=\sqrt{3}$。

设点B到平面D_1EC的距离为h.

$\because V_{B-CED_1}=V_{D-BCE}$,即$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}CE\cdot D_1F\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BE\cdot BC\cdot DD_1$，

$\therefore CE\cdot D_1F\cdot h=BE\cdot BC\cdot DD_1$，即$2\sqrt{2}h=\sqrt{3}$，$\therefore h=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故点B到平面D_1EC的距离为$\frac{\sqrt{6}}{4}$。

解法二：分别以DA, DB, DD_1为x轴、y轴、z轴，建立空间直角坐标系.

（Ⅰ）由$A_1(1,0,1)$，得$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$

设$E(1,a,0)$，又$D_1(0,0,1)$，则$\overrightarrow{D_1E}=(1,a,-1)$。

$\because \overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{D_1E}=1+0-1=0$ $\therefore \overrightarrow{DA_1}\perp\overrightarrow{D_1E}$

则异面直线D_1E与A_1D所成的角为$90°$。

（Ⅱ）$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$为面DEC的法向量，设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为面CED_1的法向量，则

$$\boldsymbol{n}=(x,y,z)\ |\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore z^2=x^2+y^2$.　　　　　　①

由$C(0,2,0)$，得$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,-1)$，则$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{D_1C}$，即$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0$

$\therefore 2y-z=0$　　　　　　②

由①、②，可取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,2)$

又$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，所以点$B$到平面$D_1EC$的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$。

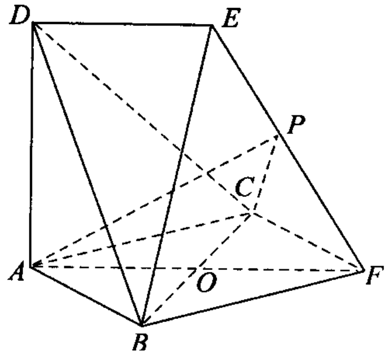
点评：立体几何的内容就是空间的判断、推理、证明、角度和距离、面积与体积的计算，这是立体几何的重点内容，本题实质上求角度和距离，在求此类问题中，尽量要将这些量归结于三角形中，最好是直角三角形，这样计算起来，比较简单，此外用向量也是一种比较好的方法，不过建系一定要恰当，这样坐标才比较容易写出来.

考点四 探索性问题

7. （2007 年 4 月济南市）如图所示：边长为 2 的正方形 *ABFC* 和高为 2 的直角梯形 *ADEF* 所在的平面互相垂直且 $DE=\sqrt{2}$，*ED//AF* 且∠*DAF*=90°。

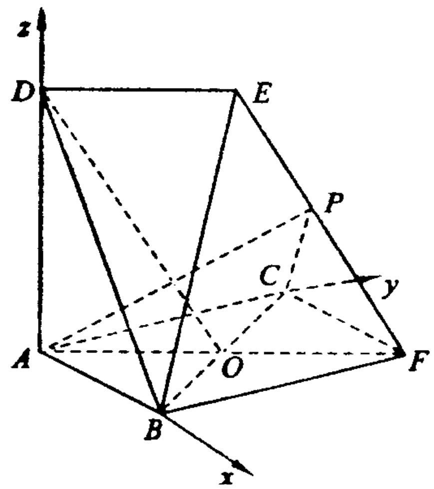
（1）求 *BD* 和面 *BEF* 所成的角的余弦；

（2）线段 *EF* 上是否存在点 *P* 使过 *P*、*A*、*C* 三点的平面和直线 *DB* 垂直，若存在，求 *EP* 与 *PF* 的比值；若不存在，说明理由。



解析：1.先假设存在，再去推理，下结论： 2.运用推理证明计算得出结论，或先利用条件特例得出结论，然后再根据条件给出证明或计算。

答案：（1）因为 AC、AD、AB 两两垂直，建立如图坐标系，



则 B（2，0，0），D（0，0，2），

E（1，1，2），F（2，2，0），

则 $\overrightarrow{DB}=(2,0,0),\overrightarrow{BE}=(-1,1,2),\overrightarrow{BF}=(0,2,0)$

设平面 *BEF* 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z),$则$-x$

$+y+2z=0,y=0$，则可取 $\vec{n}=(2,1,0)$，

$\therefore$向量$\overrightarrow{DB}$和$\vec{n}=(2,0,1)$所成角的余弦为

$$\frac{2\cdot 2+0-2}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}。$$

即 BD 和面 BEF 所成的角的余弦 $\frac{\sqrt{10}}{10}$。

（2）假设线段 EF 上存在点 P 使过 P、A、C 三点的平面和直线 DB 垂直，不妨设 EP 与 *PF* 的比值为 *m*，则 *P* 点坐标为 $(\frac{1+2m}{1+m},\frac{1+2m}{1+m},\frac{2}{1+m})$,

则向量 $\overrightarrow{AP}=(\frac{1+2m}{1+m},\frac{1+2m}{1+m},\frac{2}{1+m}),$，向量 $\overrightarrow{CP}=(\frac{1+2m}{1+m},-\frac{1}{1+m},\frac{2}{1+m}),$

所以 $2\frac{1+2m}{1+m}+0\frac{1+2m}{1+m}+(-2)\frac{2}{1+m}=0,$所以$m=\frac{1}{2}$。

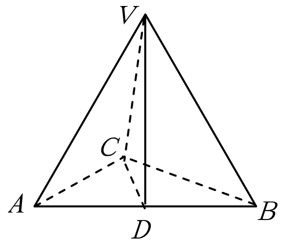
点评：本题考查了线线关系，线面关系及其相关计算，本题采用探索式、开放式设问方式，对学生灵活运用知识解题提出了较高要求。

8. (2007 安徽·文) 如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VC\perp$底面ABC，$AC\perp BC$，D 是 AB 的中点，且 $AC=BC=a$，

$\angle VDC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

（I）求证：平面$VAB\perp$平面VCD；

（II）试确定角θ的值，使得直线BC与平面VAB所成的角为$\frac{\pi}{6}$.



解析: 本例可利用综合法证明求解，也可用向量法求解.

答案:解法 1：（Ⅰ）∵$AC=BC=a$，∴$\triangle ACB$是等腰三角形，又D是AB的中点，

∴$CD\perp AB$，又$VC\perp$底面ABC．∴$VC\perp AB$．于是$AB\perp$平面VCD.

又$AB\subset$平面VAB，∴平面$VAB\perp$平面VCD.

（Ⅱ） 过点C在平面VCD内作$CH\perp VD$于H，则由（Ⅰ）知$CD\perp$平面VAB.

连接BH，于是$\angle CBH$就是直线BC与平面VAB所成的角.

依题意$\angle CBH=\frac{\pi}{6}$，所以

在$\mathbf{Rt}\triangle CHD$中，$CH=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\theta$；

在$\mathbf{Rt}\triangle BHC$中，$CH=a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2}$，

∴$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，∴$\theta=\frac{\pi}{4}$.

故当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，直线BC与平面VAB所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

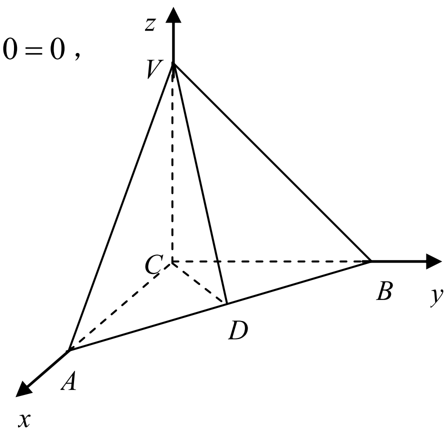
解法 2：（Ⅰ）以CA，CB，CV所在的直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$C(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，$D\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$V\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，

于是，$\overrightarrow{VD}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,a,0)$.

