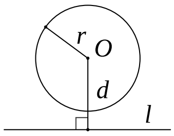
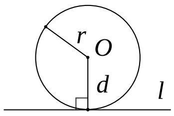
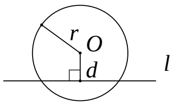
第四讲

圆的位置关系

模块一 切线的性质及判定

知识要点

设$\odot O$的半径为r，圆心O到直线l的距离为d，则直线和圆的位置关系如下表：

位置关系	图形	公共点个数	性质及判定	公共点名称	直线名称
相离		直线与圆没有公共点.	$d>r$	无	无
相切		直线与圆有唯一公共点.	$d=r$	切点	切线
相交		直线与圆有两个公共点.	$0\le d<r$	交点	割线

一、切线的性质：

定理：圆的切线垂直于过切点的半径.

推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

二、切线的判定

定义法：和圆只有一个公共点的直线是圆的切线；

距离法：和圆心距离等于半径的直线是圆的切线；

定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

证明方法：“联半径，证垂直”、“作垂线，证半径” .

三、切线长和切线长定理：

⑴切线长：在经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长.

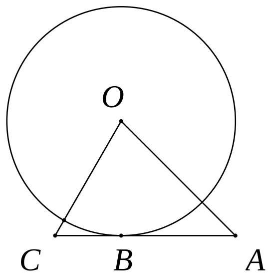
⑵切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，

圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.

例题精讲

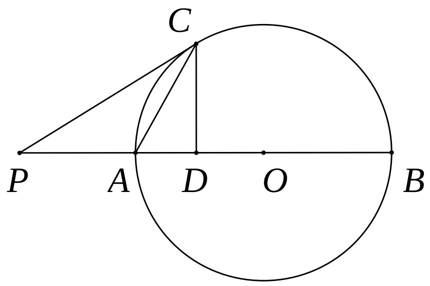
【例题1】

⑴如图，半径为$3cm$的$\odot O$切直线AC于B，$AB=3\text{cm}$，$BC=\sqrt{3}\text{cm}$，则$\angle AOC$的度数是________.



【分析】 联结OB，$\angle OBC=\angle OBA=90^\circ$，$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=75^\circ$.

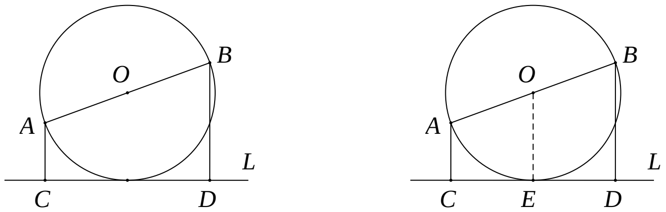
⑵如图，AB是$\odot O$的直径，C点在圆上，$CD\perp AB$于D．P在BA延长线上，且$\angle PCA=\angle ACD$．求证：PC是$\odot O$的切线.



【分析】 联结OC；$\because OA=OC$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA$

$\therefore \angle PCA+\angle OCA=\angle ACD+\angle OAC=90^\circ$，$\therefore PC$是$\odot O$的切线.

⑶如图，已知AB是$\odot O$ 的直径，$AC\perp L$于C，$BD\perp L$于D，且$AC+BD=AB$．求证：直线L与$\odot O$相切.

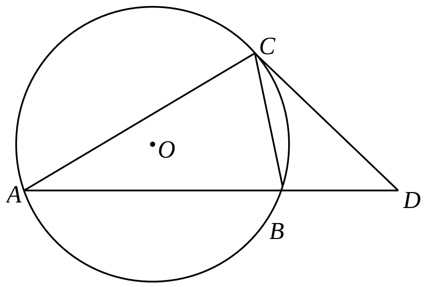


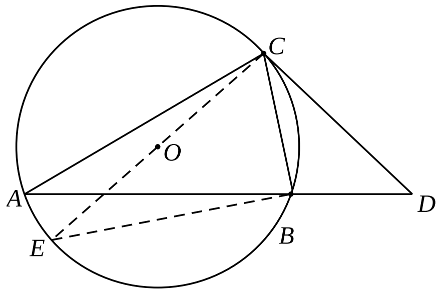
【分析】 过O作$OE\perp L$于E，则OE为梯形$ACDB$的中位线

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}\left(AC+BD\right)=\dfrac{1}{2}AB$ 即垂足E到圆心O的距离等于半径．$\therefore$直线L与$\odot O$ 相切.

【例题2】

已知：如图，C为$\odot O$上一点，DA交$\odot O$于B，联结AC、BC，且$\angle DCB=\angle CAB$．求证：DC为$\odot O$的切线.





