六年级第一学期趣味数学期末测试（A6001）

学号____________　　姓名____________

一、填空题

1. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{99}{100!}=$__________________________（最后的结果用阶乘表示）

注：阶乘定义 n!=n×（n-1）×（n-2）×…×2×1，0！=1

1. 答案

2. 已知 10 个由小到大的两两不同的正整数 a_1，a_2，…，a_{10} 的和为 2012，则 a_5 的最大可能值是 331.

2. 答案

3. **把正整数 1 到 2012 这 2012 个正整数分组，使得每组内任意 3 个数的最大公因数为 1，那么至少需要分成 503 组.

3. 答案

4. 将 12 个完全相同的小球放入编号为 1 到 4 的四个盒子中，每个盒子中的小球不少于盒子的编号数，那么共有__10 种不同的放法.

4. 答案

5. 如果 $a<b<c$，$ac<0$ 且$|c|<|b|<|a|$，则$|x-a|+|x-b|+|x+c|$的最小值为-（a+c）.

5. 答案

6. 从 1 到 1000 这 1000 个正整数中，最多可以取出 56 个数使得取出的数中任意三个数之和能被 18 整除.

6. 答案

7. 一辆公共汽车从 12:20 出发，开始一次长达 100 千米的旅行，车上有一台电脑，它在下午 13:00，14:00，15:00，16:00，17:00 和 18:00 都说："假如以后的平均速度和以前的平均速度相同，则还要 1 小时才能抵达目的地."则在下午 18:00 时公共汽车走了___85 千米.

7. 答案

8. 将既能被 5 整除又能被 7 整除的正整数从 105 起从小到大排成一行，一共排 2000 个数，则这 2000 个数之和被 11 除的余数为___5___.

8. 答案

9. 将同时满足 ①能被 3 整除，②被 5 除余 2，③被 11 除余 4，这三个条件的所有的正整数按照从小到大的顺序排列，记为 a_1，a_2，a_3，…，如果 $a_{n-1}<2012<a_n$，则 n=___13.

9. 答案

10. 正整数按右图规律排列，问数 345 在第__20 行，第___7 列的方格内.

1	2	4	7	11	16			
3	5	8	12	17				
6	9	13	18					
10	14	19	25					
15	20							

10. 答案

11．**从 1，2，…，2012 中，最多取出 21___个数，使得取出来的数中的任意三个数里，都有一个数是另一个数的**倍数**．

11．答案

12．**从 1，2，…，1001 这 1001 个正整数中取出 n 个数，使得这 n 个数中任意两个数的差**都不是素数**，则 n 的最大值为__251__．

12．答案

二、解答题

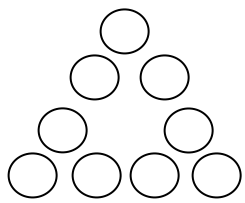
13．小兔和小龟同时需从 A 地出发去森林公园，小兔每分钟向前跳 36 米，每跳 3 分钟就原地玩耍，第一次玩耍 0.5 分钟，第二次玩耍 1 分钟，…，第 k 次玩耍 0.5k 分钟；小龟途中不休息也不玩耍．已知小龟比小兔早到森林公园 3 分 20 秒．A 地到森林公园有 2640 米，则小龟每分钟爬行多少米?

13．答案

14．求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 的正整数解（$a\leqslant b\leqslant c$）．

14．答案

15．如图，将 3，5，7，11，13，17，19，23，29 这九个数分别填入图中的九个〇内，使得这三条边中每条边上的〇中的数之和都相等，设这个相等的和为 $\boldsymbol{m}$，请求出 $\boldsymbol{m}$ 的最大值和最小值．



