《高中数学解题思维与思想》

导　　读

数学家G．波利亚在《怎样解题》中说过：数学教学的目的在于培养学生的思维能力，培养良好思维品质的途径，是进行有效的训练，本策略结合数学教学的实际情况，从以下四个方面进行讲解：

一、数学思维的变通性

根据题设的相关知识，提出灵活设想和解题方案

二、数学思维的反思性

提出独特见解，检查思维过程，不盲从、不轻信。

三、数学思维的严密性

考察问题严格、准确，运算和推理精确无误。

四、数学思维的开拓性

对一个问题从多方面考虑、对一个对象从多种角度观察、对一个题目运用多种不同的解法。

什么”转变，从而培养他们的思维能力。

《思维与思想》的即时性、针对性、实用性，已在教学实践中得到了全面验证。

一、高中数学解题思维策略

第一讲　数学思维的变通性

一、概念

数学问题千变万化，要想既快又准的解题，总用一套固定的方案是行不通的，必须具有思维的变通性——善于根据题设的相关知识，提出灵活的设想和解题方案。根据数学思维变通性的主要体现，本讲将着重进行以下几个方面的训练：

（1）善于观察

心理学告诉我们：感觉和知觉是认识事物的最初级形式，而观察则是知觉的高级状态，是一种有目的、有计划、比较持久的知觉。观察是认识事物最基本的途径，它是了解问题、发现问题和解决问题的前提。

任何一道数学题，都包含一定的数学条件和关系。要想解决它，就必须依据题目的具体特征，对题目进行深入的、细致的、透彻的观察，然后认真思考，透过表面现象看其本质，这样才能确定解题思路，找到解题方法。

例如，求和$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

这些分数相加，通分很困难，但每项都是两相邻自然数的积的倒数，且$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，因此，原式等于$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$问题很快就解决了。

（2）善于联想

联想是问题转化的桥梁。稍具难度的问题和基础知识的联系，都是不明显的、间接的、复杂的。因此，解题的方法怎样、速度如何，取决于能否由观察到的特征，灵活运用有关知识，做出相应的联想，将问题打开缺口，不断深入。

例如，解方程组$\begin{cases}x+y=2\\ xy\ \ =-3\end{cases}$.

这个方程指明两个数的和为2，这两个数的积为-3。由此联想到韦达定理，x、y是一元二次方程 $t^2-2t-3=0$的两个根，

所以$\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$. 可见，联想可使问题变得简单。

（3）善于将问题进行转化

数学家G．波利亚在《怎样解题》中说过：**数学解题是命题的连续变换。**可见，解题过程是通过问题的转化才能完成的。转化是解数学题的一种十分重要的思维方法。那么怎样转化呢？概括地讲，就是把复杂问题转化成简单问题，把抽象问题转化成具体问题，把未知问题转化成已知问题。在解题时，观察具体特征，联想有关问题之后，就要寻求转化关系。

例如，已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $(abc\neq 0,a+b+c\neq 0)$，

求证a、b、c三数中必有两个互为相反数。

恰当的转化使问题变得熟悉、简单。要证的结论，可以转化为：$(a+b)(b+c)(c+a)=0$

思维变通性的对立面是思维的保守性，即思维定势。思维定势是指一个人用同一种思维方法解决若干问题以后，往往会用同样的思维方法解决以后的问题。它表现就是记类型、记方法、套公式，使思维受到限制，它是提高思维变通性的极大的障碍，必须加以克服。

综上所述，善于观察、善于联想、善于进行问题转化，是数学思维变通性的具体体现。要想提高思维变通性，必须作相应的思维训练。

二、思维训练实例

（1） 观察能力的训练

虽然观察看起来是一种表面现象，但它是认识事物内部规律的基础。所以，必须重视观察能力的训练，使学生不但能用常规方法解题，而且能根据题目的具体特征，采用特殊方法来解题。

例 1 已知 a,b,c,d 都是实数，求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

思路分析 从题目的外表形式观察到，要证的结论的右端与平面上两点间的距离公式很相似，而左端可看作是点到原点的距离公式。根据其特点，可采用下面巧妙而简捷的证法，这正是思维变通的体现。

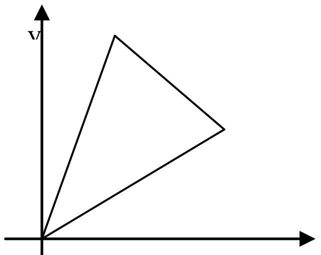


图 1—2

证明 不妨设 $A(a,b),B(c,d)$ 如图 1－2－1 所示，

则 $|AB|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

$|OA|=\sqrt{a^2+b^2},|OB|=\sqrt{c^2+d^2}$,

在 ΔOAB 中，由三角形三边之间的关系知:

$|OA|+|OB|\geq|AB|$ 当且仅当 0 在 AB 上时，等号成立。

因此，$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

思维障碍 很多学生看到这个不等式证明题，马上想到采用分析法、综合法等，而此题利用这些方法证明很繁。学生没能从外表形式上观察到它与平面上两点间距离公式相似的原因，是对这个公式不熟，进一步讲是对基础知识的掌握不牢固。因此，平时应多注意数学公式、定理的运用练习。

例2 已知 $3x^2+2y^2=6x$，试求 x^2+y^2 的最大值。

解 由 $3x^2+2y^2=6x$ 得

$$y^2=-\frac{3}{2}x^2+3x.$$

$$\because y^2\geq 0,\therefore -\frac{3}{2}x^2+3x\geq 0,\therefore 0\leq x\leq 2.$$

又 $x^2+y^2=x^2-\frac{3}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，x^2+y^2 有最大值，最大值为 $-\frac{1}{2}(2-3)^2+\frac{9}{2}=4.$

思路分析　要求 x^2+y^2 的最大值，由已知条件很快将 x^2+y^2 变为一元二次函数 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$, 然后求极值点的 x 值，联系到 $y^2\geq 0$，这一条件，既快又准地求出最大值。上述解法观察到了隐蔽条件，体现了思维的变通性。

思维障碍　　大部分学生的作法如下:

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $y^2=-\frac{3}{2}x^2+3x,$

$\therefore\ x^2+y^2=x^2-\frac{3}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2},$

$\therefore$　当 $x=3$ 时，x^2+y^2 取最大值，最大值为 $\frac{9}{2}$

这种解法由于忽略了 $y^2\geq 0$ 这一条件，致使计算结果出现错误。因此，要注意审题，不仅能从表面形式上发现特点，而且还能从已知条件中发现其隐蔽条件，既要注意主要的已知条件，
又要注意次要条件，这样，才能正确地解题，提高思维的变通性。

有些问题的观察要从相应的图像着手。

例3　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a>0)$, 满足关系

$f(2+x)=f(2-x)$，试比较 $f(0.5)$ 与 $f(\pi)$ 的大小。

思路分析　由已知条件 $f(2+x)=f(2-x)$ 可知，在与 $x=2$ 左右等距离的点的函数值相等，说明该函数的图像关于直线 $x=2$ 对称，又由已知条件知它的开口向上，所以，可根据该函数的大致图像简捷地解出此题。

解　（如图 1－2－2）由 $f(2+x)=f(2-x)$，

知 $f(x)$ 是以直线 $x=2$ 为对称轴，开口向上的抛物线

它与 $x=2$ 距离越近的点，函数值越小。

$\because |2-0.5|>|2-\pi|\quad \therefore f(0.5)>f(\pi)$

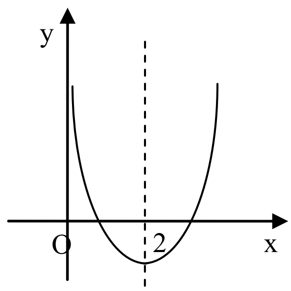


图 1－2－

思维障碍　有些同学对比较 $f(0.5)$ 与 $f(\pi)$ 的大小，只想到求出它们的值。而此题函数 $f(x)$ 的表达式不确定无法代值，所以无法比较。出现这种情况的原因，是没有充分挖掘已知条件的含义，因而思维受到阻碍，做题时要全面看问题，对每一个已知条件都要仔细推敲，找出它的真正含义，这样才能顺利解题。提高思维的变通性。

（2） **联想能力的训练**

例4 在ΔABC中，若 $\angle C$为钝角，则$tgA\cdot tgB$的值

(A) 等于1　　(B)小于1　　(C) 大于1　　(D) 不能确定

思路分析 此题是在ΔABC中确定三角函数$tgA\cdot tgB$的值。因此，联想到三角函数正切的两角和公式$tg(A+B)=\dfrac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}$可得下面解法。

解 $\because \angle C$为钝角，$\therefore tgC<0$. 在ΔABC中 $A+B+C=\pi \therefore C=\pi-(A+B)$

且A、B均为锐角，

$$\therefore tgC=tg[\pi-(A+B)]=-tg(A+B)=-\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}<0.$$

$$\because tgA>0, tgB>0, \therefore 1-tgA\cdot tgB>0.\text{即}tgA\cdot tgB<1.$$

故应选择（B）

思维障碍 有的学生可能觉得此题条件太少，难以下手，原因是对三角函数的基本公式掌握得不牢固，不能准确把握公式的特征，因而不能很快联想到运用基本公式。

例5 若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,证明:$2y=x+z$.

思路分析 此题一般是通过因式分解来证。但是，如果注意观察已知条件的特点，不难发现它与一元二次方程的判别式相似。于是，我们联想到借助一元二次方程的知识来证题。

证明 当$x-y\neq 0$时，等式 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$

可看作是关于t的一元二次方程$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0$有等根的条件，在进一步观察这个方程，它的两个相等实根是1 ，根据韦达定理就有:

$$\frac{y-z}{x-y}=1\text{即}\qquad 2y=x+z$$

若$x-y=0$，由已知条件易得 $z-x=0$, 即$x=y=z$,显然也有$2y=x+z$.

例6 已知a、b、c均为正实数,满足关系式$a^2+b^2=c^2$,又n为不小于3的自然数，求证: $a^n+b^n<c^n$.

思路分析 由条件$a^2+b^2=c^2$联想到勾股定理，a、b、c可构成直角三角形的三边，进一步联想到三角函数的定义可得如下证法。

证明 设a、b、c所对的角分别为A、B、C.则C是直角，A为锐角，于是

$$\sin A=\frac{a}{c},\cos A=\frac{b}{c},\text{且}\, 0<\sin A<1,\quad 0<\cos A<1,$$

当$n\geq 3$时，有$\sin^n A<\sin^2 A$，$\cos^n A<\cos^2 A$

于是有$\sin^n A+\cos^n A<\sin^2 A+\cos^2 A=1$

即 $$(\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n<1,$$

从而就有 $$a^n+b^n<c^n.$$

思维阻碍 由于这是一个关于自然数n的命题，一些学生都会想到用数学归纳法来证明，难以进行数与形的联想，原因是平时不注意代数与几何之间的联系，单纯学代数，学几何，因而不能将题目条件的数字或式子特征与直观图形联想起来。

（3） 问题转化的训练

我们所遇见的数学题大都是生疏的、复杂的。在解题时，不仅要先观察具体特征，联想有关知识，而且要将其转化成我们比较熟悉的，简单的问题来解。恰当的转化，往往使问题很快得到解决，所以，进行问题转化的训练是很必要的。

① 转化成容易解决的明显题目

例 11 已知$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$,求证$a$、$b$、$c$中至少有一个等于 1。

思路分析 结论没有用数学式子表示，很难直接证明。首先将结论用数学式子表示，转化成我们熟悉的形式。a、b、c中至少有一个为 1，也就是说$a-1$、$b-1$、$c-1$中至少有一个为零，这样，问题就容易解决了。

证明 $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1,\quad \therefore\ bc+ac+ab=abc.$

于是 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+ac+bc-1)+(a+b+c)=0.$

$\therefore$ $a-1$、$b-1$、$c-1$中至少有一个为零，即a、b、c中至少有一个为 1。

思维障碍 很多学生只在已知条件上下功夫，左变右变，还是不知如何证明三者中至少有一个为 1，其原因是不能把要证的结论“翻译”成数学式子，把陌生问题变为熟悉问题。因此，多练习这种“翻译”，是提高转化能力的一种有效手段。

例12 直线L的方程为$x=-\frac{p}{2}$，其中$p>0$；椭圆E的中心为$O'(2+\frac{p}{2},0)$，焦点在X轴上，长半轴为 2，短半轴为 1，它的一个顶点为$A(\frac{p}{2},0)$，问p在什么范围内取

值时，椭圆上有四个不同的点，它们中的每一点到点A的距离等于该点到直线L的距离。

思路分析 从题目的要求及解析几何的知识可知，四个不同的点应在抛物线

$$y^2=2px \qquad (1)$$

是，又从已知条件可得椭圆E的方程为

$$\frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1 \qquad (2)$$

因此，问题转化为当方程组（1）、（2）有四个不同的实数解时，求p的取值范围。将（2）代入（1）得:

$$x^2+(7p-4)x+\frac{p^2}{4}+2p=0. \qquad (3)$$

确定p的范围，实际上就是求（3）有两个不等正根的充要条件，解不等式组:

$$\begin{cases}(7p-4)^2-\quad 4(\frac{p^2}{4}+2p)>0\\ \frac{p^2}{4}+2p>0\\ 7p-4<0\end{cases}$$

在$p>0$的条件下，得$0<p<13$.

本题在解题过程中，不断地把问题化归为标准问题: 解方程组和不等式组的问题。

② 逆向思维的训练

逆向思维不是按习惯思维方向进行思考，而是从其反方向进行思考的一种思维方式。当问题的正面考虑有阻碍时，应考虑问题的反面，从反面入手，使问题得到解决。

例 13 已知函数$f(x)=2x^2+mx+n$，求证$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于 1.

思路分析 反证法被誉为“数学家最精良的武器之一”，它也是中学数学常用的解题方法。当要证结论中有“至少”等字样，或以否定形式给出时，一般可考虑采用反证法。

证明 （反证法）假设原命题不成立，即$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$都小于 1。

则$\begin{cases}|f(1)|<1\\|f(2)|<1\\|f(3)|<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1<2+m+n<1\\-1<8+2m+n<1\\-1<18+3m+n<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3<m+n<-1 & ①\\-9<2m+n<-7 & ②\\-19<3m+n<-17 & ③\end{cases}$

① + ③得　　　$-11<2m+n<-9$，

与②矛盾，所以假设不成立，即$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于 1。

3　一题多解训练

由于每个学生在观察时抓住问题的特点不同、运用的知识不同，因而，同一问题可能得到几种不同的解法，这就是“一题多解”。通过一题多解训练，可使学生认真观察、多方联想、恰当转化，提高数学思维的变通性。

例 14　已知复数z的模为 2，求$|z-i|$的最大值。

解法一（代数法）设$z=x+yi(x、y\in R)$,

则$x^2+y^2=4. |z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{5-2y}.$

$\because\ |y|\le 2, \therefore$ 当$y=-2$时,$|z-i|_{\max}=3.$

解法二（三角法）设$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$,

则 $|z-i|=\sqrt{4\cos^2\theta+(2\sin\theta-1)^2}=\sqrt{5-4\sin\theta}.$

$\therefore$当$\sin\theta=-1$时,$|z-i|_{\max}=3.$

解法三（几何法）

$\because |z|=2, \therefore$点$z$是圆$x^2+y^2=4$上的点，

$|z-i|$表示z与i所对应的点之间的距离。

如图 1－2－3 所示，可知当$z=-2i$时，$|z-i|_{\max}=3.$

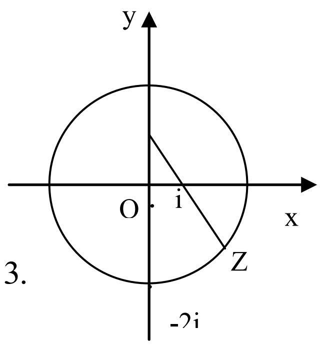


图1—2—3

解法四（运用模的性质）

$\because |z-i|\le|z|+|-i|=2+1=3$

而当$z=-2i$时，$|z-i|=3. \therefore |z-i|_{\max}=3.$

解法五（运用模的性质）

$\because |z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)}=z\bar{z}+(z-\bar{z})i+1$

$=5+2I(z),(I(z)$表z的虚部).

又$\because |I(z)|\le 2,\therefore |z-i|_{\max}^2=9,\therefore |z-i|_{\max}=3.$

第二讲 数学思维的反思性

一、概述

数学思维的反思性表现在思维活动中善于提出独立见解，精细地检查思维过程，不盲从、不轻信。在解决问题时能不断地验证所拟定的假设，获得独特的解决问题的方法，它和创造性思维存在着高度相关。本讲重点加强学生思维的严密性的训练，培养他们的创造性思维。

二、思维训练实例

(1) 检查思路是否正确，注意发现其中的错误。

例 1 已知 $f(x)=ax+\dfrac{x}{b}$，若 $-3\le f(1)\le 0,\ 3\le f(2)\le 6,$ 求 $f(3)$ 的范围。

错误解法 由条件得

$$\begin{cases}-3\le a+b\ \le 0\\ 3\le 2a+\dfrac{b}{2}\ \le 6\end{cases}$$

①

②

② × 2 − ① 得 $6\le a\le 15$

③

① × 2 − ② 得 $-\dfrac{8}{3}\le \dfrac{b}{3}\le -\dfrac{2}{3}$

④

③+④得 $\dfrac{10}{3}\le 3a+\dfrac{b}{3}\le \dfrac{43}{3}$，即 $\dfrac{10}{3}\le f(3)\le \dfrac{43}{3}.$

错误分析 采用这种解法，忽视了这样一个事实：作为满足条件的函数 $f(x)=ax+\dfrac{x}{b}$，其值是同时受 a 和 b 制约的。当 a 取最大（小）值时，b 不一定取最大（小）值，因而整个解题思路是错误的。

正确解法 由题意有

$$\begin{cases} f(1)=a+b \\ f(2)=2a+\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

解得：$a=\dfrac{1}{3}[2f(2)-f(1)]$，$b=\dfrac{2}{3}[2f(1)-f(2)]$，

$\therefore f(3)=3a+\dfrac{b}{3}=\dfrac{16}{9}f(2)-\dfrac{5}{9}f(1).$

把 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的范围代入得 $\dfrac{16}{3}\le f(3)\le\dfrac{37}{3}.$

在本题中能够检查出解题思路错误，并给出正确解法，就体现了思维具有反思性。只有牢固地掌握基础知识，才能反思性地看问题。

例2 证明勾股定理：已知在ΔABC中，$\angle C=90°$，求证$c^2=a^2+b^2$.

错误证法 在$Rt\Delta ABC$中，$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$,而$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，

$\therefore (\dfrac{a}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2=1$，即$c^2=a^2+b^2$.

错误分析 在现行的中学体系中，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$这个公式本身是从勾股定理推出来的。这种利用所要证明的结论，作为推理的前提条件，叫循环论证。循环论证的错误是在不知不觉中产生的，而且不易发觉。因此，在学习中对所学的每个公式、法则、定理，既要熟悉它们的内容，又要熟悉它们的证明方法和所依据的论据。这样才能避免循环论证的错误。发现本题犯了循环论证的错误，正是思维具有反思性的体现。

(2) 验算的训练

验算是解题后对结果进行检验的过程。通过验算，可以检查解题过程的正确性，增强思维的反思性。

例3 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n+1$，求a_n.

错误解法 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+1)-(2^{n-1}+1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}.$

错误分析 显然，当$n=1$时，$a_1=S_1=3\ne 2^{1-1}=1$，错误原因，没有注意公式$a_n=S_n-S_{n-1}$成立的条件是$n\ge 2\ (n\in N)$.因此在运用$a_n=S_n-S_{n-1}$时，必须检验$n=1$时的情形。即：$a_n=\begin{cases} S_1\ (n=1) \\ S_n\ (n\ge 2, n\in N) \end{cases}$

例4 实数a为何值时，圆$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$与抛物线$y^2=\frac{1}{2}x$有两个公共点。

错误解法 将圆$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$与抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$联立，消去y，

得 $$x^2-(2a-\frac{1}{2})x+a^2-1=0\ \ (x\geq 0). \qquad ①$$

因为有两个公共点，所以方程①有两个相等正根，得$\begin{cases}\Delta=0\\2a-\frac{1}{2}>0\\a^2-1>0.\end{cases}$

解之，得$a=\frac{17}{8}.$

错误分析 （如图 2－2－1；2－2－2）显然，当$a=0$时，圆与抛物线有两个公共点。

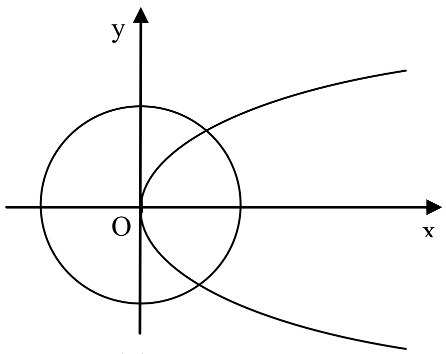


图2—2—1

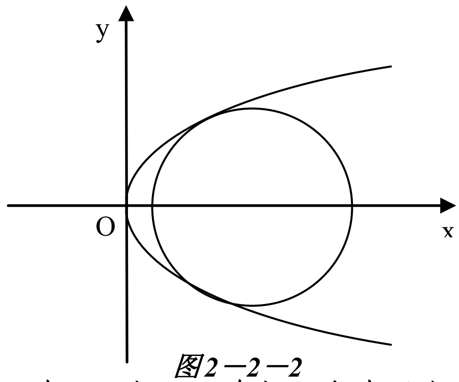


图2—2—2

要使圆与抛物线有两个交点的充要条件是方程①有一正根、一负根；或有两个相等正根。

当方程①有一正根、一负根时，得$\begin{cases}\Delta>0\\a^2-1<0.\end{cases}$解之，得$-1<a<1.$

因此，当$a=\frac{17}{8}$或$-1<a<1$时，圆$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$与抛物线$y^2=\frac{1}{2}x$有两个公共点。

思考题：实数a为何值时，圆$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$与抛物线$y^2=\frac{1}{2}x$，

（1） 有一个公共点；
（2） 有三个公共点；
（3） 有四个公共点；
（4） 没有公共点。

养成验算的习惯，可以有效地增强思维反思性。如：在解无理方程、无理不等式；对数方程、对数不等式时，由于变形后方程或不等式两端代数式的定义域可能会发生变化，这样就有可能产生增根或失根，因此必须进行检验，舍弃增根，找回失根。

(3)　独立思考，敢于发表不同见解

受思维定势或别人提示的影响，解题时盲目附和，不能提出自己的看法，这不利于增强思维的反思性。因此，在解决问题时，应积极地独立思考，敢于对题目解法发表自己的见解，这样才能增强思维的反思性，从而培养创造性思维。

例5 30 支足球队进行淘汰赛，决出一个冠军，问需要安排多少场比赛？

解　因为每场要淘汰 1 个队，30 个队要淘汰 29 个队才能决出一个冠军。因此应安排 29 场比赛。

思路分析　传统的思维方法是：30 支队比赛，每次出两支队，应有 15＋7＋4＋2＋1＝29 场比赛。而上面这个解法没有盲目附和，考虑到每场比赛淘汰 1 个队，要淘汰 29 支队，那么必有 29 场比赛。

例6 解方程 $x^2-2x+3=\cos x$.