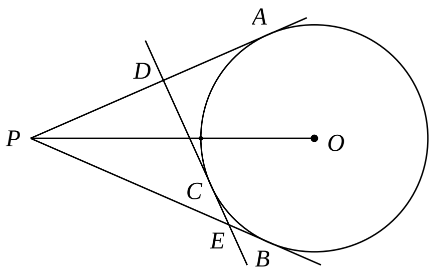
【分析】　联结 OC 并延长交 $\odot O$ 于 E，联结 BE．（或联半径）

可知 CE 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle CBE = 90°$，$\angle E + \angle BCE = 90°$

$\because \angle CAB = \angle E = \angle DCB$ $\therefore \angle DCB + \angle BCE = 90°$，$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线

【例题3】

如图，PA、PB、DE 分别切 $\odot O$ 于 A、B、C，若 $PO = 10$，$\triangle PDE$ 周长为16，求 $\odot O$ 的半径.



【分析】　联结 OA，$\because PA$、PB、DE 都与 $\odot O$ 相切，

$\therefore PA = PB$，$DC = DA$，$EC = EB$

$\therefore \triangle PDE$ 周长 $= PD + DC + CE + PE = PD + DA + EB + PE = PA + PB = 16$

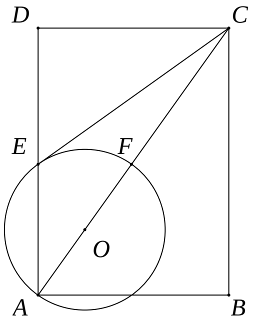
$\therefore PA = 8$，$\therefore OA = \sqrt{PO^2 - PA^2} = 6$，即 $\odot O$ 的半径为 6．

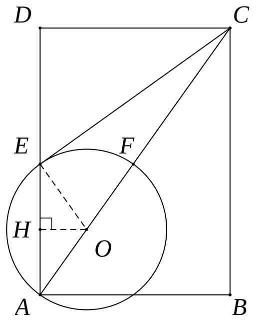
【例题4】

已知，如图在矩形 $ABCD$ 中，点 O 在对角线 AC 上，以 OA 长为半径的圆 O 与 AD、AC 分别交于点 E、F，$\angle ACB = \angle DCE$．

⑴判断直线 CE 与 $\odot O$ 的位置关系，并证明你的结论；

⑵若 $\tan \angle ACB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BC = 2$，求 $\odot O$ 的半径.





【分析】 (1)联结 OE， $\angle OEA+\angle DEC=\angle OAE+\angle DEC=\angle ACB+\angle DEC=\angle ECD+\angle DEC=90^\circ$，

$\therefore OE\perp CE$，$\because OE$ 是半径，$\therefore CE$ 与 $\odot O$ 相切．

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\tan\angle ACB=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\because BC=2$，$\therefore AB=\sqrt{2}$

在 $Rt\triangle CDE$ 中，$\angle D=90^\circ$，$\therefore \tan\angle DCE=\tan\angle ACB=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because ABCD$ 是矩形，$\therefore CD=AB=\sqrt{2}$，$\therefore DE=1$，$AC=\sqrt{6}$，$CE=\sqrt{3}$，设 $\odot O$ 半径为 r

在 $Rt\triangle COE$ 中，$\angle OEC=90^\circ$，

$\therefore r^2+3=\left(\sqrt{6}-r\right)^2$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\therefore \odot O$ 的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

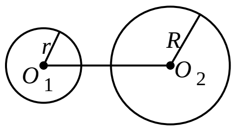
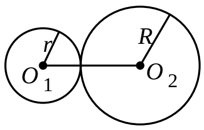
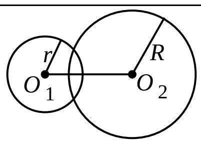
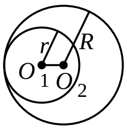
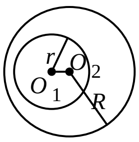
模块二 圆和圆的位置关系

知识要点

1. 圆心距：两个圆的圆心之间的距离叫做圆心距；

2. 连心线：经过两个圆的圆心的直线叫做连心线.