从而$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-a,a,0)\cdot\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+0=0$，即$AB\perp CD$.

同理$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{VD}=(-a,a,0)\cdot\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+0=0$，



即$AB\perp VD$．又$CD\cap$ ，∴$AB\perp$平面VCD.

又$AB\subset$平面VAB.

∴平面$VAB\perp$平面VCD.

（Ⅱ）设平面VAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{VD}=0$.

得$\begin{cases}-ax+ay=0,\\ \dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2}\cot\theta)$，又$\overrightarrow{DC}=(0,-a,0)$，

于是$\sin\dfrac{\pi}{6}=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}\right|=\dfrac{a}{a\cdot\sqrt{2+2\cot^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

即$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

故交$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，直线BC与平面VAB所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$.

解法3：（Ⅰ）以点D为原点，以DC，DB所在的直线分别为x轴、y轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则$D(0,0,0)$，$A\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$V\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，

于是$\overrightarrow{DV}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2}a,0)$.

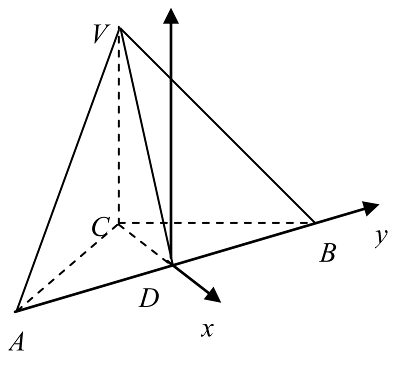
从而$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{2}a,0)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)=0$，即$AB\perp DC$.

同理$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DV}=(0,\sqrt{2}a,0)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=0$，即$AB\perp DV$.

又$DC\cap$ ），　$\therefore AB\perp$平面VCD.

又$AB\subset$平面VAB，　$\therefore$平面$VAB\perp$平面VCD.

（Ⅱ）设平面VAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，



则由$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DV}=0$，得$\begin{cases}\sqrt{2}ay=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax+\dfrac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$

可取$n=(\tan\theta,0,1)$，又$\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，

于是$\sin\dfrac{\pi}{6}=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta}{a\cdot\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

即$\sin\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.　　故角$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，

即直线BC与平面VAB所成角为$\dfrac{\pi}{6}$.

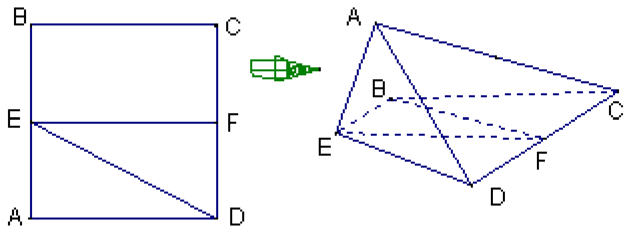
点评：证明两平面垂直一般用面面垂直的判定定理，求线面角一是找线在平面上的射影在直角三角形中求解，

但运用更多的是建空间直角坐标系,利用向量法求解

考点五 折叠、展开问题

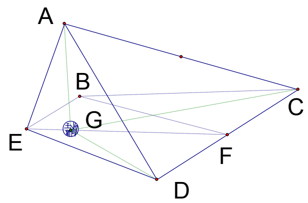
9. （2006 年辽宁高考）已知正方形 $ABCD$． E、F 分别是 AB、CD 的中点,将△ 沿 DE 折起,如图所示,记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 $\theta(0<\theta<\pi)$．

(I) 证明 BF // 平面 ADE；



(II)若△ 为正三角形,试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上,证明你的结论,并求角 θ 的余弦值.

分析:充分发挥空间想像能力，重点抓住不变的位置和数量关系，借助模型图形得出结论，并给出证明.



解: (I)证明:EF 分别为正方形 ABCD 得边 AB、CD 的中点,

∴EB//FD,且 EB=FD,

∴四边形 EBFD 为平行四边形.

∴BF//ED.

∵ 平面AED,而$BF\not\subset$平面AED,∴ BF // 平面 ADE.

(II)如右图,点 A 在平面 BCDE 内的射影 G 在直线 EF 上,过点 A 作 AG 垂直于平面 BCDE,垂足为 G,连结 GC,GD.

∵ΔACD 为正三角形,∴AC=AD.

∴CG=GD.

∵G 在 CD 的垂直平分线上, ∴点 A 在平面 BCDE 内的射影 G 在直线 EF 上,

过 G 作 GH 垂直于 ED 于 H,连结 AH,则 $AH\perp DE$,所以 $\angle AHD$ 为二面角 A-DE-C 的平面角. 即 $\angle AHG=\theta$.

设原正方体的边长为 2a,连结 AF,在折后图的ΔAEF 中,AF= $\sqrt{3}a$,EF=2AE=2a,即ΔAEF 为直角三角形, $AG\cdot EF=AE\cdot AF$.

$\therefore AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 在 RtΔADE 中, $AH\cdot DE=AE\cdot AD\ \therefore AH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$.

$\therefore GH=\dfrac{a}{2\sqrt{5}},\cos\theta=\dfrac{GH}{AH}=\dfrac{1}{4}$.

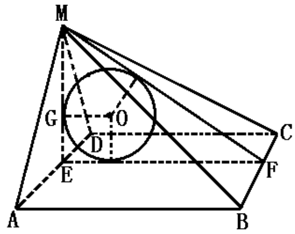
点评: 在平面图形翻折成空间图形的这类折叠问题中，一般来说，位于同一平面内的几何元素相对位置和数量关系不变：位于两个不同平面内的元素，位置和数量关系要发生变化，翻折问题常用的添辅助线的方法是作棱的垂线。关键要抓不变的量.

考点六 球体与多面体的组合问题

10. 设棱锥 M-ABCD 的底面是正方形，且 MA＝MD，MA⊥AB，如果ΔAMD 的面积为 1，试求能够放入这

个棱锥的最大球的半径.

分析：关键是找出球心所在的三角形，求出内切圆半径.



解： ∵AB⊥AD，AB⊥MA，

∴AB⊥平面 MAD，

由此，面 MAD⊥面 AC.

记 E 是 AD 的中点，从而 ME⊥AD.

∴ME⊥平面 AC，ME⊥EF.

设球 O 是与平面 MAD、平面 AC、平面 MBC 都相切的球.

不妨设 O∈平面 MEF，于是 O 是Δ MEF 的内心.

设球 O 的半径为 r，则 r＝$\dfrac{2S_{\triangle MEF}}{EF+EM+MF}$

设 AD＝EF＝a,∵$S_{\Delta AMD}$＝1.

∴ME＝$\dfrac{2}{a}$. MF＝$\sqrt{a^2+(\dfrac{2}{a})^2}$，

r＝$\dfrac{2}{a+\dfrac{2}{a}+\sqrt{a^2+(\dfrac{2}{a})^2}}\leqslant\dfrac{2}{2+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ -1。

当且仅当 a＝$\dfrac{2}{a}$，即 a＝$\sqrt{2}$ 时，等号成立.

