2009年新知杯上海市初中数学竞赛

一、填空题（第1-5小题每题8分，第6-10小题每题10分，共90分）

1、对于任意实数a，b，定义a*b =a(a+b)+b，已知a*2.5=28.5，则实数a的值是 $\underline{4,-\frac{13}{2}}$

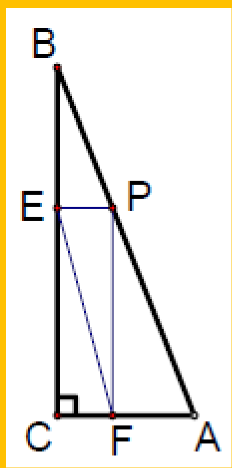
【解】a*2.5=a(a+2.5)+2.5=a^2+2.5a+2.5,
a^2+2.5a+2.5=28.5，两边同时乘以2，得到 $2a^2+5a-52=0$
（2a+13）(a-4)=0
解得 a=-13/2，或 a=4

2、在三角形ABC中，AB=b^2-1，BC=a^2，CA=2a，其中a，b是大于1的整数，则b-a=__0__。
【解】利用三角形三边之间的关系不等式即可以得到：
BC+CA >AB ➔ $a^2+2a>b^2-1$ ➔ $(a+1)^2>b^2$ ➔ a+1>b (1)
|BC-CA|<AB ➔ $|a^2-2a|<b^2-1$ ➔ $(a-1)^2<b^2$ ➔ a-1 <b (2)
由(1)和(2)组合得到: -1< b-a <1,
因a，b是整数，故b-a也是整数，在(-1，1)之间只有一个整数0，故b-a=0

3、一个平行四边形可以被分成92个边长为1的正三角形，它的周长可能是_50，94_。

4、已知关于x的方程$x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$有实根，并且所有实根的乘积为-2，则所有实根的平方和为_5__。

5、如图，直角三角形ABC中 $AC=1$，$BC=2$，P为斜边AB上一动点。PE⊥BC，PF⊥CA，则线段 EF长的最小值为 $\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$。



【解】EF=CP，当CP⊥AB时，最小。面积关系就可以了。即CP •CP=CA •CB=2，

CP=$\frac{2}{\sqrt{5}}$

6、设a，b是方程$x^2+68x+1=0$的两个根，c，d是方程$x^2-86x+1=0$的两个根，则(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)的值为__2772__。
【解】韦达定理，a+b=-68，ab=1，c+d=86，cd=1
原式=$[c^2+(a+b)c+ab][d^2-(a+b)d+ab]$
$=(c^2-68c+1)(d^2+68d+1)$
$=(c^2-68c+cd)(d^2+68d+cd)$
$=cd(c-68+d)(d+68+c)$
$=(c+d)^2-68^2$

$=86^2-68^2$

$=154\text{x}18$

$=2772$

7、在平面直角坐标系中有两点$P(-1,1)$，Q（2,2），函数y= kx −1 的图像与线段PQ 延长线相交（交点不包括Q），则实数k的取值范围是$\underline{\frac{1}{3}<k<\frac{3}{2}}$。

【解】从图上可以看出，函数在Q点时，斜率为最大。将Q（2,2）代入函数得到：

k=3/2，所以 k<3/2;

另外，当斜率减少到与PQ直线平行时，无交点，这是k与PQ的斜率一样，即 k=(2-1)/(2+1)=1/3;

故 1/3<k<3/2

8、方程xyz=2009的所有整数解有__72__组。

【解】2009=7x7x41=1x1x2009=1x49x41=1x7x287， 考虑正负号，两个负数也可以。

（1　1　2009）（7　7 41 ）各有12组(此两组有一对相同数)

