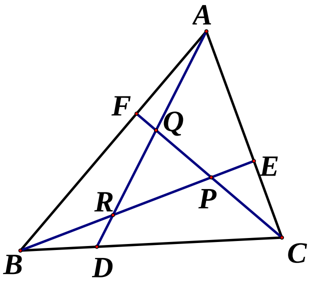
奥数平面几何部分
——面积法之三(教师)

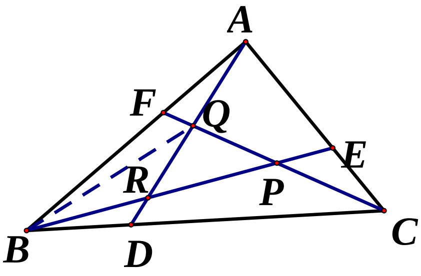
教学目标

1． 熟练掌握五大面积模型（等积模型，蝴蝶模型，鸟头模型，燕尾模型，相似模型）特殊的梯形蝴蝶模型，金字塔模型 ，沙漏模型，三角形中位线定理
2． 掌握五大面积模型的各种变形
3． 塞瓦定理

知识点拨

例 1. 如图，设 BD：$DC=p$，CE：$EA=q$，AF：$FB=r$，试用 p, q, r 表示 $S_{\Delta PQR}$：$S_{\Delta ABC}$





例 1. 解：连接 BQ，由燕尾定理的面积法得到

$$\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta AQC}}=\frac{BD}{DC}=\frac{p}{1}=\frac{pr}{r},\quad \frac{S_{\Delta AQC}}{S_{\Delta BQC}}=\frac{AF}{FB}=\frac{r}{1}$$

即 △ABC 被 Q 点分成了三个△，且

$S_{\triangle ABQ}$：$S_{\triangle AQC}$：$S_{\triangle BQC}=pr:r:1$

总份数为 $pr+r+1$,

由等积变形得到

$\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\dfrac{BD}{DC}=p$, △$ABC$ 被分成两个△，总份数为 p+1，故有

$S_{\triangle ABD}=\dfrac{p}{p+1}S_{\triangle ABC}$,　　$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{p+1}S_{\triangle ABC}$

$$\frac{DQ}{QA}=\frac{S_{\Delta DQC}}{S_{\Delta AQC}}=\frac{S_{\Delta BQC}-S_{\Delta BQD}}{S_{\Delta AQC}}$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta AQC}}=\frac{1}{r}+p-\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta AQC}}$$

$$=\frac{1}{r}+p-\frac{p}{r(p+1)(pr+r+1)}=\frac{1}{r(p+1)}$$

$$\therefore\ \frac{DQ}{QA}=\frac{1}{r(p+1)}$$

同理可以计算：　$\dfrac{ER}{RB}=\dfrac{1}{p(q+1)}$,　　$\dfrac{FP}{PC}=\dfrac{1}{q(r+1)}$

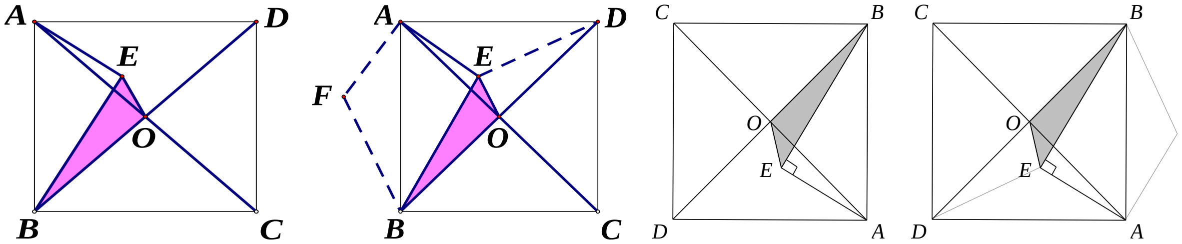
由此计算出围绕△PQR 周边的三个三角形面积。

$S_{\triangle AQC}=\dfrac{r}{pr+r+1}S_{\triangle ABC}$ ，$S_{\triangle ABR}=\dfrac{p}{qp+p+1}S_{\triangle ABC}$ ，　$S_{\triangle BPC}=\dfrac{q}{rq+q+1}S_{\triangle ABC}$

$$\therefore\ \frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=1-\frac{r}{pr+r+1}-\frac{p}{qp+p+1}-\frac{q}{rq+q+1}$$

$$=\frac{(pqr-1)^2}{(pr+r+1)(qp+p+1)(rq+q+1)}$$

例 2. 如图，以正方形的边 AB 为斜边在正方形内作直角三角形 ABE，$\angle AEB=90°$，AC、BD 交于 O，已知 AE、BE 的长分别为 3 cm、5 cm，求三角形 OBE 的面积．



例 2 解：如图，连接 DE，以 A 点为中心，将ΔADE 顺时针旋转 90° 到ΔABF 的位置．

那么∠EAF=∠EAB+∠BAF=∠EAB+∠DAE=90°，而∠AEB 也是 90°，所以四边形 AFBE 是直角梯形，且 AF=AE=3，所以梯形 $AFBE$ 的面积为：$(3+5)\times3\times\frac{1}{2}=12\ (cm^2)$．

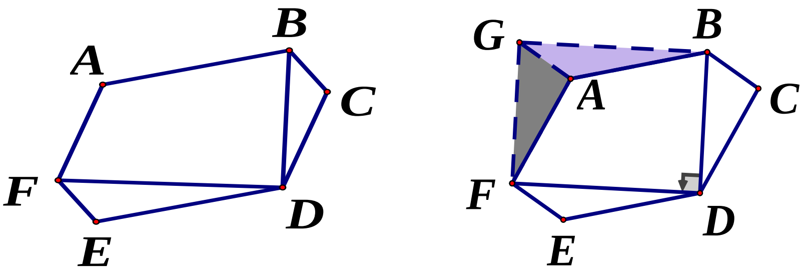
又因为ΔABE 是直角三角形，根据勾股定理，$AB^2=AE^2+BE^2=3^2+5^2=34$，