考察方程两端相应的函数 $y=(x-1)^2+2,\quad y=\cos x$，它们的图象无交点。

所以此方程无解。

例 7　设α、β是方程$x^2-2kx+k+6=0$的两个实根，则$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是（　　　）

$(A)\quad -\dfrac{49}{4}$;　　　　$(B)\quad 8$;　　　　$(C)\quad 18$;　　　　(D)不存在

思路分析　本例只有一个答案正确，设了 3 个陷阱，很容易上当。

利用一元二次方程根与系数的关系易得：$\alpha+\beta=2k,\alpha\beta=k+6,$

$$\therefore\qquad (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$$
$$=4(k-\frac{3}{4})^2-\frac{49}{4}.$$

有的学生一看到$-\dfrac{49}{4}$，常受选择答案（A）的诱惑，盲从附和。这正是思维缺乏反思性的体现。如果能以反思性的态度考察各个选择答案的来源和它们之间的区别，就能从中选出正确答案。

$\because$ 原方程有两个实根α、β，

$\therefore\ \ \Delta=4k^2-4(k+6)\ge 0,\therefore\ \ k\le -2\ \ $ 或 $k\ge 3.$

当 $k\geq 3$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是 8；当 $k\leq -2$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是 18;

这时就可以作出正确选择，只有（B）正确。

第三讲　　数学思维的严密性

二、概述

在中学数学中，思维的严密性表现为思维过程服从于严格的逻辑规则，考察问题时严格、准确，进行运算和推理时精确无误。数学是一门具有高度抽象性和精密逻辑性的科学，论证的严密性是数学的根本特点之一。但是，由于认知水平和心里特征等因素的影响，中学生的思维过程常常出现不严密现象，主要表现在以下几个方面:

概念模糊　概念是数学理论体系中十分重要的组成部分。它是构成判断、推理的要素。因此必须弄清概念，搞清概念的内涵和外延，为判断和推理奠定基础。概念不清就容易陷入思维混乱，产生错误。

判断错误　判断是对思维对象的性质、关系、状态、存在等情况有所断定的一种思维形式。数学中的判断通常称为命题。在数学中，如果概念不清，很容易导致判断错误。例如，“函数 $y=(\frac{1}{3})^{-x}$ 是一个减函数”就是一个错误判断。

推理错误　推理是运用已知判断推导出新的判断的思维形式。它是判断和判断的联合。任何一个论证都是由推理来实现的，推理出错，说明思维不严密。

例如，解不等式 $x>\frac{1}{x}$.

解　$\because x>\frac{1}{x},\quad \therefore x^2>1,$

$\therefore x>1$, 或 $x<-1$.这个推理是错误的。在由 $x>\frac{1}{x}$ 推导 $x^2>1$ 时，没有讨论 x 的正、负，理由不充分，所以出错。

二、思维训练实例

思维的严密性是学好数学的关键之一。训练的有效途径之一是查错。

(1)　有关概念的训练

概念是抽象思维的基础，数学推理离不开概念。“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提。”《中学数学教学大纲》(试行草案)

例1、　不等式　$\log_{(x^2+2)}(3x^2-2x-4)>\log_{(x^2+2)}(x^2-3x+2).$

错误解法　$\because x^2+2>1,$

$\therefore 3x^2-2x-4>x^2-3x+2,$

$\therefore 2x^2+x-6>0, \quad \therefore x>\frac{3}{2}或x<-2.$

错误分析 当 $x=2$ 时，真数 $x^2-3x+2=0$ 且 $x=2$ 在所求的范围内（因 $2>\frac{3}{2}$），说明解法错误。原因是没有弄清对数定义。此题忽视了“对数的真数大于零”这一条件造成解法错误，表现出思维的不严密性。

正确解法 $\because x^2+2>1$

$$\therefore \begin{cases}3x^2-2x-4>0\\ x^2-3x+2>0\\ 3x^2-2x-4>x^2-3x+2\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}x>\frac{1+\sqrt{13}}{3}或x<\frac{1-\sqrt{13}}{3}\\ x>2或x<1\\ x>\frac{3}{2}或x<-2\end{cases}$$

$\therefore \quad x>2或x<-2.$

例2、 求过点 $(0,1)$ 的直线，使它与抛物线 $y^2=2x$ 仅有一个交点。

错误解法 设所求的过点 $(0,1)$ 的直线为 $y=kx+1$，则它与抛物线的交点为

$\begin{cases}y=kx+1\\ y^2=2x\end{cases}$，消去 y 得：$(kx+1)^2-2x=0.$

整理得 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0.\because$ 直线与抛物线仅有一个交点，

$\therefore \Delta=0,$ 解得 $k=\frac{1}{2}.\quad \therefore$ 所求直线为 $y=\frac{1}{2}x+1.$

错误分析 此处解法共有三处错误：

第一，设所求直线为 $y=kx+1$ 时，没有考虑 $k=0$ 与斜率不存在的情形，实际上就是承认了该直线的斜率是存在的，且不为零，这是不严密的。

第二，题中要求直线与抛物线只有一个交点，它包含相交和相切两种情况，而上述解法没有考虑相切的情况，只考虑相交的情况。原因是对于直线与抛物线“相切”和“只有一个交点”的关系理解不透。

第三，将直线方程与抛物线方程联立后得一个一元二次方程，要考虑它的判别式，所以它的二次项系数不能为零，即 $k\neq 0,$ 而上述解法没作考虑，表现出思维不严密。

正确解法 当所求直线斜率不存在时，即直线垂直 x 轴，因为过点 $(0,1)$，所以 $x=0,$ 即

y 轴，它正好与抛物线 $y^2=2x$ 相切。

当所求直线斜率为零时，直线为 $y=1$, 平行 x 轴，它正好与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个交点。

设所求的过点 $(0,1)$ 的直线为 $y=kx+1\ (k\neq 0)$ 则

$\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=2x \end{cases}$，$\therefore$ $k^2x^2+(2k-2)x+1=0.$ 令 $\Delta=0,$ 解得 $k=\dfrac{1}{2}.$ $\therefore$ 所求直线为

$$y=\frac{1}{2}x+1.$$

综上，满足条件的直线为:

$$y=1,\quad x=0,\quad y=\frac{1}{2}x+1.$$

(2) 判断的训练

造成判断错误的原因很多，我们在学习中，应重视如下几个方面。

①注意定理、公式成立的条件

数学上的定理和公式都是在一定条件下成立的。如果忽视了成立的条件，解题中难免出现错误。

例3、 实数 m，使方程 $x^2+(m+4i)x+1+2mi=0$ 至少有一个实根。

错误解法 $\because$ 方程至少有一个实根，

$$\therefore \Delta=(m+4i)^2-4(1+2mi)=m^2-20\geq 0.$$

$$\therefore m\geq 2\sqrt{5}, \text{或}\ m\leq -2\sqrt{5}.$$

错误分析 实数集合是复数集合的真子集，所以在实数范围内成立的公式、定理，在复数范围内不一定成立，必须经过严格推广后方可使用。一元二次方程根的判别式是对实系数一元二次方程而言的，而此题目盲目地把它推广到复系数一元二次方程中，造成解法错误。

正确解法 设 a 是方程的实数根，则

$$a^2+(m+4i)a+1+2mi=0,$$

$$\therefore\quad a^2+ma+1+(4a+2m)i=0.$$

由于 a、m 都是实数，

$$\therefore\quad \begin{cases} a^2+ma+1=0 \\ 4a+2m=0 \end{cases}$$

解得 $m=\pm 2.$

例 4　已知双曲线的右准线为 $x=4$，右焦点 $F(10,0)$，离心率 $e=2$，求双曲线方程。

错解 1　$\because x=\frac{a^2}{c}=4, c=10, \therefore a^2=40, \therefore b^2=c^2-a^2=60.$

故所求的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{60}=1.$$

错解 2　由焦点 $F(10,0)$ 知 $c=10,$

$\because e=\frac{c}{a}=2, \therefore a=5, b^2=c^2-a^2=75.$

故所求的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1.$$

错解分析　这两个解法都是误认为双曲线的中心在原点，而题中并没有告诉中心在原点这个条件。由于判断错误，而造成解法错误。随意增加、遗漏题设条件，都会产生错误解法。

正解 1　设 $P(x,y)$ 为双曲线上任意一点，因为双曲线的右准线为 $x=4$，右焦点 $F(10,0)$，离心率 $e=2$，由双曲线的定义知

$$\frac{\sqrt{(x-10)^2+y^2}}{|x-4|}=2.$$

整理得

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1.$$

正解 2　依题意，设双曲线的中心为 $(m,0)$

则 $\begin{cases}\frac{a^2}{c}+m=4\\ c+m=10\\ \frac{c}{a}=2.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=4\\ c=8\\ m=2.\end{cases}$

所以　$b^2=c^2-a^2=64-16=48,$

故所求双曲线方程为 $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1.$

②注意充分条件、必要条件和充分必要条件在解题中的运用

我们知道:

如果 A 成立，那么 B 成立，即 $A\Rightarrow B$，则称 A 是 B 的充分条件。
如果 B 成立，那么 A 成立，即 $B\Rightarrow A$，则称 A 是 B 的必要条件。
如果 $A\Leftrightarrow B$，则称 A 是 B 的充分必要条件。

充分条件和必要条件中我们的学习中经常遇到。像讨论方程组的解，求满足条件的点的轨迹等等。但充分条件和必要条件中解题中的作用不同，稍用疏忽，就会出错。

例 5　解不等式 $\sqrt{x-1}\ge x-3.$

错误解法　要使原不等式成立，只需

$$\begin{cases}x-1\ge 0\\x-3\ge 0\\x-1\ge (x-3)^2\end{cases}，\quad 解得 3\le x\le 5.$$

错误分析　不等式 $\sqrt{A}\ge B$ 成立的充分必要条件是: $\begin{cases}A\ge 0\\B\ge 0\\A\ge B^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A\ge 0\\B\le 0\end{cases}$

原不等式的解法只考虑了一种情况 $\begin{cases}x-1\ge 0\\x-3\ge 0\\x-1\ge (x-3)^2\end{cases}$，而忽视了另一种情况 $\begin{cases}x-1\ge 0\\x-3<0\end{cases}$，所考虑的情况只是原不等式成立的充分条件，而不是充分必要条件，其错误解法的实质，是把充分条件当成了充分必要条件。

正确解法　要使原不等式成立，则

$$\begin{cases}x-1\ge 0\\x-3\ge 0\\x-1\ge (x-3)^2\end{cases} 或 \begin{cases}x-1\ge 0\\x-3<0\end{cases}$$

$\therefore 3\le x\le 5$，或 $1\le x\le 3.$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x\,|\,1\le x\le 5\}$

例 6（轨迹问题）求与 y 轴相切于右侧，并与 $\odot C: x^2+y^2-6x=0$ 也相切的圆的圆心的轨迹方程。

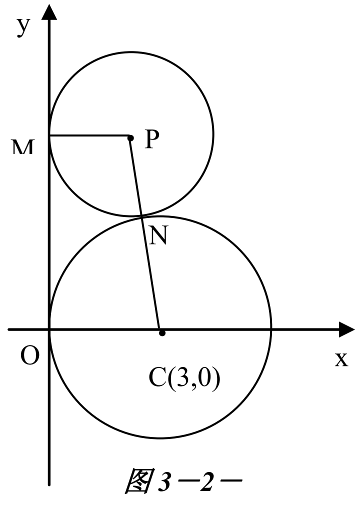


图 3－2－

错误解法　如图 3－2－1 所示，

已知⊙C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=9$.

设点 $P(x,y)(x>0)$ 为所求轨迹上任意一点，并且⊙P 与 y 轴相切于 M 点，与⊙C 相切于 N 点。根据已知条件得

$|CP|=|PM|+3$，即 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=x+3$.

化简得　　$y^2=12x\quad(x>0)$.

错误分析　本题只考虑了所求轨迹的纯粹性（即所求的轨迹上的点都满足条件），而没有考虑所求轨迹的完备性（即满足条件的点都在所求的轨迹上）。事实上，符合题目条件的点的坐标并不都满足所求的方程。从动圆与已知圆内切，可以发现以 x 轴正半轴上任一点为圆心，此点到原点的距离为半径（不等于 3）的圆也符合条件，所以 $y=0\quad(x>0且x\neq3)$ 也是所求的方程。即动圆圆心的轨迹方程是 $y^2=12x\quad(x>0)$和 $y=0\quad(x>0且x\neq3)$。因此，在求轨迹时，一定要完整的、细致地、周密地分析问题，这样，才能保证所求轨迹的纯粹性和完备性。

③防止以偏概全的错误

以偏概全是指思考不全面，遗漏特殊情况，致使解答不完全，不能给出问题的全部答案，从而表现出思维的不严密性。

例 7　设等比数列 $\{a_n\}$的全 n 项和为 S_n. 若 $S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比 q.

错误解法　$\because\ S_3+S_6=2S_9$,

$$\therefore\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$$

整理得　$q^3(2q^6-q^3-1)=0$.

由$q\neq0$得方程　$2q^6-q^3-1=0$. $\therefore\ (2q^3+1)(q^3-1)=0$,

$\therefore\quad q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$　或　$q=1$

错误分析　在错解中，由 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$

整理得　$q^3(2q^6-q^3-1)=0$.时，应有 $a_1\neq0$ 和 $q\neq1$.在等比数列中，$a_1\neq0$ 是显然的，

但公比q完全可能为1，因此，在解题时应先讨论公比$q=1$的情况，再在$q\neq 1$的情况下，对式子进行整理变形。

正确解法　若$q=1$，则有$S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1.$

但$a_1\neq 0$，即得$S_3+S_6\neq 2S_9$,与题设矛盾，故$q\neq 1$.

又依题意　$S_3+S_6=2S_9$,

可得　$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$$

整理得　$q^3(2q^6-q^3-1)=0.$即$(2q^3+1)(q^3-1)=0,$

因为$q\neq 1$，所以$q^3-1\neq 0,$所以$2q^3+1=0.$

所以　$$q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

说明　此题为1996年全国高考文史类数学试题第（21）题，不少考生的解法同错误解法，根据评分标准而痛失2分。

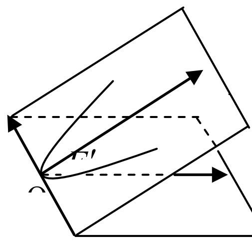
④避免直观代替论证

我们知道直观图形常常为我们解题带来方便。但是，如果完全以图形的直观联系为依据来进行推理，这就会使思维出现不严密现象。

例8　（如图3－2－2），具有公共y轴的两个直角坐标平面α和β所成的二面角$\alpha-y$轴$-\beta$等于$60°$. 已知β内的曲线C'的方程是$y^2=2px'\ (p>0)$，求曲线C'在α内的射影的曲线方程。

错误解法　依题意，可知曲线C'是抛物线，

在β内的焦点坐标是$F'(\frac{p}{2},0),p>0.$



因为二面角$\alpha-y$轴$-\beta$等于$60°$，

且x'轴$\perp y$轴，x轴$\perp y$轴，所以$\angle xox'=60°.$

设焦点F'在α内的射影是$F(x,y)$，那么，F位于x轴上，

从而$y=0,\angle F'OF=60°,\angle F'FO=90°,$

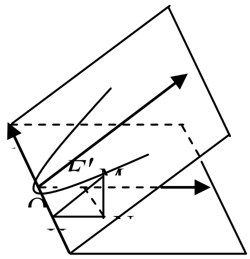
所以$OF = OF' \cdot \cos 60° = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{4}$. 所以点$F(\frac{p}{4}, 0)$是所求射影的焦点。依题意，射影是一条抛物线，开口向右，顶点在原点。

所以曲线C'在α内的射影的曲线方程是$y^2 = px$.

错误分析 上述解答错误的主要原因是，凭直观误认为F是射影(曲线）的焦点，

其次，未经证明默认C'在α内的射影（曲线）是一条抛物线。

正确解法 在β内，设点$M(x', y')$是曲线上任意一点（如图 3－2－3）过点M作$MN \perp \alpha$，垂足为N，过N作$NH \perp y$轴，垂足为H.连接MH，



则$MH \perp y$轴。所以$\angle MHN$是二面角$\alpha - y$轴$-\beta$的平面角，依题意，$\angle MHN = 60°$.

在$Rt\Delta MNH$中,$HN = HM \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}x'$.

又知$HM // x'$轴（或M与O重合），

$HN // x$轴（或H与O重合），设$N(x, y)$，

则 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = y' \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y. \end{cases}$

因为点$M(x', y')$在曲线$y^2 = 2px'$ $(p > 0)$上，所以$y^2 = 2p(2x)$.

即所求射影的方程为 $y^2 = 4px(p > 0)$.

(3) 推理的训练

数学推理是由已知的数学命题得出新命题的基本思维形式，它是数学求解的核心。以已知的真实数学命题，即定义、公理、定理、性质等为依据，选择恰当的解题方法，达到解题目标，得出结论的一系列推理过程。在推理过程中，必须注意所使用的命题之间的相互关系（充分性、必要性、充要性等），做到思考缜密、推理严密。

例 9 设椭圆的中心是坐标原点，长轴x在轴上，离心率$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，已知点$P(0, \frac{3}{2})$到

这个椭圆上的最远距离是$\sqrt{7}$，求这个椭圆的方程。

错误解法　依题意可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$

则　　$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，

所以　　$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即　$a=2b.$

设椭圆上的点(x,y)到点P的距离为d，

则　　$d^2=x^2+(y-\frac{3}{2})^2$

$$=a^2(1-\frac{y^2}{b^2})+y^2-3y+\frac{9}{4}$$
$$=-3(y+\frac{1}{2})^2+4b^2+3.$$

所以当$y=-\frac{1}{2}$时，d^2有最大值，从而d也有最大值。

所以　　$4b^2+3=(\sqrt{7})^2$，由此解得：$b^2=1,a^2=4.$

于是所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$

错解分析　尽管上面解法的最后结果是正确的，但这种解法却是错误的。结果正确只是碰巧而已。由当$y=-\frac{1}{2}$时，d^2有最大值，这步推理是错误的，没有考虑y到的取值范围。事实上，由于点(x,y)在椭圆上，所以有$-b\le y\le b$，因此在求d^2的最大值时，应分类讨论。即：

若$b<\frac{1}{2}$，则当$y=-b$时，d^2（从而d）有最大值。

于是$(\sqrt{7})^2=(b+\frac{3}{2})^2$,从而解得$b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$,与$b<\frac{1}{2}$矛盾。

所以必有$b\ge\frac{1}{2}$，此时当$y=-\frac{1}{2}$时，d^2（从而d）有最大值，

所以$4b^2+3=(\sqrt{7})^2$，解得$b^2=1,a^2=4.$

于是所求椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1.$

例 10 求$y=\dfrac{2}{\sin^2 x}+\dfrac{8}{\cos^2 x}$的最小值

错解 1 $y=\dfrac{2}{\sin^2 x}+\dfrac{8}{\cos^2 x}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{8}{\cos^2 x}}=\dfrac{8}{|\sin x\cos x|}$

$$=\frac{16}{|\sin 2x|}\geq 16,.\quad \therefore y_{\min}=16.$$

错解 2 $y=(\dfrac{2}{\sin^2 x}+\sin^2 x)+(\dfrac{8}{\cos^2 x}+\cos^2 x)-1\geq 2\sqrt{2}+2\sqrt{8}-1=-1+6\sqrt{2}.$

错误分析 在解法 1 中，$y=16$的充要条件是$\dfrac{2}{\sin^2 x}=\dfrac{8}{\cos^2 x}$且$|\sin 2x|=1.$

即$|tgx|=\dfrac{1}{2}$且$|\sin x|=1.$这是自相矛盾的。$\therefore y_{\min}\neq 16.$

在解法 2 中，$y=-1+6\sqrt{2}$的充要条件是

$\dfrac{2}{\sin^2 x}=\sin^2 x$且$\dfrac{8}{\cos^2 x}=\cos^2 x$，即$\sin^2 x=\sqrt{2}$，$\cos^2 x=2\sqrt{2}$,这是不可能的。

正确解法 1 $y=2\csc^2 x+8\sec^2 x$

$$\begin{aligned}&=2(1+ctg^2x)+8(1+tg^2x)\\&=10+2(ctg^2x+4tg^2x)\\&\geq 10+2\cdot 2\sqrt{ctg^2x\cdot 4tg^2x}\\&=18.\end{aligned}$$

其中，当$ctg^2x=4tg^2x$，即$ctg^2x=2$时，$y=18.\therefore y_{\min}=18.$

正 确 解 法 2 取正常数k，易得

$y=(\dfrac{2}{\sin^2 x}+k\sin^2 x)+(\dfrac{8}{\cos^2 x}+k\cos^2 x)-k$

$\geq 2\cdot\sqrt{2k}+2\cdot\sqrt{8k}-k=6\cdot\sqrt{2k}-k.$

其中“≥”取“＝”的充要条件是

$\dfrac{2}{\sin^2 x}=k\sin^2 x$且$\dfrac{8}{\cos^2 x}=k\cos^2 x$，即$tg^2x=\dfrac{1}{2}$且$k=18.$

因此，当 $tg^2x=\frac{1}{2}$时，$y=6\cdot\sqrt{2k}-k=18, \therefore y_{\min}=18.$

第四讲　数学思维的开拓性

一、概述

数学思维开拓性指的是对一个问题能从多方面考虑；对一个对象能从多种角度观察；对一个题目能想出多种不同的解法，即一题多解。

“数学是一个有机的整体，它的各个部分之间存在概念的亲缘关系。我们在学习每一分支时，注意了横向联系，把亲缘关系结成一张网，就可覆盖全部内容，使之融会贯通”，这里所说的横向联系，主要是靠一题多解来完成的。通过用不同的方法解决同一道数学题，既可以开拓解题思路，巩固所学知识；又可激发学习数学的兴趣和积极性，达到开发潜能，发展智力，提高能力的目的。从而培养创新精神和创造能力。

在一题多解的训练中，我们要密切注意每种解法的特点，善于发现解题规律，从中发现最有意义的简捷解法。

数学思维的开拓性主要体现在：

(1) 一题的多种解法

例如　已知复数 z 满足 $|z|=1$，求 $|z-i|$ 的最大值。

我们可以考虑用下面几种方法来解决：

①运用复数的代数形式；

②运用复数的三角形式；

③运用复数的几何意义；

④运用复数模的性质（三角不等式）$||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$；

⑤运用复数的模与共轭复数的关系 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$；

⑥（数形结合）运用复数方程表示的几何图形，转化为两圆 $|z|=1$ 与 $|z-i|=r$ 有公共点时，r 的最大值。

(2) 一题的多种解释

例如，函数式 $y=\frac{1}{2}ax^2$ 可以有以下几种解释：

①可以看成自由落体公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

②可以看成动能公式 $E=\frac{1}{2}mv^2$.