∴当 AD＝ME＝$\sqrt{2}$ 时，满足条件的球最大半径为 $\sqrt{2}$ -1.

点评：涉及球与棱柱、棱锥的切接问题时一般过球心及多面体中的特殊点或线作截面，把空间问题化归为平面问题，再利用平面几何知识寻找几何体中元素间的关系。注意多边形内切圆半径与面积和周长间的关系；多面体内切球半径与体积和表面积间的关系。

二、 方法总结 高考预测

（一）方法总结

1．位置关系：

（1）．两条异面直线相互垂直

证明方法：①证明两条异面直线所成角为 90º；②证明两条异面直线的方向量相互垂直。

（2）．直线和平面相互平行

证明方法：①证明直线和这个平面内的一条直线相互平行；②证明这条直线的方向向量和这个平面内的一个向量相互平行；③证明这条直线的方向向量和这个平面的法向量相互垂直。

（3）．直线和平面垂直

证明方法：①证明直线和平面内两条相交直线都垂直，②证明直线的方向量与这个平面内不共线的两个向量都垂直；③证明直线的方向量与这个平面的法向量相互平行。

（4）．平面和平面相互垂直

证明方法：①证明这两个平面所成二面角的平面角为 90º；②证明一个平面内的一条直线垂直于另外一个平面；③证明两个平面的法向量相互垂直。

2．求距离：

求距离的重点在点到平面的距离，直线到平面的距离和两个平面的距离可以转化成点到平面的距离，一个点到平面的距离也可以转化成另外一个点到这个平面的距离。

（1）．两条异面直线的距离

求法：利用公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$（其中 A、B 分别为两条异面直线上的一点，$\vec{n}$ 为这两条异面直线的法向量）

（2）．点到平面的距离

求法：①“一找二证三求”，三步都必须要清楚地写出来。②等体积法。③向量法，利用公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$（其中 A 为已知点，B 为这个平面内的任意一点，$\vec{n}$ 这个平面的法向量）

3．求角

（1）．两条异面直线所成的角

求法：①先通过其中一条直线或者两条直线的平移，找出这两条异面直线所成的角，然后通过解三角形去求得；②通过两条异面直线的方向量所成的角来求得，但是注意到异面直线所成角得范围是 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$，向量所成的角范围是 $[0,\pi]$，如果求出的是钝角，要注意转化成相应的锐角。

（2）．直线和平面所成的角

求法：①“一找二证三求”，三步都必须要清楚地写出来。②向量法，先求直线的方向量于平面的法向量所成的角α，那么所要求的角为 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 或 $\alpha-\dfrac{\pi}{2}$。

（3）．平面与平面所成的角

求法：①“一找二证三求”，找出这个二面角的平面角，然后再来证明我们找出来的这个角是我们要求的二面角的平面角，最后就通过解三角形来求。②通过射影面积来求 $\cos\alpha=\dfrac{S_{射影}}{S_{原}}$（在其中一个平面内找出一个三角形，然后找这个三角形在另外一个平面的射影，那么这个三角形的射影面积与原三角形面积之比即为 cosα，注意到我们要求的角为α 或π －α）；③向量法，先求两个平面的法向量所成的角为α，那么这两个平面所成的二面角的平面角为α 或π －α。

我们现在来解决立体几何的有关问题的时候，注意到向量知识的应用，如果可以比较容易建立坐标系，找出各点的坐标，那么剩下的问题基本上就可以解决了，如果建立坐标系不好做的话，有时求距离、角的时候也可以用向量，运用向量不是很方便的时候，就用传统的方法了！

4．解题注意点

（1）．我们现在提倡用向量来解决立体几何的有关问题，但是当运用向量不是很方便的时候，传统的解法我们也要能够运用自如。

（2）．我们如果是通过解三角形去求角、距离的时候，做到“一找二证三求”，解题的过程中一定要出现这样一句话，“∠α 是我们所要求的角”、“线段 AB 的长度就是我们所要求的距离”等等。让人看起来一目了然。

（3）．用向量来求两条异面直线所成角时，若求出 $\cos\alpha=x$，则这两条异面直线所成的角为 $\alpha=\arccos|x|$

（4）．在求直线与平面所成的角的时候，法向量与直线方向量所成的角或者法向量与直线的方向量所成角的补交与我们所要求的角互余，所以要 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 或 $\alpha-\frac{\pi}{2}$，若求出的角为锐角，就用 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，若求出的钝角，就用 $\alpha-\frac{\pi}{2}$。

（5）．求二面角时，若用第②、③种方法，先要去判断这个二面角的平面角是钝角还是锐角，然后再根据我们所作出的判断去取舍。

（二）2008 年高考预测

从近几年各地高考试题分析，立体几何题型一般是一个解答题，1 至 3 个填空或选择题．解答题一般与棱柱和棱锥相关，主要考查线线关系、线面关系和面面关系，其重点是考查空间想象能力和推理运算能力，其解题方法一般都有二种以上，并且一般都能用空间向量来求解．高考试题中，立体几何侧重考查学生的空间概念、逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力．近几年凡涉及空间向量应用于立体几何的高考试题，都着重考查应用空间向量求异面直线所成的角、二面角，证明线线平行、线面平行和证明异面直线垂直和线面垂直等基本问题。

高考对立体几何的考查侧重以下几个方面：

1．从命题形式来看，涉及立体几何内容的命题形式最为多变．除保留传统的“四选一”的选择题型外，还尝试开发了“多选填空”、“完型填空”、“构造填空”等题型，并且这种命题形式正在不断完善和翻新；解答题则设计成几个小问题，此类考题往往以多面体为依托，第一小问考查线线、线面、面面的位置关系，后面几问考查空间角、空间距离、面积、体积等度量关系，其解题思路也都是“作——证——求”，强调作图、证明和计算相结合。

2．从内容上来看，主要是：①考查直线和平面的各种位置关系的判定和性质，这类试题一般难度不大，多为选择题和填空题；②计算角的问题，试题中常见的是异面直线所成的角，直线与平面所成的角，平面与平面所成的二面角，这类试题有一定的难度和需要一定的解题技巧，通常要把它们转化为相交直线所成的角；③求距离，试题中常见的是点与点之间的距离，点到直线的距离，点到平面的距离，直线与直线的距离，直线到平面的距离，要特别注意解决此类问题的转化方法；④简单的几何体的侧面积和表面积问题，解此类问题除特殊几何体的现成的公式外，还可将侧面展开，转化为求平面图形的面积问题；⑤体积问题，要注意解题技巧，如等积变换、割补思想的应用。

3．从方法上来看，着重考查公理化方法，如解答题注重理论推导和计算相集合；考查转化的思想方法，如经常要把立体几何问题转化为平面几何问题来解决；考查模型化方法和整体考虑问题、处理问题的方法，如有时把形体纳入不同的几何背景之中，从而宏观上把握形体，巧妙地把问题解决；考查割补法、等积变换法，

以及变化运动的思想方法，极限方法等。

4．从能力上来看，着重考查空间想象能力，即空间形体的观察分析和抽象的能力，要求是“四会”：①会画图——根据题设条件画出适合题意的图形或画出自己想作的辅助线(面)，作出的图形要直观、虚实分明；②会识图——根据题目给出的图形，想象出立体的形状和有关线面的位置关系；③会析图——对图形进行必要的分解、组合；④会用图——对图形或其某部分进行平移、翻折、旋转、展开或实行割补术；考查逻辑思维能力、运算能力和探索能力。