3. 设$\odot O_1$ 、$\odot O_2$ 的半径分别为R、r（其中$R>r$），两圆圆心距为d，则两圆位置关系如下表：

位置关系	图　形	定　义	性质及判定
外离		两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部.	$d>R+r\Leftrightarrow$两圆外离
外切		两个圆有唯一公共点，并且除了这个公共点之外，每个圆上的点都在另一个圆的外部.	$d=R+r\Leftrightarrow$两圆外切
相交		两个圆有两个公共点.	$R-r<d<R+r\Leftrightarrow$两圆相交
内切		两个圆有唯一公共点，并且除了这个公共点之外，一个圆上的点都在另一个圆的内部.	$d=R-r\Leftrightarrow$两圆内切
内含		两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部. 两圆同心是两圆内含的一种特例.	$0\le d<R-r\Leftrightarrow$两圆内含

圆是轴对称图形，经过圆心的任意一条直线都是圆的对称轴.

由此可知，两圆的连心线是这两个圆所成图形的对称轴.

如果两个圆相交，那么它们的两个交点关于连心线对称，于是：

定理：相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦．相切两圆的连心线经过切点.

例题精讲

【例题5】

⑴已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为6和7，$O_1O_2=0.5$，则$\odot O_1$和$\odot O_2$的位置关系是________.

⑵已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为6和7，$O_1O_2=14$，则$\odot O_1$和$\odot O_2$的位置关系是________.

⑶$\odot O_1$和$\odot O_2$相切，$\odot O_1$的直径为9cm，$\odot O_2$的直径为4cm．则O_1O_2的长是________.

⑷已知两圆半径分别为2和3，圆心距为d，若两圆没有公共点，则下列结论正确的是(　　)

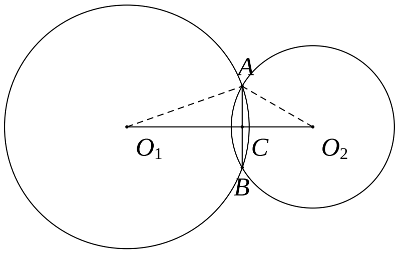
A．$0<d<1$　　B．$d>5$　　C．$0<d<1$或$d>5$　　D．$0\leqslant d<1$或$d>5$

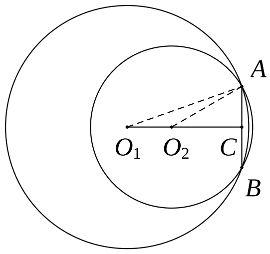
⑸两圆半径长分别是R和r（$R>r$），且圆心距为d，若关于x的方程$x^2-2rx+(R-d)^2=0$ 有相等的两实数根，则两圆的位置关系是________.

【分析】　⑴内含 ⑵外离 ⑶$2.5\text{cm}$或6.5cm ⑷D ⑸相切（内切+外切）

【例题6】

已知$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、B两点，且$AB=4cm$，两圆半径分别为$6cm$和$4cm$，求O_1O_2 的长.





【分析】　联结O_1A、O_2A，设O_1O_2与AB的交点为C.

则$O_1A=6\text{cm}$，$O_2A=4\text{cm}$，$AC=2\text{cm}$，$\angle O_1CA=\angle O_2CA=90°$

在$Rt\triangle O_1AC$中，$O_1C=\sqrt{O_1A^2-AC^2}=4\sqrt{2}\text{cm}$，

在$Rt\triangle O_2AC$中，$O_2C=\sqrt{O_2A^2-AC^2}=2\sqrt{3}\text{cm}$，

⑴ 若O_1、O_2在AB异侧，则$O_1O_2=O_1C+O_2C=\left(4\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\text{cm}$；

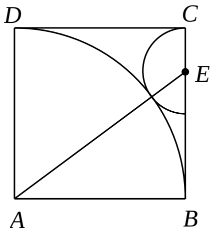
⑵ 若O_1、O_2在AB同侧，则$O_1O_2=O_1C-O_2C=\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\text{cm}$.

【例题7】

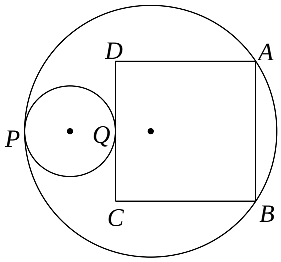
⑴以点A、B、C 为圆心的圆分别记作$\odot A$ 、$\odot B$ 、$\odot C$ ，其中$\odot A$ 的半径长为1、$\odot B$ 的半径长为2、$\odot C$ 的半径长为3，如果这三个圆两两外切，那么$\cos B$的值是________.

⑵如图，正方形$ABCD$中，E是BC边上一点．以E为圆心，EC为半径的半圆与以A为圆心，AB为半径的圆弧外切，则$\sin\angle EAB$的值为________.