15．答案

16．求所有正整数 k，使得 k 的各位数字的积等于 $\frac{25}{8}k-211$．

16．答案

17．**$2n\times2n$ 的表格中，每个格子填 0 或 1，已知有 $3n$ 个 0，证明：可以删去 n 行，n 列，使得剩下的全是 1．

17．答案

18．从 1—100 这 100 个自然数中最多取出几个自然数，使得任何两个自然数的差都不是 3 的倍数？

18．答案

19．1—2001 这 2001 个数中最多可取出多少个数，使得这些数中任意三个数的和都不能被 7 整除？

19．答案

20．从 1—2006 的自然数中最多可以取出多少个数，使得任意两个数之差不是 1、2 或 6？

20．答案

21．从 1 到 2010 这 2010 个正整数中，最多可以取出 61 个数使得取出的数中任意三个数之和能被 33 整除．

21．答案

22．设有 2n×2n 个正方形方格棋盘，在其中任意的 3n 个方格中各有一枚棋子．求证：可以选出 n 行和 n

列，使得 3n 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.
22．答案

23. 如果你手头上有 n+1 个整数，而这些整数是小于或等于 2n，那么你一定会有一对数是互素的。你知道这是什么原因吗？
23．答案

24. n 为自然数，且 n 与 19434 的乘积的各个数位上的数字中恰有 4 个 0，求最小的 n
24．答案

A6001 参考答案

1．通项可以简化为 $\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$，（n=2,3,4,…,99） ，故 （运用裂项方法）

原式=$(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!})+\cdots+(\frac{1}{99!}-\frac{1}{100!})$ =1$-\frac{1}{100!}$

返回

2．因为 $0<a_1<a_2<\ldots<a_{10}$ 且 $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=2012$，要使 a_5 最大，必须 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，故 $a_5+a_6+\ldots+a_{10}=2012-1-2-3-4=2002$，又 $a_{10}>a_9>a_8>a_7>a_6\geqslant a_5+1$，故 $6a_5+1+2+3+4+5\leqslant 2002$，$6a_5\leqslant 1987$，$a_5=$ 最大为[1987/6]=331.

返回

3．解：初步设想，先将 1006 个偶数按由小到大的顺序分成两组，任意三个偶数都不能放在同一组，故最多只能分成 1006/2=503 组，再插入相邻的奇数，即（1,2,3,4)，（5,6,7,8），……，（2009,2010,2011,2012）共 503 组。
这里隐含了 两个连续自然数必定互素，进而得到 四个连续自然数必定任意三个互素。**反证可得。**

返回

4．解：利用排列组合中的“**隔板法**”解决，先将 1,2,3 个球放入编号为 2,3,4 的盒子中，题目变成了 “6 个球放入四个不同的盒子，且没有盒子是空的（即至少每个盒子里有一个球），问放法有多少？”。剩下 12-1-2-3=6 个球，并排放好，有 5 个空格，从中取 3 个空格放入隔板，故有 C_5^3=（5×4）÷2=10 种不同的放法。

返回

5．由**绝对值的几何意义**可以求解，由条件可知 $a<b<-c<0<c$,当 $x=b$ 时，$|x-a|+|x-b|+|x+c|$取最小值，为 $b-a+$（$-b-c$）$=-a-c$

返回

6．解：设任意取出 a，b，c，d，满足
 18|（$a+b+c$），18|（$a+b+d$），故 18|（$c-d$），即任意两个数模 18 余数相同（**同余逆定理**），
设 $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv r$（mod 18） 其中 0≤r<18
 所以 $a+b+c\equiv 3r\equiv 0$（mod 18），故 $r=0$，或 $r=6$，或 $r=12$

（1）当 r=0 时，任取的三个数都被 18 整除，它们是 18, 36，…, 990, 共有[1000/18]=55 个 18 的倍数；
（2）当 r=6 时，任取的三个数模 18，余数为 6，它们是 6,24，…，996，共有[（1000-6）/18]+1=56 个；
（3）当 r=12 时，任取的三个数模 18，余数都是 12，它们是 12,30，…，984，共有[(1000-12)/18]+1=55 个；
（4）当余数分别为 0,6,12 时，尽管三数之和是 18 的倍数，但是不满足题目任意取三个数的要求，舍去。
故 最多可以取出 56 个数。

返回

7．解：设 18:00 时，走了 x 千米，则前面 x 千米所花时间为 $5+\frac{40}{60}=\frac{17}{3}$ 小时，故其平均速度为：$\frac{3}{17}x$，