所以 $S_{ABCD}=AB^2=34$，$S_{\Delta ABD}=0.5S_{ABCD}=17\quad(cm^2)$．

那么 $S_{\Delta BDE}=S_{\Delta ABD}-(S_{\Delta ABE}+S_{\Delta ADE})=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta AFBE}=17-12=5\ (cm^2)$，

所以 $S_{\Delta OBE}=0.5\,S_{\Delta BDE}=2.5\ (cm^2)$．

例 3. 如下图，六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=ED$，$AF=CD$，$BC=EF$，且有 AB 平行于 ED，AF 平行于 CD，BC 平行于 EF，对角线 FD 垂直于 BD，已知 FD=24 厘米，BD=18 厘米，请问六边形 $ABCDEF$ 的面积是多少平方厘米？



例 3 解：如图，我们将ΔBCD 平移使得 CD 与 AF 重合，将ΔDEF 平移使得 ED 与 AB 重合，这样 EF、BC 都重合到图中的 AG，得到一个长方形 $BGFD$，它的面积与原六边形的面积相等，显然长方形 $BGFD$ 的面积为 24×18=432 平方厘米，所以六边形 $ABCDEF$ 的面积为 432 平方厘米．

例 4. 如图，正方形 $ABCD$ 面积为 3 平方厘米，M 是 AD 边上的中点，对角线 AC 与 BM 交于点 G．求图中阴影部分的面积．

例 4. 解 因为 M 是 AD 边上的中点，所以 AM：BC=1:2，

根据梯形蝴蝶定理可以知道

$S_{\Delta AMG}:S_{\Delta ABG}:S_{\Delta MCG}:S_{\Delta BGC}=1^2:(1\times2):(1\times2):2^2=1:2:2:4$，

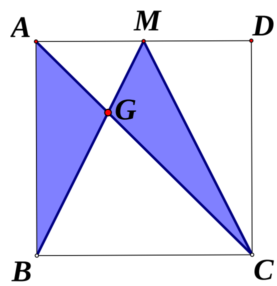
设 $S_{\Delta AMG}=1$ 份，则 $S_{\Delta MCD}=1+2=3$ 份，

所以正方形的面积为 1+2+2+4+3=12 份，

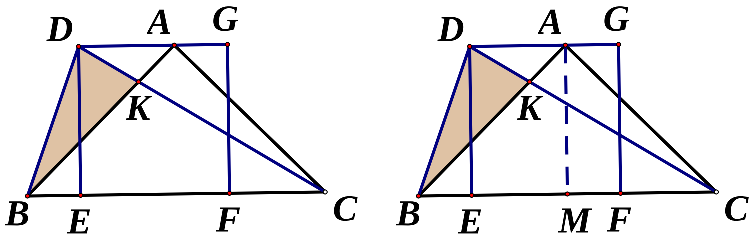
$S_{阴影}=2+2=4$ 份，

所以 $S_{阴影}:S_{正方形}=4:12=1:3$，

所以 $S_{阴影}$=1 平方厘米．



例 5. 如图，ΔABC 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，正方形 $DEFG$ 的 EF 边在 BC 上，线段 AB 与 CD 相交于 K 点．已知正方形 $DEFG$ 的面积 48，AK：KB=1:3，则ΔBKD 的面积是多少？



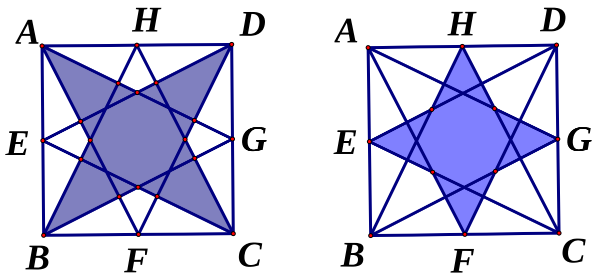
例 5 解 由于 $DEFG$ 是正方形，所以 DA 与 BC 平行，那么四边形 $ADBC$ 是梯形.
在梯形 $ADBC$ 中，ΔBKD 和ΔACK 的面积是相等的.

而 AK：KB=1:3，所以ΔACK 的面积是ΔABC 面积的 $\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$，那么$\Delta BKD$ 的面积也是ΔABC 面积的 $\frac{1}{4}$.

由于ΔABC 是等腰直角三角形，如果过 A 作 BC 的垂线，M 为垂足，那么 M 是 BC 的中点，而且 $AM=DE$，可见ΔABM 和ΔACM 的面积都等于正方形 $DEFG$ 面积的一半，所以ΔABC 的面积与正方形 $DEFG$ 的面积相等，为 48.

那么ΔBKD 的面积为 $48\times\frac{1}{4}=12$.

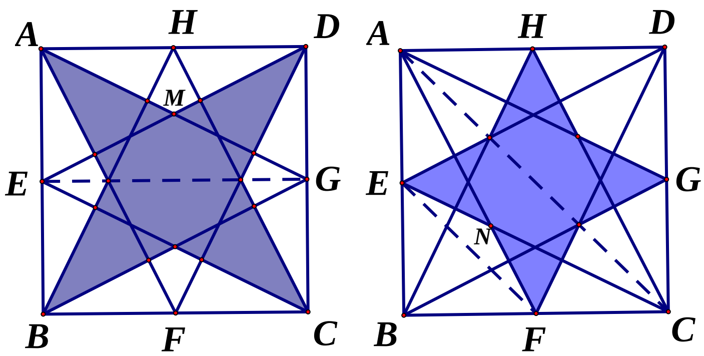
例 6. 下图中，两个四边形都是边长为 1 的正方形 $ABCD$，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，如果左图中阴影部分与右图中阴影部分的面积之比是最简分数 $\frac{m}{n}$，那么，（$m+n$）的值等于________.



例 6 解 左、右两个图中的阴影部分都是不规则图形，不方便直接求面积，观察发现两个图中的空白部分面积都比较好求，所以可以先求出空白部分的面积，再求阴影部分的面积.

如下图所示，在左图中连接 EG. 设 AG 与 DE 的交点为 M.