三、　强化训练

（一） 选择题

1. 定点 P 不在△ABC 所在平面内，过 P 作平面α，使△ABC 的三个顶点到α 的距离相等，这样的平面共有　　　　　（　）

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

2. P 为矩形 ABCD 所在平面外一点，且 PA⊥平面 ABCD，P 到 B，C，D 三点的距离分别是 $\sqrt{5}$，$\sqrt{17}$，$\sqrt{13}$，则 P 到 A 点的距离是　　　　　（　）

（A）1　（B）2　（C）$\sqrt{3}$　（D）4

3. 直角三角形 ABC 的斜边 AB 在平面α 内，直角顶点 C 在平面α 外，C 在平面α 内的射影为 C_1，且 $C_1 \notin AB$，则△C_1AB 为　　　　　（　）

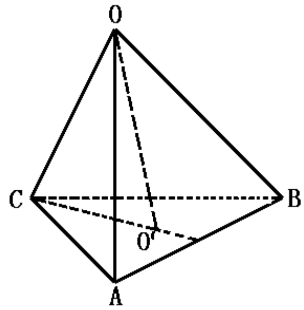
（A）锐角三角形　（B）直角三角形　（C）钝角三角形　（D）以上都不对

4. 已知四点，无三点共线，则可以确定(　　)

A. 1 个平面　B. 4 个平面　C. 1 个或 4 个平面　D. 无法确定

5. 已知球的两个平行截面的面积分别为 5π 和 8π，它们位于球心的同一侧且相距是 1，那么这个球的半径是(　　)

A. 4　B. 3　C. 2　D. 5



6. 球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$，经过 3 个点的小圆的周长为 4π，那么这个球的半径为(　　)

A. $4\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$　C. 2　D. $\sqrt{3}$

7. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被以 A 为球心，AB 为半径的球相截，则被截形体的表面积为（　　）

A. $\frac{5}{4}\pi$　B. $\frac{7}{8}\pi$　C. π　D. $\frac{7}{4}\pi$

8. 某刺猬有 2006 根刺，当它蜷缩成球时滚到平面上，任意相邻的三根刺都可支撑住身体，且任意四根刺的刺尖不共面，问该刺猬蜷缩成球时，共有（　　）种不同的支撑身体的方式。

A. 2006　B. 4008　C. 4012　D. 2008

9. 命题①空间直线 a，b，c，若 a∥b，b∥c 则 a∥c　②非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{b}\parallel\vec{c}$ 则 $\vec{a}\parallel\vec{c}$

③平面 α、β、γ 若 α⊥β，β⊥γ，则 α∥γ　④空间直线 a、b、c 若有 a⊥b，b⊥c，则 a∥c

⑤直线 a、b 与平面 β，若 a⊥β，c⊥β，则 a∥c　其中所有真命题的序号是（　）

A. ①②③　B. ①③⑤　C. ①②⑤　D. ②③⑤

10．在正三棱锥中，相邻两侧面所成二面角的取值范围是（　　）

A、（$\frac{\pi}{3}$，π）　　　B、（$\frac{2\pi}{3}$，π）　　　C、（0，$\frac{\pi}{2}$）　　　D、（$\frac{\pi}{3}$,$\frac{2\pi}{3}$）

11．一正四棱锥的高为 $2\sqrt{2}$，侧棱与底面所成的角为 45°，则这一正四棱锥的斜高等于（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　　B．$2\sqrt{3}$　　　C．$4\sqrt{3}$　　　D．$2\sqrt{2}$

12．以正方体的任意三个顶点为顶点作三角形，从中随机地取出两个三角形，则这两个三角形不共面的概率为（　　）

A．$\frac{367}{385}$　　B．$\frac{376}{385}$　C．$\frac{192}{385}$　D．$\frac{18}{385}$

1—12 解答

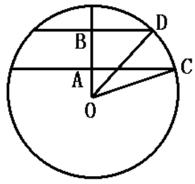
1．【答案】D 解析： 过 P 作一个与 AB，AC 都平行的平面，则它符合要求；设边 AB，BC，CA 的中点分别为 E，F，G，则平面 PEF 符合要求；同理平面 PFG，平面 PGE 符合要求

2．【答案】A 解析：设 AB＝a，BC＝b，PA＝h，则 $a^2+h^2=5, b^2+h^2=13, a^2+b^2+h^2=17$,∴h=1.

3．【答案】C 解析：∵$C_1A^2+C_1B^2<CA^2+CB^2$ ＝AB, ∴∠AC_1B 为钝角，则△C_1AB 为钝角三角形.

4．【答案】C.解析： 因为无三点共线，所以任意三个点都可以确定平面α，若第四个点也在α 内，四个点确定一个平面，当第四个点在α 外，由公理 3 知可确定 4 个平面.故选 C.

5.【答案】B 解析： 如图，设球的半径是 r，则π BD^2＝5π，π AC^2＝8π，



∴BD^2＝5，AC^2＝8.又 AB＝1，设 OA＝x.

∴$x^2+8=r^2$, $(x+1)^2+5=r^2$.

解之，得 r＝3

故选 B.

6.【答案】B 解析： 设球半径为 R，小圆半径为 r，则 2π r＝4π，∴r＝2.如图，设三点 A、B、C，O 为球心，∠AOB＝∠BOC＝∠COA＝$\frac{\pi}{3}$，又∵OA＝OB

∴Δ AOB 是等边三角形

同理，Δ BOC、Δ COA 都是等边三角形，得Δ ABC 为等边三角形.

边长等于球半径 R，r 为Δ ABC 的外接圆半径.

$$r=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}R$$

$$R=\frac{3}{\sqrt{3}}r=2\sqrt{3}$$

∴应选 B.

7．【答案】A．解析：$S=\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2\times 3+\frac{1}{8}\times 4\pi \cdot 1^2=\frac{5}{4}\pi$。

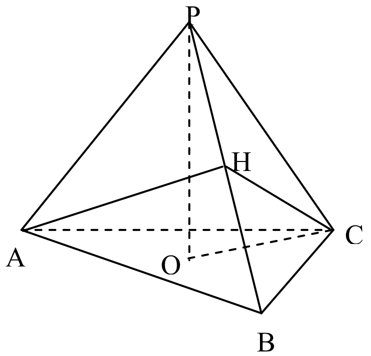
8．【答案】B．解析：当有 n 根刺时有 a_n 种支撑法，n＝4，5， 6，… ，则 $a_{n+1}=a_n+3-1=a_n+2$ 或 $a_{n+1}=a_n+4-2=a_n+2$，∴$\{a_n\}$n ＝ 4，5，6，…， 为等差数列，∵a_4 ＝ 4∴$a_n=2n-4$，$A_{2006}=4008$ 。

9．【答案】C．解析：由传递性知①②正确；由线面垂直性质知⑤正确；由空间直角坐标系中三坐标平面关系否定③；三坐标轴关系否定④。

10．【答案】A．解析：法一：考察正三棱锥 P–ABC，O 为底面中心，不妨将底面正△ABC 固定，顶点 P 运动，相邻两侧面所成二面角为∠AHC.

当 PO→0 时，面 PAB→△OAB，面 PBC→△OBC，∠AHC→π

当 PO→+∞时，∠AHC→∠ABC=$\frac{\pi}{3}$． 故$\frac{\pi}{3}$<∠AHC <π，选 A.