由题意知 $100-x=\frac{3}{17}x$，$x=100\div\frac{20}{17}=85$ 千米

返回

8．解：这 2000 个数由小到大分别是 $35k$，k=3,4,5，…，2002
求和得到 35×（3+4+5+…+2002）=35×1000×2005≡2×10×3≡5 (mod 11)

返回

9．由**中国剩余定理**求解得到：设该数的一个特解为 $x=a+b$，
其中 a 满足 $a\equiv0 \pmod 3$，$a\equiv0 \pmod{11}$，$a\equiv2 \pmod 5$，a 的一个解为 132；
b 满足 $b\equiv0 \pmod 3$，$b\equiv0 \pmod 5$，$b\equiv4 \pmod{11}$，b 的一个解为 15；
故 x=132+15=147 为一个特解，通解为 a_n= 147+[3,5,11]（n-1）=147+165（n-1）, n 为正整数。
当 n=13 时，$a_{12}=1962<2012<a_{13}=147+165(13-1)=2127$
故 n=13

返回

10．解：记录第 i 行，第 j 列的数为 A[i,j]，考察数串。
我们不妨将数重新排列如下

			1
		3	2
	6	5	4
10	9	8	7

……
发现：每行所包含的数的个数是等差数列 1,2,3，……，故第 n 行之前所包含的数的个数有 $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2\leqslant345$，而 345 在 25×26/2 与 26×27/2 之间，故第 25 列的最左边的数是 25×26/2=325,

所以第 26 列最右边的第一个数是 325+1=326，且 326+19=345，即 326 所在位置的列数减去 19，行数增加 19，就是 345 所在位置，也就是 345 在第 1+19=20 行，26-19=7 列。
返回

11．解：考察构造。设最多取 n 个数，分别为 $1\leqslant a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n\leqslant 2012$, 且满足 $a_i=k_ia_j$ (i<j, k_i 为不小于 2 的正整数)
要达到最多的 n，不妨设 $a_1=1$，$a_2=2a_1$， $a_3=2a_2$，…，$a_n=2a_{n-1}=2^{n-1}a_1$
因为 $2^{10}=1024<2012<2^{11}=2048$，所以 $2^{n-1}\leqslant 2012<2^{11}$, $n<12$, n 最大取 11.
故这 11 个数构成集合 A={1,2,4,8，…，2^{10}}
上述只是做到了任意两个数都是倍数关系，
另外，如果再加入 3,$2^1\times3$，$2^2\times3$，$2^3\times3$，…，$2^9\times3$，这 10 个数任意两个也有倍数关系，它们构成集合 B={3,6,12，…，$2^9\times3$}，
A，B 合起来共 21 个数，可以保证任意三个数中，必有 2 个是倍数关系。故至多可取 21 个数。
【所取 3 个数要么都是 A，要么都是 B，要么 2 个 A 和 1 个 B，要么 2 个 B 和 1 个 A】

返回

12．解：因为最小的合数是 4，故从任意两个数的差不是素数（即是合数或 1），得到：可以取 1,5,9，……，1001，（共 251 个数），这 251 个数中任取两个，差（大的减去小的）都是 4 的倍数。

返回

13．龟兔赛跑，因为距离已知，只要求出小龟的爬行时间，就可以计算速度，然而已知小龟比小兔早到 3 分 20 秒，故只要计算出小兔所花时间，就可以了。
小兔每分钟跳 36 米，2640 米需要 $2640\div36=73\frac{1}{3}$ 分钟；
分成 73 分钟可以分成 24 个 3 分钟，故小兔休息玩耍的时间为：
0.5×（1+2+3+…+24）=150 分
故小兔共耗时 $73\frac{1}{3}+150=223\frac{1}{3}$ 分
小龟爬行时间为 223−3=220 分，速度为每分钟 2640÷220=12 米。

返回

14．解：利用不等式范围求正整数解。显然 a≠1，即 a≥2，且 $2\leqslant a\leqslant b\leqslant c$, 从而 $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$，

所以 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{a}$，故 $2\leqslant a\leqslant 3$,