左图中 $AEGD$ 为长方形，可知ΔAMD 的面积为长方形 $AEGD$ 面积的 $\frac{1}{4}$，所以ΔAMD 的面积为 $1^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. 又左图中四个空白三角形的面积是相等的，所以左图中阴影部分的面积为 $1-\frac{1}{8}\times4=\frac{1}{2}$.



如上图所示，在右图中连接 AC、EF. 设 AF、EC 的交点为 N.

可知 EF∥AC 且 $AC=2EF$. 那么ΔBEF 的面积为ΔABC 面积的 $\frac{1}{4}$，所以ΔBEF 的面积为 $1^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，

梯形 $AEFC$ 的面积为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

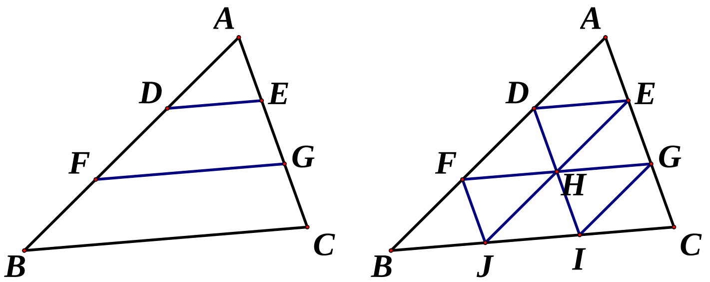
在梯形 $AEFC$ 中，由于 $EF:AC$=1:2，根据梯形蝴蝶定理，其四部分的面积比为：

$1^2:1\times2:1\times2:2^2=1:2:2:4$，所以三角形 EFN 的面积为 $\frac{3}{8}\times\frac{1}{1+2+2+4}=\frac{1}{24}$，那么四边形 BENF 的面积为 $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}$.而右图中四个空白四边形的面积是相等的，所以右图中阴影部分的面积为 $1-\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}$.

那么左图中阴影部分面积与右图中阴影部分面积之比为 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$=3:2，即 $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$，

那么 $m+n$=3+2=5.

例 7. 如图，ΔABC 中，$DE//FG//BC$，$AD=DF=FB$，则 $S_{\Delta ADE}:S_{DEGF}:S_{FGCB}$=________.



例 7 解 1 设 $S_{\Delta ADE}$=1 份，根据**相似三角形面积比等于相似比的平方**，

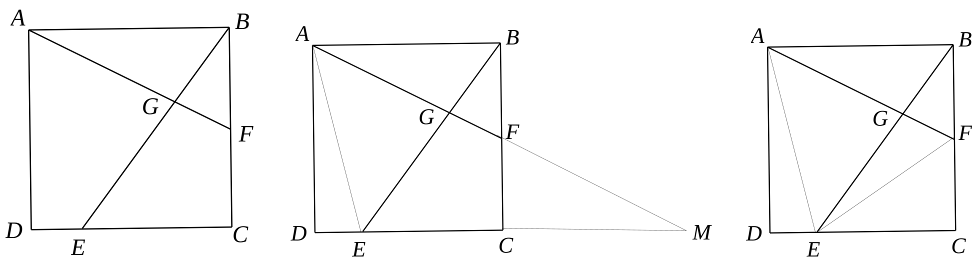
所以 $S_{\Delta ADE}$：$S_{\Delta AFG}=AD^2$：AF^2=1:4，$S_{\Delta ADE}$：$S_{\Delta ABC}=AD^2$：AB^2=1:9，

因此 $S_{\Delta AFG}$= 4 份，$S_{\Delta ABC}$ =9 份，故有 S_{DEFG}=4−1=3 份，S_{FGCB}=9−4=5 份，

所以 $S_{\Delta ADE}$：S_{DEFG}：S_{FGCB} =1:3:5

解 2 如图将ΔABC 剖分成全等的小三角形，根据三角形个数也可以判断。

例 8. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，F 是 BC 边的中点，E 是 DC 边上的点，且 DE：EC=1:3，AF 与 BE 相交于点 G，求 $S_{\Delta ABG}$



例 8 解 方法一：连接 AE，延长 AF 和 DC，两条延长线交于点 M，构造出两个沙漏，所以有 AB：$CM=BF$：FC=1:1，因此 CM=4，根据题意有 CE=3，

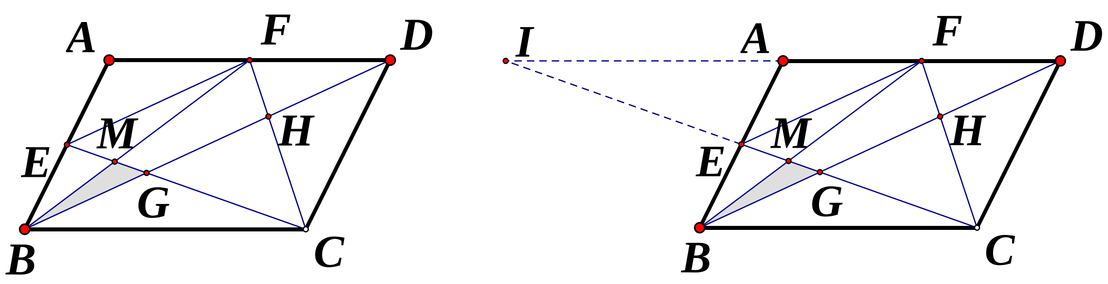
再根据另一个沙漏有 GB：$GE=AB$：EM=4:7，所以 $S_{\Delta ABG}=\frac{4}{4+7}$ $S_{\Delta ABE}=\frac{4}{11}\times(4\times4\div2)=\frac{32}{11}$.

方法二：连接 AE、EF，分别求得 $S_{\Delta ABF}$ =4×2÷2=4，$S_{\Delta AEF}$ =4×4−4×1÷2−3×2÷2−4=7，

根据蝴蝶定理 $S_{\Delta ABF}$ ：$S_{\Delta AEF}$ =4:7=BG：GE，

所以 $S_{\Delta ABG}=\frac{4}{4+7}$ $S_{\Delta ABE}=\frac{4}{11}\times(4\times4\div2)=\frac{32}{11}$.