③可以看成热量公式 $Q=\frac{1}{2}RI^2$.

又如“1”这个数字，它可以根据具体情况变成各种形式，使解题变得简捷。“1”

可以变换为：$\log_a a, \frac{x}{x}$， $\sin^2 x+\cos^2 x$， $(\log_a b)\cdot(\log_b a)$， $\sec^2 x - tg^2 x$，等等。

1. 思维训练实例

例 1 已知 $a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=1$.求证：$ax+by\le 1.$

分析 1 用比较法。本题只要证$1-(ax+by)\ge 0$.为了同时利用两个已知条件，只需要观察到两式相加等于 2 便不难解决。

证法 1 $\because 1-(ax+by)=\frac{1}{2}(1+1)-(ax+by)$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+x^2+y^2)-(ax+by)$$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ax+x^2)+(b^2-2by+y^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a-x)^2+(b-y)^2]\ge 0,$$

所以 $ax+by\le 1.$

分析 2 运用分析法，从所需证明的不等式出发，运用已知的条件、定理和性质等，得出正确的结论。从而证明原结论正确。分析法其本质就是寻找命题成立的充分条件。因此，证明过程必须步步可逆，并注意书写规范。

证法 2 要证 $ax+by\le 1.$

只需证 $1-(ax+by)\ge 0,$

即 $2-2(ax+by)\ge 0,$

因为 $a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=1.$

所以只需证 $(a^2+b^2+x^2+y^2)-2(ax+by)\ge 0,$

即 $(a-x)^2+(b-y)^2\ge 0.$

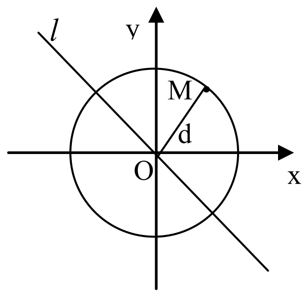


图 4—2—1

因为最后的不等式成立，且步步可逆。所以原不等式成立。

分析 3 运用综合法（综合运用不等式的有关性质以及重要公式、定理（主要是平均值不等式）进行推理、运算，从而达到证明需求证的不等式成立的方法）

证法 3 $\because\ ax\le\frac{a^2+x^2}{2}, by\le\frac{b^2+y^2}{2}.\therefore\ ax+by\le\frac{a^2+x^2}{2}+\frac{b^2+y^2}{2}=1.$

即 $ax+by\le 1.$

分析 4 三角换元法：由于已知条件为两数平方和等于 1 的形式，符合三角函数同角关系中的平方关系条件，具有进行三角代换的可能，从而可以把原不等式中的代数运算关系转化为三角函数运算关系，给证明带来方便。

证法 4 $\because a^2+b^2=1,\quad x^2+y^2=1,\therefore$ 可设

$\therefore a=\sin\alpha, b=\cos\alpha.\quad x=\sin\beta, y=\cos\beta$

$\therefore ax+by=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)\le 1,$

分析 5 数形结合法：由于条件 $x^2+y^2=1$ 可看作是以原点为圆心，半径为 1 的单位圆，而 $ax+by=\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}$.联系到点到直线距离公式，可得下面证法。

证法 5 （如图 4-2-1）因为直线 $l: ax+by=0$ 经过

圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心 0，所以圆上任意一点 $M(x,y)$

到直线 $ax+by=0$ 的距离都小于或等于圆半径 1，

即 $$d=\frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|ax+by|\le 1\Rightarrow ax+by\le 1.$$

简评 五种证法都是具有代表性的基本方法，也都是应该掌握的重要方法。除了证法 4、证法 5 的方法有适应条件的限制这种局限外，前三种证法都是好方法。可在具体应用过程中，根据题目的变化的需要适当进行选择。

例 2 如果 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0,$ 求证：x、y、z 成等差数列。

分析 1 要证 x、y、z，必须有 $x-y=y-z$ 成立才行。此条件应从已知条件中得出。故此得到直接的想法是展开已知条件去寻找转换。

证法 1 $\because (z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0,$

$$\therefore z^2-2xz+x^2-4xy+4xz+4y^2-4yz=0,$$
$$(x+z)^2-2\times 2y(x+z)+(2y)^2=0,$$
$$(x+z-2y)^2=0,$$
$$\therefore\quad x+z-2y=0,$$

故　$x-y=y-z$，即　x、y、z成等差数列。

分析 2　由于已知条件具有$x-y,y-z,z-x$轮换对称特点，此特点的充分利用就是以换元去减少原式中的字母，从而给转换运算带来便利。

证法 2　设$x-y=a,y-z=b,$则$x-z=a+b.$

于是，已知条件可化为:

$(a+b)^2-4ab=0\Rightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b\Rightarrow x-y=y-z.$

所以x、y、z成等差数列。

分析 3　已知条件呈现二次方程判别式$\Delta=b^2-4ac$的结构特点引人注目，提供了构造一个适合上述条件的二次方程的求解的试探的机会。

证法 3　当$x-y=0$时，由已知条件知$z-x=0,\therefore x=y=z,$即x、y、z成等差数列。

当$x-y\neq0$时，关于t的一元二次方程：$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0,$

其判别式$\Delta=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0,$故方程有等根，显然$t=1$为方程的一个根，从而方程的两根均为 1，

由韦达定理知　$t_1\cdot t_2=\dfrac{y-z}{x-y}=1\Rightarrow x-y=y-z.$即　x、y、z成等差数列。

简评: 证法 1 是常用方法，略嫌呆板，但稳妥可靠。证法 2 简单明了，是最好的解法，其换元的技巧有较大的参考价值。证法 3 引入辅助方程的方法，技巧性强，给人以新鲜的感受和启发。

例3　已知$x+y=1$，求x^2+y^2的最小值。

分析 1　虽然所求函数的结构式具有两个字母x、y，但已知条件恰有x、y的关系式，可用代入法消掉一个字母，从而转换为普通的二次函数求最值问题。

解法 1　$\because\ x+y=1,\ \therefore y=1-x.$

设$z=x^2+y^2$，则$z=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1.$

$\because$ 二次项系数为$2>0,$故z有最小值。

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{-2}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$ 时，$z_{最小值}=\dfrac{4\times 2\times 1-(-2)^2}{4\times 2}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

分析 2 已知的一次式 $x+y=1$ 两边平方后与所求的二次式 x^2+y^2 有密切关联，于是所求的最小值可由等式转换成不等式而求得。

解法 2 $\because$ $x+y=1, \therefore (x+y)^2=1,$ 即 $x^2+y^2=1-2xy.$

$\because$ $2xy\le x^2+y^2, \therefore$ $x^2+y^2\ge 1-(x^2+y^2).$

即 $x^2+y^2\ge\dfrac{1}{2},$ 当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时取等号。$\therefore$ x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

分析 3 配方法是解决求最值问题的一种常用手段，利用已知条件结合所求式子，配方后得两个实数平方和的形式，从而达到求最值的目的。

解法 3 设 $z=x^2+y^2$.

$\because$ $x+y=1,$ $\therefore z=x^2+y^2-x-y+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ 当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时，$z_{最小}=\dfrac{1}{2}$.即 x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

分析 4 因为已知条件和所求函数式都具有解析几何常见方程的特点，故可得到用解析法求解的启发。

解法 4 如图 4－2－2，$x+y=1$ 表示直线 l, x^2+y^2 表示原点到直线 l 上的点 $P(x,y)$ 的距离的平方。

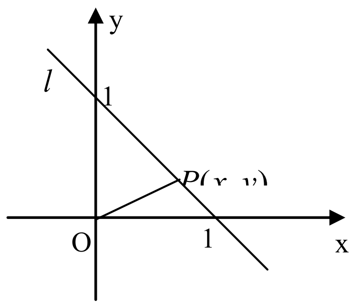


图 4－2－2

显然其中以原点到直线 l 的距离最短。

此时，$d=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $(\sqrt{x^2+y^2})_{最小}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

注 如果设 $x^2+y^2=z$, 则问题还可转化为直线 $x+y=1$ 与圆 $x^2+y^2=z$ 有交点时，半径 $\sqrt{z}$ 的最小值。

简评 几种解法都有特点和代表性。解法 1 是基本方法，解法 2、3、4 都紧紧地抓住题设条件的特点，与相关知识联系起来，所以具有灵巧简捷的优点，特别是解法 4，

形象直观，值得效仿。

例4 设$z\notin R,\dfrac{z}{1+z^2}\in R.$求证：$|z|=1.$

分析 1 由已知条件$\dfrac{z}{1+z^2}$为实数这一特点，可提供设实系数二次方程的可能，在该二次方程有两个虚根的条件下，它们是一对共轭虚根，运用韦达定理可以探求证题途径。

证法 1 设$\dfrac{z}{1+z^2}=a(a\in R),$当$a=0$时，可得$z=0$与$z\notin R$条件不合。

$\therefore a\neq 0.$于是有 $az^2-z+a=0.$

$\because z\notin R,$ $\therefore$该方程有一对共轭虚根，设为z_1,z_2，于是$z_1=\bar{z}_2,\therefore\ |z_1|^2=|z_2|^2$.

又由韦达定理知 $z_1\cdot z_2=\dfrac{a}{a}=1,\therefore\ z_1\cdot\bar{z}_1=z_2\cdot\bar{z}_2=|z_1|^2=|z_2|^2=1.\therefore\ |z|=1.$

分析 2 由于实数的共轭复数仍然是这个实数，利用这一关系可以建立复数方程，注意到$z\bar{z}=|z|^2$这一重要性质，即可求出$|z|$的值。

证法 2 设$\dfrac{z}{1+z^2}=a(a\in R),$当$a=0$时，可得$z=0$与$z\notin R$条件不合，$\therefore a\neq 0.$

则有 $\bar{a}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$，$\because a=\bar{a}$，$\therefore$ $\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$

即 $z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2)$ $\therefore$ $z+\bar{z}(z\cdot\bar{z})=\bar{z}+z(z\cdot\bar{z}).$

但 $z\cdot\bar{z}=|z|^2,\therefore$ $z+\bar{z}\cdot|z|^2=\bar{z}+z\cdot|z|^2,$ $\therefore(\bar{z}-z)(1-|z|^2)=0.$

而 $\bar{z}-z\notin R,$ $\therefore$ $|z|^2=1.$即$|z|=1.$

分析 3 因为实数的倒数仍为实数，若对原式取倒数，可变换化简为易于进行运算的形式。再运用共轭复数的性质，建立复数方程，具有更加简捷的特点。

证法 3 $\dfrac{z}{1+z^2}\in R,$ $\therefore$ $\dfrac{1+z^2}{z}\in R,$即$z+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{z\cdot\bar{z}}\cdot\bar{z}\in R.$

从而必有$z\cdot\bar{z}=1.$ $\therefore$ $|z|=1.$

简评 设出复数的代数形式或三角形式，代入已知条件化简求证，一般也能够证明，它是解决复数问题的基本方法。但这些方法通常运算量大，较繁。现在的三种证法都应用复数的性质去证，技巧性较强，思路都建立在方程的观点上，这是需要体会的关键之处。证法 3 利用倒数的变换，十分巧妙是最好的方法。

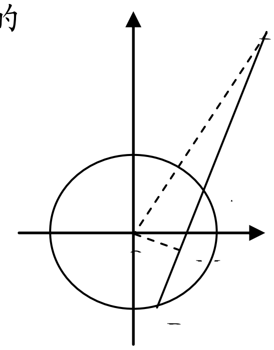
例 5 由圆 $x^2+y^2=9$ 外一点 $P(5,12)$ 引圆的割线交圆于 A、B 两点，求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程。

分析 1 （直接法）根据题设条件列出几何等式，运用解析几何基本公式转化为代数等式，从而求出曲线方程。这里考虑在圆中有关弦中点的一些性质，圆心和弦中点的连线垂直于弦，可得下面解法。

解法 1 如图 4－2－3，设弦 AB 的中点 M 的坐标为 $M(x,y)$，连接 OP、OM，则 $OM\perp AB$，在 ΔOMP 中，由两点间的距离公式和勾股定理有

$$x^2+y^2+(x-5)^2+(y-12)^2=169.$$

整理，得 $x^2+y^2-5x-12y=0.$ 其中 $-3\le x\le 3.$



分析 2 （定义法）根据题设条件，判断并确定轨迹的曲线类型，运用待定系数法求出曲线方程。

解法 2 因为 M 是 AB 的中点，所以 $OM\perp AB$，所以点 M 的轨迹是以 $|OP|$ 为直径的圆，圆心为 $(\frac{5}{2},6)$，半径为 $\frac{|OP|}{2}=\frac{13}{2}$，$\therefore$ 该圆的方程为：

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y-6)^2=(\frac{13}{2})^2$$

化简，得 $x^2+y^2-5x-12y=0.$ 其中 $-3\le x\le 3.$

分析 3 （交轨法）将问题转化为求两直线的交点轨迹问题。因为动点 M 可看作直线 OM 与割线 PM 的交点，而由于它们的垂直关系，从而获得解法。

解法 3 设过 P 点的割线的斜率为 k，则过 P 点的割线方程为：$y-12=k(x-5)$.

$\because$ $OM\perp AB$ 且过原点，$\therefore$ OM 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x.$ 这两条直线的交点就是 M 点的轨迹。两方程相乘消去 k，化简，得：$x^2+y^2-5x-12y=0.$ 其中 $-3\le x\le 3.$

分析 4 （参数法）将动点坐标表示成某一中间变量（参数）的函数，再设法消去参数。由于动点 M 随直线的斜率变化而发生变化，所以动点 M 的坐标是直线斜率的函数，从而可得如下解法。

解法 4 设过 P 点的割线方程为：$y-12=k(x-5)$

它与圆 $x^2+y^2=9$ 的两个交点为 A、B，AB 的中点为 M.

解方程组 $\begin{cases} y = k(x-5)+12 \\ x^2+y^2=9, \end{cases}$

利用韦达定理和中点坐标公式，可求得M点的轨迹方程为:

$$x^2+y^2-5x-12y=0.\text{其中} -3\le x\le 3.$$

分析 5 （代点法）根据曲线和方程的对应关系：点在曲线上则点的坐标满足方程。设而不求，代点运算。从整体的角度看待问题。这里由于中点M的坐标(x,y)与两交点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$通过中点公式联系起来，又点P、M、A、B构成 4 点共线的和谐关系，根据它们的斜率相等，可求得轨迹方程。

解法 5 设$M(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则$x_1+x_2=2x,\quad y_1+y_2=2y.$

$$\because\quad x_1^2+y_1^2=9,\quad x_2^2+y_2^2=9.$$

两式相减，整理，得 $(x_2-x_1)(x_2+x_1)-(y_2-y_1)(y_1+y_2)=0.$

所以 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{x}{y},$

即为AB的斜率，而AB对斜率又可表示为$\dfrac{12-y}{5-x}$, $\therefore \dfrac{12-y}{5-x}=-\dfrac{x}{y},$

化简并整理，得 $x^2+y^2-5x-12y=0.$其中$-3\le x\le 3.$

简评 上述五种解法都是求轨迹问题的基本方法。其中解法 1、2、3 局限于曲线是圆的条件，而解法 4、5 适用于一般的过定点P且与二次曲线C交于A、B两点，求AB中点M的轨迹问题。具有普遍意义，值得重视。对于解法 5 通常利用$k_{PM}=k_{AB}$可较简捷地求出轨迹方程，比解法 4 计算量要小，要简捷得多。

二、《解密数学思维的内核》

数学解题的思维过程

数学解题的思维过程是指从理解问题开始，经过探索思路，转换问题直至解决

问题，进行回顾的全过程的思维活动。

对于数学解题思维过程，G．波利亚提出了四个阶段*（见附录），即弄清问题、拟定计划、实现计划和回顾。这四个阶段思维过程的实质，可以用下列八个字加以概括：理解、转换、实施、反思。

第一阶段：理解问题是解题思维活动的开始。

第二阶段：转换问题是解题思维活动的核心，是探索解题方向和途径的积极的尝试发现过程，是思维策略的选择和调整过程。

第三阶段：计划实施是解决问题过程的实现，它包含着一系列基础知识和基本技能的灵活运用和思维过程的具体表达，是解题思维活动的重要组成部分。

第四阶段：反思问题往往容易为人们所忽视，它是发展数学思维的一个重要方面，是一个思维活动过程的结束包含另一个新的思维活动过程的开始。

数学解题的技巧

为了使回想、联想、猜想的方向更明确，思路更加活泼，进一步提高探索的成效，我们必须掌握一些解题的策略。

一切解题的策略的基本出发点在于“变换”，即把面临的问题转化为一道或几道易于解答的新题，以通过对新题的考察，发现原题的解题思路，最终达到解决原题的目的。

基于这样的认识，常用的解题策略有：熟悉化、简单化、直观化、特殊化、一般化、整体化、间接化等。

一、　熟悉化策略

所谓熟悉化策略，就是当我们面临的是一道以前没有接触过的陌生题目时，要设法把它化为曾经解过的或比较熟悉的题目，以便充分利用已有的知识、经验或解题模式，顺利地解出原题。

一般说来，对于题目的熟悉程度，取决于对题目自身结构的认识和理解。从结构上来分析，任何一道解答题，都包含条件和结论（或问题）两个方面。因此，要把陌生题转化为熟悉题，可以在变换题目的条件、结论（或问题）以及它们的联系方式上多下功夫。

常用的途径有：

（一）、充分联想回忆基本知识和题型：

按照波利亚的观点，在解决问题之前，我们应充分联想和回忆与原有问题相同或相似的知识点和题型，充分利用相似问题中的方式、方法和结论，从而解决现有的问题。

（二）、全方位、多角度分析题意：

对于同一道数学题，常常可以不同的侧面、不同的角度去认识。因此，根据自己的知识和经验，适时调整分析问题的视角，有助于更好地把握题意，找到自己熟悉的解题方向。

（三）恰当构造辅助元素：

数学中，同一素材的题目，常常可以有不同的表现形式；条件与结论（或问题）

之间，也存在着多种联系方式。因此，恰当构造辅助元素，有助于改变题目的形式，沟通条件与结论（或条件与问题）的内在联系，把陌生题转化为熟悉题。

数学解题中，构造的辅助元素是多种多样的，常见的有构造图形（点、线、面、体），构造算法，构造多项式，构造方程（组），构造坐标系，构造数列，构造行列式，构造等价性命题，构造反例，构造数学模型等等。

二、简单化策略

所谓简单化策略，就是当我们面临的是一道结构复杂、难以入手的题目时，要设法把转化为一道或几道比较简单、易于解答的新题，以便通过对新题的考察，启迪解题思路，以简驭繁，解出原题。

简单化是熟悉化的补充和发挥。一般说来，我们对于简单问题往往比较熟悉或容易熟悉。

因此，在实际解题时，这两种策略常常是结合在一起进行的，只是着眼点有所不同而已。

解题中，实施简单化策略的途径是多方面的，常用的有：寻求中间环节，分类考察讨论，简化已知条件，恰当分解结论等。

1、寻求中间环节，挖掘隐含条件:

在些结构复杂的综合题，就其生成背景而论，大多是由若干比较简单的基本题，经过适当组合抽去中间环节而构成的。

因此，从题目的因果关系入手，寻求可能的中间环节和隐含条件，把原题分解成一组相互联系的系列题，是实现复杂问题简单化的一条重要途径。

2、分类考察讨论:

在些数学题，解题的复杂性，主要在于它的条件、结论（或问题）包含多种不易识别的可能情形。对于这类问题，选择恰当的分类标准，把原题分解成一组并列的简单题，有助于实现复杂问题简单化。

3、简单化已知条件:

有些数学题，条件比较抽象、复杂，不太容易入手。这时，不妨简化题中某些已知条件，甚至暂时撇开不顾，先考虑一个简化问题。这样简单化了的问题，对于解答原题，常常能起到穿针引线的作用。

4、恰当分解结论:

有些问题，解题的主要困难，来自结论的抽象概括，难以直接和条件联系起来，这时，不妨猜想一下，能否把结论分解为几个比较简单的部分，以便各个击破，解出原题。

三、直观化策略:

所谓直观化策略，就是当我们面临的是一道内容抽象，不易捉摸的题目时，要设法把它转化为形象鲜明、直观具体的问题，以便凭借事物的形象把握题中所及的各对象之间的联系，找到原题的解题思路。

（一）、图表直观:

有些数学题，内容抽象，关系复杂，给理解题意增添了困难，常常会由于题目的

抽象性和复杂性，使正常的思维难以进行到底。

对于这类题目，借助图表直观，利用示意图或表格分析题意，有助于抽象内容形象化，复杂关系条理化，使思维有相对具体的依托，便于深入思考，发现解题线索。

（二）、图形直观:

有些涉及数量关系的题目，用代数方法求解，道路崎岖曲折，计算量偏大。这时，不妨借助图形直观，给题中有关数量以恰当的几何分析，拓宽解题思路，找出简捷、合理的解题途径。

（三）、图象直观:

不少涉及数量关系的题目，与函数的图象密切相关，灵活运用图象的直观性，常常能以简驭繁，获取简便，巧妙的解法。

四、特殊化策略

所谓特殊化策略，就是当我们面临的是一道难以入手的一般性题目时，要注意从一般退到特殊，先考察包含在一般情形里的某些比较简单的特殊问题，以便从特殊问题的研究中，拓宽解题思路，发现解答原题的方向或途径。

五、一般化策略

所谓一般化策略，就是当我们面临的是一个计算比较复杂或内在联系不甚明显的特殊问题时，要设法把特殊问题一般化，找出一个能够揭示事物本质属性的一般情形的方法、技巧或结果，顺利解出原题。

六、整体化策略

所谓整体化策略，就是当我们面临的是一道按常规思路进行局部处理难以奏效或计算冗繁的题目时，要适时调整视角，把问题作为一个有机整体，从整体入手，对整体结构进行全面、深刻的分析和改造，以便从整体特性的研究中，找到解决问题的途径和办法。

七、间接化策略

所谓间接化策略，就是当我们面临的是一道从正面入手复杂繁难，或在特定场合甚至找不到解题依据的题目时，要随时改变思维方向，从结论（或问题）的反面进行思考，以便化难为易解出原题。

数学解题思维过程

数学解题的思维过程是指从理解问题开始，从经过探索思路，转换问题直至解决问题，进行回顾的全过程的思维活动。

在数学中，通常可将解题过程分为四个阶段:

第一阶段是**审题**。包括认清习题的条件和要求，深入分析条件中的各个元素，在复杂的记忆系统中找出需要的知识信息，建立习题的条件、结论与知识和经验之间

的联系，为解题作好知识上的准备。

第二阶段是**寻求解题途径**。有目的地进行各种组合的试验，尽可能将习题化为已知类型，选择最优解法，选择解题方案，经检验后作修正，最后确定解题计划。

第三阶段是**实施计划**。将计划的所有细节实际地付诸实现，通过与已知条件所选择的根据作对比后修正计划，然后着手叙述解答过程的方法，并且书写解答与结果。

第四阶段是**检查与总结**。求得最终结果以后，检查并分析结果。探讨实现解题的各种方法，研究特殊情况与局部情况，找出最重要的知识。将新知识和经验加以整理使之系统化。

所以：第一阶段的理解问题是解题思维活动的开始。

第二阶段的转换问题是解题思维活动的核心，是探索解题方向和途径的积极的尝试发现过程，是思维策略的选择和调整过程。

第三阶段的计划实施是解决问题过程的实现，它包含着一系列基础知识和基本技能的灵活运用和思维过程的具体表达，是解题思维活动的重要组成部分。

第四阶段的反思问题往往容易为人们所忽视，它是发展数学思维的一个重要方面，是一个思维活动过程的结束包含另一个新的思维活动过程的开始。

通过以下探索途径来提高解题能力:

（1）研究问题的条件时，在需要与可能的情况下，可画出相应图形或思路图帮助思考。因为这意味着你对题的整个情境有了清晰的具体的了解。

（2）清晰地理解情境中的各个元素；一定要弄清楚其中哪些元素是给定了的，即已知的，哪些是所求的，即未知的。

（3）深入地分析并思考习题叙述中的每一个符号、术语的含义，从中找出习题的重要元素，要图中标出（用直观符号）已知元素和未知元素，并试着改变一下题目中（或图中）各元素的位置，看看能否有重要发现。

（4）尽可能从整体上理解题目的条件，找出它的特点，联想以前是否遇到过类似题目。

（5）仔细考虑题意是否有其他不同理解。题目的条件有无多余的、互相矛盾的内容？是否还缺少条件？

（6）认真研究题目提出的目标。通过目标找出哪些理论的法则同题目或其他元素有联系。

（7）如果在解题中发现有你熟悉的一般数学方法，就尽可能用这种方法的语言表示题的元素，以利于解题思路的展开。

以上途径特别有利于开始解题者能迅速“登堂入室”，找到解题的起步点。在制定计划寻求解法阶段，最好利用下面这套探索方法:

（1）设法将题目与你会解的某一类题联系起来。或者尽可能找出你熟悉的、最符合已知条件的解题方法。

（2）记住：题的目标是寻求解答的主要方向。在仔细分析目标时即可尝试能否用你熟悉的方法去解题。

（3）解了几步后可将所得的局部结果与问题的条件、结论作比较。用这种办法检查解题途径是否合理，以便及时进行修正或调整。

（4）尝试能否局部地改变题目，换种方法叙述条件，故意简化题的条件（也就是编

拟条件简化了的同类题）再求其解。再试试能否扩大题目条件（编一个更一般的题目），并将与题有关的概念用它的定义加以替代。

（5）分解条件，尽可能将分成部分重新组合，扩大骤条件的理解。

（6）尝试将题分解成一串辅助问题，依次解答这些辅助问题即可构成所给题目的解。

（7）研究题的某些部分的极限情况，考察这样会对基本目标产生什么影响。

（8）改变题的一部分，看对其他部分有何影响；依据上面的“影响”改变题的某些部分所出现的结果，尝试能否对题的目标作出一个“展望”。

（9）万一用尽方法还是解不出来，你就从课本中或科普数学小册子中找一个同类题，研究分析其现成答案，从中找出解题的有益启示。

****

附录:

波利亚给出了详细的“怎样解题”表，在这张表中启发你找到解题途径的一连串问句与建议，来表示思维过程的正确搜索程序，其解题思想的核心在于不断地变换问题，连续地简化问题，把数学解题看成为问题化归的过程，即最终归结为熟悉的基本问题加以解决。

怎样解题

G．波 利 亚

第一：你必须弄清问题

弄清问题:

未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？把条件的各部分分开。你能否把它们写下来？

第二：找出已知数与未知数之间的联系。如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题，你应该最终得出一个求解的计划。

拟订计划:

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的

问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第三：实现你的计划

实现计划：

实现你的求解计划，检验每一步骤。

你能否清楚地看出这一步骤是否正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

第四：验证所得的解

回顾：

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出来？你能不能把这个结果或方法用于其它的问题？

数学解题方法

一、换元法

“换元”的思想和方法，在数学中有着广泛的应用，灵活运用换元法解题，有助于数量关系明朗化，变繁为简，化难为易，给出简便、巧妙的解答。

在解题过程中，把题中某一式子如 $f(x)$，作为新的变量 y 或者把题中某一变量如 x，用新变量 t 的式子如 $g(t)$ 替换，即通过令 $f(x)=y$ 或 $x=g(t)$ 进行变量代换，得到结构简单便于求解的新解题方法，通常称为换元法或变量代换法。

用换元法解题，关键在于根据问题的结构特征，选择能以简驭繁，化难为易的代换 $f(x)=y$ 或 $x=g(t)$。就换元的具体形式而论，是多种多样的，常用的有有理式代换，根式代换，指数式代换，对数式代换，三角式代换，反三角式代换，复变量代换等，宜在解题实践中不断总结经验，掌握有关的技巧。

例如，用于求解代数问题的三角代换，在具体设计时，宜遵循以下原则：（1）全面考虑三角函数的定义域、值域和有关的公式、性质；（2）力求减少变量的个数，使问题结构简单化；（3）便于借助已知三角公式，建立变量间的内在联系。只有全面考虑以上原则，才能谋取恰当的三角代换。

换元法是一种重要的数学方法，在多项式的因式分解，代数式的化简计算，恒等式、条件等式或不等式的证明，方程、方程组、不等式、不等式组或混合组的求解，函数表达式、定义域、值域或最值的推求，以及解析几何中的坐标替换，普通方程与参数方程、极坐标方程的互化等问题中，都有着广泛的应用。

二、消元法

对于含有多个变数的问题，有时可以利用题设条件和某些已知恒等式（代数恒等

式或三角恒等式），通过适当的变形，消去一部分变数，使问题得以解决，这种解题方法，通常称为消元法，又称消去法。

消元法是解方程组的基本方法，在推证条件等式和把参数方程化成普通方程等问题中，也有着重要的应用。

用消元法解题，具有较强的技巧性，常常需要根据题目的特点，灵活选择合适的消元方法。

三、待定系数法

按照一定规律，先写出问题的解的形式（一般是指一个算式、表达式或方程），其中含有若干尚待确定的未知系数的值，从而得到问题的解。这种解题方法，通常称为待定系数法；其中尚待确定的未知系数，称为待定系数。

确定待定系数的值，有两种常用方法：比较系数法和特殊值法。

（一）比较系数法

比较系数法，是指通过比较恒等式两边多项式的对应项系数，得到关于待定系数的若干关系式（通常是多元方程组），由此求得待定系数的值。

比较系数法的理论根据，是多项式的恒等定理：两个多项式恒等的充分必要条件是对应项系数相等，即 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots\ +b_n$ 的充分必要条件是 $a_0=b_0$，$a_1=b_1$，……　$a_n=b_n$ 。

（二）特殊值法

特殊值法，是指通过取字母的一些特定数据值代入恒等式，由左右两边数值相等得到关于待定系数的若干关系式，由此求得待定系数的值。

特殊值法的理论根据，是表达式恒等的定义：两个表达式恒等，是指用字母容许值集内的任意值代替表达式中的字母，恒等式左右两边的值总是相等的。

待定系数法是一种常用的数学方法，主要用于处理涉及多项式恒等变形问题，如分解因式、证明恒等式、解方程、将分式表示为部分分式、确定函数的解析式和圆锥曲线的方程等。

四、判别式法

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0)$　　①

的判别式 $\triangle=b^2-4ac$ 具有以下性质：

$$\triangle\begin{cases}>0，当且仅当方程①有两个不相等的实数根\\=0，当且仅当方程①有两个相等的实数根;\\<0，当且仅当方程②没有实数根。\end{cases}$$

对于二次函数

$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$ ②它的判别式 $\triangle=b^2-4ac$ 具有以下性质：

$$\triangle\begin{cases}>0，当且仅当抛物线②与 x 轴有两个公共点;\\=0，当且仅当抛物线②与 x 轴有一个公共点;\\<0，当且仅当抛物线②与 x 轴没有公共点。\end{cases}$$

利用判别式是中学数学的一种重要方法，在探求某些实变数之间的关系，研究方程的根和函数的性质，证明不等式，以及研究圆锥曲线与直线的关系等方面，都有着

广泛的应用。

在具体运用判别式时，①②中的系数都可以是含有参数的代数式。

从总体上说，解答数学题，即需要富有普适性的策略作宏观指导，也需要各种具体的方法和技巧进行微观处理，只有把策略、方法、技巧和谐地结合起来，创造性地加以运用，才能成功地解决面临的问题，获取良好的效果。

五、 分析法与综合法

分析法和综合法源于分析和综合，是思维方向相反的两种思考方法，在解题过程中具有十分重要的作用。

在数学中，又把分析看作从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法，而综合被看成是从原因推导到由原因产生的结果的另一种思维方法。通常把前者称为分析法，后者称为综合法。

具体的说，分析法是从题目的等证结论或需求问题出发，一步一步的探索下去，最后达到题设的已知条件；综合法则是从题目的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证的结论或需求问题。

六、 数学模型法

数学模型法，是指把所考察的实际问题，进行数学抽象，构造相应的数学模型，通过对数学模型的研究，使实际问题得以解决的一种数学方法。

利用数学模型法解答实际问题（包括数学应用题），一般要做好三方面的工作：

（1） 建模。根据实际问题的特点，建立恰当的数学模型。从总体上说，建模的基本手段，是数学抽象方法。建模的具体过程，大体包括以下几个步骤：

1° 考察实际问题的基本情形。分析问题所及的量的关系，弄清哪些是常量，哪些是变量，哪些是已知量，哪些是未知量；了解其对象与关系结构的本质属性，确定问题所及的具体系统。

2° 分析系统的矛盾关系。从实际问题的特定关系和具体要求出发，根据有关学科理论，抓住主要矛盾，考察主要因素和量的关系。

3° 进行数学抽象。对事物对象及诸对象间的关系进行抽象，并用有关的数学概念、符号和表达式去刻画事物对象及其关系。如果现有的数学工具不够用，可以根据实际情况，建立新的数学概念和数学方法去表现数学模型。

（2）推理、演算。在所得到的数学模型上，进行逻辑推理或数学演算，求出相应的数学结果。

（3） 评价、解释。对求得的数学结果进行深入讨论，作出评价和解释，返回到原来的实际问题中去，形成最终的解答。

七、试验法

解答数学题，需要多方面的信息。数学中的各种试验，常常能给人以有益的信息，为分析问题和解决问题提供必要的依据。

用试验法处理数学问题时，必须从问题的实际情形出发，结合有关的数学知识，恰当选择试验的对象和范围；在制定试验方案时，要全面考虑试验的各种可能情形，

不能有所遗漏；在实施试验方案时，要讲究试验技巧，充分利用各次试验所提供的信息，以缩小试验范围，减少试验次数，尽快找出原题的解答。

任何试验都和观察相联系。观察依赖于试验，试验离不开观察。因此，要用好试验法，必须勤于观察，善于观察，有目的、有计划、有条理地进行观察。

八、分类法

分类法是数学中的一种基本方法，对于提高解题能力，发展思维的缜密性，具有十分重要的意义。

不少数学问题，在解题过程中，常常需要借助逻辑中的分类规则，把题设条件所确定的集合,分成若干个便于讨论的非空真子集,然后在各个非空真子集内进行求解，直到获得完满的结果。这种把逻辑分类思想移植到数学中来，用以指导解题的方法，通常称为分类或分域法。

用分类法解题，大体包含以下几个步骤:

第一步：根据题设条件，明确分类的对象，确定需要分类的集合 A;

第二步：寻求恰当的分类根据，按照分类的规则，把集合 A 分为若干个便于求解的非空真子集 A_1，A_2，…A_n;

第三步：在子集 A_1，A_2，…A_n 内逐类讨论;

第四步：综合子集内的解答，归纳结论。

以上四个步骤是相互联系的，寻求分类的根据，是其中的一项关键性的工作。从总体上说，分类的主要依据有：分类叙述的定义、定理、公式、法则，具有分类讨论位置关系的几何图形，题目中含有某些特殊的或隐含的分类讨论条件等。在实际解题时，仅凭这些还不够，还需要有较强的分类意识，需要思维的灵活性和缜密性，特别要善于发掘题中隐含的分类条件。

九、数形结合法

数形结合，是研究数学的一个基本观点，对于沟通代数、三角与几何的内在联系，具有重要的指导意义。理解并掌握数形结合法，有助于增强人们的数学素养，提高分析问题和解决问题的能力。

数和形这两个基本概念，是数学的两块基石。数学就是围绕这两个概念发展起来的。在数学发展的进程中，数和形常常结合在一起，在内容上互相联系，在方法上互相渗透，在一定条件下可以互相转化。

数形结合的基本思想，是在研究问题的过程中，注意把数和形结合起来考察，斟酌问题的具体情形，把图形性质的问题转化为数量关系的问题，或者把数量关系的问题转化为图形性质的问题，使复杂问题简单化，抽象问题具体化，化难为易，获得简便易行的成功方案。

中学数学中，数形结合法包含两个方面的内容：一是运用代数、三角知识，通过对数量关系的讨论，去处理几何图形问题；二是运用几何知识，通过对图形性质的研究，去解决数量关系的问题。就具体方法而论，前者常用的方法有解析法、三角法、复数法、向量法等；后者常用的方法主要是图解法。

十、反证法与同一法

反证法和同一法是间接证明的两种方法，在解题中有着广泛的应用。

（一）反证法是一种重要的证明方法。这里主要研究反证法的逻辑原理、解题步骤和适用范围。

反证法的解题步骤:

第一步：反设。假设命题结论不成立，即假设原结论的反面为真。

第二步：归谬。由反设和已知条件出发，经过一系列正确的逻辑推理，得出矛盾结果。这里所说的矛盾结果，通常是指推出的结果与已知公理、定义、定理、公式矛盾，与已知条件矛盾，与临时假设矛盾，以及自相矛盾等各种情形。

第三步：存真。由矛盾结果，断定反设不真，从而肯定原结论成立。

反证法的三个步骤是互相联系的。反设是前提，归谬是关键，存真是目的。只有正确地作出反设，合乎逻辑地进行推导，才能间接地证出原题。

十一、同一法

互逆的两个命题未必等效。但是，当一个命题条件和结论都唯一存在，它们所指的概念是同一概念时，这个命题和它的逆命题等效。这个道理通常称为同一原理。

对于符合同一原理的命题，当直接证明有困难时，可以改证和它等效的逆命题，只要它的逆命题正确，这个命题就成立。这种证明方法叫做同一法。

同一法常用于证明符合同一原理的几何命题。应用同一法解题，一般包括下面几个步骤:

第一步：作出符合命题结论的图形。

第二步：证明所作图形符合已知条件。

第三步：根据唯一性，确定所作的图形与已知图形重合。

第四步：断定原命题的真实性。

三、《高考数学解题专项训练》

（选择题）

（一）数学选择题的解题思路

要想确保在有限的时间内，对 10 多条选择题作出有效的抉择，明晰解题思路是十分必要的。一般说来， 数学选择题有着特定的解题思路，具体概括如下:

1、仔细审题，吃透题意

审题是正确解题的前题条件，通过审题，可以掌握用于解题的第一手资料——已知条件，弄清题目要求。

审题的第一个关键在于：将有关概念、公式、定理等基础知识加以集中整理。凡在题中出现的概念、公式、性质等内容都是平时理解、记忆、运用的重点，也是我们在解选择题时首先需要回忆的对象。

审题的第二个关键在于：发现题材中的“机关”——— 题目中的一些隐含条件，往往是该题“价值”之所在，也是我们失分的“隐患”。

除此而外，审题的过程还是一个解题方法的抉择过程，开拓的解题思路能使我们心涌如潮，适宜的解题方法则帮助我们事半功倍。

2、反复析题，去伪存真

析题就是剖析题意。在认真审题的基础上，对全题进行反复的分析和解剖，从而为正确解题寻得路径。因此，析题的过程就是根据题意，联系知识，形成思路的过程。由于选择题具有相近、相关的特点，有时“真作假时假亦真”，对于一些似是而非的选项，我们可以结合题目，将选项逐一比较，用一些“虚拟式”的“如果”，加以分析与验证，从而提高解题的正确率。

3、抓往关键，全面分析

在解题过程中，通过审题、析题后找到题目的关键所在是十分重要的，从关键处入手，找突破口，联系知识进行全面的分析形成正确的解题思路，就可以化难为易，化繁为简，从而解出正确的答案。

4、反复检查，认真核对

在审题、析题的过程中，由于思考问题不全面，往往会导致“失根”、“增根”等错误，因而，反复地检查，认真地进行核对，也是解选择题必不可少的步骤之一。

（二）数学选择题的解题方法

当然，仅仅有思路还是不够的，“解题思路”在某种程度上来说，属于理论上的“定性”，要想解具体的题目，还得有科学、合理、简便的方法。

有关选择题的解法的研究，可谓是仁者见仁，智者见智。其中不乏真知灼见，现选择部分实用性较强的方法，供参考：

1、 **直接法**

有些选择题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的。这类题型可直接从题设的条件出发，利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则，通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论，从而确定选择支的方法。

2、 **筛选法**

数学选择题的解题本质就是去伪存真，舍弃不符合题目要求的错误答案，找到符合题意的正确结论。可通过筛除一些较易判定的的、不合题意的结论，以缩小选择的范围，再从其余的结论中求得正确的答案。如筛去不合题意的以后，结论只有一个，则为应选项。

3、 **特殊值法**

有些选择题，用常规方法直接求解比较困难，若根据答案中所提供的信息，选择某些特殊情况进行分析，或选择某些特殊值进行计算，或将字母参数换成具体数值代入，把一般形式变为特殊形式，再进行判断往往十分简单。

4、 **验证法**

通过对试题的观察、分析、确定，将各选择支逐个代入题干中，进行验

证、或适当选取特殊值进行检验、或采取其他验证手段，以判断选择支正误的方法。

5、　图象法

在解答选择题的过程中，可先根据题意，作出草图，然后参照图形的作法、形状、位置、性质，综合图象的特征，得出结论。

6、　试探法

对于综合性较强、选择对象比较多的试题，要想条理清楚，可以根据题意建立一个几何模型、代数构造，然后通过试探法来选择，并注意灵活地运用上述多种方法。

（三）数学经典选择题点评

1、同时满足① $M\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$；② 若 $a\in M$，则 $(6-a)\in M$，的非空集合 M 有（C）。

（A）16 个　（B）15 个　（C）7 个　（D）8 个

点评：着重理解“∈”的意义，对 M 中元素的情况进行讨论，一定要强调如果“a 在 M 中，那么 $(6-a)$ 也在 M 中”这一特点，分别讨论“一个、两个、三个、四个、五个元素”等几种情况，得出相应结论。

2、函数 $y=f(x)$ 是 R 上的增函数，则 $a+b>0$ 是 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$ 的（ C ）条件。

（A）充分不必要　（B）必要不充分　（C）充要　（D）不充分不必要

点评：由 $a+b>0$ 可知，$a>-b$，$b>-a$，又 $y=f(x)$ 在 R 上为增函数，故 $f(a)>f(b)$，$f(b)>f(-a)$，反过来，由增函数的概念也可推出，$a+b>(-a)+(-b)$。

3、函数 $g(x)=x^2\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，若 $a\neq 0$ 且 $a\in R$，则下列点一定在函数 $y=g(x)$ 的图象上的是（ D ）。