（1）当 $a=2$ 时，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\leq\frac{2}{b}$，$b\leqslant 4$，解得 $(a,b,c)=(2,4,4)$，或（2, 3, 6）

（2）当 a=3 时，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}\leq\frac{2}{b}$，$b$≤3，解得$(a,b,c)=(3,3,3)$

返回

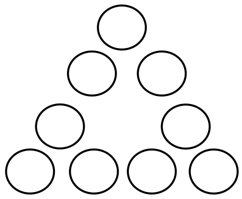
15．解：设三个角上的数字是 a，b，c，则

$3m=3+5+7+\ldots+29+(a+b+c)=127+(a+b+c)$

所以 $(a+b+c)\equiv 2 \pmod 3$

当 $(a+b+c)=19+23+29=71$ 时，m 取最大值，为（127+71）÷3=66

当 $(a+b+c)=3+7+13=23$ 时，m 取最小值，为（127+23）÷3=50



	19		
	17	5	
7			13
23	3	11	29

	3		
	13	5	
17			29
7	11	19	13

返回

16．解：因为 k 为正整数，所以 k 的各位数字之积为正整数，即 $\frac{25}{8}k-211$ 是正整数，故 $8|k$，不妨设 $k=8a$，

（1）显然 k 是偶数，含有偶数 2 这个因子，故 k 的各位数字之积也是偶数，所以 a 必定是奇数；

$25a-211=(8a)$ 的各位数字之积，且 $8a$ 不含有数字 0。

（2）$25a>211$，所以 $a>8$；

（3）如果 $8a$ 是两位数，即 $10\leqslant 8a\leqslant 99$，则 $(8a)$ 的各位数字之积 $\leqslant 9\times 9=81$，

$\therefore 25a\leqslant 211+99$，$a\leqslant 12$

综上（1）（2）（3）所述， a 只能取 9 和 11 时，满足条件，即 $k=72$ 和 88 时，$7\times 2=25\times 9-211=14$，$8\times 8=25\times 11=64$，经演算正确。

（4）如果 $8a$ 是三位数，即 $100\leqslant 8a\leqslant 999$，（$13\leqslant a\leqslant 124$）则 $313-211\leqslant 25a-211\leqslant 387-211$，

$102\leqslant(8a)$ 的各位数字之积 $\leqslant 176$，

$\therefore 211\leqslant 25a\leqslant 211+729$，$9\leqslant a\leqslant 37$，

综合起来就是 $13\leqslant a\leqslant 37$，

返回

17．解：利用打土豪的方法（谁含 0 多，就先打掉谁）。方法如下：

（1）先删除含 0 最多的 n 行，剩下 n 行中必定含 0 少于 n 个（抽屉原理：3n 个 0 放在 2n 个抽屉里）

（2）再删除含 0 的列，显然含 0 的列不多于 n，删除这些含 0 的列，就得到剩下的全部是 1.

返回

18. 解:同余类，除以 3 的余数只有 0,1,2 这三类，由抽屉原理，任取 4 个数，必有两个数同余，由同余定理，必有之差是 3 的倍数，故最多取出 3 个自然数，才能保证任意两个之差不是 3 的倍数。

返回

19. 解：巧妙构造分组，2001 mod 7 有 7 种情况，

按被 7 除的余数分组：

余 1 的个数：1 到 1996 共 286 个，余 2 的个数：2 到 1997 共 286 个
余 3 的个数：3 到 1998 共 286 个，余 4 的个数：4 到 1999 共 286 个
余 5 的个数：5 到 2000 共 286 个，余 6 的个数：6 到 2001 共 286 个
余 0 的个数：7 到 1995 共 285 个，
除余 0 的那组外，每组内任取 3 个数，其和都不能被 7 整除。

再考虑不同的组混合。
余 1+余 2 ，可以，572 个；余 1+余 4 ，可以，572 个
余 1+余 6 ，可以，572 个；余 2+余 4 ，可以，572 个
余 2+余 5 ，可以，571 个；余 3+余 4 ，可以，572 个
余 3+余 5 ，可以，571 个；余 3+余 6 ，可以，572 个
2 组的不可能超过 572 个。3 组的不可能。
因此取余 1、余 2 的 2 组共 572 个数，及加入余 0 组的 2 个数，共 574 个数，可以保证任意三个数之和都不能被 7 整除。