法二：不妨设 AB=2，PC= x，则 $x > OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

等腰△PBC 中，$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}x \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2-1} \Rightarrow CH = 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

等腰△AHC 中，$\sin\frac{\angle AHC}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{CH} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

由 $x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 得 $\frac{1}{2} < \sin\frac{\angle AHC}{2} <1$，∴ $\frac{\pi}{6} < \frac{\angle AHC}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \angle AHC < \pi$.

11．【答案】B．解析：由已知得底面对角线的一半为 $2\sqrt{2}$，所以底面边长的一半等于 2，由勾股定得斜高为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}$.

12．【答案】A 解析：此问题可以分解成五个小问题：

（1）由正方体的八个顶点可以组成$c_8^3 = 56$个三角形；

（2）正方体八个顶点中四点共面有 12 个平面；

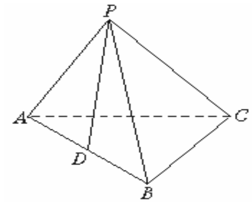
（3）在上述 12 个平面中每个四边形中共面的三角形有 $c_4^2 = 4$ 个；

（4）从 56 个三角形中任取两个三角形共面的概率 $p = \frac{12c_4^2}{c_{56}^3} = \frac{18}{358}$；

（5）从 56 个三角形中任取两个三角形不共面的概率，利用对立事件的概率的公式，得 $P = 1 - \frac{18}{385} = \frac{367}{385}$;故选 A.

（二） 填空题

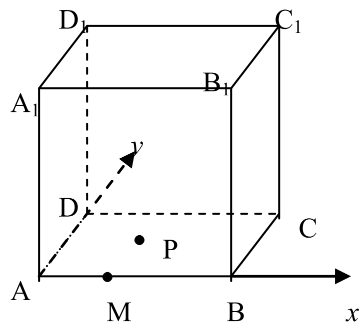
13．在三棱锥 P—ABC 中，底面是边长为 2 cm 的正三角形，PA＝PB＝3 cm，转动点 P 时，三棱锥的最大体积为______.



14．P 为ΔABC所在平面外一点，PA、PB、PC 与平面 ABC 所的角均相等，又 PA 与 BC 垂直，那么ΔABC的形状可以是_______。①正三角形②等腰三角形③非等腰三角形④等腰直角三角形

15．将边长为 3 的正四面体以各顶点为顶点各截去(使截面平行于底面)边长为 1 的小正四面体，所得几何体的表面积为_____________ .

16．如图，正方体 ABCD−$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 M 在 A 上，且 AM=$\frac{1}{3}$AB，点 P 在平面 ABCD 上，且动点 P 到直线 A_1D_1 的距离的平方与 P 到点 M 的距离的平方差为 1，在平面直角坐标系 xAy 中，动点 P 的轨迹方程是____________________.



13—16 解答

13. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm^3.解析:点 P 到面 ABC 距离最大时体积最大，此时面 PAB⊥面 ABC，

高 PD=2$\sqrt{2}$ cm．V=$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm^3.

14．由题意可知ΔABC的外心在 BC 边的高线上，故一定有 AB=AC 选（1）（2）（4）。

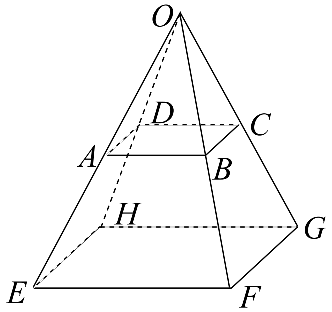
15．$7\sqrt{3}$.解析：原四个顶点截去后剩下截面为边长为 1 的正三角形，而原四面体的四个侧面变为边长为 1 的正六边形，其表积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}+4\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3}$.

16．$y^2=\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}$。解析：过 P 点作 PQ⊥AD 于 Q，再过 Q 作 QH⊥A_1D_1于 H，连 PH，利用三垂线定理可证 PH⊥A_1D_1. 设 P（x，y），∵$|PH|^2-|PH|^2=1$，∴$x^2+1-[(x-\frac{1}{3})^2+y^2]=1$，化简得 $y^2=\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}$.

（三） 解答题

17. 已知▱　　　，从平面 AC 外一点 O 引向量

$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}$，



（1）求证：四点 E,F,G,H 共面；

（2）平面 AC // 平面 EG .

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

∵$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}$，

$=k\cdot$

$=k($ $D-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OE}$

$=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$

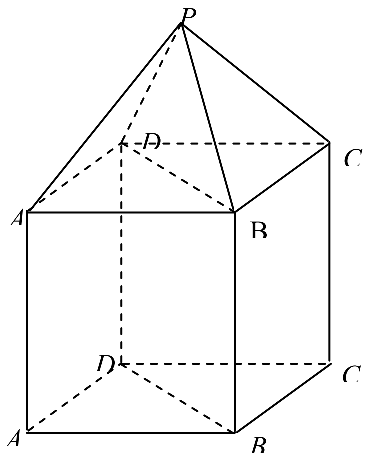
∴ E,F,G,H 共面；

（2）∵$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\cdot\overrightarrow{AB}$，又∵$\overrightarrow{EG}=k\cdot\overrightarrow{AC}$，

∴ $EF // AB, EG // AC$

所以，平面 AC // 平面 EG .

18. 如图，$P-ABCD$ 是正四棱锥，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，其中 $AB=2,PA=\sqrt{6}$.



第19题

（Ⅰ）求证：$PA\perp B_1D_1$；

（Ⅱ）求平面 PAD 与平面 BDD_1B_1 所成的锐二面角 θ 的大小；

(Ⅲ) 求 B_1 到平面 PAD 的距离.

解：(Ⅰ) 连结 AC，交 BD 于点 O，连结 PO，则 PO⊥面 ABCD，又∵ $AC\perp BD$，∴ $PA\perp BD$，∵ $BD // B_1D_1$，∴ $PA\perp B_1D_1$.

（Ⅱ）$\because AO\perp BD$，$AO\perp PO$，$\therefore AO\perp$面 PBD，过点 O 作 $OM\perp PD$ 于点 M，连结 AM，则 $AM\perp PD$， $\therefore \angle AMO$ 就是二面角 $A\text{-}PD\text{-}O$ 的平面角，

又$\because AB=2, PA=\sqrt{6}$，$\therefore AO=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{6-2}=2$

$$OM=\frac{PO\cdot OD}{PD}=\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{，}\therefore \tan\angle AMO=\frac{AO}{OM}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\text{，}$$

即二面角的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(III)用体积法求解：$V_{B_1-PAD}=V_{A-B_1PD}\Rightarrow\frac{1}{3}h_x\cdot S_{PAD}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{BPD}$ 解得 $h_x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

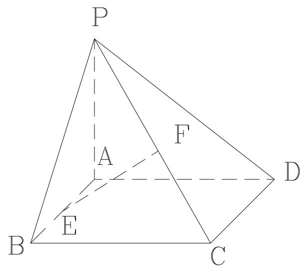
即 B_1 到平面 PAD 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

19. 在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 是矩形，侧棱 PA 垂直于底面，E、F 分别是 AB、PC 的中点.