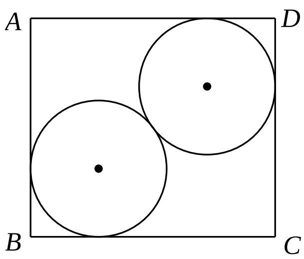
八升九衔接班



⑶如图，$PQ=3$，以 PQ 为直径的圆与一个以 5 为半径的圆相切于点 P，正方形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在大圆上，小圆在正方形的外部且与 CD 切于点 Q，则 $AB=$________.



⑷某人用如下方法测一钢管的内径：将一小段钢管竖直放在平台上，向内放入两个半径为 5cm 的钢球，测得上面一个钢球顶部高 $DC=16cm$（钢管的轴截面如图所示），则钢管的内直径 AD 的长为________.



【分析】 ⑴$\dfrac{3}{5}$

⑵两圆外切结合勾股定理方程思想，$R^2+(R-r)^2=(R+r)^2$，$R=4r$，

$\therefore \sin\angle EAB=\dfrac{3}{5}$

⑶过 P 作两圆的直径，则两圆直径应在同一条直线上，设直线 PQ 交 AB 于 M，则 $PM\perp AB$，设 $BM=x$，则 $BC=AB=2x$ ∵ $OQ=5-3=2$，∴ $OM=2x-2$.

在 Rt△OBM 中，$OM^2+BM^2=OB^2$，即 $(2x-2)^2+x^2=5^2$，解得 $x=3$，∴ $AB=2x=6$.

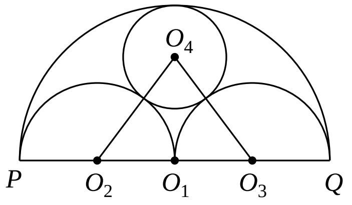
⑷18

八升九衔接班

【例题8】

⑴半径分别为$8\ cm$与$6\ cm$的$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于A、B两点，圆心距O_1O_2的长为$10\ cm$，那么公共弦AB的长为________.

⑵如图，PQ、PO_1、O_1Q分别是以O_1、O_2、O_3为圆心的半圆C_1、C_2、C_3的直径，圆C_4 内切于半圆C_1及外切于半圆C_2、C_3．若$PQ=24$，求圆C_4的面积.



【分析】 ⑴$\dfrac{48}{5}$

⑵联结O_1O_3、O_3O_4，设$\odot O_4$的半径为r，

$\because PQ=24$，$\therefore O_1P=12$，$O_1O_3=6$，$\therefore O_1O_4=12-r$，$O_3O_4=6+r$

根据圆的对称性，$O_1O_4\perp PQ$，$\therefore (12-r)^2+6^2=(6+r)^2$，解得$r=4$，

$\therefore S_{\odot O_4}=\pi r^2=16\pi$.

本讲巩固

【巩固1】

在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=4$，$BC=3$

⑴以点A为圆心，以3为半径的圆和直线BC的位置关系是________；

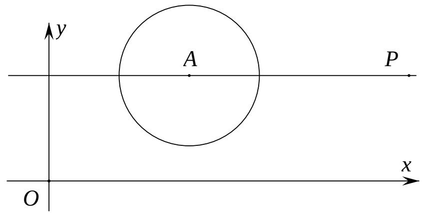
⑵如果以点C为圆心的圆与直线AB相切，则$\odot C$ 的半径为________；

⑶如果以点C为圆心的圆与直线AB相交，则$\odot C$ 的半径r的取值范围为________.

【分析】 ⑴相离； ⑵$\dfrac{12}{5}$； ⑶$r>\dfrac{12}{5}$

【巩固2】

已知O为原点，点A的坐标为$(4,3)$，$\odot A$ 的半径为2．过A作直线l平行于x轴，点P在直线l上运动，当点P横坐标为$6\sqrt{2}$时，判断直线OP与$\odot A$ 的位置关系.



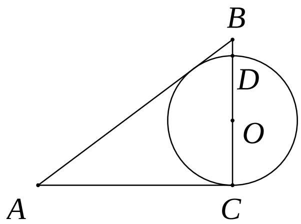
【分析】 联结OA，OP，作$AH\perp OP$于H，由题意，知点P的坐标为$(6\sqrt{2},3)$

$\therefore OP=9$，$AP=6\sqrt{2}-4$，$\therefore S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\times AP\times y_A=\frac{1}{2}\times AH\times OP$，得$AH=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}<2=r$

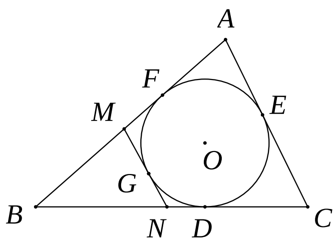
$\therefore$直线OP与$\odot A$ 相交

【巩固3】

⑴如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，以BC上一点O为圆心作$\odot O$与AB、AC相切，又$\odot O$与BC的另一交点为D，则线段BD的长为________.