（A）$(-a,\ -g(-a))$　（B）$(a,\ g(-a))$　（C）$(a,\ -g(a))$　（D）$(-a,\ -g(a))$

点评：本题从函数的奇偶性入手，先看括号内函数的奇偶性为奇函数，得到该复合函数为奇函数，再根据 $g(-x)=-g(x)$，取 x=a 和 x=-a 加以验证。

4、数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，且 $\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}$ $(n\geqslant 2)$，则 a_n 等于（ A ）。

（A）$\dfrac{2}{n+1}$　（B）$(\dfrac{2}{3})^{n-1}$　（C）$(\dfrac{2}{3})^n$　（D）$\dfrac{2}{n+2}$

点评：先代入求得 a_3 的值，再对照给出的选择支，用验证法即可得出结论。

5、由 1，2，3，4 组成的没有重复数字的四位数，按从小到大的顺序排成一个数列 $\{a_n\}$，其中 a_{18} 等于（B ）。

（A）1243　（B）3421　（C）4123　（D）3412

点评：先写出以 1 开头、2 开头、3 开头的各 6 个数，再按由小到大顺序排列。

6、若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{1-a}+\dfrac{4a}{1-a}+\cdots\cdots+\dfrac{4a^{n-1}}{1-a}\right)=9$，则实数 a 等于（ B ）。

（A）$\dfrac{5}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）$-\dfrac{5}{3}$　　（D）$-\dfrac{1}{3}$

点评：通过观察可知 $a<1$（如 $a>1$，则数值为负），且求和的各项成等比，因此可以运用无穷递缩等比数列求和公式（其中 $q=a$，$a_1=4$）。

7、已知圆锥内有一个内接圆柱，若圆柱的侧面积最大，则此圆柱的上底面将已知圆锥的体积分成小、大两部分的比是（ D ）。

（A）1∶1　　（B）1∶2　　（C）1∶8　　（D）1∶7

点评：通过平面展开图，达到“降维”之目的，促使立体图形平面化，再在相似等腰三角形中，求得小、大三角形的高的比为 1：2，由此可见，小的与全体体积之比为 1：8，从而得出小、大两部分之比（特别提醒：小、大之比并非高之比的立方）。

8、下列命题中，正确的是（ D ）。

（A）$y=\arccos x$ 是偶函数　　（B）$\arcsin(\sin x)=x$，$x\in R$

（C）$\sin(\arcsin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{3}$　　（D）若 $-1<x<0$，则 $-\dfrac{\pi}{2}<\arcsin x<0$

点评：反三角函数的概念、公式的理解与运用。注意：$\arccos(-x)=\Pi-\arccos x$，$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & (\text{当 } -\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{2} \text{ 时}) \\ x' & \text{且 } \sin x=\sin x' \ (\text{当 } -\dfrac{\pi}{2}<x'<-\dfrac{\pi}{2} \text{ 时}) \end{cases}$

9、函数 $y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-2x}{3+x}$（$x\in R$ 且 $x\neq-3$），则 $y=f(x)$ 的图象（ B ）。

（A）关于点 (2，3) 对称　　（B）关于点 (−2，−3) 对称

（C）关于直线 $y=3$ 对称　　（D）关于直线 $x=-2$ 对称

点评：主要考核反函数的概念与对称性的知识。

10、两条曲线 $|y|=\sqrt{-x}$ 与 $x=-\sqrt{-y}$ 的交点坐标是（ B ）。

（A）(−1，−1)　　（B）(0，0) 和 (−1，−1)

（C）(−1，1) 和 (0，0)　　（D）(1，−1) 和 (0，0)

点评：从定义域、值域、特殊值等角度加以验证。

11、已知 a，$b\in R$，$m=\dfrac{6^a}{36^{a+1}+1}$，$n=\dfrac{5}{6}-b+\dfrac{1}{3}b^2$，则下列结论正确的是（ D ）。

（A）$m<n$　　（B）$m\geqslant n$　　（C）$m>n$　　（D）$m\leqslant n$

点评：由题意可知 $m\leqslant \frac{1}{2}$、 $n=\frac{1}{3}(b-1)^2+\frac{1}{2}$。

12、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC、A_1D 的公垂线，则 EF 和 BD_1 的关系是（ B ）。

（A）垂直 （B）平行 （C） 异面 （D）相交但不垂直

点评：理解公垂线的概念，通过平行作图可知。

13、直线 $4x+6y-9=0$ 夹在两坐标轴之间的线段的垂直平分线是 l，则 l 的方程是(B)。

（A）$24x-16y+15=0$ （B）$24x-16y-15=0$ （C）$24x+16y+15=0$ （D）$24x+16y-15=0$

点评：通过两线垂直与斜率的关系，以及中点坐标公式。

14、函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$ 在 $x\in[2, 4]$ 上是增函数，则 a 的取值范围是（ A ）。

（A）$a>1$ （B）$a>0$ 且 $a\neq 1$ （C）$0<a<1$ （D）$a\in\phi$

点评：分类讨论，考虑对称轴与单调区间的位置关系，运用特殊值进行验证。

15、函数 $y=\cos^2(x-\frac{\pi}{12})+\sin^2(x+\frac{\pi}{12})-1$ 是（ C ）。

（A）周期为 2π 的奇函数 （B）周期为 π 的偶函数

（C）周期为 π 的奇函数 （D）周期为 2π 的偶函数

点评：用倍角公式降次，判断周期性，根据和差化积的结果来求奇偶性。

16、若 a，$b\in R$，那么 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件是（ C ）。

（A）$a>b$ （B）$ab(a-b)<0$ （C）$a<b<0$ （D）$a<b$

点评：理解条件语句，用不等式的性质解题。

17、函数 $y=\cos^4x-\sin^4x$ 图象的一条对称轴方程是（ A ）。

（A）$x=-\frac{\pi}{2}$ （B）$x=-\frac{\pi}{4}$ （C）$x=\frac{\pi}{8}$ （D）$x=\frac{\pi}{4}$

点评：先降次，后找最值点。

18、已知 l、m、n 为两两垂直且异面的三条直线，过 l 作平面 α 与 m 垂直，则直线 n 与平面 α 的关系是（ A ）。

（A）$n//\alpha$ （B）$n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$

（C）$n\subset\alpha$ 或 n 不平行于 α （D）$n\subset\alpha$

点评：画草图，运用线面垂直的有关知识。

19、若 z_1，$z_2\in C$，$|z_1|=|z_2|=1$ 且 $\arg(z_1)=150°$，$\arg(z_2)=300°$，那么 $\arg(z_1+z_2)$ 为（ B ）。

（A）450° （B）225° （C）150° （D）45°

点评：旋转与辐角主值的概念。

20、已知 a、b、c 成等比数列，a、x、b 和 b、y、c 都成等差数列，且 $xy\neq 0$，那么 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}$ 的值为（ B ）。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

点评：运用等比、差中项概念，通分求解。

21、如果在区间[1，3]上，函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ 在同一点取得相同的最小值，那么下列说法不对的是（ C ）。

（A）$f(x)\geqslant 3$ （$x\in[1,2]$）　（B）$f(x)\leqslant 4$ （$x\in[1,2]$）

（C）$f(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递增　（D）$f(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 上是减函数

点评：通过最值定理、二次函数的对称轴与最值等求出 p 、q，再行分析。

22、在 $(2+\sqrt[4]{3})^{100}$ 展开式中，有理数的项共有（ D ）。

（A）4 项　（B）6 项　（C）25 项　（D）26 项

点评：借助二项式展开的通项公式来分析。

23、在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AD 中点，O 为侧面 AA_1B_1B 的中心，P 为侧棱 CC_1 上任意一点，那么异面直线 OP 与 BM 所成的角是（ A ）。

（A）90°　（B）60°　（C）45°　（D）30°

点评：运用平行和垂直的有关知识。

24、等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q<0$，前 n 项和为 S_n，$T_n=\dfrac{S_n}{a_n}$，则有（ A ）。

（A）$T_1<T_9$　（B）$T_1=T_9$　（C）$T_1>T_9$　（D）大小不定

点评：$T_1=1$，用等比数列前 n 项和公式求 T_9

25、设集合 $A=\phi$，集合 $B=\{0\}$，则下列关系中正确的是（ C ）

（A）$A=B$　（B）$A\subseteq B$　（C）$A\subset B$　（D）$A\supset B$

点评：主要考核空集的概念、以及集合与集合的关系。

26、已知直线 l 过点 $M(-1,0)$，并且斜率为 1，则直线 l 的方程是（ B ）

（A）$x+y+1=0$　（B）$x-y+1=0$

（C）$x+y-1=0$　（D）$x-y-1=0$

点评：直线方程的点斜式。

27、已知 $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{tg}\,\alpha=3^m$，$\mathrm{tg}\,\beta=3^{-m}$，则 m 的值是（ D ）。

（A）2　（B）$-\dfrac{1}{3}$　（C）-2　（D）$\dfrac{1}{2}$

点评：通过 $\tan\alpha\tan\beta=1$，以及 $\tan(\alpha-\beta)$ 的公式进行求解。

28、已知集合 $A=\{$整数$\}$，$B=\{$非负整数$\}$，f 是从集合 A 到集合 B 的映射，且 f：$x\to y=x^2$（$x\in A$，$y\in B$），那么在 f 的作用下象是 4 的原象是（ D ）

（A）16　（B）±16　（C）2　（D）±2

点评：主要考核象和原象的概念。

29、有不等式① $\cos\frac{3}{2}<\cos 0.7$；② $\log_{0.5}0.7<\log_2\frac{3}{2}$；③ $0.5^{0.7}<2^{1.5}$；④ $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}<\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$。其中成立的是（ D ）。

（*A*）仅①②　（*B*）仅②③　（*C*）仅③④　（*D*）①②③④

点评：主要考核三角函数、对数、指数函数、反三角函数的知识。

30、已知函数 $y=\frac{x}{x-1}$，那么（ A ）

（*A*）当 $x\in(-\infty,1)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数单调递减

（*B*）当 $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 时，函数单调递增

（*C*）当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 时，函数单调递减

（*D*）当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 时，函数单调递增

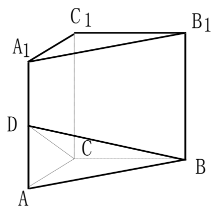
点评：先对函数式进行变形，再运用有关大小比较的知识解题。

31、若 $-\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{3}{2}\pi$，那么三角函数式 $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\alpha}$ 化简为（ C ）

（*A*）$\sin\frac{\alpha}{3}$　（*B*）$-\sin\frac{\alpha}{3}$　（*C*）$\cos\frac{\alpha}{3}$　（*D*）$-\cos\frac{\alpha}{3}$

点评：主要运用半角公式及三角函数单调性等知识。

32、如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是等腰直角三角形，斜边 $AB=\sqrt{2}a$，侧棱 $AA_1=2a$，点 D 是 AA_1 的中点，那么截面 DBC 与底面 ABC 所成二面角的大小是（ B ）



（*A*）30°　（*B*）45°　（*C*）60°　（*D*）非以上答案

点评：实际上是要求角 DCA 的大小。

33、加工某一机械零件，需要经过两个工序，完成第一个工序有 3 种不同的方法，完成第二个工序有 4 种不同的方法，那么加工这一零件不同的方法种数有（ A ）

（*A*）12 种　（*B*）7 种　（*C*）4 种　（*D*）3 种

点评：运用乘法原理解题。

34、在 $(2-\sqrt{x})^8$ 的展开式中，第七项是（ A ）

（*A*）$112x^3$　（*B*）$-112x^3$　（*C*）$16x^3\sqrt{x}$　（*D*）$-16x^3\sqrt{x}$

点评：运用二项展开式的通项公式，注意：r =6。

35、在 −8，−6，−4，−2，0，1，3，5，7，9 这十个数中，任取两个作为虚数 $a+bi$ 的实部和虚部（$a,b\in R$，$a\neq b$），则能组成模大于 5 的不同虚数的个数有（ A ）。

（*A*）64 个　（*B*）65 个　（*C*）72 个　（*D*）73 个

点评：虚部不能为 0，模大于 5，最好用“树图”来讨论。

36、直线 $x-ay+\sqrt{2a}=0$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是（ A ）

（A）相交　（B）相切　（C）相离　（D）不能确定

点评：运用点到直线的距离公式，比较半径与距离的大小。

37、在正方体 AC_1 中，过与顶点 A 相邻的三个顶点作平面 α，过与顶点 C_1 相邻的三个顶点作平面 β，那么平面 α 与平面 β 的位置关系是（ B ）

（A）垂直　（B）平行　（C）斜交　（D）斜交或平行

点评：作图后，找线线关系，由线线平行得出线面平行，从而求得面面平行。

38、有下列三个对应：①$A=R^+$，$B=R$，对应法则是"取平方根"；②$A=\{$矩形$\}$，$B=R^+$，对应法则是"求矩形的面积"；③$A=\{$非负实数$\}$，$B=(0,1)$，对应法则是"平方后与 1 的和的倒数"，其中从 A 到 B 的对应中是映射的是（ A ）。

（A）②　（B）②，③　（C）①，②，③　（D）①，②

点评：映射的概念。

39、设 $A=\{x|\ x^2+px+q=0\}$，$B=\{x|\ x^2+(p-1)x+2q=0\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则（ A ）。

（A）$A\subset B$　（B）$A\supseteq B$

（C）$A\cup B=\{1,\ 1,\ 2\}$　（D）$A\cup B=(1,\ -2)$

点评：考察集合与集合的关系。

40、能够使得 $\sin x>0$ 和 $\operatorname{tg}x>0$ 同时成立的角 x 的集合是（ D ）。

（A）$\{x|\,0<x<\dfrac{\pi}{2}\}$　（B）$\{x|\,0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\}$

（C）$\{x|\,k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\}$　（D）$\{x|\,2k\pi<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\}$

点评：通过不同象限，三角函数值的正负不同的特点，进行分析。

41. 已知函数 $y=\left|\dfrac{1}{2}+\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})\right|$，$(\dfrac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant\dfrac{13\pi}{24})$，下列关于此函数的最值及相应的 x 的取值的结论中正确的是（ B ）。

（A）$y_{max}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x=\dfrac{13\pi}{24}$　（B）$y_{max}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{24}$

（C）$y_{min}=\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{5\pi}{12}$　（D）$y_{min}=0$，$x=\dfrac{5\pi}{6}$

点评：对余弦函数最值进行分析。

42、已知函数 $f(x)$ 在定义域 R 内是减函数且 $f(x)<0$，则函数 $g(x)=x^2f(x)$ 的单调情况一定是（ C ）。

（A）在 R 上递减　（B）在 R 上递增

（C）在 $(0,\ +\infty)$ 上递减　（D）在 $(0,\ +\infty)$ 上递增

点评：先选定区间 $(0,\ +\infty)$ 分析其增减性，再结合筛选法，对余下的部分，取特殊值进行验证。

43、α，β是两个不重合的平面，在α上取 4 个点，在β上取 3 个点，则由这些点最多可以确定平面（ C ）。

（*A*）35 个　（*B*）30 个　（*C*）32 个　（*D*）40 个

点评：运用排列组合以及平面的性质进行分析。

44、已知定点 P_1（3，5），P_2（－1，1），Q（4，0），点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 3，则直线 PQ 的方程是（ A ）。

（*A*）　$x+2y-4=0$　（*B*）$2x+y-8=0$

（*C*）$x-2y-4=0$　（*D*）$2x-y-8=0$

点评：用定比分点坐标公式求 P 点坐标，再考察 PQ 的斜率。

45、函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 在[－1，1]上是（ *A* ）。

（*A*）增函数且是奇函数　（*B*）增函数且是偶函数

（*C*）减函数且是奇函数　（*D*）减函数且是偶函数

点评：运用函数奇偶性的定义，以及奇函数在不同区间上增减性一致，偶函数在不同区间上不一致的特点，进行分析。

46、下列函数中，在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上是增函数的是（ *D* ）。

（*A*）$y=\sin x$　（*B*）$y=\cos x$　（*C*）$y=\sin 2x$　（*D*）$y=\cos 2x$

点评：用图象法解题。

47、与函数 $y=\sin(\arcsin x)$ 的图象相同的的是（ *D* ）。

（*A*）$y=x$　（*B*）$y=\arcsin(\sin x)$

（*C*）$y=\arccos(\cos x)$　（*D*）$y=\cos(\arccos x)$

点评：考虑函数的定义域与值域。

48、方程 $\cos x=\lg x$ 的实根的个数是（ *C* ）。

（*A*）1 个　（*B*）2 个　（*C*）3 个　（*D*）4 个

点评：用图象法解题。

49、一个首项为 23，公差为整数的等差数列，如果前 6 项均为正数，第 7 项起为负数，则它的公差是（ *C* ）。

（*A*）－2　（*B*）－3　（*C*）－4　（*D*）－5

点评：分析前 6 项为正，第 7 项起为负数。列出不等式解题。

50、已知复数 z 满足$|2z-i|=2$，则$|z+2i|$的最小值是（ *B* ）。

（*A*）$\frac{1}{2}$　（*B*）$\frac{3}{2}$　（*C*）1　（*D*）2

点评：数形结合，通过图象解题。

51、正三棱锥的侧棱长和底面边长比值的取值范围是（ *D* ）。

（*A*）$[\frac{\sqrt{3}}{6},+\infty]$　（*B*）$(\frac{\sqrt{3}}{6},+\infty)$

（C）$[\frac{\sqrt{3}}{3}$，$+\infty]$　　（D）$(\frac{\sqrt{3}}{3}$，$+\infty)$

点评：画图形，侧棱应比底边三角形的外接圆的半径大。

52、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率等于 $\frac{3}{5}$，若将这个椭圆绕着它的右焦点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，所得的新椭圆的一条准线的方程 $y=\frac{16}{3}$，则原来的椭圆方程是（ C ）。

（A）$\frac{x^2}{129}+\frac{y^2}{48}=1$　（B）$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$　（C）$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　（D）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

点评：旋转的过程中，焦点到准线的距离没有变，先找焦点。

53、直线 $x-y-1=0$ 与实轴在 y 轴上的双曲线 $x^2-y^2=m$ $(m\neq 0)$ 的交点在以原点为中心，边长为 2 且各边分别平行于坐标轴的正方形内部，则 m 的取值范围是（ C ）。

（A）$0<m<1$　（B）$m<0$　（C）$-1<m<0$　（D）$m<-1$

点评：通过极限位置，找出相关范围。

54、已知直线 l_1 与 l_2 的夹角的平分线为 $y=x$，如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0$ $(ab>0)$，那么 l_2 的方程是（ A ）。

（A）$bx+ay+c=0$　（B）$ax-by+c=0$

（C）$bx+ay-c=0$　（D）$bx-ay+c=0$

点评：联系反函数的概念。

55、函数 $F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)$ $(x\neq 0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $f(x)$（ A ）。

（A）是奇函数　（B）是偶函数

（C）可能是奇函数，也可能是偶函数　（D）非奇、非偶函数

点评：先讨论 $y=(1+\frac{2}{2^x-1})$ 的奇偶性，再结合题目中的已知内容分析。

56、函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数（ C ）。

（A）是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

（B）是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

（C）是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

（D）是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

点评：先对给出函数进行分析，再运用反函数的概念解题。

57、若 a，b 是任意实数，且 $a>b$，则（ D ）。

（A）$a^2>b^2$　（B）$\frac{b}{a}<1$　（C）$\lg(a-b)>0$　（D）$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

点评：运用平方数、分数、对数、指数函数的概念进行分析。

58、若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则（ B ）。

（A）$0<a<b<1$　（B）$0<b<a<1$　（C）$a>b>1$　（D）$b>a>1$

点评：先确定对数符号（即真数和底数与 1 的关系一致时（同时大于或同时小于），为正，不一致时，为负。）再用换底公式。

59、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，且 a_1，a_3，a_9 成等比数列，则 $\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$ 的值是（ C ）。

（A）$\frac{15}{14}$　（B）$\frac{12}{13}$　（C）$\frac{13}{16}$　（D）$\frac{15}{16}$

点评：先求 a_1 和公比的关系，再化简。

60、如果 α，$\beta\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，且 $\mathrm{tg}\,\alpha<\mathrm{ctg}\,\beta$，那么必有（ C ）。

（A）$\alpha<\beta$　（B）$\beta<\alpha$　（C）$\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$　（D）$\alpha+\beta>\frac{3\pi}{2}$

点评：先用诱导公式化成同名函数，再借助函数图象解题。

61、已知集合 $Z=\{\theta\mid \cos\theta<\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，$F=\{\theta\mid \mathrm{tg}\,\theta<\sin\theta\}$，那么 $Z\cap F$ 的区间（ A ）。

（A）$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$　（B）$(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4})$　（C）$(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$　（D）$(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4})$

点评：用图象法解题。

62、如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x+b$ 关于直线 $y=x$ 对称，那么（ B ）。

（A）$a=\frac{1}{3}$，$b=6$　（B）$a=\frac{1}{3}$，$b=-6$

（C）$a=3$，$b=-2$　（D）$a=3$，$b=6$

点评：运用反函数的知识。

63、已知 $f(\frac{1+x}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，则 $f(x)=$（ C ）。

（A）$(x+1)^2$　（B）$(x-1)^2$　（C）x^2-x+1　（D）x^2+x+1

点评：用换元法。

64、若函数 $f(x)=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 R，则实数 k 的取值范围是（ A ）。

（A）$[0,\ \frac{3}{4}]$　（B）$(-\infty,\ 0)\cup(\frac{3}{4},\ +\infty)$

（C）$[0,\ \frac{3}{4}]$　　（D）$[\frac{3}{4},\ +\infty]$

点评：分母不为 0，用根的判别式。

65、设 P 是棱长相等的四面体内任意一点，则 P 到各个面的距离之和是一个定值，这个定值等于（ C ）。

（A）四面体的棱长　　（B）四面体的斜高

（C）四面体的高　　（D）四面体两对棱间的距离

点评：用体积求。

66、若正四棱柱的底面积为 P，过相对两侧棱的截面面积是 Q，则该四棱柱的体积是（ A ）。

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}Q\sqrt{P}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}P\sqrt{Q}$　　（C）$Q\sqrt{P}$　　（D）$P\sqrt{Q}$