例 9. 如图所示，已知平行四边形 $ABCD$ 的面积是 1，E、F 是 AB、AD 的中点，BF 交 EC 于点 M，求ΔBMG 的面积.



例 9　解法一：由题意可得，E、F 是 AB、AD 的中点，得 $EF//BD$，而 FD：BC=FH：HC=1:2，EB：CD=BG：GD=1:2 所以 CH：CF=GH：EF=2:3，并得 G、H 是 BD 的三等分点，

所以 $BG=GH=HD$，

所以 BG：EF=BM：MF=2:3，所以 $BM=\frac{2}{5}BF$，$S_{\Delta BDF}=\frac{1}{2}$ $S_{\Delta BDF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ $S_{ABCD}=$ $\frac{1}{4}$；

又因为 $BG=\frac{1}{3}BD$，所以 $S_{\Delta BMG}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$ $S_{\Delta BDF}=$ $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ $S_{ABCD}=\frac{1}{30}$.

解法二：延长 CE 交 DA 于 I，如右图，

可得，AI：BC=AE：EB=1:1，从而可以确定 M 点的位置，沙漏模型

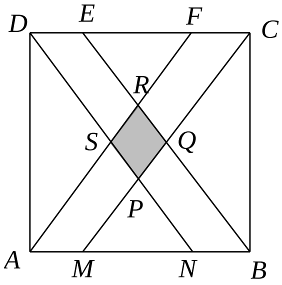
BM：MF=BC：IF=2:3，BG：GD=BC：DI=1:2

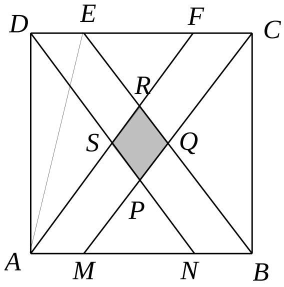
$\therefore BM=\frac{2}{5}BF$，$BG=\frac{1}{3}BD$　（两个沙漏模型）

由共角鸟头定理得到

$S_{\Delta BMG}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$ $S_{\Delta BDF}=$ $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ $S_{ABCD}=\frac{1}{30}$

【例 1】 如图，$ABCD$ 为正方形，$AM=NB=DE=FC=1\,\text{cm}$ 且 $MN=2\,\text{cm}$，请问四边形 $PQRS$ 的面积为多少？





【解析】(法1)由 $AB//CD$，有 $\dfrac{MP}{MN}=\dfrac{PC}{DC}$，所以 $PC=2PM$，又 $\dfrac{MQ}{QC}=\dfrac{MB}{EC}$，所以

$MQ=QC=\dfrac{1}{2}MC$，所以 $PQ=\dfrac{1}{2}MC-\dfrac{1}{3}MC=\dfrac{1}{6}MC$，所以 S_{SPQR} 占 S_{AMCF} 的 $\dfrac{1}{6}$，

所以 $S_{SPQR}=\dfrac{1}{6}\times1\times(1+1+2)=\dfrac{2}{3}\ (\text{cm}^2)$.

(法2)如图，连结 AE，则 $S_{\Delta ABE}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8\,(\text{cm}^2)$，

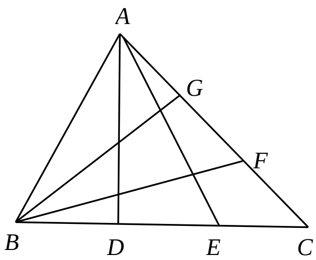
而 $\dfrac{RB}{AB}=\dfrac{ER}{EF}$，所以 $\dfrac{RB}{EF}=\dfrac{AB}{EF}=2$，$S_{\Delta ABR}=\dfrac{2}{3}S_{\Delta ABE}=\dfrac{2}{3}\times8=\dfrac{16}{3}\,(\text{cm}^2)$.

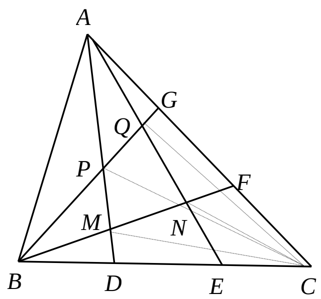
而 $S_{\Delta MBQ}=S_{\Delta ANS}=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{1}{2}=3\,(\text{cm}^2)$，因为 $\dfrac{MN}{DC}=\dfrac{MP}{PC}$，

所以 $MP=\dfrac{1}{3}MC$，则 $S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}\,(\text{cm}^2)$，阴影部分面积等于

$S_{\Delta ABR}-S_{\Delta ANS}-S_{\Delta MBQ}+S_{\Delta MNP}=\dfrac{16}{3}-3-3+\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\,(\text{cm}^2)$.

【例 2】 **如图，三角形 ABC 的面积是1，$BD=DE=EC$，$CF=FG=GA$，三角形 ABC 被分成9 部分，请写出这9 部分的面积各是多少?**





【解析】设 BG 与 AD 交于点 P，BG 与 AE 交于点 Q，BF 与 AD 交于点 M，BF 与 AE 交于点 N. 连接 CP，CQ，CM，CN.

根据燕尾定理，$S_{\triangle ABP}:S_{\triangle CBP}=AG:GC=1:2$，$S_{\triangle ABP}:S_{\triangle ACP}=BD:CD=1:2$，设 $S_{\triangle ABP}=1$(份)，

则 $S_{\triangle ABC}=1+2+2=5$(份)，所以 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{5}$

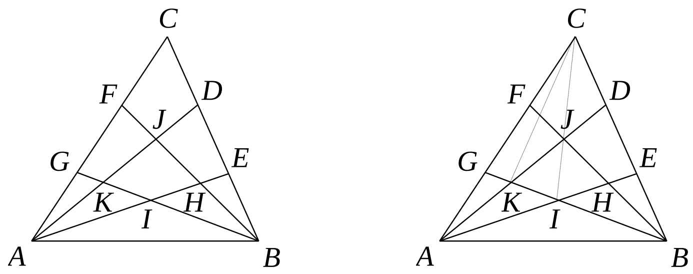
同理可得，$S_{\triangle ABQ}=\dfrac{2}{7}$，$S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}$，而 $S_{\triangle ABG}=\dfrac{1}{3}$，所以 $S_{\triangle APQ}=\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{35}$，$S_{\triangle AQG}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{21}$.

