备战2010高考数学－－压轴题跟踪演练系列四

1．（本小题满分14分）

已知f(x)=$\frac{2x-a}{x^2+2}$(x∈R)在区间[－1，1]上是增函数.

（Ⅰ）求实数a的值组成的集合A;

（Ⅱ）设关于x的方程f(x)=$\frac{1}{x}$的两个非零实根为x_1、x_2.试问：是否存在实数m，使得不等式m^2+tm+1≥|x_1－x_2|对任意a∈A及t∈[－1，1]恒成立？若存在，求m的取值范围；若不存在，请说明理由.

本小题主要考查函数的单调性，导数的应用和不等式等有关知识，考查数形结合及分类讨论思想和灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.满分14分.

解：（Ⅰ）f′(x)=$\frac{4+2ax-2x^2}{(x^2+2)^2}$ = $\frac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$，

∵f(x)在[－1，1]上是增函数，

∴f′(x)≥0对x∈[－1，1]恒成立，

即x^2－ax－2≤0对x∈[－1，1]恒成立. ①

设φ(x)=x^2－ax－2，

方法一：

$$① \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\le 0, \\ \varphi(-1)=1+a-2\le 0.\end{cases} \Leftrightarrow -1\le a\le 1,$$

∵对x∈[－1，1]，f(x)是连续函数，且只有当a=1时，f′(-1)=0以及当a=－1时，f′(1)=0

∴A={a|－1≤a≤1}. 方法二：

$$① \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}\ge 0, \\ \varphi(-1)=1+a-2\le 0\end{cases} \text{或} \begin{cases}\frac{a}{2}<0, \\ \varphi(1)=1-a-2\le 0\end{cases}$$

⇔ 0≤a≤1 或 －1≤a≤0

⇔ －1≤a≤1.

∵对x∈[－1，1]，f(x)是连续函数，且只有当a=1时，f′(－1)=0以及当a=-1时，f′(1)=0

∴A={a|－1≤a≤1}.

（Ⅱ）由$\frac{2x-a}{x^2+2}=\frac{1}{x}$，得$x^2$－ax－2=0， ∵△=$a^2$+8>0

∴x_1，x_2是方程x^2－ax－2=0的两非零实根，

$$\begin{cases}x_1+x_2=a, \\ \end{cases}$$

∴　　　　从而$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$.

$x_1x_2=-2$，

∵$-1\leqslant a\leqslant 1$，∴$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$.

要使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1，1]$恒成立，

当且仅当$m^2+tm+1\geqslant 3$对任意$t\in[-1，1]$恒成立，

即$m^2+tm-2\geqslant 0$对任意$t\in[-1，1]$恒成立.　　　②

设$g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$，

方法一：

$$②\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0,\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$或$m\leqslant -2$.

所以，存在实数m，使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1，1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2，或m\leqslant -2\}$.

方法二：

当m=0时，②显然不成立；

当$m\neq 0$时，

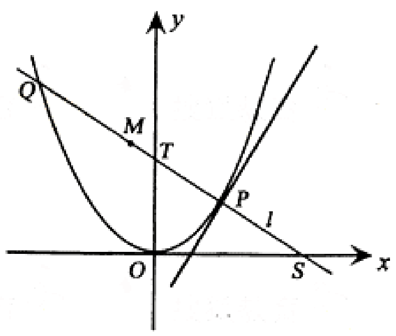
$$②\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}m<0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$或$m\leqslant -2$.

所以，存在实数m，使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1，1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2，或m\leqslant -2\}$.

2.（本小题满分12分）

如图，P是抛物线C：$y=\frac{1}{2}x^2$上一点，直线l过点P且与抛物线C交于另一点Q.



（Ⅰ）若直线l与过点P的切线垂直，求线段PQ中点M的轨迹方程；

（Ⅱ）若直线l不过原点且与x轴交于点S，与y轴交于点T，

试求$\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$的取值范围.

本题主要考查直线、抛物线、不等式等基础知识，求轨迹方程的方法，解析几何的基本思想和综合解题能力.满分 12 分.

解：（Ⅰ）设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，$M(x_0, y_0)$，依题意 $x_1 \neq 0$，$y_1>0$，$y_2>0$.

由 $y=\dfrac{1}{2}x^2$， ①

得 $y'=x$.

∴过点 P 的切线的斜率 $k_{切}=x_1$，

∴直线 l 的斜率 $k_l=-\dfrac{1}{k_{切}}=-\dfrac{1}{x_1}$，

∴直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{2}x_1^2=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，

方法一：

联立①②消去 y，得 $x^2+\dfrac{2}{x_1}x-x_1^2-2=0$.