点评：化面积为边。

67、过定点 $(1,\ 3)$ 可作两条直线与圆 $x^2+y^2+2kx+2y+k^2-24=0$ 相切，则 k 的取值范围是（ C ）。

（A）$k>2$　　（B）$k<-4$　　（C）$k>2$ 或 $k<-4$　　（D）$-4<k<2$

点评：画定点、平移圆、定区域。

68、适合 $|z-2|=1$ 且 $\arg z=\frac{\pi}{6}$ 的复数 z 的个数是（ B ）。

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

点评：在直角坐标系中画圆，找出适合条件的复数。

69、已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么 a_3+a_5 的值为（ A ）。

（A）5　　（B）10　　（C）15　　（D）20

点评：用等比的性质：若数列为等比数列，m+m=k+1 时，$a_m\ a_{n=}\ a_k\ a_1$。

70、设 a，b 是满足 $ab<0$ 的实数，那么（ B ）。

（A）$|a+b|>|a-b|$　　（B）$|a+b|<|a-b|$

（C）$|a-b|<||a|-|b||$　　（D）$|a-b|<|a|+|b|$

点评：从符号出发，取特殊值代入。

71、如果 $AC<0$ 且 $BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过（ C ）。

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

点评：分析符号，找斜率和截距。

72、直线 $\begin{cases} x=t\sin 20^\circ+3 \\ y=-t\cos 20^\circ \end{cases}$ 的倾斜角是（ C ）。

（A）20°　　（B）70°　　（C）110°　　（D）160°

点评：化参数方程为普通方程。

73、函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是（ D ）。

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

点评：用倍角公式和（$\sin x+\cos x$）的公式。

74、函数 $y=0.2^{x}+1$ 的反函数是（ C ）。

（A）　$y=\log_5 x+1$　（B）$y=\log_x 5+1$

（C）$y=-\log_5(x-1)$　（D）$y=-\log_5 x-1$

点评：反函数的定义，结合定义域、值域的变换情况进行讨论。

75、设 α、β 都是第二象限的角，若 $\sin\alpha>\sin\beta$，则（ C ）。

（A）　$\tan\alpha>\tan\beta$　（B）$\cot\alpha<\cot\beta$

（C）$\cos\alpha>\cos\beta$　（D）$\sec\alpha>\sec\beta$

点评：结合特殊值，找出 α、β 在 $[0, 2\pi]$ 上的大小关系。

76、下列命题：① 函数 $y=\tan x$ 是增函数；② 函数 $y=\sin x$ 在第一象限是增函数；③ 函数 $y=3\sin(2x+5\theta)$ 的图象关于 y 轴对称的充要条件是 $\theta=\frac{2}{5}k\pi+\frac{\pi}{10}$，$k\in Z$；④ 若角 α 是第二象限的角，则角 2α 一定是第四象限的角。其中正确命题的个数是（ A ）。

（A）0 个　（B）1 个　（C）2 个　（D）3 个

点评：紧扣定义，逐个分析。

77、在△ABC 中，$A>B$ 是 $\cos 2B>\cos 2C$ 的（ A ）。

（A）非充分非必要条件　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　（D）充要条件

点评：分若三种情况，取特殊值验证。

78、若 $0<a<b<1$，则下列不等式成立的是（ A ）。

（A）$\log_{\frac{1}{a}} b<a^b<\log_b a$　（B）$\log_{\frac{1}{a}} b<\log_b a<a^b$

（C）$\log_b a<\log_{\frac{1}{a}} b<a^b$　（D）$a^b<\log_{\frac{1}{a}} b<\log_b a$

点评：运用对数符号确定的有关知识，先讨论两个对数值，然后用指数。

79、要使 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{4m-6}{4-m}$ 有意义，则 m 的取值范围是（ C ）。

（A）　$m\leqslant\frac{7}{3}$　（B）$m\geqslant-1$

（C）$-1\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$　（D）$m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant\frac{7}{3}$

点评：先对等式左边进行变形，再对分数变形。

80、直线 $x\cos\theta-y+1=0$ 的倾斜角的范围是（ *D* ）。

（*A*）$[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$　　（*B*）$[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}]$

（*C*）$(0,\ \frac{\pi}{4})\cup(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$　　（*D*）$[0,\ \frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\ \pi]$

点评：先讨论斜率，再用三角函数的知识。

81、设 $n\geqslant 2$ 时，数列 $C_n^1,-2C_n^2,3C_n^3,-4C_n^4,\cdots\cdots,(-1)^{n-1}nC_n^n$ 的和是（ *A* ）。

（*A*）0　（*B*）$(-1)^n2^n$　（*C*）1　（*D*）$\frac{2^n}{n+1}$

点评：特殊值法。

82、在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有（ *D* ）。

（*A*）1 个　（*B*）2 个　（*C*）3 个　（*D*）4 个

点评：用图形来验证。

83、当 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 时，$z^{100}+z^{50}+1$ 的值等于（ *D* ）。

（*A*）1　（*B*）-1　（*C*）i　（*D*）$-I$

点评：先化 Z 为三角形式，然后用棣莫佛定理。

84、函数 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|tgx|}{tgx}+\frac{ctgx}{|ctgx|}$ 的值域是（ *B* ）。

（*A*）$\{-2,\ 4\}$　（*B*）$\{-2,\ 0,\ 4\}$

（*C*）$\{-2,\ 0,\ 2,\ 4\}$　（*D*）$\{-4,\ -2,\ 0,\ 4\}$

点评：分象限讨论。

85、正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等，如果 *E*、*F* 分别是 *SC*、*AB* 的中点，那么异面直线 *EF*、*SA* 所成的角为（ *C* ）。

（*A*）90°　（*B*）60°　（*C*）45°　（*D*）30°

点评：巧用中位线平行于底边。

86、若正棱锥的底面边长与侧棱相等，则该棱锥一定不是（ *D* ）。

（*A*）三棱锥　（*B*）四棱锥　（*C*）五棱锥　（*D*）六棱锥

点评：用射影和直角三角形的知识。

87、四边形 *ABCD* 是边长为 1 的正方形，*E*、*F* 为 *BC*、*CD* 的中点，沿 *AE*、*EF*、*AF* 折成一个四面体，使 *B*、*C*、*D* 三点重合，这个四面体的体积为（ *B* ）。

（A）$\frac{1}{8}$　（B）$\frac{1}{24}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{24}$　（D）$\frac{\sqrt{5}}{48}$

点评：分析图形的折叠与边角关系。

88、一束光线从点 $A(-1,1)$ 出发经 x 轴反射，到达圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 上一点的最短路程是（ A ）。

（A）4　（B）5　（C）$3\sqrt{2}-1$　（D）$2\sqrt{6}$

点评：用对称性，找关于 X 轴对称的圆心位置，用两点间距离减半径。

89、设地球半径为 R，当人造地球卫星距离地面的高度为 h_1 与 h_2 时，可以直射到地表面的面积分别是地球表面面积的 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$，则 h_1-h_2 等于（ B ）。

（A）$\frac{1}{2}R$　（B）R　（C）$\frac{3}{2}R$　（D）$2R$

点评：用球冠公式。

90、函数 $f(x)=|x|-|x-3|$ 在定义域内（ A ）。

（A）最大值为 3，最小值为 -3　（B）最大值为 4，最小值为 0

（C）最大值为 1，最小值为 1　（D）最大值为 3，最小值为 -1

点评：用区间分析法。

91、如果 $\sin\alpha\sin\beta=1$，那么 $\cos(\alpha+\beta)$ 等于（ A ）。

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）±1

点评：用公式。

92、已知 $\alpha=\arg(2+i)$，$\beta=\arg(-3+i)$，则 $\alpha-\beta$ 为（ D ）。

（A）$\frac{5\pi}{4}$　（B）$\frac{3\pi}{4}$　（C）$-\frac{\pi}{4}$　（D）$-\frac{3\pi}{4}$

点评：用旋转的方法，进行向量合成。

93、若双曲线 $x^2-y^2=1$ 右支上一点 $P(a,b)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $a+b$ 的值是（ B ）。

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　（D）2 或 -2

点评：先确定 P 点在坐标系中的位置，然后用筛选法。

94、一球内切于一圆台，若此圆台的上、下底面半径分别是 a，b，则此圆台的体积是（ B ）。

(A) $\pi(a^2+ab+b^2)\sqrt{ab}$　　(B) $\frac{2\pi}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{ab}$

(C) $\frac{\pi}{3}(a^2+ab+b^2)ab$　　(D) $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{ab}$

点评：画轴截面，分析平面图形。

95、若全集 $I=R$, $A=\{x|\ \sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\ \lg(x^2-2)>\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ =（ B ）。

(A) $\{2\}$　　(B) $\{-1\}$　　(C) $\{x|\ x\leqslant -1\}$　　(D) ϕ

点评：先用筛选法，再用验证法。

96、已知函数 $f(x)=a^x-(b+2)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象不在二、四象限，则实数 a, b 的取值范围是（ A ）。

(A) $a>1$, $b=-1$　(B) $0<a<1$, $b=-1$

(C) $a>1$, $b=-2$　(D) $0<a<1$, $b=-2$

点评：先分析 b，再考虑 a。

97、设函数 $f(x)=\frac{2x+1}{4x+3}$ $(x\in R,\ x\neq -\frac{3}{4},)$ 则 $f^{-1}(2)=$（ A ）。

(A) $-\frac{5}{6}$　　(B) $\frac{5}{11}$　　(C) $\frac{2}{5}$　　(D) $-\frac{2}{5}$

点评：令 $f(x)=2$，求 x。

98、如果 α, $\beta\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，且 $\mathrm{tg}\alpha<\mathrm{ctg}\beta$，那么必有（ C ）。

(A) $\alpha<\beta$　　(B) $\beta<\alpha$　　(C) $\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$　　(D) $\alpha+\beta>\frac{3\pi}{2}$

点评：用诱导公式，取特殊值。

99、函数 $y=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的最小正周期等于（ A ）。

(A) π　　(B) 2π　　(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

点评：先用倍角公式降次，合并，再用周期公式。

100、函数 $y=-\mathrm{ctg}x$, $x\in(0,\ \pi)$ 的反函数为（ B ）。

(A) $y=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x$　　(B) $y=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}x$

(C) $y=\pi-\mathrm{arctg}x$　　(D) $y=\pi+\mathrm{arctg}x$

点评：运用反三角函数的值域进行分析。

101、设 a, b 是满足 $ab<0$ 的实数，那么（ B ）。

（A）$|a+b|>|a-b|$ （B）$|a+b|<|a-b|$
（C）$|a-b|<|a|-|b|$ （D）$|a-b|>|a|+|b|$

点评：特殊值法。

102、设 a，b，$c\in R^+$，则三个数 $a+\frac{1}{b}$，$b+\frac{1}{c}$，$c+\frac{1}{a}$（ D ）。

（A）都不大于 2 （B）都不小于 2
（C）至少有一个不大于 2 （D）至少有一个不小于 2

点评：反证法。

103、若一数列的前四项依次是 2，0，2，0，则下列式子中，不能作为它的通项公式的是（ D ）。

（A）$a_n=1-(-1)^n$ （B）$a_n=1+(-1)^{n+1}$

（C）$a_n=2\sin^2\frac{n\pi}{2}$ （D）$a_n=(1-\cos n\pi)+(n-1)(n-2)$

点评：验证法。

104、复数 $z_1=-2+i$ 的辐角主值为 θ_1，复数 $z_2=-1-3i$ 辐角主值为 θ_2，则 $\theta_1+\theta_2$ 等于（ D ）。

（A）$\frac{\pi}{4}$ （B）$\frac{7\pi}{4}$ （C）$\frac{11\pi}{6}$ （D）$\frac{9\pi}{4}$

点评：辐角主值的概念。

105、平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 30，则四面体 AB_1CD_1 的体积是（ C ）。

（A）15 （B）7.5 （C）10 （D）6

点评：体积公式。

106、不论 k 为何实数，直线 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 恒通过一个定点，这个定点的坐标是（ B ）。

（A）(5，2) （B）(2，3) （C）(5，9) （D）$(-\frac{1}{2},3)$

点评：对原式进行变形。

107、方程 $ax+by+c=0$ 与方程 $2ax+2by+c+1=0$ 表示两条平行直线的充要条件是（ C ）。

（A）$ab>0$，$c\neq1$ （B）$ab<0$，$c\neq1$
（C）$a^2+b^2\neq0$，$c\neq1$ （D）$a=b=c=2$

点评：两直线平行的充要条件。

108、与三条直线 $y=0$，$y=x+2$，$y=-x+4$ 都相切的圆的圆心是（ C ）。

（A） $(1,\ 2\sqrt{3}+2)$ （B）$(1,\ 3\sqrt{2}-3)$

(*C*) $(1,\ 3\sqrt{2}-3)$ (*D*) $(1,\ -3\sqrt{2}-3)$

点评：用点到直线的距离公式进行验证。

109、焦距是 10，虚轴长是 8，过点 $(3\sqrt{2},\ 4)$ 的双曲线的标准方程是（ *A* ）。

(*A*) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (*B*) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ (*C*) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ (*D*) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$

点评：运用概念进行验证。

110、函数 $y=\log_3(x^2+x-2)$ 的定义域是（ *C* ）。

(*A*) $[-2,\ 1]$ (*B*) $(-2,\ 1)$

(*C*) $(-\infty,\ -2)\cup(1,\ +\infty)$ (*D*) $(-\infty,\ -2)\cup[1,\ +\infty]$

点评：解不等式。

111、若 $\log_m 0.7>\log_n 0.7>0$，则 m, n 的大小关系是（ *C* ）。

(*A*) $m>n>1$ (*B*) $n>m>1$ (*C*) $0<n<m<1$ (*D*) $0<m<n<1$

点评：先用对数符号的确定，再用换底公式。

112、函数 $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期是 4π，则常数 ω 为（ *D* ）。

(*A*) 4 (*B*) 2 (*C*) $\frac{1}{2}$ (*D*) $\frac{1}{4}$

点评：先用倍角公式，再用周期公式。

113、若 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots\dots+a_7x^7$，那么 $a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_7$ 的值等于（ *A* ）。

(*A*) -2 (*B*) -1 (*C*) 0 (*D*) 2

点评：取 x =1。

114、当 $A=20°$, $B=25°$ 时，$(1+\mathrm{tg}A)(1+\mathrm{tg}B)$ 的值是（ *B* ）。

(*A*) $\sqrt{3}$ (*B*) 2 (*C*) $1+\sqrt{2}$ (*D*) $2+\sqrt{3}$

点评：公式变形。

115、满足 $|z+25i|\leqslant 15$ 的辐角主值最小的复数 z 是（ *C* ）。

(*A*) $10i$ (*B*) $25i$ (*C*) $-12-16i$ (*D*) $12+16i$

点评：画圆找切线。

116、圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最小值是（ *B* ）。

(*A*) 6 (*B*) 4 (*C*) 5 (*D*) 1

点评：点到直线距离减半径。

117、函数 $y=\cos(\frac{\pi}{3}-2x)$ 的单调递减区间是（ B ）。

（A）$[2k\pi-\frac{\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in Z$　　（B）$[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}]$，$k\in Z$

（C）$[2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{2\pi}{3}]$，$k\in Z$　　（D）$[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in Z$

点评：图象法。

118、已知 a，b 是两个不等的正数，$P=(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，$Q=(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}})^2$，$R=(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2$，那么数值最大的一个是（ A ）。

（A）P　（B）Q　（C）R　（D）与 a，b 的值有关

点评：特殊值验证法。

119、关于 x 的方程 $\sqrt{1-x^2}=kx+2$ 有唯一解，则实数 k 的取值范围是（ D ）。

（A）$k=\pm\sqrt{3}$　　（B）$k<-2$ 或 $k>2$

（C）$-2<k<2$　　（D）$k<-2$ 或 $k>2$ 或 $k=\pm\sqrt{3}$

点评：分析圆和直线相切的情况。

120、满足 $\{1,\ 2\}\subseteq T\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\}$ 的集合 T 的个数是（ D ）。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

点评：从组合的角度分析题目。

121、若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,\ 2)$，则函数 $y=f(-2x)$ 的定义域是（ B ）。

（A）$(0,\ 2)$　（B）$(-1,\ 0)$　（C）$(-4,\ 0)$　（D）$(0,\ 4)$

点评：理解“定义域”的内涵。

122、已知 $f(x^n)=\lg x$，那么 $f(2)$ 等于（ B ）。

（A）$\lg 2$　（B）$\frac{1}{n}\lg 2$　（C）$n\lg 2$　（D）$2^n\lg 2$

点评：指数与对数互化。

123、已知 $m>n>1$，$0<a<1$，下列不等式不成立的是（ B ）。

（A）$\log_m a>\log_n a$　（B）$a^m>a^n$　（C）$a^m<a^n$　（D）$\log_a m<\log_a n$

点评：指数函数与对数函数的增减性。

124、设函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则函数 $y=af(x)+x^2$ $(a\in R)$ 的图象关于（ B ）。

（A）x 轴对称　（B）y 轴对称

（C）原点对称　（D）直线 $y=x$ 对称

点评：偶函数的有关知识。

125、条件甲：$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$；条件乙：$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$，则甲是乙的（ *C* ）。

（*A*）充要条件　　　　　　（*B*）充分而不必要条件

（*C*）必要而不充分条件　　（*D*）既不充分也不必要条件

点评：从解集的大小来分析条件命题。

126、已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$，且 $b>-a>0$，则函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是（ *C* ）。

（*A*）$[a, b]$　（*B*）$[-b, -a]$　（*C*）$[a, -a]$　（*D*）$[-b, b]$

点评：函数奇偶性的前提条件以及公共区域的有关知识。

127、“$\log_3 x^2=2$”是“$\log_3 x=1$”成立的（ *B* ）。

（*A*）充要条件　　　　　　（*B*）必要而不充分条件

（*C*）充分而不必要条件　　（*D*）既不充分也不必要条件

点评：对数的真数要为正。

128、设 $a, b\in R$，则不等式 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的充分必要条件是（ *B* ）。

（*A*）$a>b>0$ 或 $b<a<0$　（*B*）$a>0, b<0$　（*C*）$b<a<0$　（*D*）$0<b<a$

点评：特殊值法。

129、三个数 $(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{5}}$，$(\frac{6}{5})^{-\frac{1}{5}}$，$(\frac{6}{5})^{-\frac{2}{5}}$ 的大小顺序是（ *B* ）。

（*A*）$(\frac{6}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{6}{5})^{-\frac{2}{5}}<(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{5}}$　（*B*）$(\frac{6}{5})^{-\frac{2}{5}}<(\frac{6}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{5}}$

（*C*）$(\frac{6}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{6}{5})^{-\frac{2}{5}}$　（*D*）$(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{6}{5})^{-\frac{1}{5}}<(\frac{6}{5})^{-\frac{2}{5}}$

点评：幂函数、指数函数的大小比较。

130、若 $0<a<1$，$0<b<1$，四个数 $a+b$，$2\sqrt{ab}$，$2ab$，a^2+b^2 中最大者与最小者分别记为 M 和 m，则（ *A* ）。

（*A*）$M=a+b$，$m=2ab$　　（*B*）$M=a^2+b^2$，$m=2\sqrt{ab}$

（*C*）$M=a+b$，$m=2\sqrt{ab}$　　（*D*）$M=a^2+b^2$，$m=2ab$

点评：特殊值法。

131、设 $\lg^2 x-\lg x-2=0$ 的两根是 α、β，则 $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$ 等于（ *D* ）。

（*A*）1　（*B*）-2　（*C*）3　（*D*）-4

点评：换底公式与韦达定理。

132、若 $y=f(x)$ 是周期为 t 的函数，则 $y=f(2x+1)$ 是（ *C* ）。

（A）周期为 t 的周期函数　　（B）周期为 $2t$ 的周期函数

（C）周期为 $\frac{t}{2}$ 的周期函数　　（D）不是周期函数

点评：紧扣周期函数的概念。

133、已知 $y=f(x)$ 为偶函数，定义域是 $(-\infty, +\infty)$，它在 $[0, +\infty)$ 上是减函数，那么 $m=f(-\frac{3}{4})$ 与 $n=f(a^2-a+1)$ $(a\in R)$ 的大小关系是（ B ）。

（A）$m>n$　　（B）$m\geqslant n$　　（C）$m<n$　　（D）$m\leqslant n$

点评：配方以及偶函数在不同区间上的增减性不同。

134、给关于 x 的不等式 $2x^2+ax<a^2$ $(a\neq 0)$ 提供四个解，①当 $a>0$ 时，$-a<x<\frac{a}{2}$；②当 $a>0$ 时，$-\frac{a}{2}<x<a$；③当 $a<0$ 时，$\frac{a}{2}<x<-a$；④当 $a<0$ 时，$a<x<-\frac{a}{2}$。那么原不等式的解为（ B ）。

（A）②或③　　（B）①或③　　（C）①或④　　（D）②或④

点评：解方程，结合二次函数图象分析。

135、已知定义在实数集上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $y=f(x)$ 是（ A ）。

（A）奇函数　　（B）偶函数　　（C）非奇非偶函数　　（D）不能确定

点评：先求出 $y=f(0)=0$，得 $f(x)+f(-x)=0$ 。

136、已知 $f(x)=2|x|+3$，$g(x)=4x-5$，$f[p(x)]=g(x)$，则 $p(3)$ 的值是（ B ）。

（A）2　　（B）± 2　　（C）-2　　（D）不能确定

点评：结合内外层函数的知识，运用代入法。

137、如果 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$，则有（ A ）。

（A）$z<x<y$　　（B）$x<y<z$　　（C）$y<z<x$　　（D）$z<y<x$

点评：由外向内逐步代入。

138、若 $\left|\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\frac{1}{2}}+\log_2(x+1)\right|<2$，那么 x 的取值范围是（ D ）。

（A）$(1, +\infty)$　　（B）$(1, 2)\cup(2, +\infty)$

（C）$(\frac{5}{3}, 2)$　　（D）$(\frac{5}{3}, 2)\cup(2, +\infty)$

点评：先用换底公式对绝对值里的式子进行化简，再解绝对值不等式。

139、$\lg 9\cdot\lg 11$ 与 1 的大小关系是（ C ）。

（A）$\lg 9\cdot\lg 11>1$　　（B）$\lg 9\cdot\lg 11=1$

（C）$\lg 9\cdot\lg 11<1$　　（D）不能确定

点评：$\lg 10 \cdot \lg 10 = 1$

140、方程 $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ （$x \in R$）的根有（ A ），