（1　41 49　）（1　7 287）各有24组（此两组无相同数）

共有24x3=72组。

穷举法：选择（1　41 49　），共有24组数据如下：（考虑6个不同的数）

（1,41,49）（1,49,41）（1，-41，-49）（1，-49，-41）

（-1，-41,49）（-1,49，-41）（-1,41，-49）（-1，-49,41）

（41，1,49）（41,49,1）（41，-1，-49）（41，-49，-1）

（-41，-1,49）（-41,49，-1）（-41,1，-49）（-41，-49,1）

（49，1,41）（49,41,1）（49，-1，-41）（49，-41，-1）

（-49，-1,41）（-49,41，-1）（-49,1，-41）（-49，-41,1）

选择（1,1,2009），共有12组数据如下：（有两个数相同）

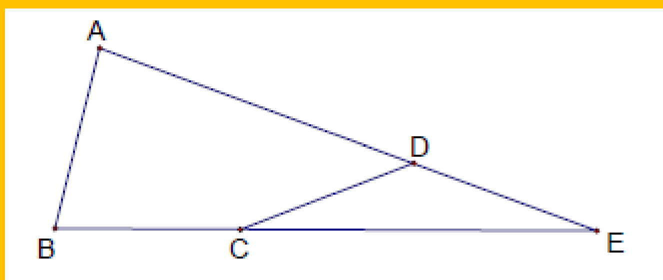
（1,1,2009）（1,2009，1）（1，-1，-2009）（1，-2009，-1）

（-1,-1,2009）(-1,2009,-1)(-1,1,-2009)(-1,-2009,1)

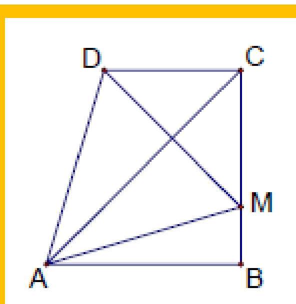
(2009,1,1)(2009,-1,-1)

(-2009,-1,1)(-2009,1,-1)

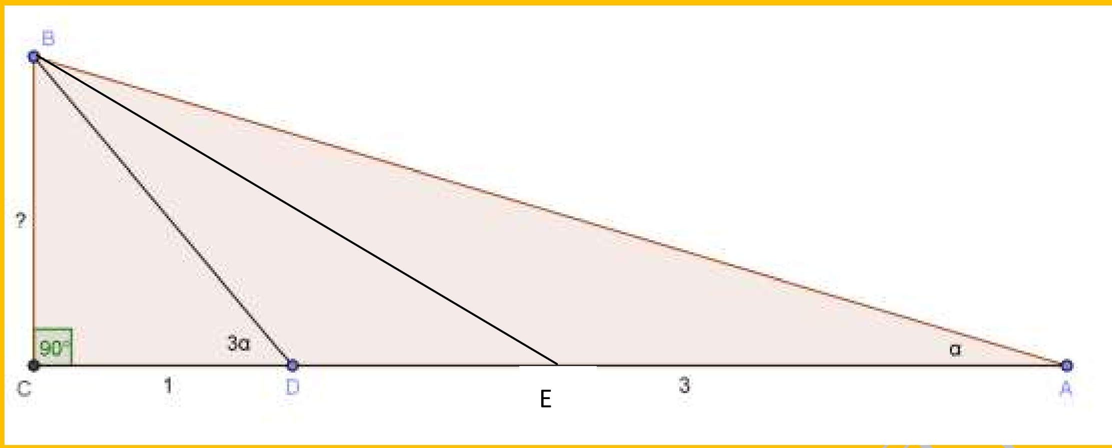
9、如图，四边形ABCD中， AB=BC=CD，∠ABC =78°，∠BCD =162°。设AD，BC延长线交于E，则∠AEB=__21°__。



10、如图，在直角梯形ABCD中，∠ABC = ∠BCD = 90°，AB=BC=10，点M在BC上，使得Δ ADM是正三角形，则Δ ABM与Δ DCM的面积和是_300−150√3._