∵M 是 PQ 的中点

$$\therefore \begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{1}{x_1}, \\ y_0=\dfrac{1}{2}x_1^2-\dfrac{1}{x_1}(x_0-x_1). \end{cases}$$

消去 x_1，得 $y_0=x_0^2+\dfrac{1}{2x_0^2}+1(x_0\neq 0)$，

∴PQ 中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2x_0^2}+1(x\neq 0)$.

方法二：

由 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1^2$，$y_2=\dfrac{1}{2}x_2^2$，$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

得 $y_1-y_2=\dfrac{1}{2}x_1^2-\dfrac{1}{2}x_2^2=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_0(x_1-x_2)$，

则 $x_0=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_l=-\dfrac{1}{x_1}$，

∴$x_1=-\frac{1}{x_0}$，

将上式代入②并整理，得

$y_0=x_0^2+\frac{1}{2x_0^2}+1(x_0\neq 0)$，

∴PQ 中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2x_0^2}+1(x\neq 0)$.

（Ⅱ）设直线 l:y=kx+b，依题意 $k\neq 0$，$b\neq 0$，则 T(0，b).

分别过 P、Q 作 PP′ ⊥x 轴，QQ′ ⊥y 轴，垂足分别为 P′、Q′，则

$$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|OT|}{|P'P|}+\frac{|OT|}{|Q'Q|}=\frac{|b|}{|y_1|}+\frac{|b|}{|y_2|}.$$

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=kx+b \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2(k^2+b)y+b^2=0$.　　　③

则 $\begin{cases} y_1+y_2=2(k^2+b), \\ y_1y_2=b^2. \end{cases}$

方法一：

$$\therefore \frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2})\geqslant 2|b|\sqrt{\frac{1}{y_1y_2}}=2|b|\sqrt{\frac{1}{b^2}}=2.$$

∵y_1、y_2 可取一切不相等的正数，

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是（2，+∞）.

方法二：

$$\therefore \frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=|b|\frac{2(k^2+b)}{b^2}.$$

当 b>0 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=b\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2(k^2+b)}{b}=\frac{2k^2}{b}+2>2$；

当 b<0 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=-b\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2(k^2+b)}{-b}$.

又由方程③有两个相异实根，得$\triangle=4(k^2+b)^2-4b^2=4k^2(k^2+2b)>0$，

于是 $k^2+2b>0$，即 $k^2>-2b$.

所以$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}>\frac{2(-2b+b)}{-b}$=2.

∵当 b>0 时，$\frac{2k^2}{b}$可取一切正数，

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$的取值范围是（2，+∞）.

方法三：

由 P、Q、T 三点共线得 $k_{TQ}=K_{TP}$，

即$\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{y_1-b}{x_1}$.

则 $x_1y_2-bx_1=x_2y_1-bx_2$，即 $b(x_2-x_1)=(x_2y_1-x_1y_2)$.

于是 $b=\frac{x_2\cdot\frac{1}{2}{x_1}^2-x_1\cdot\frac{1}{2}{x_2}^2}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}x_1x_2$.

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|b|}{|y_1|}+\frac{|b|}{|y_2|}=\frac{|-\frac{1}{2}x_1x_2|}{2}+\frac{|-\frac{1}{2}x_1x_2|}{2\ 1}=|\frac{x_2}{x_1}|+|\frac{x_1}{x_2}|\geqslant 2$.

∵$|\frac{x_2}{x_1}|$可取一切不等于 1 的正数，

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$的取值范围是（2，+∞）.

3.（本小题满分 12 分）

某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率为 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少.

（总费用=采取预防措施的费用+发生突发事件损失的期望值.）

本小题考查概率的基本知识和数学期望概念及应用概率知识解决实际问题的能力，满分 12 分.

解：①不采取预防措施时，总费用即损失期望为 400×0.3=120（万元）；

②若单独采取措施甲，则预防措施费用为 45 万元，发生突发事件的概率为 1－0.9=0.1，损失期望值为 400×0.1=40（万元），所以总费用为 45+40=85（万元）

③若单独采取预防措施乙，则预防措施费用为 30 万元，发生突发事件的概率为 1－0.85=0.15，损失期望值为 400×0.15=60（万元），所以总费用为 30+60=90（万元）；

④若联合采取甲、乙两种预防措施，则预防措施费用为 45+30=75（万元），发生突发事件的概率为（1－0.9）（1－0.85）=0.015，损失期望值为 400×0.015=6（万元），所以总费用为 75+6=81（万元）.