同理，$S_{\triangle BPM}=\dfrac{3}{35}$ $S_{\triangle BDM}=\dfrac{1}{21}$，所以 $S_{四边形PQMN}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{35}=\dfrac{9}{70}$，$S_{四边形MNED}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{35}-\dfrac{9}{70}=\dfrac{5}{42}$，

$S_{四边形NFCE}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{21}-\dfrac{5}{42}=\dfrac{1}{6}$，$S_{四边形GFNQ}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{21}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{42}$

【巩固】如图，ΔABC 的面积为 1，点 D、E 是 BC 边的三等分点，点 F、G 是 AC 边的三等分点，那么

四边形 $JKIH$ 的面积是多少？



【解析】连接 CK 、 CI 、 CJ .

根据燕尾定理， $S_{\Delta ACK}:S_{\Delta ABK}=CD:BD=1:2$ ， $S_{\Delta ABK}:S_{\Delta CBK}=AG:CG=1:2$ ，

所以 $S_{\Delta ACK}:S_{\Delta ABK}:S_{\Delta CBK}=1:2:4$ ，那么 $S_{\Delta ACK}=\frac{1}{1+2+4}=\frac{1}{7}$ ， $S_{\Delta AGK}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACK}=\frac{1}{21}$.

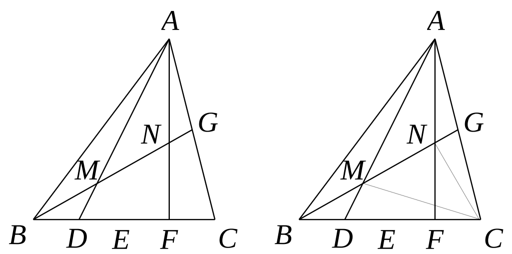
类似分析可得 $S_{\Delta AGI}=\frac{2}{15}$.

又 $S_{\Delta ABJ}:S_{\Delta CBJ}=AF:CF=2:1$ ， $S_{\Delta ABJ}:S_{\Delta ACJ}=BD:CD=2:1$ ，可得 $S_{\Delta ACJ}=\frac{1}{4}$.

那么， $S_{CGKJ}=\frac{1}{4}-\frac{1}{21}=\frac{17}{84}$.

根据对称性，可知四边形 $CEHJ$ 的面积也为 $\frac{17}{84}$ ，那么四边形 $JKIH$ 周围的图形的面积之和为 $S_{CGKJ}\times 2+S_{\Delta AGI}+S_{\Delta ABE}=\frac{17}{84}\times 2+\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=\frac{61}{70}$ ，所以四边形 $JKIH$ 的面积为 $1-\frac{61}{70}=\frac{9}{70}$.

【例 3】 **右图， $\triangle ABC$ 中， G 是 AC 的中点， D 、 E 、 F 是 BC 边上的四等分点， AD 与 BG 交于 M ， AF 与 BG 交于 N ，已知 $\triangle ABM$ 的面积比四边形 $FCGN$ 的面积大 7.2 平方厘米，则 $\triangle ABC$ 的面积是多少平方厘米？**



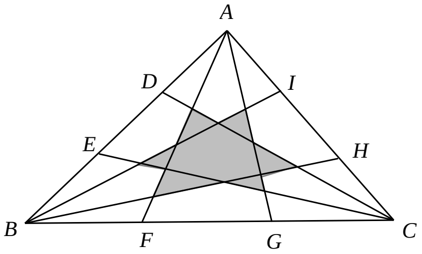
【解析】连接 CM 、 CN .

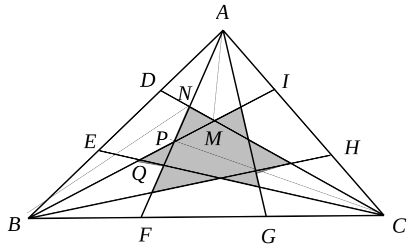
根据燕尾定理， $S_{\triangle ABM}:S_{\triangle CBM}=AG:GC=1:1$ ， $S_{\triangle ABM}:S_{\triangle ACM}=BD:CD=1:3$ ，所以 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$ ；

再根据燕尾定理， $S_{\triangle ABN}:S_{\triangle CBN}=AG:GC=1:1$ ，所以 $S_{\triangle ABN}:S_{\triangle FBN}=S_{\triangle CBN}:S_{\triangle FBN}=4:3$ ，所以 $AN:NF=4:3$ ，那么 $\frac{S_{\triangle ANG}}{S_{\triangle AFC}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{4+3}=\frac{2}{7}$ ，所以 $S_{FCGN}=\left(1-\frac{2}{7}\right)S_{\triangle AFC}=\frac{5}{7}\times\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}$.

根据题意，有 $\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}-\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}=7.2$ ，可得 $S_{\triangle ABC}=336$ (平方厘米)

【例 4】 **如图，面积为 1 的三角形 ABC 中， D、E、F、G、H、I 分别是 AB、BC、CA 的三等分点，求阴影部分面积.**





【解析】三角形在开会，那么就好好利用三角形中最好用的比例和燕尾定理吧！

令 BI 与 CD 的交点为 M，AF 与 CD 的交点为 N，BI 与 AF 的交点为 P，BI 与 CE 的交点为 Q，连接 AM、BN、CP

⑴求 $S_{四边形ADMI}$：在 $\triangle ABC$ 中，根据燕尾定理，$S_{\triangle ABM}:S_{\triangle CBM}=AI:CI=1:2$

$S_{\triangle ACM}:S_{\triangle CBM}=AD:BD=1:2$

设 $S_{\triangle ABM}=1$(份)，则 $S_{\triangle CBM}=2$(份)，$S_{\triangle ACM}=1$(份)，$S_{\triangle ABC}=4$(份)，

所以 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABM}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AIM}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$，