（A）4 个　（B）3 个　（C）2 个　（D）1 个

点评：先把 $|x|$ 作为一个整体，再分析。

141、若 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_4a_7 = -512$，$a_3 + a_8 = 124$，且公比 q 是整数，则 a_{10} 等于（ C ）。

（A）256　（B）-256　（C）512　（D）-512

点评：用等比数列的性质，求出 q 与 a_1。

142、已知数列 $\{2n-11\}$，那么有最小值的 S_n 是（ B ）。

（A）S_1　（B）S_5　（C）S_6　（D）S_{11}

点评：先求最大非正项。

143、若 $a>0$ 且 $a \neq 1$，$P = \log_a(a^3+1)$，$Q = \log_a(a^2+1)$，则 P、Q 的大小关系是（ A ）。

（A）$P>Q$　（B）$p<Q$　（C）$P=Q$　（D）不确定

点评：分类讨论，用指数函数的增减性。

144、如果 $x_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 等于（ A ）。

（A）0　（B）1　（C）$\frac{1}{2}$　（D）不确定

点评：交错项相约。

145、数列的通项公式是 $a_n = (1-2x)^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则 x 的取值范围是（ C ）。

（A）$[0,\ \frac{1}{2}]$　（B）$[0,\ -\frac{1}{2}]$　（C）$[0,\ 1]$　（D）$[0,-1]$

点评：极限的概念。

146、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 120$，$d = -4$，若 $S_n \leqslant a_n$ （$n>1$），则 n 的最小值是（ B ）。

（A）60　（B）62　（C）63　（D）70

点评：运用通项公式与前 n 项的和公式，列不等式求解。

147、设 $\arg(z) = \theta$ （$0<\theta<\pi$），则 $\arg(\overline{z^2})$ 等于（ C ）。

（A）$4\pi - 2\theta$　（B）-2θ　（C）$2\pi - 2\theta$　（D）2θ

点评：特殊值法。

148、要使复数 $z = (\sqrt{3} + i)^3(\cos\theta + i\sin\theta)$ 所对应的点在复平面的第四象限内，那么 θ 的取值范围是（ C ）。

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

点评：先化成复数三角形式，再用旋转的方法求解。

149、方程 $z^2|z| + |z|^2 - z^2 - |z| = 0$ 在复数集内的解集在复平面上的图形是（ D ）。

（A）n 个点　（B）单位圆　（C）n 条直线　（D）原点和单位圆

点评：提取“公因式”。

150、已知 $f(n) = i^n - i^{-n}$ （$i^2 = -1$，$n \in N$），则集合 $\{f(n)\}$ 的元素的个数是（ B ）。

（A）2　　（B）3　　（C）无数个　　（D）以上答案都不对

点评：分类讨论。n = 4k、4k+1、4k+2、4k+3。

151、若ω是1的n次虚根，则$\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots\cdots+\omega^{n-1}$的值是（　C　）。

（A）$n-1$　　（B）n　　（C）-1　　（D）0

点评：（$\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{n-1}+\omega^n$）-（$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{n-1}$）

152、不等式$x^2-x+1>0$的解集是（　B　）。

（A）$\{x|\ x<\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$或$x>\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\}$　　（B）R　（C）ϕ　（D）以上都不对

点评：。因为$x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$，所以无论x取何值，不等式均成立

153、若复数$1+2i$的辐角主值为α，$3-4i$的辐角主值为β，则$2\alpha-\beta$的值为(　B　)。

（A）$-\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$-\pi$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）π

点评：求$1+2i$的平方除$3-4i$所得复数的辐角主值。

154、已知方程$x^2+(k+2i)x+2+ki=0$至少有一个实根，那么实数k的取值范围是（　C　）。

（A）$k\geqslant 2\sqrt{2}$或$k\leqslant -2\sqrt{2}$　　（B）$-2\sqrt{2}\leqslant k\leqslant 2\sqrt{2}$

（C）$k=\pm 2\sqrt{2}$　　　　（D）$k=2\sqrt{2}$

点评：运用复数相等的定义解题。

155、已知集合$P=\{x|\ (x-1)(x-4)\geqslant 0\}$，$Q=\{n|\ (n+1)(n-5)\leqslant 0,\ n\in N\}$与集合$S$，且$S\cap P=\{1,\ 4\}$，$S\cap Q=S$，那么集合$S$的元素的个数是（　C　）。

（A）2个　（B）2个或4个　（C）2个或3个或4个　（D）无穷多个

点评：从自然数的角度分析。

156、有四位司机，四位售票员分配到四辆公共汽车上，使每辆车分别有一位司机和一名售票员，则可能的分配方案数是（　C　）。

（A）P_8^8　　（B）P_8^4　　（C）$P_4^4P_4^4$　　（D）P_4^4

点评：分步实施。

157、有4个学生和3名教师排成一行照相，规定两端不排教师，那么排法的种数是（　C　）。

（A）P_7^7　　（B）$P_4^4P_3^3$　　（C）$P_4^2P_5^5$　　（D）$P_7^3P_7^4$

点评：定位排列。

158、在1，2，3，4，9中任取两个数分别作对数的底和真数，可得不同的对数值的个数是（　A　）。

（A）9　　（B）12　　（C）16　　（D）20

点评：1不能为底，注意2、4；3、9！

159、下列等式中，不正确的是（ B ）。

（A）$(n+1)P_n^m = P_{n+1}^{m+1}$　　　（B）$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{n!}$

（C）$\dfrac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$　　　（D）$\dfrac{1}{n-m}P_n^{m+1} = P_n^m$

点评：排列、组合数计算公式。

160、在 $(1+2x-x^2)^4$ 展开式中，x^7 的系数是（ A ）。

（A）-8　（B）12　（C）6　（D）-12

点评：二项展开式的通项公式。

161、如果 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots\cdots+(1+x)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{50}x^{50}$，那么 a_3 等于（ C ）。

（A）$2C_{50}^3$　（B）C_{51}^3　（C）C_{51}^4　（D）C_{50}^4

点评：先从 3、4、5……50 个中分别取 3，然后再求和。

162、2^{99} 除以 9 的余数是（ D ）。

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）8

点评：原式可化为 $2^{99}=(9-1)^{33}$。

163、如果 $x\in(0,2\pi)$，函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\mathrm{tg}x}$ 的定义域是（ D ）。

（A）$\{x|\ 0<x<\pi\}$　　　（B）$\{x|\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\}$

（C）$\{x|\ \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\}$　　　（D）$\{x|\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\}$

点评：分象限，定符号。

164、化简 $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{4}+x)-\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)+\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$ 的结果是（ A ）。

（A）$-\mathrm{tg}x$　（B）$\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$　（C）$\mathrm{tg}2x$　（D）$\mathrm{ctg}x$

点评：分子分母同除 $\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)$，然后用 $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ 解题。

165、下列函数中，图象关于坐标原点对称的是（ B ）。

（A）$y=-|\sin x|$　（B）$y=x\cdot\sin|x|$　（C）$y=\sin(-|x|)$　（D）$y=\sin|x|$

点评：奇函数的图象关于原点成对称。

166、如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，那么它必适合关系式（ A ）。

（A）$f(x)+f(-x)=0$　　　（B）$f(x)-f(-x)=0$

（C）$f(x)+f^{-1}(x)=0$　　（D）$f(x)-f^{-1}(x)=0$

点评：奇函数的图象关于原点成对称。

167、θ在第二象限，且$\sqrt{1+\cos\theta}=-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$，则$\frac{\theta}{2}$在（ C ）。

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

点评：先讨论$\frac{\theta}{2}$可能的范围，再结合象限确定角的符号。

168、若$0<|\alpha|<\frac{\pi}{4}$，则必有（ D ）。

（A）$tg2\alpha>tg\alpha$　（B）$ctg2\alpha>ctg\alpha$

（C）$\cos2\alpha>\cos\alpha$　（D）$\sec2\alpha>\sec\alpha$

点评：特殊值法，注意角的符号。

169、画在同一坐标系内的曲线$y=\sin x$与$y=\cos x$的交点坐标是（ C ）。

（A）$(2n\pi+\frac{\pi}{2},\ 1)$，$n\in Z$　　（B）$(n\pi+\frac{\pi}{2},\ (-1)^n)$，$n\in Z$

（C）$(n\pi+\frac{\pi}{4},\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}})$，$n\in Z$　　（D）$(n\pi,\ 1)$，$n\in Z$

点评：用图象法解题。

170、若$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，则$tg\alpha+ctg\alpha$的值是（ B ）。

（A）1　（B）2　（C）-1　（D）-2

点评：特殊值法。

171、三个数$a=\arcsin\frac{7}{8}$，$b=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$，$c=\arccos(-\frac{1}{5})$的大小关系是（ D ）。

（A）$c<a<b$　（B）$c<b<a$　（C）$a<b<c$　（D）$b<a<c$

点评：化成同一种反三角函数，再讨论。

172、下列函数中，最小正周期是π的函数是（ D ）。

（A）$f(x)=\frac{2tg\pi x}{1+tg^2\pi x}$　　（B）$f(x)=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

（C）$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$　　（D）$f(x)=2\sin^2(x-\frac{3\pi}{2})$

点评：用三角公式化简。

173、在△ABC中，$\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$，则此三角形是（ C ）。

（A）等边三角形　（B）三边不等的三角形

（C）等腰三角形　（D）以上答案都不对

点评：$\cos\frac{A}{2}=\sin(B+C)/2$。

174、函数 $y=\arccos(2\sin x)$ 的定义域是（ C ）。

（A）$[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$　　（B）$[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{5\pi}{6}],\ k\in Z$

（C）$[k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{6}],\ k\in Z$　　（D）$[k\pi+\frac{5\pi}{3},\ k\pi+\frac{7\pi}{3}],\ k\in Z$

点评：反三角函数的定义域与三角函数的取值范围。

175、不等式 $\arccos(1-x)<\arccos x$ 的解集是（ A ）。

（A）$0\leqslant x<\frac{1}{2}$　　（B）$0\leqslant x<1$　　（C）$x<\frac{1}{2}$　　（D）$0<x<\frac{1}{2}$

点评：结合反余弦的图象分析。

176、下列各式中，正确的是（ B ）。

（A）$\arcsin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$　　（B）$\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6})=-\frac{\pi}{6}$

（C）$\sin(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$

点评：反三角函数的有关公式。

177、下列各命题中，正确的是（ D ）。

（A）若直线 a，b 异面，b，c 异面，则 a，c 异面

（B）若直线 a，b 异面，a，c 异面，则 b，c 异面

（C）若直线 a//平面 α，直线 $b\subset$ 平面 α，则 $a//b$

（D）既不相交，又不平行的两条直线是异面直线

点评：分多种情况作图分析。

178、斜棱柱的矩形面(包括侧面与底面)最多共有（ C ）。

（A）2 个　　（B）3 个　　（C）4 个　　（D）6 个

点评：斜棱柱的侧棱与底面的关系。

179、夹在两平行平面之间的两条线段的长度相等的充要条件是（ D ）。

（A）两条线段同时与平面垂直　　（B）两条线段互相平行

（C）两条线段相交　　（D）两条线段与平面所成的角相等

点评：考虑“等价性”。

180、如果正三棱锥的侧面都是直角三角形，则侧棱与底面所成的角 θ 应属于下列区间（ C ）。

（A）$(0,\ \frac{\pi}{6})$　　（B）$(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3})$　　（C）$(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4})$　　（D）$(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2})$

点评：特殊值法结合射影的知识。

181、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 BC_1 与对角面 BB_1D_1D 所成的角是（ D ）。

（A）$\angle C_1B_1D_1$　　（B）$\angle C_1B_1D$　　（C）$\angle C_1B_1B$　　（D）以上都不是

点评：线与面所成的角。

182、平面 α 与平面 β 平行，它们之间的距离为 d ($d>0$)，直线 a 在平面 α 内，则在平面 β 内与直线 a 相距 $2d$ 的直线有（ B ）。

（A）一条　（B）二条　（C）无数条　（D）一条也没有

点评：作图分析。

183、互不重合的三个平面可能把空间分成（ D ）部分。

（A）4 或 9　（B）6 或 8　（C）4 或 6 或 8　（D）4 或 6 或 7 或 8

点评：化体为面，化面成线。

184、若 a，b 是异面直线，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=c$，那么 c（ B ）。

（A）同时与 a，b 相交　（B）至少与 a，b 中一条相交

（C）至多与 a，b 中一条相交　（D）与 a，b 中一条相交，另一条平行

点评：异面直线的概念。

185、直线 $a//$平面 M，直线 $b\not\subset M$，那么 $a//b$ 是 $b//M$ 的（ A ）条件。

（A）充分不必要 （B）必要而不充分（C）充要（D）不充分也不必要

点评：线面平行、线线平行的知识。

186、和空间不共面的四个点距离相等的平面的个数是（ A ）。

（A）7 个　（B）6 个　（C）4 个　（D）3 个

点评：平行底面与分隔顶点。

187、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与 AD_1 成 $60°$ 的面对角线共有（ B ）。

（A）10 条　（B）8 条　（C）6 条　（D）4 条

点评：用平移的方法。

188、在长方体相交于一个顶点的三条棱上各取一个点，那么过这三点的截面一定是（ B ）。

（A）三角形或四边形　（B）锐角三角形

（C）锐角三角形或钝角三角形　（D）钝角三角形

点评：运用三棱锥的有关知识。

189、圆锥底面半径为 r，母线长为 l，且 $l>2r$，M 是底面圆周上任意一点，从 M 拉一条绳子绕侧面转一周再回到 M，那么这条绳子的最短长度是（ C ）。

（A）$2\pi r$　（B）$2l$　（C）$2l\sin\dfrac{\pi r}{l}$　（D）$l\cos\dfrac{\pi r}{l}$

点评：用平面展开图。

190、α、β 是互不重合的两个平面，在 α 内取 5 个点，在 β 内取 4 个点，这些点最多能确定的平面个数是（ B ）。

（A） 142　（B）72　（C）70　（D）66

点评：先不分条件进行组合，然后去除不符合条件的。

191、圆台的轴截面面积是 Q，母线与下底面成 $60°$ 角，则圆台的内切球的表面积是（ D ）。

（A）$\dfrac{Q}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}Q$　（C）$\dfrac{\pi}{2}Q$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}Q$

点评：利用轴截面求圆台的高。

192、直线$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-1$在$y$轴上的截距是（ B ）。

（A）2　（B）3　（C）-2　（D）-3

点评：化成直线方程的一般式。

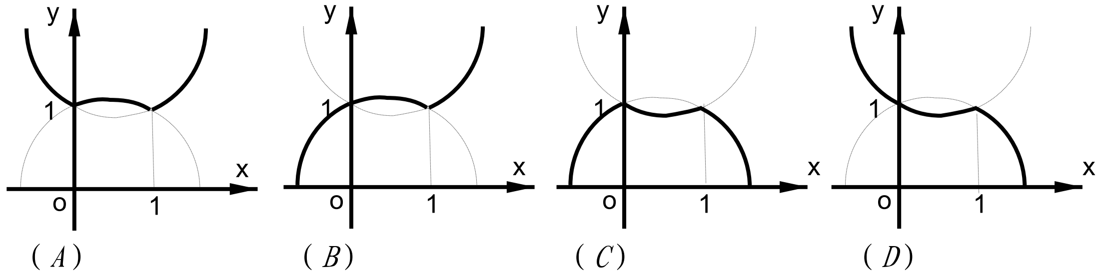
193、各点坐标为$A(1,1)$、$B(-1,1)$、$C(-1,-1)$、$D(1,-1)$，则“点P在y轴”是“$\angle APD=\angle BPC$”的（ A ）。

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　（D）不充分也不必要条件

点评：利用四点共圆的有关知识。

194、函数$y=1-|x-x^2|$的图象大致是（ C ）。



点评：区间分析法或特殊值法。

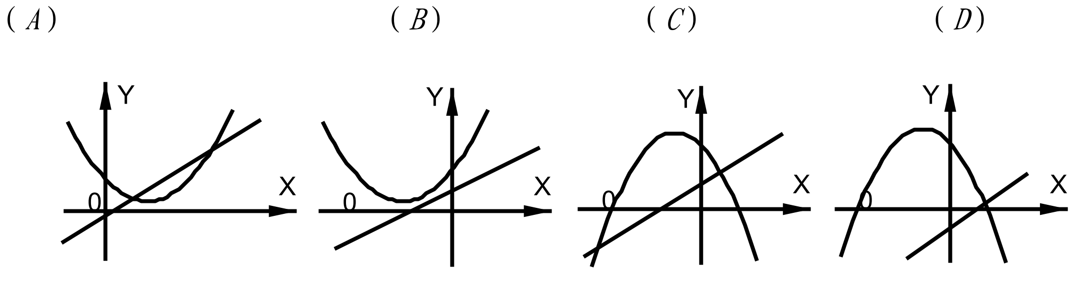
195、若直线$y=x+b$和半圆$y=\sqrt{1-x^2}$有两个不同的交点，则b的取值范围是（ D ）。

（A）$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　（B）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

（C）$(-\infty,-\sqrt{2})\cup[\sqrt{2},+\infty]$　（D）$[1,\sqrt{2}]$

点评：图象法。

196、已知函数$y=ax+b$和$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），则它们的图象可能是（ B ）。



点评：从对称轴、顶点、截距等方面考虑。

197、函数$y=2\sin(\arccos x)$的图象是（ B ）。

（A）椭圆　（B）半椭圆　（C）圆　（D）直线

点评：先对三角关系式进行变形。

198、点$A(t,2^t)$关于直线$x+y=0$的对称点的坐标是（ D ）。

（A）$(t,-2^t)$　（B）$(-t,2^t)$　（C）$(2^t,-t)$　（D）$(-2^t,-t)$

点评：利用关于 $x+y=0$ 的对称点的特点。

199、已知两圆的方程 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2-6x+8y-24=0$，则此两圆的位置关系是（ D ）。

（A）外离　　（B）外切　　（C）相交　　（D）内切

点评：找圆心和半径，用两点间距离公式，注意内切的情况。

200、圆的一条直径的两个端点分别是(2，0)和(2，－2)，则此圆的方程是（ A ）。

（A）$x^2+y^2-4x+2y+4=0$　　（B）$x^2+y^2-4x-2y-4=0$

（C）$x^2+y^2-4x+2y-4=0$　　（D）$x^2+y^2+4x+2y+4=0$

点评：先考虑半径和圆心。

201、双曲线 $9y^2-x^2-2x-10=0$ 的渐近线方程是（ C ）。

（A）$y=\pm3(x+1)$　（B）$y=\pm3(x-1)$

（C）$y=\pm\dfrac{1}{3}(x+1)$　（D）$y=\pm\dfrac{1}{3}(x-1)$

点评：先化成标准形式，再将 1 换成 0，找渐近线。

202、设 F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，$P(x, y)$ 是椭圆上一点，则 $|FP|$ 等于（ D ）。

（A）$ex+a$　　（B）$ex-a$　　（C）$ax-e$　　（D）$a-ex$

点评：椭圆的定义：1、到两定点距离之和等于定值（大于两定点之和）的点的轨迹；2、到定点和定直线（交替）距离之比等于定值（小于 1）的点的轨迹。

203、已知 $M=\{(x, y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x, y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant1\}$，那么使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是（ A ）。

（A）$a\geqslant\dfrac{5}{4}$　　（B）$a=\dfrac{5}{4}$　　（C）$0<a<1$　　（D）$a\leqslant1$

点评：圆在抛物线内，代入后，用根的判别式法。

204、椭圆 $\dfrac{(x+\frac{1}{2})^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与抛物线 $y^2=6x-9$ 的公共点的个数是（ B ）。

（A）0 个　　（B）1 个　　（C）2 个　　（D）3 个

点评：图象或代入验证法。

205、直线 l：$\sqrt{2}(x+y)+1+a=0$ 与圆 C：$x^2+y^2=a$ $(a>0)$ 的位置关系是（ D ）。

（A）恒相切　　（B）恒相交　　（C）恒相离　　（D）相切或相离

点评：根的判别式法。

206、曲线 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 与曲线 $y+|ax|=0$ $(a\in R)$ 的交点个数一定是（ A ）。

（A）2 个　　（B）4 个　　（C）0 个　　（D）与 a 的取值有关

点评：取特殊值法。

207、若 $F(c,\ 0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，F 与椭圆上点的距离的最大值为 M，最小值为 m，则椭圆上与 F 点的距离等于 $\dfrac{M+m}{2}$ 的点的坐标是（ C ）。

（A）$(c,\ \pm\dfrac{b^2}{a})$ （B）$(-c,\ \pm\dfrac{b^2}{a})$ （C）$(0,\ \pm b)$ （D）不存在

点评：先考虑 M+m ＝ 2a，然后用验证法。

208、顶点在点(1，3)，焦点与顶点的距离为 $\dfrac{5}{8}$，准线平行于 y 轴，开口向右的抛物线的方程是（ D ）。

（A）$y-3=\dfrac{5}{2}(x-1)^2$ （B）$(x-1)^2=\dfrac{5}{2}(y-3)$

（C）$(y-3)^2=\dfrac{5}{4}(x-1)$ （D）$x-1=\dfrac{2}{5}(y-3)^2$

点评：坐标平移的有关知识。

209、如果抛物线 $y^2-mx-2y+4m+1=0$ 的准线与双曲线 $x^2-3y^2=12$ 的左准线重合，则 m 的值为（ A ）。

（A）28 （B）14 （C）－2 （D）4

点评：先求准线，再求焦点。

210、已知方程 $\dfrac{x^2}{2-m}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$ 的图象是双曲线，则 m 的取值范围是（ D ）。