综合①、②、③、④，比较其总费用可知，应选择联合采取甲、乙两种预防措施，可使总费用最少.

4.（本小题满分 14 分）

已知$a>0$,数列$\{a_n\}$满足$a_1=a, a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots.$

（I）已知数列$\{a_n\}$极限存在且大于零，求$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（将 A 用 a 表示）;

（II）设$b_n=a_n-A, n=1,2,\cdots,$证明$:b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)};$

（III）若$|b_n|\le\dfrac{1}{2^n}$对$n=1,2,\cdots$都成立，求 a 的取值范围.

本小题主要考查数列、数列极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力，满分 14 分.

解：（I）由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,且$A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ (A>0)$,对$a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$两边取极限得

$A=a+\dfrac{1}{A}$,解得$A=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$.又$A>0$,$\therefore A=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

（II）由$a_n=b_n+A, a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$得$b_{n+1}+A=a+\dfrac{1}{b_n+A}$.

$$\therefore b_{n+1}=a-A+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{1}{A}+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}.$$

即$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$对$n=1,2,\cdots$都成立

（III）令$|b_1|\le\dfrac{1}{2}$,得$|a-\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})|\le\dfrac{1}{2}$.

$\therefore|\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)|\le\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\sqrt{a^2+4}-a\le1$,解得$a\ge\dfrac{3}{2}$.

现证明当$a\ge\dfrac{3}{2}$时,$|b_n|\le\dfrac{1}{2^n}$对$n=1,2,\cdots$都成立.

（i）当 n=1 时结论成立（已验证）.

（ii）假设当$n=k(k\ge1)$时结论成立,即$|b_k|\le\dfrac{1}{2^k}$,那么

$$|b_{k+1}|=\frac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\le\frac{1}{A|b_k+A|}\times\frac{1}{2^k}$$

故只须证明$\frac{1}{A|b_k+A|}\le\frac{1}{2}$,即证$A|b_k+A|\ge 2$对$a\ge\frac{3}{2}$成立.

由于$A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$,

而当$a\ge\frac{3}{2}$时,$\sqrt{a^2+4}-a\le 1$,$\therefore A\ge 2$.

$\therefore|b_k+A|\ge A-|b_k|\ge 2-\frac{1}{2^k}\ge 1$,即$A|b_k+A|\ge 2$.

故当$a\ge\frac{3}{2}$时,$|b_{k+1}|\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$.

即 n=k+1 时结论成立.

根据（i）和（ii）可知结论对一切正整数都成立.

故$|b_n|\le\frac{1}{2^n}$对$n=1,2,\cdots$都成立的a的取值范围为$[\frac{3}{2},+\infty)$.

5.（本小题满分 14 分，第一小问满分 4 分，第二小问满分 10 分）

已知$a\in R$，函数$f(x)=x^2|x-a|$.

(Ⅰ)当$a=2$时，求使$f(x)=x$成立的x的集合；

(Ⅱ)求函数$y=f(x)$在区间$[1,2]$上的最小值.

本小题主要考查运用导数研究函数性质的方法，考查分类讨论的数学思想和分析推理能力. 满分 14 分.

解：(Ⅰ) 由题意，$f(x)=x^2|x-2|$.

当$x<2$时，$f(x)=x^2(2-x)=x$，解得$x=0$或$x=1$；

当$x\ge 2$时，$f(x)=x^2(x-2)=x$，解得$x=1+\sqrt{2}$.

综上，所求解集为$\{0,1,1+\sqrt{2}\}$.

（Ⅱ）设此最小值为m.

①当$a\le 1$时，在区间$[1,2]$上，$f(x)=x^3-ax^2$.

因为

$$f'(x)=3x^2-2ax=3x(x-\frac{2}{3}a)>0,\quad x\in(1,2),$$

则$f(x)$在区间$[1,2]$上是增函数，所以$m=f(1)=1-a$.

②当$1<a\le 2$时，在区间$[1,2]$上，$f(x)=x^2(x-a)\ge 0$，由$f(a)=0$知

$$m=f(a)=0.$$

③当 $a>2$ 时，在区间 $[1,2]$ 上， $f(x)=ax^2-x^3$.

$$f'(x)=2ax-3x^2=3x(\frac{2}{3}a-x).$$

若 $a\geq 3$，在区间 $(1,2)$ 内 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 为区间 $[1,2]$ 上的增函数，

由此得 $m=f(1)=a-1$.