所以 $S_{四边形ADMI}=(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，

同理可得另外两个顶点的四边形面积也分别是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{6}$

⑵求 $S_{五边形DNPQE}$：在 $\triangle ABC$ 中，根据燕尾定理 $S_{\triangle ABN}:S_{\triangle ACN}=BF:CF=1:2$

$S_{\triangle ACN}:S_{\triangle BCN}=AD:BD=1:2$，

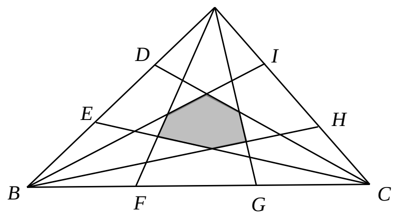
所以 $S_{\triangle ADN}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$，同理 $S_{\triangle BEQ}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$

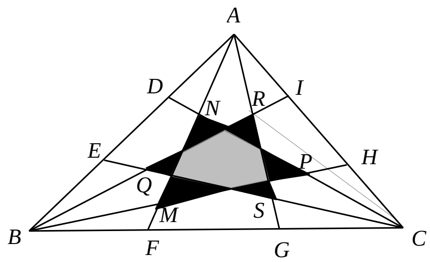
在 $\triangle ABC$ 中，根据燕尾定理 $S_{\triangle ABP}:S_{\triangle ACP}=BF:CF=1:2$，$S_{\triangle ABP}:S_{\triangle CBP}=AI:CI=1:2$

所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{五边形DNPQE}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ADN}-S_{\triangle BEP}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{21}-\frac{1}{21}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{11}{105}S_{\triangle ABC}$

同理另外两个五边形面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{11}{105}$，所以 $S_{阴影}=1-\frac{1}{6}\times3-\frac{11}{105}\times3=\frac{13}{70}$

【例 5】 如图，面积为 l 的三角形 ABC 中，D、E、F、G、H、I 分别是 AB、BC、CA 的三等分点，求中心六边形面积.





【解析】设深黑色六个三角形的顶点分别为 N、R、P、S、M、Q，连接 CR

在 $\triangle ABC$ 中根据燕尾定理，$S_{\triangle ABR}:S_{\triangle ACR}=BG:CG.=2:1$，

$S_{\triangle ABR}:S_{\triangle CBR}=AI:CI=1:2$

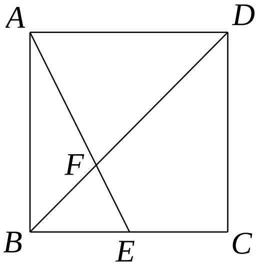
所以 $S_{\triangle ABR}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$，同理 $S_{\triangle ACS}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CQB}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$

所以 $S_{\triangle RQS}=1-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$，同理 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{7}$

根据容斥原理，和上题结果 $S_{六边形}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{13}{70}=\frac{1}{10}$

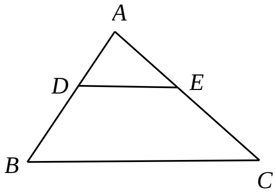
课后练习（面积法三）：

1. 在下图的正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 边的中点，AE 与 BD 相交于 F 点，三角形 BEF 的面积为 1 平方厘米，那么正方形 $ABCD$ 面积是_________平方厘米.



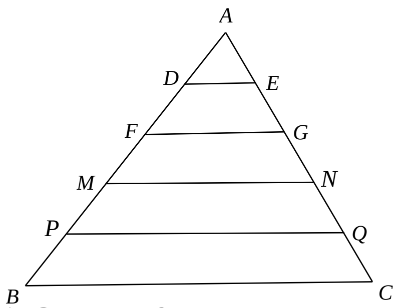
1. 解 连接 DE，根据题意可知 $BE:AD=1:2$，根据蝴蝶定理得 $S_{梯形}=(1+2)^2=9$（平方厘米），$S_{\triangle ECD}=3$（平方厘米），那么 $S_{\square ABCD}=12$（平方厘米）.

2. 如图，DE 平行 BC，且 $AD=2$，$AB=5$，$AE=4$，求 AC 的长.



2. 解由金字塔模型得 $AD:AB=AE:AC=DE:BC=2:5$，所以 $AC=4\div2\times5=10$

3. 如图，$\triangle ABC$ 中，DE，FG，MN，PQ，BC 互相平行，$AD=DF=FM=MP=PB$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=$________.

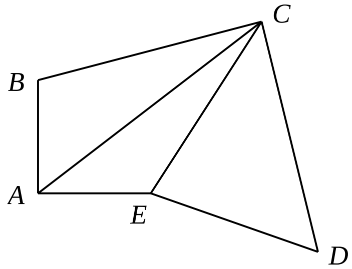


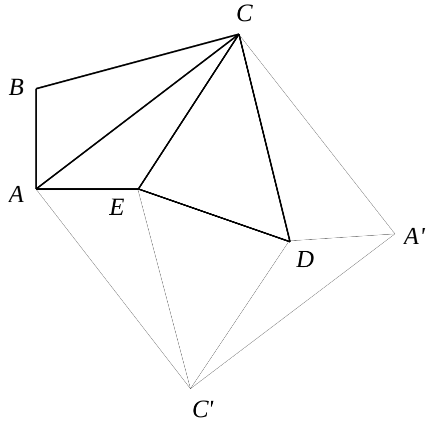
3. 解 设 $S_{\triangle ADE}=1$ 份，$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}=AD^2:AF^2=1:4$，因此 $S_{\triangle AFG}=4$ 份，进而有 $S_{四边形DEGF}=3$ 份，同理有 $S_{四边形FGNM}=5$ 份，$S_{四边形MNQP}=7$ 份，$S_{四边形PQCB}=9$ 份.

所以有

$$S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=1:3:5:7:9$$

4. 如图，已知 $AB=AE=4\text{cm}$，$BC=DC$，$\angle BAE=\angle BCD=90^\circ$，$AC=10\text{cm}$，则 $S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACE}+S_{\Delta CDE}=$ cm^2.