二、（本题15分） 如图，Δ ABC中∠ACB =90°，点D在*CA*上，使得CD=1，AD=3，并且∠*BDC*=3∠*BAC*，求BC 的长。



解：设BC=x,则BD= $\sqrt{x^2+1}$, AB= $\sqrt{x^2+16}$，如图，作ABD∠平分线BE，则ΔBDE∽ΔADB，因此BD^2=DE・DA=3DE。由角平分线定理可知

$$\frac{DE}{AE}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{DE}{AE+DE}=\frac{BD}{AB+BD}\Rightarrow DE=\frac{3BD}{AB+BD}$$

因此 $x^2+1=\dfrac{9\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2+1}}$，解得BC=x= $\dfrac{4\sqrt{11}}{11}$。

三、（本题15分） 求所有满足下列条件的四位数~~abcd~~：~~abcd~~=(~~ab~~+~~cd~~)^2，其中数字c可以是0。

解：设 x=~~ab~~, y=~~cd~~，则 100x+y=$(x+y)^2$，故 $x^2+(2y-100)x+(y^2-y)=0$ 有整数解，由于10<x<100，故 y≠0。因此 $\Delta_x=(2y-100)^2-4(y^2-y)=4(2500-99y)$是完全平方数，可设，$2500-99y=t^2$，故 99y=(50-t)(50+t)， 0⩽50−t<50+t 之和为 100，而且其中有 11 的倍数，只能有 50-t=1 或 50-t=45，相应得到 y=1,25，代入解得

$\begin{cases}x=98\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=20\\y=25\end{cases},\begin{cases}x=30\\y=25\end{cases}$ 因此 ~~abcd~~=9801,2025,3025。

四、（本题15分） 正整数n满足以下条件：任意*n*个大于1且不超过2009的两两互素的正整数中，至少有一个素数，求最小的n.

解：由于 $2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,29^2,31^2,37^2,41^2,43^2$ 这 14 个合数都小于 2009,且两两互质，因此 *n*≥15.

而 *n*=15 时，我们取 15 个不超过的互质合数 $a_1, a_2, \cdots, a_{15}$ 的最小素因子 $p_1, p_2, ..., p_{15}$，则必有一个素数≥47，不失一般性设 $p_{15}\ge 47$，由于 p_{15} 是合数 a_{15} 的最小素因子，因此 $a_{15}\ge p_{15}^2\ge 47^2>2009$，矛盾。因此，任意 15 个大于 1 且不超过 2009 的互质正整数中至少有一个素数。

综上所述，n最小是15。

五、（本题15分）若两个实数a, b使得a^2+b与$a+b^2$都是有理数，称数对(a, b)是和谐的。

①试找出一对无理数，使得(a, b)是和谐的；

②证明：若(a, b)是和谐的，且a+b是不等于1的有理数，则a, b都是有理数；

③证明：若(a, b)是和谐的，且 a/b 是有理数，则 a, b 都是有理数。

解：①不难验证 $(a,b)=(\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2})$ 是和谐的。

②由已知$t=(a^2+b)-(a+b^2)=(a-b)(a+b-1)$是有理数，$a+b=s$是有理数，因此$a-b=\frac{t}{a+b-1}$，解得$a=\frac{1}{2}(s+\frac{t}{s-1})$是有理数，当然$b=s-a$也是有理数。

③若，则 $a+b^2=0$，则 $b=-\frac{a}{b}$ 是有理数，因此 $a=(a+b^2)-b^2$ 也是有理数。若 $a+b^2\neq 0$，

由已知 $x=\frac{a^2+b}{a+b^2}=\frac{(a/b)^2+(1/b)}{(a/b)(1/b)+1}$ 是有理数，$y=a/b$ 也是有理数，因此 $\frac{1}{b}=\frac{y^2-x}{xy-1}$，

故 $b=\frac{xy-1}{y^2-x}$ 是有理数，因此 $a=(a+b^2)-b^2$ 也是有理数。