（1）求证：$EF//$平面 PAD；

（2）当平面 PCD 与平面 $ABCD$ 成多大二面角时，

直线 $EF\perp$平面 PCD？



证：（1）取 CD 中点 G，连结 EG、FG

∵E、F 分别是 AB、PC 的中点，∴EG//AD，FG//PD，

∴平面 EFG//平面 PAD，

∴ EF//平面 PAD.

（2）当平面 PCD 与平面 ABCD 成 45°角时，直线 EF⊥平面 PCD.

证明：∵G 为 CD 中点，则 EG⊥CD，∵PA⊥底面 ABCD∴AD 是 PD 在平面 ABCD 内的射影。 ∵CD⊂平面 ABCD，且 CD⊥AD，故 CD⊥PD . 又∵FG∥PD∴FG⊥CD，故∠EGF 为平面 PCD 与平面 ABCD 所成二面角的平面角，即∠EGF=45°，从而得∠ADP=45°， AD=AP.由 RtΔPAE≅RtΔCBE，得 PE=CE.又 F 是 PC 的中点，∴EF⊥PC.

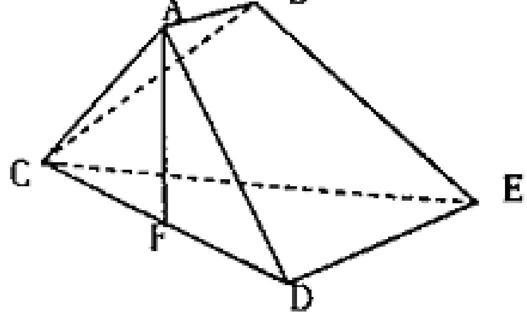
由 CD⊥EG，CD⊥FG，得 CD⊥平面 EFG，∴CD⊥EF，即 EF⊥CD，
故 EF⊥平面 PCD.

20. 已知多面体 $ABCDE$ 中，$AB\perp$平面 ACD，$DE\perp$平面 ACD，$AC=AD=CD=DE=2a$，$AB=a$，F 为 CD 的中点.

（Ⅰ）求证：$AF\perp$平面 CDE；

（Ⅱ）求异面直线 AC，BE 所成角余弦值；

（Ⅲ）求面 ACD 和面 BCE 所成二面角的大小.



解：（Ⅰ）∵DE⊥平面 ACD，AF⊂平面 ACD

∴DE⊥AF。

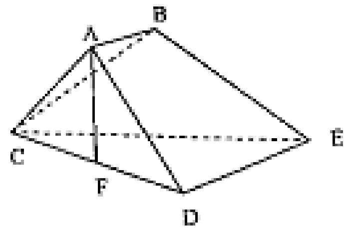
又∵AC=AD=C，F 为 CD 中点

∴AF⊥CD，

∴AF⊥面 CDE

∴AF⊥平面 CDE 。

（Ⅱ）$\because \left.\begin{array}{l}DE\perp 平面ACD\\ AB\perp 平面ACD\end{array}\right\}\Rightarrow DE//AB$



取 DE 中点 M，连结 AM、CM，则四边形 AMEB 为平行四边形

AM//BE，则∠CAM 为 AC 与 BE 所成的角。在△ACM 中，AC=2a

$$AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$$

$$CM=\sqrt{CD^2+DM^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$$

由余弦定理得：$\cos\angle CAM=\dfrac{(2a)^2+(\sqrt{5}a)^2-(\sqrt{5}a)^2}{2\times 2a\times\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

∴异面直线 AC、AE 所成的角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

（Ⅲ）延长 DA。EB 交于点 G，连结 CG。

因为 AB//DE，AB=$\dfrac{1}{2}$DE，所以 A 为 GD 中点。又因为 F 为 CD 中点，所以 CG//AF。

因为 AF⊥平面 CDE，所以 CG⊥平面 CDE。

故∠DCE 为面 ACD 和面 BCE 所成二面角的平面角易求∠DCE=45°。

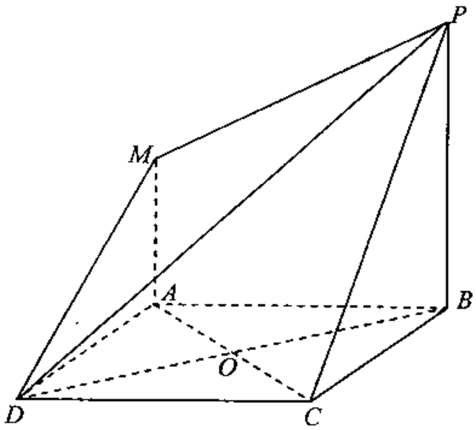
21. 如图，四边形 ABCD 是正方形，PB⊥平面 ABCD，MA//PB，PB=AB=2MA，

（Ⅰ）证明：AC//平面 PMD；

（Ⅱ）求直线 BD 与平面 PCD 所成的角的大小；

（Ⅲ）求平面 PMD 与平面 ABCD 所成的二面角（锐角）的大小。

（Ⅰ）证明：如图 1，取 PD 的中点 E，连 EO，EM。



∵EO//PB，EO=$\dfrac{1}{2}$PB，MA//PB，MA=$\dfrac{1}{2}$PB，

∴EO//MA，且 EO=MA

∴四边形 MAOE 是平行四边形，

∴ME//AC　。

又∵AC$\not\subset$平面 PMD，ME⊂平面 PMD，

∴AC//平面 PMD　。

（Ⅱ）如图 1，PB⊥平面 ABCD，

CD⊂平面 ABCD，　∴CD⊥PB。

又∵CD⊥BC，　∴CD⊥平面 PBC。

∵CD⊂平面 PCD，　　∴平面 PBC⊥平面 PCD。

过 B 作 BF⊥PC 于 F，则 BF⊥平面 PDC，连 DF，

则 DF 为 BD 在平面 PCD 上的射影。

∴∠BDF 是直线 BD 与平面 PDC 所成的角。

不妨设 AB=2，则在 Rt△BFD 中，$BF=\dfrac{1}{2}BD$，

∴直线 BD 与平面 PCD 所成的角是$\dfrac{\pi}{6}$

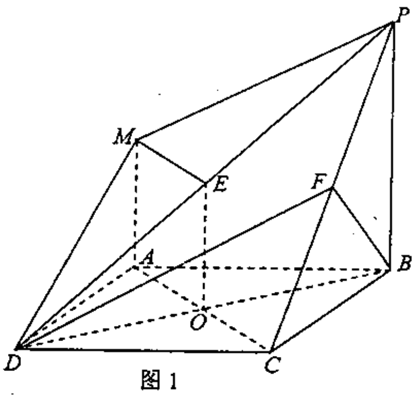


图 1

（Ⅲ）解：如图 3，分别延长 PM，BA，设 PM∩BA

则平面 PMD∩平面=ABCD=DG

过 A 作 AN⊥DG 于 N，连 MN。

∵PB⊥平面 ABCD，　　∴MN⊥DG

∴∠MNA 是平面 PMD 与平面 ABCD 所成

的二面角的平面角（锐角）

在 Rt△MAN 中， $\tan\angle MNA=\frac{MA}{NA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴∠MNA=arctan$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴平面 PMD 与平面 ABCD 所成的二面角（锐角）大小是 arctan$\frac{\sqrt{2}}{2}$