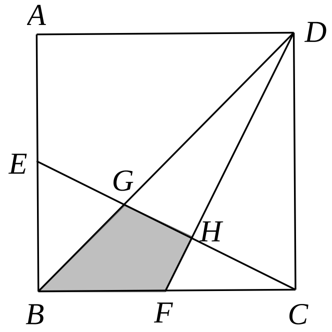


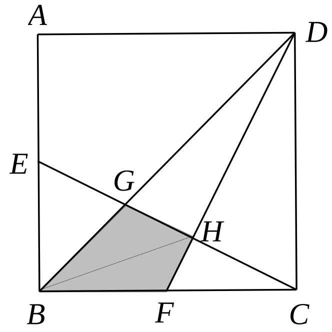
4. 解 将三角形 ABC 绕 A 点和 C 点分别顺时针和逆时针旋转 90°，构成三角形 AEC' 和 $A'DC$，再连接 $A'C'$，显然 $AC \perp AC'$， $AC \perp A'C$， $AC = A'C = AC'$，所以 $ACA'C'$ 是正方形．三角形 AEC' 和三角形 $A'DC$ 关于正方形的中心 O 中心对称，在中心对称图形 $ACA'C'$ 中有如下等量关系：

$S_{\Delta AEC} = S_{\Delta A'DC'}$； $S_{\Delta AEC'} = S_{\Delta A'DC}$； $S_{\Delta CED} = S_{\Delta C'DE}$．

所以 $S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACE} + S_{\Delta CDE} = S_{\Delta AEC'} + S_{\Delta ACE} + S_{\Delta CDE} = \frac{1}{2} S_{\square ACA'C'} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50\text{cm}^2$．

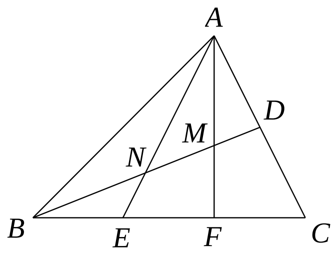
5. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积是120平方厘米，E 是 AB 的中点，F 是 BC 的中点，四边形 $BGHF$ 的面积是_____平方厘米．

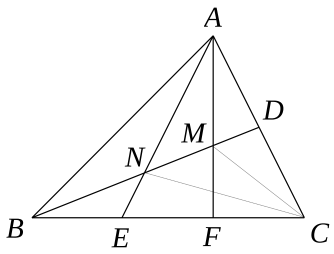




5. 解 连接 BH，根据沙漏模型得 $BG:GD = 1:2$，设 $S_{\triangle BHC} = 1$ 份，根据燕尾定理 $S_{\triangle CHD} = 2$ 份，$S_{\triangle BHD} = 2$ 份，因此 $S_{正方形} = (1+2+2)\times 2 = 10$ 份， $S_{BFHG} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$，所以 $S_{BFHG} = 120 \div 10 \times \frac{7}{6} = 14$(平方厘米).

6. 如图， ΔABC 中，点 D 是边 AC 的中点，点 E 、 F 是边 BC 的三等分点，若 ΔABC 的面积为 1，那么四边形 $CDMF$ 的面积是_________．





6. 解 由于点 D 是边 AC 的中点，点 E 、 F 是边 BC 的三等分点，如果能求出 BN 、 NM 、 MD 三段的比，那么所分成的六小块的面积都可以求出来，其中当然也包括四边形 $CDMF$ 的面积．

连接 CM 、 CN ．

根据燕尾定理， $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta ACM} = BF : CF = 2:1$，而 $S_{\Delta ACM} = 2S_{\Delta ADM}$，所以 $S_{\Delta ABM} = 2S_{\Delta ACM} = 4S_{\Delta ADM}$，

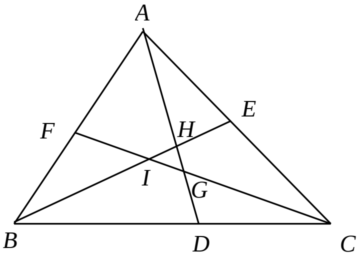
那么 $BM = 4DM$，即 $BM = \frac{4}{5} BD$．

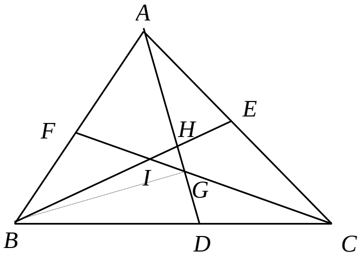
那么 $S_{\Delta BMF} = \frac{BM}{BD} \times \frac{BF}{BC} \times S_{\Delta BCD} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$， $S_{四边形CDMF} = \frac{1}{2} - \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$．

另解：得出 $S_{\Delta ABM} = 2S_{\Delta ACM} = 4S_{\Delta ADM}$ 后，可得 $S_{\Delta ADM} = \frac{1}{5} S_{\Delta ABD} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$，

则 $S_{四边形CDMF} = S_{\Delta ACF} - S_{\Delta ADM} = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$．

7. 如右图，三角形 ABC 中， $AF:FB = BD:DC = CE:AE = 4:3$，且三角形 ABC 的面积是 74，求角形 GHI 的面积．





7. 解 连接 BG，$S_{\triangle AGC}=12$ 份

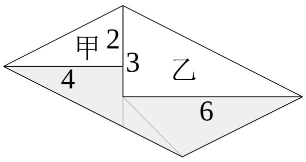
根据燕尾定理，$S_{\triangle AGC}:S_{\triangle BGC}=AF:FB=4:3=12:9$，$S_{\triangle ABG}:S_{\triangle AGC}=BD:DC=4:3=16:12$

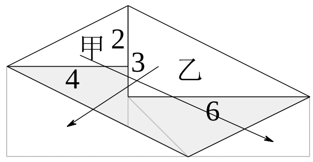
得 $S_{\triangle BGC}=9$(份)，$S_{\triangle ABG}=16$(份)，则 $S_{\triangle ABC}=9+12+16=37$(份)，因此 $\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{12}{37}$，

同理连接 AI、CH 得 $\frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{12}{37}$，$\frac{S_{\triangle BIC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{12}{37}$，所以 $\frac{S_{\triangle GHI}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{37-12-12-12}{37}=\frac{1}{37}$