⑵如图，$\odot O$是$\triangle ABC$的内切圆，D、E、F是切点，$AB=18\,cm$，$BC=20\,cm$，$AC=12\,cm$．又直线MN切$\odot O$于G，交AB、AC于MN，则$\triangle BMN$的周长为________.



【分析】 ⑴设AB与$\odot O$的切点为E，联结OE．则$OE\perp AB$，$AB=5$

又AC与$\odot O$相切，$\therefore AC=AE=4$，$BE=AB-AB=1$

设$\odot O$的半径为r，在$Rt\triangle OBE$中，$\angle OEB=90^\circ$

$\therefore OE^2+BE^2=OB^2$，即$r^2+1^2=\left(3-r\right)^2$，解得$r=\frac{4}{3}$，则$BD=BC-CD=\frac{1}{3}$.

⑵由切线长定理可知$AE=AF$，$BD=BF$，$CD=CE$

$\because AB=18\text{cm}$，$BC=20\text{cm}$，$AC=12\text{cm}$，$\therefore AE+CE+BF=\frac{1}{2}\left(AB+BC+AC\right)=25\text{cm}$，

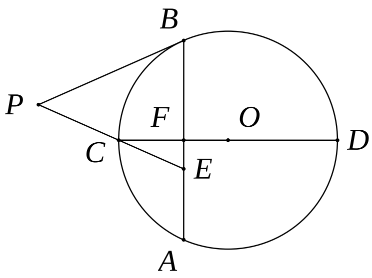
$\therefore BF=25-12=13\text{cm}$．$\because MN$是$\odot O$切线，$\therefore MG=MF$，$NG=ND$，

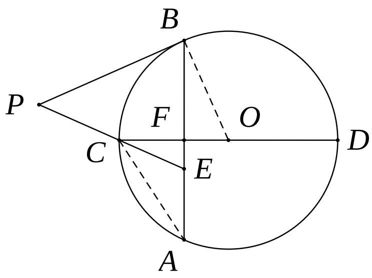
$\therefore\triangle BMN$的周长$=BM+MN+BN=BM+MG+GN+BN=BF+BD=26\text{cm}$

八升九衔接班

【巩固4】

如图，已知$\odot O$的弦AB垂直于直径CD，垂足为F，点E在AB上，且$EA=EC$，延长EC到点P，联结PB，若$PB=PE$，试判断PB与$\odot O$的位置关系，并说明理由．





【分析】 联结OB、AC；$\because PB=PE$，$\therefore \angle PEB=\angle PBE$

$\because EA=EC$，$\therefore \angle ECA=\angle EAC$，$\therefore \angle BEC=2\angle BAC$

$\because \angle BOC=2\angle BAC$，$\therefore \angle BOC=\angle BEC=\angle PBE$

$\because AB\perp CD$，$\therefore \angle BOC+\angle FBO=90^\circ$

$\therefore \angle PBE+\angle FBO=90^\circ$，即$\angle PBO=90^\circ$，$\therefore PB$与$\odot O$相切．

【巩固5】

⑴已知内切两圆的圆心距为6，其中一个圆的半径为4，那么另一个圆的半径为________．

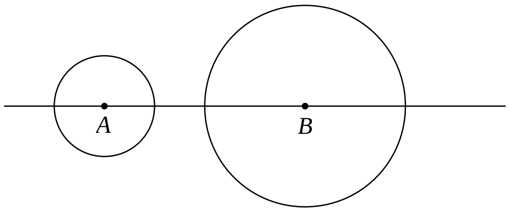
⑵已知两圆的圆心距$d=8$，两圆的半径长是方程$x^2-8x+1=0$的两根，则这两圆的位置关系是________．

【分析】 ⑴$10$；⑵外切

【巩固6】

⑴小圆的圆心在原点，半径为3，大圆的圆心坐标为$(a,0)$，半径为5．如果两圆内含，那么a的取值范围为________．

⑵如图，$\odot A$、$\odot B$的半径分别为$1cm$、$2cm$，圆心距AB为$5cm$．将$\odot A$由图示位置沿直线AB向右平移．当该圆与$\odot B$内切时，$\odot A$平移的距离为________cm．



【分析】 ⑴$-2<a<2$；⑵$4$或6

八升九衔接班