若 $2<a<3$，则 $1<\frac{2}{3}a<2$.

当 $1<x<\frac{2}{3}a$ 时， $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 为区间 $[1,\frac{2}{3}a]$ 上的增函数；

当 $\frac{2}{3}a<x<2$ 时， $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 为区间 $[\frac{2}{3}a,2]$ 上的减函数.

因此，当 $2<a<3$ 时， $m=f(1)=a-1$ 或 $m=f(2)=4(a-2)$.

当 $2<a\leq\frac{7}{3}$ 时， $4(a-2)\leq a-1$，故 $m=f(2)=4(a-2)$；

当 $\frac{7}{3}<a<3$ 时， $a-1<4(a-2)$，故 $m=f(1)=a-1$.

综上所述，所求函数的最小值

$$m=\begin{cases}1-a, & \text{当}a\leq 1\text{时；}\\ 0, & \text{当}1<a\leq 2\text{时；}\\ 4(a-2), & \text{当}2<a\leq\frac{7}{3}\text{时；}\\ a-1, & \text{当}a>\frac{7}{3}\text{时.}\end{cases}$$

6.（本小题满分 14 分，第一小问满分 2 分，第二、第三小问满分各 6 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， 已知 $a_1=1,a_2=6,a_3=11$，且

$$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B,n=1,2,3,\cdots,$$

其中 A,B 为常数.

(Ⅰ)求 A 与 B 的值；

(Ⅱ)证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(Ⅲ)证明：不等式 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_ma_n}>1$ 对任何正整数 m,n 都成立.

本小题主要考查等差数列的有关知识、不等式的证明方法，考查思维能力、运算能力.

解：（Ⅰ）由已知，得 $S_1=a_1=1$， $S_2=a_1+a_2=7$， $S_3=a_1+a_2+a_3=18$.

由 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$， 知

$$\begin{cases}-3S_2-7S_1=A+B,\\ 2S_3-12S_2=2A+B,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}A+B=-28,\\ 2A+B=-48,\end{cases}$$

解得 $A=-20$， $B=-8$.

（Ⅱ）方法 1

由（Ⅰ），得 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=-20n-8$， ①

所以 $(5n-3)S_{n+2}-(5n+7)S_{n+1}=-20n-28$. ②

②-①，得 $(5n-3)S_{n+2}-(10n-1)S_{n+1}+(5n+2)S_n=-20$， ③

所以 $(5n+2)S_{n+3}-(10n+9)S_{n+2}+(5n+7)S_{n+1}=-20$. ④

④-③，得 $(5n+2)S_{n+3}-(15n+6)S_{n+2}+(15n+6)S_{n+1}-(5n+2)S_n=0$.

因为 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

所以 $(5n+2)a_{n+3}-(10n+4)a_{n+2}+(5n+2)a_{n+1}=0$.

又因为 $5n+2\neq 0$，

所以 $a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1}=0$，

即 $a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+2}-a_{n+1}$， $n\geq 1$.

所以数列$\{a_n\}$为等差数列.

方法 2

由已知，得 $S_1=a_1=1$，

又 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=-20n-8$，且 $5n-8\neq 0$，

所以数列$\{S_n\}$是唯一确定的，因而数列$\{a_n\}$是唯一确定的.

设 $b_n=5n-4$，则数列$\{b_n\}$为等差数列，前 n 项和 $T_n=\dfrac{n(5n-3)}{2}$.

于是 $(5n-8)T_{n+1}-(5n+2)T_n=(5n-8)\dfrac{(n+1)(5n+2)}{2}-(5n+2)\dfrac{n(5n-3)}{2}=-20n-8$，

由唯一性得 $b_n=a_n$，即数列$\{a_n\}$为等差数列.

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知，$a_n=1+5(n-1)=5n-4$.

要证 $\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m a_n}>1$，

只要证 $5a_{mn}>1+a_m a_n+2\sqrt{a_m a_n}$.

因为 $a_{mn}=5mn-4$， $a_m a_n=(5m-4)(5n-4)=25mn-20(m+n)+16$，

故只要证 $5(5mn-4)>1+25mn-20(m+n)+16+2\sqrt{a_m a_n}$，

即只要证 $20m+20n-37>2\sqrt{a_m a_n}$.

因为 $2\sqrt{a_m a_n}\leq a_m+a_n=5m+5n-8$

$<5m+5n-8+(15m+15n-29)$

$=20m+20n-37$，

所以命题得证.