三角形 ABC 的面积是 74，所以三角形 GHI 的面积是 $74\times\frac{1}{37}=2$

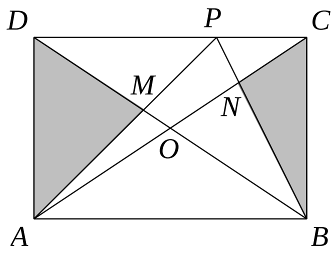
8. 按照图中的样子，在一平行四边形纸片上割去了甲、乙两个直角三角形．已知甲三角形两条直角边分别为 $2cm$ 和 $4cm$，乙三角形两条直角边分别为 $3cm$ 和 $6cm$，求图中阴影部分的面积．





8. 解 如右图，我们将三角形甲与乙进行平移，就会发现平行四边形面积等于平移后两个长方形面积之和．所以阴影部分面积为：$3\times4+6\times2-(3\times6\div2+4\times2\div2)=11(cm^2)$

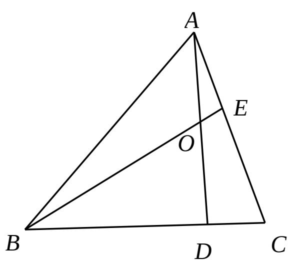
9. 如图所示，矩形 $ABCD$ 的面积为 36 平方厘米，四边形 $PMON$ 的面积是 3 平方厘米，则阴影部分的面积是________平方厘米．

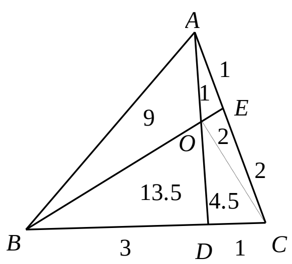


9. 解 因为三角形 ABP 面积为矩形 $ABCD$ 的面积的一半，即 18 平方厘米，三角形 ABO 面积为矩形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{4}$，即 9 平方厘米，又四边形 $PMON$ 的面积为 3 平方厘米，所以三角形 AMO 与三角形 BNO 的面积之和是 $18-9-3=6$ 平方厘米．

又三角形 ADO 与三角形 BCO 的面积之和是矩形 $ABCD$ 的面积的一半，即 18 平方厘米，所以阴影部分面积为 $18-6=12$ (平方厘米)．

10. 如图，已知 $BD=3DC$，$EC=2AE$，BE 与 CD 相交于点 O，则 $\triangle ABC$ 被分成的 4 部分面积各占 $\triangle ABC$ 面积的几分之几？

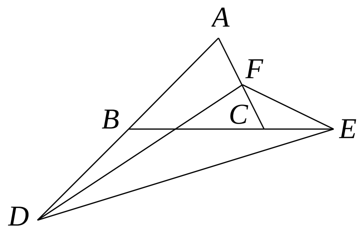




10. 解 连接 CO，设 $S_{\triangle AEO}=1$ 份，则其他部分的面积如图所示，所以 $S_{\triangle ABC}=1+2+9+18=30$ 份，所以四

部分按从小到大各占$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{30},\frac{2+4.5}{30}=\frac{13}{60},\frac{9}{30}=\frac{3}{10},\frac{13.5}{30}=\frac{9}{20}$

11. 如图，在$\triangle ABC$中，延长AB至D，使$BD=AB$，延长BC至E，使$CE=\frac{1}{2}BC$，F是AC的中点，若$\triangle ABC$的面积是2，则$\triangle DEF$的面积是多少？



11. 解 $\because$在$\triangle ABC$和$\triangle CFE$中，$\angle ACB$与$\angle FCE$互补，

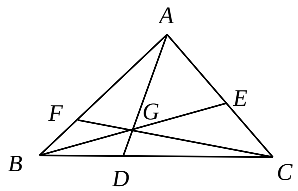
$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCE}}=\frac{AC\cdot BC}{FC\cdot CE}=\frac{2\times 2}{1\times 1}=\frac{4}{1}$.

又$S_{\triangle ABC}=2$，所以$S_{\triangle FCE}=0.5$.

同理可得$S_{\triangle ADF}=2$，$S_{\triangle BDE}=3$.

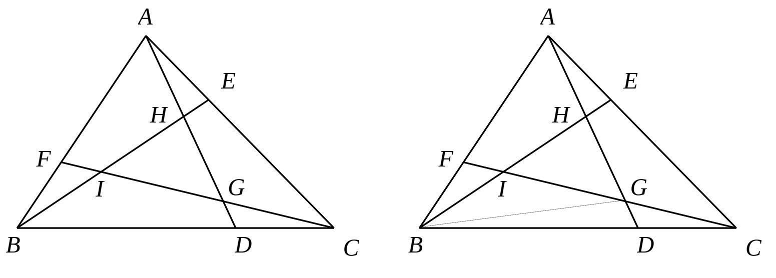
所以$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle DEB}-S_{\triangle ADF}=2+0.5+3-2=3.5$

12. 如图，$BD:DC=2:3$，$AE:CE=5:3$，则$AF:BF=$______



12. 解 根据燕尾定理有$S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG}=2:3=10:15$，$S_{\triangle ABG}:S_{\triangle BCG}=5:3=10:6$，所以$S_{\triangle ACG}:S_{\triangle BCG}=15:6=5:2=AF:BF$

13. 如图在$\triangle ABC$中，$\frac{DC}{DB}=\frac{EA}{EC}=\frac{FB}{FA}=\frac{1}{3}$，求$\frac{\triangle GHI\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}$的值.



13. 解 连接BG，设$S_{\triangle BGC}=1$份，根据燕尾定理$S_{\triangle AGC}:S_{\triangle BGC}=AF:FB=3:1$，$S_{\triangle ABG}:S_{\triangle AGC}=BD:DC=3:1$，得$S_{\triangle AGC}=3$(份)，$S_{\triangle ABG}=9$(份)，则$S_{\triangle ABC}=13$(份)，因此$\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{13}$，同理连接$AI$、$CH$得$\frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle ABC}}=13$，$\frac{S_{\triangle BIC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{13}$，所以$\frac{S_{\triangle GHI}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{13-3-3-3}{13}=\frac{4}{13}$