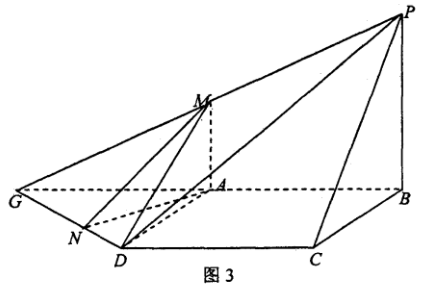


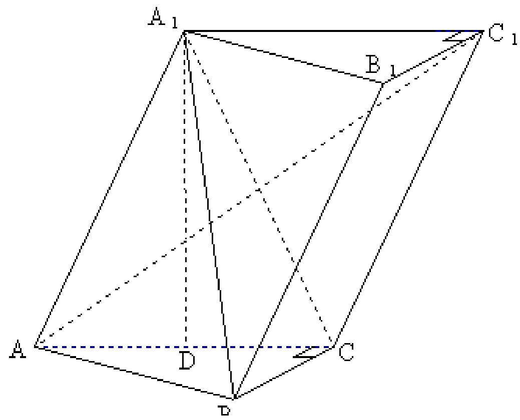
图 3

22. 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\angle BCA=90^\circ$，$AC=BC=2$，A_1 在底面 ABC 上的射影恰为 AC 的中点 D，又知 $BA_1\perp AC_1$。

（I）求证：$AC_1\perp$ 平面 A_1BC；

（II）求 CC_1 到平面 A_1AB 的距离；

（III）求二面角 $A-A_1B-C$ 的大小。



解：（I）因为 $A_1D\perp$ 平面 ABC，

所以平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，

又 $BC\perp AC$，所以 $BC\perp$ 平面 AA_1C_1C，

得 $BC\perp AC_1$，又 $BA_1\perp AC_1$

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC；

（II）因为 $AC_1\perp A_1C$，所以四边形 AA_1C_1C 为菱形，

故 $AA_1=AC=2$，又 D 为 AC 中点，知 $\angle A_1AC=60^\circ$。

取 AA_1 中点 F，则 $AA_1\perp$ 平面 BCF，从而面 $A_1AB\perp$ 面 BCF，

过 C 作 $CH\perp BF$ 于 H，则 $CH\perp$ 面 A_1AB，

在 $Rt\Delta BCF$ 中，$BC=2, CF=\sqrt{3}$，故 $CH=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

即 CC_1 到平面 A_1AB 的距离为 $CH=\frac{2\sqrt{21}}{7}$。

（III）过 H 作 $HG\perp A_1B$ 于 G，连 CG，则 $CG\perp A_1B$，

从而 $\angle CGH$ 为二面角 $A-A_1B-C$ 的平面角，

在 $Rt\Delta A_1BC$ 中，$A_1C=BC=2$，所以 $CG=\sqrt{2}$，

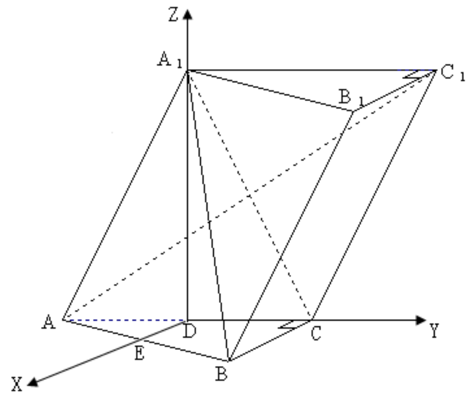
在 $Rt\Delta CGH$ 中，$\sin\angle CGH=\dfrac{CH}{CG}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

故二面角 $A-A_1B-C$ 的大小为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{42}}{7}$。

解法 2：（I）如图，取 AB 的中点 E，则 $DE//BC$，因为 $BC\perp AC$，

所以 $DE\perp AC$，又 $A_1D\perp$ 平面 ABC，

以 DE,DC,DA_1 为 x,y,z 轴建立空间坐标系，



则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(2,1,0)$，

$A_1(0,0,t)$，$C_1(0,2,t)$，

$\overrightarrow{AC_1}=(0,3,t)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-2,-1,t)$，

$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，由 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，知 $A_1C\perp CB$，

又 $BA_1\perp AC_1$，从而 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC；

（II）由 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-3+t^2=0$，得 $t=\sqrt{3}$。

设平面 A_1AB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$，所以

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=y+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+2y=0\end{cases}$，设 $z=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$

所以点 C_1 到平面 A_1AB 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$。

（III）再设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{CA_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，

所以

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=-y+\sqrt{3}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=2x=0\end{cases}$，设 $z=1$，则 $\vec{m}=(0,\sqrt{3},1)$，

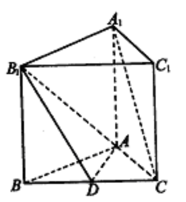
故 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，根据法向量的方向，

可知二面角 $A-A_1B-C$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{7}$。

（四） 创新试题

1．如图，正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，D 是 BC 的中点，$AA_1=AB=1$.

（I）求证：A_1C//平面 AB_1D;



（II）求二面角 $B—AB_1—D$ 的大小；
（III）求点 c 到平面 AB_1D 的距离.
解法一（I）证明：
连接 A_1B，设 $A_1B\cap AB_1=E$，连接 DE.
∵$ABC—A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，且 $AA_1=AB$，
∴四边形 A_1ABB_1 是正方形，
∴E 是 A_1B 的中点，
又 D 是 BC 的中点，
∴$DE\parallel A_1C$.
∵$DE\subset$ 平面 AB_1D，$A_1C\not\subset$ 平面 AB_1D，
∴$A_1C\parallel$ 平面 AB_1D.
（II）解：在面 ABC 内作 $DF\perp AB$ 于点 F，在面 A_1ABB_1 内作 $FG\perp AB_1$ 于点 G，连接 DG.
∵平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC，　∴$DF\perp$ 平面 A_1ABB_1，
∴FG 是 DG 在平面 A_1ABB_1 上的射影，　∵$FG\perp AB_1$，　∴$DG\perp AB_1$
∴$\angle FGD$ 是二面角 $B—AB_1—D$ 的平面角

设 $A_1A=AB=1$，在正△ABC 中，$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

在△ABE 中，$FG=\dfrac{3}{4}\cdot BE=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，

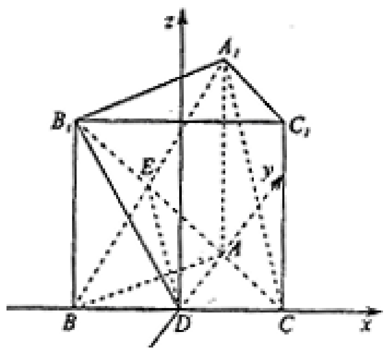
在 Rt△DFG 中，$\tan\angle FGD=\dfrac{DF}{FG}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以，二面角 $B—AB_1—D$ 的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（III）解：∵平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 ABC，且 $AD\perp BC$，
∴$AD\perp$ 平面 B_1BCC_1，又 $AD\subset$ 平面 AB_1D，∴平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 AB_1D.
在平面 B_1BCC_1 内作 $CH\perp B_1D$ 交 B_1D 的延长线于点 H，
则 CH 的长度就是点 C 到平面 AB_1D 的距离.