19 返回

20. 解 如果任意两个数之差不是 1、2 或 4,将用 5 除,分为 5 类.
将 123.....，2006 的数分为 7 类:
A 表示能被 7 整除 的数，共有 286 个；B 表示能被 7 除余 1 的数，共有 287 个.
C 表示能被 7 除余 2 的数,共有 287 个；D 表示能被 7 除余 3 的数,共有 287 个.
E 表示能被 7 除余 4 的数,共有 287 个；F 表示能被 7 除余 5 的数,共有 286 个.
G 表示能被 7 除余 6 的数,共有 286 个；

要使任意两个数之差不是 1，不能同时在 A 和 B，B 和 C，C 和 D，D 和 E，E 和 F，F 和 G 类中随便选取，

要使任意两个数之差不是 2 也不能同时在 A 和 C，B 和 D，C 和 E，D 和 F，E 和 G 类中随便选取，

要使任意两个数之差不是 6，也不能同时在 A 和 G 类中随便选取，取同一类中的所有数是允许的。

综上所述，被 7 除余数差 1，差 2 和差 6 的类中的数不能同时随便选取，但可以同时选取被 7 除余数差 3，差 4 和差 5 的类中的数，如既可以同时选取 A 和 D 类，也可同时选取 A 和 E 类，但选了 D 类的数就不能随便选取 E 类的数了，这 7 类数中只能同时选取两类，为了使取的数最多，可选 B 与 E 类 2*287=574，如果选 A 类与 D 类（取连续 7 个数字的第三个和第七个数字），要再加上 1。

20 返回

21．同理转化为任取 a，b，满足 33|（a-b），故 $a\equiv b\equiv c\equiv r \pmod{33}$，故 3r|33, r=0 或 11，分情况讨论，即可得解。同例 6.

21 返回

22. 解 利用整体换元法，假设出各行棋子数，得出 $P_1+P_2+P_n\geqslant 2n$，分析得出 $P_{n+1}+P_{2n}\geqslant n+1$，得出与已知矛盾，从而证明 n 行和 n 列包含了全部 3n 枚棋子.

证明：设各行的棋子数分别 P_1，P_2，P_n，P_{n+1}，P_{2n}．且 $P_1 \geqslant P_2 \geqslant P_n \geqslant P_{n+1} \geqslant P_{2n}$．
由题设 $P_1+P_2+P_n+P_{n+1}+P_{2n}=3n$，①
选取含棋子数为 P_1，P_2，P_n，的这 n 行，则 $P_1+P_2+P_n \geqslant 2n$，
否则，若 $P_1+P_2+P_n \leqslant 2n-1$，②
则 P_1，P_2，P_n 中至少有一个不大于 1，
由①，②得 $P_{n+1}+P_{2n} \geqslant n+1$，
从而 $P_{n+1}P_{2n}$ 中至少有一个大于 1，这与所设矛盾．
选出的这 n 行已含有不少于 2n 枚棋子，再选出 n 列使其包含其余的棋子（不多于 n 枚），
这样选取的 n 行和 n 列包含了全部 3n 枚棋子．
此题主要考查了抽屉原理的证明思路，从题设出发进行分析得出与题设出现矛盾，从而得出原命题的正确性．

22 返回

23. 解：构造法，取 *n* 个盒子，在第一个盒子我们放 1 和 2，在第二个盒子我们放 3 和 4，第三个盒子是放 5 和 6，依此类推直到第 *n* 个盒子放 2*n*-1 和 2*n* 这两个数。
现在我们在 *n* 个盒子里随意抽出 *n*＋1 个数。我们马上看到一定有一个盒子是被抽空的。因此在这 *n*+1 个数中曾有两个数是连续数，**很明显的：两个连续自然数是互素的**。因此这问题就解决了！

23 返回

24. 电脑编程解决或 Excel 中计算。53*19434=1030002， 19434=2*3*41*79
24 返回