由△CDH∽△B_1DB，得 $CH=\dfrac{BB_1\cdot CD}{B_1D}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

即点 C 到平面 AB_1D 的距离是 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



解法二：
建立空间直角坐标系 D—xyz，如图，
（I）证明：
连接 A_1B，设 $A_1B\cap AB_1=E$，连接 DE.
设 $A_1A=AB=1$，

则 $D(0,0,0),A_1(0,\frac{\sqrt{3}}{2},1),E(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}),C(\frac{1}{2},0,0).$

$\therefore\overrightarrow{A_1C}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-1),\overrightarrow{DE}=(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}),$

$\therefore\overrightarrow{A_1C}=-2\overrightarrow{DE},\therefore A_1C\parallel DE.$

$\because DE \subset$ 平面 $AB_1D, A_1C \not\subset$ 平面 AB_1D，

$\therefore A_1C //$ 平面 $AB_1D.$

（II）解：$\because A(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0), B_1(-\dfrac{1}{2},0,1)$， $\therefore \overrightarrow{AD}=(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0), \overrightarrow{B_1D}=(\dfrac{1}{2},0,-1)$，

设 $n_1=(p,q,r)$ 是平面 AB_1D 的法向量，则 $n_1\cdot\overrightarrow{AD}=0$, 且 $n_1\cdot\overrightarrow{B_1D}=0$，

故 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}q=0, \dfrac{1}{2}p-r=0.$ 取 $r=1$, 得 $n_1=(2,0,1)$；

同理，可求得平面 AB_1B 的法向量是 $n_2=(\sqrt{3},-1,0).$

设二面角 $B—AB_1—D$ 的大小为 θ ，$\because \cos\theta=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

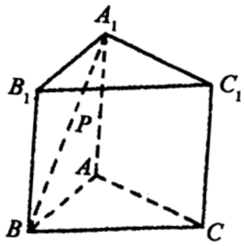
$\therefore$ 二面角 $B—AB_1—D$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}.$

（III）解由（II）得平面 AB_1D 的法向量为 $n_1=(2,0,1)$，

取其单位法向量 $n=(\dfrac{2}{\sqrt{5}},0,\dfrac{1}{\sqrt{5}})$, 又 $\overrightarrow{DC}=(\dfrac{1}{2},0,0).$

$\therefore$ 点 C 到平面 AB_1D 的距离 $d=|\overrightarrow{DC}\cdot n|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

2．如图，已知正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 a，P 为 A_1B 上的点。



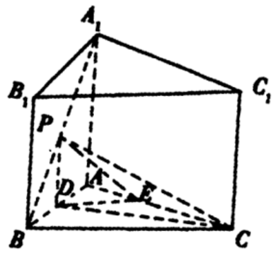
（1）试确定 $\dfrac{A_1P}{PB}$ 的值，使得 PC⊥AB；

（2）若 $\dfrac{A_1P}{PB}=\dfrac{2}{3}$，求二面角 P—AB—C 的大小；

（3）在（2）条件下，求 C_1 到平面 PAC 的距离。

2.解析答案:

四、　复习建议



解法一：（1）当 $\dfrac{A_1P}{PB}=1$ 时，PC⊥AB

取 AB 的中点 D′，连结 CD′、PD′

∵△ABC 为正三角形， ∴CD′⊥AB。

当 P 为 A_1B 的中点时，PD′$//A_1A$， ∵A_1A⊥底面 ABC， ∴PD′⊥底面 ABC，

∴PC⊥AB

（2）当 $\dfrac{A_1P}{PB}=\dfrac{2}{3}$ 时，过 P 作 PD⊥AB 于 D，

如图所示，则 PD⊥底在 ABC

过 D 作 DE⊥AC 于 E，连结 PE，则 PE⊥AC

∴∠DEP 为二面角 P—AC—B 的平面角。

又∵PD//A_1A， $\therefore \dfrac{BD}{DA}=\dfrac{BP}{PA_1}=\dfrac{3}{2}$， $\therefore AD=\dfrac{2}{5}a$

$\therefore\ DE=AD\cdot\sin 60^{\circ}=\dfrac{2a}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}a.$

又∵ $\dfrac{PD}{A_1A}=\dfrac{3}{5}$， $\therefore PD=\dfrac{3}{5}a$

$\therefore\ \tan\angle PED=\dfrac{PD}{DE}=\sqrt{3}$ ∴∠PED=60°

即二面角 P—AC—B 的大小为 60°

（3）设 C_1 到面 PAC 的距离为 d，则 $V_{C_1-PAC}=V_{P-ACC_1}$

∵PD//A_1A ∴PD//平面 A_1C ∴DE 即为 P 点到平面 A_1C 的距离。

又 PE=$\sqrt{PD^2+DE^2}=\sqrt{(\dfrac{3}{5}a)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{5}a)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}a^{\ 2}$

$\therefore \dfrac{1}{3}S_{\Delta PAC}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACC_1}\cdot DE$

$\therefore \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{5}a)\cdot d=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}a^2)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{5}a$

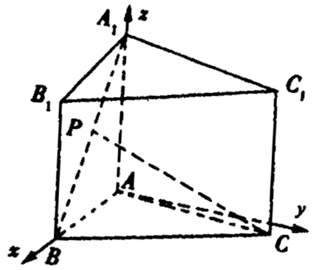
解得 $d=\dfrac{a}{2}$

即 C_1 到平面 PAC 的距离为 $\dfrac{1}{2}a$

解法二：以 A 为原点，AB 为 x 轴，过 A 点与 AB 垂直的直线为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系 A—$x$yz，如图所示，则 B（a，0，0），A_1（0，0，a），C$(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，

设 $P(x,0,z)$

（1）由 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得 $(x-\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,z)\cdot(a,0,0)=0$



即 $(x-\dfrac{a}{2})\cdot a=0,\quad \therefore x=\dfrac{a}{2}$， ∴P 为 A_1B 的中点。

即 $\dfrac{A_1P}{PB}=1$ 时，PC⊥AB。

（2）当 $\dfrac{A_1P}{PB}=\dfrac{2}{3}$ 时，由 $\overrightarrow{A_1P}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}$，得 $(x,0,z-a)=\dfrac{2}{3}(a-x,0,-z)$

即 $\begin{cases}3x=3a-2x,\\3(z-a)=-2z\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}a\\z=\dfrac{3a}{5}\end{cases}$ $\therefore P(\dfrac{2}{5}a,0,\dfrac{3}{5}a)$

设平面 PAC 的一个法向量 **n**=(x',y',z')

则$\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}(x',y',z')\cdot(\dfrac{2}{5}a,0,\dfrac{3}{5}a)=0\\(x',y',z')\cdot(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0)=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}\dfrac{2}{5}a\cdot x'+\dfrac{3a}{5}z'=0,\\\dfrac{a}{2}x'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}ay'=0\end{cases}$

取 $x'=3$，则$y'=-\sqrt{3},z'=-2$ $\therefore \mathbf{n}=(3,-\sqrt{3},-2).$

又平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_0$=（0，0，1）

$\therefore \cos<\mathbf{n},\mathbf{n}_0>=\dfrac{\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{n}_0|}=\dfrac{-2}{4\times1}=-\dfrac{1}{2}$

∴二面角 P—AC—B 的大小为 180°－120°=60°

（3）设 C_1 到平面 PAC 的距离为 d，

则$d=|\overrightarrow{C_1C}|\cdot|\cos<\mathbf{n},\overrightarrow{C_1C}>|=\dfrac{|\mathbf{n}\bullet\overrightarrow{C_1C}|}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{|(3,-\sqrt{3},-2)\bullet(0,0,-a|}{4}=\dfrac{a}{2}.$

即 C_1 到平面 PAC 的距离为$\dfrac{a}{2}$.