（A）$m<1$ （B）$m>2$ （C）$1<m<2$ （D）$m<1$ 或 $m>2$

点评：双曲线的定义。

211、在同一极坐标系中，点(ρ，θ)与点(－ρ，－θ)的位置关系是（ D ）。

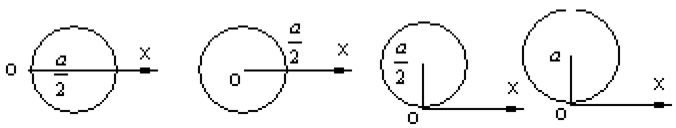
（A）关于极轴所在直线对称 （B）关于极点对称

（C）重合 （D）关于直线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $(\rho\in R)$ 对称

点评：先定点，再考虑。

212、极坐标系中，方程 $\rho=a\sin\theta$ $(a>0)$ 的图形是（ C ）。

（A） （B） （C） （D）



点评：极坐标方程的化简。

213、由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形的面积是（ B ）。

（A）1 （B）2 （C）π （D）4

点评：先画图，后分析。

214、若 $mn<0$，则方程 $mx^2-my^2=n$ 所表示的曲线是（ C ）。

(A) 焦点在 x 轴上的等轴双曲线　　(B) 圆

(C) 焦点在 y 轴上的等轴双曲线　　(D) 等轴双曲线，焦点位置依 m, n 的符号而定

点评：两边同除 n，再找实轴。

215、某林场原有森林木材存量为 a，木材以每年 25%的增长率增长，而每年冬天需砍伐木材量为 x，为了实现经过 20 年达到木材存量至少翻两番的目标，且每年尽可能多提供木材，则 x 的最大值是（ C ）。(取 $lg2=0.3$)

（A）$\frac{49}{196}a$　（B）$\frac{121}{496}a$　（C）$\frac{8}{33}a$　（D）$\frac{377}{1568}a$

点评：找等量关系式，注意区分变量与定量。

216、在复平面上，复数 z 满足 $\arg(z+3)=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{|z+6|+|z-3i|}$ 的最大值是（ B ）。

（A）$\frac{1}{9}$　（B）$\frac{\sqrt{5}}{15}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）与 z 的辐角有关

点评：化求最大值为考虑最小值。

217、将 $y=\frac{(2m-1)x+1}{x-m}$ 的图象向下平移 5 个单位，向右平移 5 个单位后，与原函数的反函数的图象重合，则 m 的值是（ A ）。

（A）6　（B）－2　（C）5　（D）1

点评：把握图象平移与变量的关系，结合反函数的求法解题。

218、某抛物线型拱桥的跨度是 20 米，拱高是 4 米，在建桥时，每隔 4 米需用一根柱子支撑，其中最长的柱子的高是（ C ）。

（A）1.48 米　（B）2.92 米　（C）3.84 米　（D）4 米

点评：在扇形中，解三角形。

219、将一半径为 R 的木球加工成一正方体木块，则木块的最大体积是（ B ）。

（A）$\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$　（B）$\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$　（C）$\frac{8}{9}R^3$　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{8}R^3$

点评：球内接正方体的体积，用轴截面的知识。

220、要得到函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，只需将函数 $y=\sin2x$ 的图象（ A ）。

（A）向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位　（B）向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

（C）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　（D）向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

点评：三角函数的图象平移。

221、无穷数列$\{\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}\}$的各项和为（ C ）。

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{2}{7}$　（C）$\frac{2}{5}$　（D）不存在

点评：写出该数列的前 n 项。

222、若极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a^2-2a)^n$存在，则实数 a 的取值范围是（ B ）。

（A）$(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$　（B）$(1-\sqrt{2},\ 1)\cup(1,\ 1+\sqrt{2})$

（C）$[1-\sqrt{2},\ 1]\cup(1,\ 1+\sqrt{2})$　（D）$[1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}]$

点评：解不等式$|a^2-2a|$小于 1。

223、已知菱形 $ABCD$ 的边长是 1，$\angle DAB=60°$，将这个菱形沿 AC 折成 120° 的二面角，则 BD 两点间的距离是（ C ）。

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（C）$\frac{3}{2}$　（D）$\frac{3}{4}$

点评：用菱形性质和余弦定理。

224、正三棱锥底面边长为 a，侧棱与底面成 60° 角，过底面一边作截面，使其与底面成 30° 角，则截面在底面的射影面积为（ C ）。

（A）$3a^2$　（B）$2a^2$　（C）$\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

点评：先筛选，再验证。

225、设有四个不同的红球、六个不同的白球，每次取出四个球，取出一个红球记 2 分，取出一个白球记 1 分，使得总分不小于 5 分，共有的取球方法数是（ A ）。

（A）$C_4^1C_6^3+C_4^2C_6^2+C_4^4$　（B）$2C_4^4+C_6^4$　（C）$C_4^4+C_6^4$　（D）$3C_4^4C_6^4$

点评：分类、分步讨论。

226、已知$(1+2x)^n$的展开式中，所有项的系数之和等于 6561，那么这个展开式中 x^3 的系数是（ B ）。

（A）56　（B）448　（C）1120　（D）170

点评：先求 n，再用通项分式求解。

227、常数 c 使 $\sin(x+c)=\cos(\pi+x)$ 和 $\mathrm{tg}(c-x)=-\mathrm{ctg}(\pi-x)$ 对于定义域内的一切实数 x 同时成立，则 c 的一个值为（ B ）。

（A）$\frac{\pi}{2}$　（B）$-\frac{\pi}{2}$　（C）$-\pi$　（D）$-\frac{3\pi}{2}$

点评：用验证法。

228、设 $f(x)=x+1$，那么 $f(x+1)$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是（ C ）。

（A）$y=x-6$　（B）$y=6+x$　（C）$y=6-x$　（D）$y=-x-2$

点评：取特殊点。

229、已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8\}$，从 A 到 B 的映射 f 中，满足 $f(1)\leqslant f(2)\leqslant f(3)\leqslant f(4)\leqslant f(5)$ 的映射有（ C ）。

（A）27　（B）9　（C）21　（D）12

点评：对函数取值的情况进行讨论。

230、若 S_n 表示等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_9=18$，$S_n=24$，若 $a_{n-4}=30$，则 n 等于（A　）。

（A）15　（B）16　（C）17　（D）18

点评：用通项、求和公式验证。

231、现有男女学生共 8 人，从男生中选 2 人，从女生中选 1 人分别参加数学、物理、化学三科竞赛，共有 90 种不同的方案，那么男、女生人数分别是（ B ）。

（A）男生 2 人，女生 6 人　（B）男生 3 人，女生 5 人

（C）男生 5 人，女生 3 人　（D）男生 6 人，女生 2 人

点评：用验证法。

232、已知集合 $A=\{x|\ x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|\ x^2-\sqrt{a}\,x+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，则由 a 的值组成的集合是（　C）。

（A）$\{a|\ a=9\}$　（B）$\{a|\ a<8\}$

（C）$\{a|\ a<8$ 或 $a=9\}$　（D）$\{a|\ 0\leqslant a<8$ 或 $a=9\}$

点评：要考虑 B 是空集的情况。

233、函数 $y=|\sin(\frac{\pi}{6}-2x)+\sin 2x|$ 的最小正周期是（ B ）。

（A）$\frac{\pi}{4}$　（B）$\frac{\pi}{2}$　（C）π　（D）2π

点评：对绝对值符号内的式子进行变形或先不考虑绝对值，再减半。

234、“$ab<0$”是“不等式 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$ 的等号成立”的（ A ）。

（A）充分条件（B）必要条件（C）充要条件（D）不充分也不必要条件

点评：后面不等式恒成立。

235、用 0，1，2，3，4 这五个数字可组成没有重复数字且个位数字不是 2 的不同的五位偶数有（ B ）。

（A）24 个　（B）42 个　（C）48 个　（D）60 个

点评：先定个位，再考虑首位。

236、复平面内，向量 $\overrightarrow{OP}$ 对应的复数为 $-\sqrt{3}+i$，将其绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$，再将模伸长 $2\sqrt{3}$ 倍，得到向量 $\overrightarrow{OQ}$，则 $\overrightarrow{OQ}$ 对应的复数是（ B ）。

（A）$-2\sqrt{3}\,i$　（B）$-6-2\sqrt{3}\,i$　（C）$-6+2\sqrt{3}\,i$　（D）$6-2\sqrt{3}\,i$

点评：将旋转与向量运算联系起来。

237、设$(1-\sqrt{2}x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_{10}x^{10}$，其中 a_0，a_1，a_2，……是常数，则$(a_0+a_2+\dots\dots+a_{10})^2-(a_1+a_3+\dots\dots+a_9)^2$等于（D　）。

（A）$2+\sqrt{2}$　　（B）$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）1

点评：用平方差公式，取 $x=1$，$x=-1$。

238、若 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$，则 $2x+y-1$ 的最小值是（ D ）。

（A）0　（B）-1　（C）-2　（D）-3

点评：先化简，再取特殊值。

239、下列命题中正确的是（　C）。

（A）α、β是第一象限角，且α>β，则 sinα<sinβ

（B）△ABC中，tg$A$=tg$B$是 $A=B$的充分但不必要条件

（C）函数 $y=|\mathrm{tg}2x|$的周期为$\frac{\pi}{4}$

（D）函数 $y=\lg(\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x})$是奇函数

点评：全面考察三角函数的各种情况。

240、如果θ∈$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，那么复数$(1+i)(\cos\theta-i\sin\theta)$的三角形式是（ A ）。

（A）$\sqrt{2}\,[\cos(\frac{9\pi}{4}-\theta)+i\sin(\frac{9\pi}{4}-\theta)]$

（B）$\sqrt{2}\,[\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)]$

（C）$\sqrt{2}\,[\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)]$

（D）$\sqrt{2}\,[\cos(\frac{3\pi}{4}+\theta)+i\sin(\frac{3\pi}{4}+\theta)]$

点评：强调等值、标准。

241、设$(1-3x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_8x^8$，那么$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\dots\dots+|a_8|$的值是（ D ）。

（A）1　　（B）2^8　　（C）3^8　　（D）4^8

点评：取 $x=-1$。

242、设$(\sqrt{3}+i)^n$是纯虚数，则 n的可能值是（　A）。

（A）15　　（B）16　　（C）17　　（D）18

点评：化成复数的三角形式。

243、能使点 $P(m,\ n)$与点 $Q(n+1,\ m-1)$成轴对称的位置关系的对称轴的方程是(C)。

（A）$x+y+1=0$　（B）$x+y-1=0$　（C）$x-y-1=0$　（D）$x-y+1=0$

点评：垂直、中点代入验证。

244、项数为 $2m$ 的等比数列，中间两项是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，那么这个数列的所有项的积为（ B ）。

（A）$-mp$　（B）q^m　（C）pq　（D）不同于以上的答案

点评：等比数列的性质。

245、已知直线 a，b，平面 α，β，γ，以下四个条件中，① $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$；② α 内有不共线的三点到 β 的距离相等；③ $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a//\beta$，$b//\beta$；④ a，b 是异面直线，且 $a\subset\alpha$，$a//\beta$，$b\subset\beta$，$b//\alpha$。能推出 $\alpha//\beta$ 的是（ A ）。

（A）④　（B）②和③　（C）②　（D）①和②

点评：线面垂直与平行的判定及性质。

246、8 次射击命中 3 次，且恰有 2 次连续命中的情况共有（ B ）。

（A）15 种　（B）30 种　（C）48 种　（D）60 种

点评：组合与排列。

247、函数 $f(x)=\log_a|x-1|$ 在区间 (0，1) 上是减函数，$p=f(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4})$，$q=f(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta)$，$r=f(2^{\sin\theta})$（θ 为锐角），则（C ）。

（A）$p<q<r$　（B）$r<p<q$　（C）$q<p<r$　（D）$r<q<p$

点评：先确定的范围，再比较 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$、$\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta$、$2^{\sin\theta}$ 的大小。

248、函数 $y=\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ 是（C ）。

（A）仅有最小值的奇函数　（B）仅有最大值的偶函数

（C）有最大值、最小值的偶函数（D）既不是奇函数，也不是偶函数

点评：先配方、再求值。

249、设满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M，当 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$，若有函数 $g(x)=x^2+2x-1$，则函数 $g(x)$ 与集合 M 的关系是（ B ）。

（A）$g(x)\subset M$　（B）$g(x)\in M$　（C）$g(x)\notin M$　（D）不能确定

点评：当 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$，$g(x)$ 是元素。

250、当 $x\in(1,2)$ 时，不等式 $x-1<\log_a x$ 恒成立，则 a 的取值范围是（ B ）。

（A）(0，1)　（B）(1，2)　（C）(1，2)　（D）(2，+∞)

点评：利用函数图象，进行分析。

251、已知函数 $f(x)=2^x$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，那么 $f^{-1}(4-x^2)$ 的单调递减区间是（ C ）。

（A）[0，+∞]　（B）(−∞，0)　（C）[0，2]　（D）(−2，0)

点评：根据复合函数的增减性加以判断。

252、以下四个命题：① PA、PB 是平面 α 的两条相等的斜线段，则它们在平面 α 内

的射影必相等；② 平面α内的两条直线 l_1、l_2，若 l_1、l_2 均与平面β平行，则α//β；③ 若平面α内有无数个点到平面β的距离相等，则α//β；④ α、β为两相交平面，且α不垂直于β，α内有一定直线 a，则在平面β内有无数条直线与 a 垂直。其中正确命题的个数是（ B ）。

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

点评：利用线与线、线与面、面与面的垂直、平行等关系，逐个分析。

253、已知 $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$，则 $x+y$ 的取值范围是（ D ）。

（A）(0，1)　（B）[2，+∞]　（C）(0，4)　（D）[4，+∞)

点评：由 $\log_2(x+y)=\log_2 xy$ 可知，$x+y$ 不小于 $x+y$ 的算术平方根的两倍。

254、若函数 $f(x)$ 的定义域为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$，则 $f(\sin x)$ 的定义域是（D ）。

（A）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}]$　（B）$[2k\pi+\frac{5\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3}],k\in Z$

（C）$[\frac{5\pi}{6},\ \frac{4\pi}{3}]$　（D）$[2k\pi-\frac{\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}]\cup[2k\pi+\frac{5\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3}],k\in Z$

点评：解不等式 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant \sin x\leqslant \frac{1}{2}$，或借助三角函数图象，求一个周期上区间。

四、综合题解题集锦

1、成等差数列的四个数之和为 26，第二数和第三数之积为 40，求这四个数.

解：设四个数为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$

则：$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26\\(a-d)(a+d)=40\end{cases}$

由①：　$a=\frac{13}{2}$　代入②得：　$d=\pm\frac{3}{2}$

∴ 四个数为 2, 5, 8, 11 或 11, 8, 5, 2.

2、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1-a_4-a_8-_{12}+a_{15}=2$ 求 S_{15}.

解：∵ $a_1+a_{15}=a_4+a_{12}$　∴ $a_8=-2$　而 $S_{15}=15a_8=-30$

3、已知等差数列的前 n 项和为 a，前 $2n$ 项和为 b，求前 $3n$ 项和.

解：由题设　$S_n=a$　$S_{2n}=b$

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=b-a$ 而

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{2n+1}+a_{2n|2}+\cdots+a_{3n})=2(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})$

从而：

$S_{3n}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})+(a_{2n+1}+a_{2n|2}+\cdots+a_{3n})$

$=3(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})=3(b-a)$

4、已知$a_1=1$，$S_n=n^2a_n \quad (n\geq 1)$ 求a_n及S_n.

解：$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$ 从而有$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$\because a_1=1 \quad \therefore a_2=\dfrac{1}{3} \quad a_3=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3} \quad a_4=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3} \quad a_5=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}$

$\therefore a_n=\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots\cdot\times 3\times 2\times 1}{(n+1)n(n-1)\cdots\cdot\times 4\times 3}=\dfrac{2}{n(n+1)} \qquad \therefore S_n=n^2a_n=\dfrac{2n}{n+1}$

5、已知$S_n=4-a_n-\dfrac{1}{2^{n-2}}(n\in N^*)$ 求a_1,a_{n+1}和a_n的关系式及通项公式a_n

解：$a_1=S_1=4-a_1-\dfrac{1}{2^{1-2}}\Rightarrow a_1=1$

$$\begin{cases} S_n=4-a_n-\dfrac{1}{2^{n-2}} \\ S_{n+1}=4-a_{n+1}-\dfrac{1}{2^{(n+1)-2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$②−①：$a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n-2}}$ 即：$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2^n}$

将上式两边同乘以2^n得：$2^na_{n+1}=2^{n-1}a_n+1$

即：$2^na_{n+1}-2^{n-1}a_n=1$

显然：$\{2^{n-1}a_n\}$是以 1 为首项，1 为公差的 AP

$\therefore \; 2^{n-1}a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

$\therefore \; a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

6、已知$a_1=3$且$a_n=S_{n-1}+2^n$，求a_n及S_n.

解：$\because a_n = S_n - S_{n-1}$ $\quad\therefore\ S_n - 2S_{n-1} = 2^n$ $\quad\therefore \dfrac{S_n}{2^n} - \dfrac{S_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$

设 $b_n = \dfrac{S_n}{2^n}$ 则 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列 $\quad\therefore b_n = b_1 + n - 1$

又：$\because b_1 = \dfrac{S_1}{2} = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore \dfrac{S_n}{2^n} = n + \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore S_n = (2n+1)2^{n-1}$

当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n+3)2^{n-2}$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ (2n+3)\cdot 2^{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} \qquad S_n = (2n+1)2^{n-1}$$

7、设 $a_n = \sqrt{1\times 2} + \sqrt{2\times 3} + \sqrt{3\times 4} + \cdots + \sqrt{n(n+1)}$ 求证：$\dfrac{n(n+1)}{2} < a_n < \dfrac{(n+1)^2}{2}$

证：$\because$ $\sqrt{n(n+1)} > \sqrt{n^2} = n$ $\qquad \sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+\frac{1}{2})^2} = \dfrac{2n+1}{2}$

$$\therefore\ n < \sqrt{n(n+1)} < \frac{2n+1}{2}$$

$$\therefore\ 1+2+3+\cdots+n < a_n < \frac{1+3+\cdots+(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{(n+1)^2}{2}$$

8、已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)(A>0, \omega>0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象在 y 轴上的截距为 1，它在 y 轴右侧的第一个最大值点和最小值点分别为（$x_0, 2$）和（$x_0 + 3\pi, -2$）.

（I）求 $f(x)$ 的解析式；

（II）用列表作图的方法画出函数 $y=f(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的图象. 解：

（Ⅰ）由已知，易得 $A=2$.

$\dfrac{T}{2} = (x_0 + 3\pi) - x_0 = 3\pi$，解得 $T = 6\pi, \therefore \omega = \dfrac{1}{3}$.

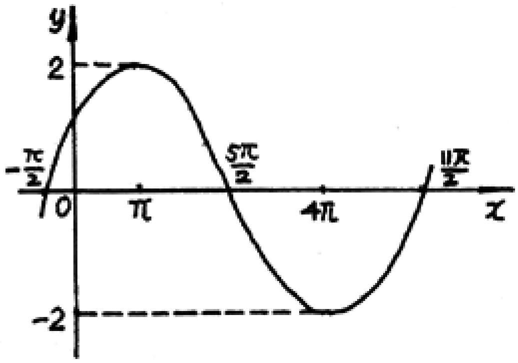
把（0，1）代入解析式 $y = 2\sin(\dfrac{x}{3} + \varphi)$，得

$2\sin\varphi=1$．又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，解得$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．

∴ $y=2\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6})$为所求．……………………………………………………6 分

(Ⅱ)

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{5\pi}{2}$	4π	$\dfrac{11\pi}{2}$
$\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6})$	0	2	0	-2	0



9、已知函数$f(x)=x^3+x,x\in R$．

（I）指出$f(x)$在定义域R上的奇偶性与单调性（只须写出结论，无须证明）；

（II）若 a、b、c∈R，且$a+b>0,b+c>0,c+a>0$，试证明：$f(a)+f(b)+f(c)>0$.

解：（Ⅰ）$f(x)$是定义域R上的奇函数且为增函数．

（Ⅱ）由$a+b>0$ 得$a>-b$．

由增函数，得$f(a)>f(-b)$

由奇函数，得$f(-b)=-f(b)$

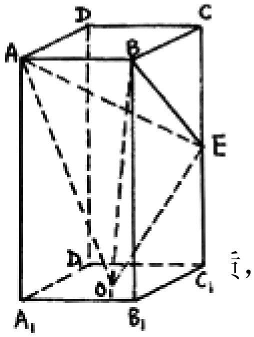
∴ $f(a)+f(b)>0$

同理可得 $f(b)+f(c)>0,f(c)+f(a)>0$

将上三式相加后，得

$f(a)+f(b)+f(c)>0$．

10、已知：如图，长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$AA_1=8$，E 为 CC_1 的中点，O_1 为下底面正方形的中心.求：（I）二面角 $C—AB—O_1$ 的正切值;



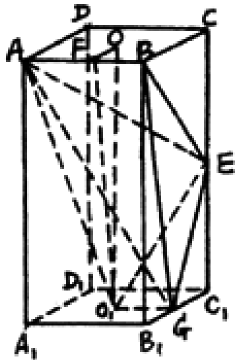
（II）异面直线 AB 与 EO_1 所成角的正切值；

（III）三棱锥 O_1——ABE 的体积.

解：（Ⅰ）取上底面的中心 O，作 $OF\perp AB$ 于 G，连 OO_1 和 FO_1，

得 $OO_1\perp$ 平面 $ABCD$，由三垂线定理，得 $O_1F\perp AB$

则 $\angle OFO_1$ 为二面角 $C-AB-O_1$ 的平面角



$OF=\frac{1}{2}BC=2,OO_1=AA_1=8$.

在 $Rt\Delta O_1OF$ 中，$tg\angle OFO_1=\frac{O_1O}{OF}=4$

（Ⅱ）取 B_1C_1 的中点 G，连 O_1G 和 EG

易证明 $O_1G // AB$，则 $\angle EO_1G$ 为所求

$O_1G=\frac{1}{2}AB=2$． $EG=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．

在 $Rt\Delta EO_1G$ 中，$tg\angle EO_1G=\frac{EG}{O_1G}=2\sqrt{5}$

（III）连 BG，AG，由 $O_1G // AB$ 易证明 $O_1G //$ 平面 ABE.

$V_{O_1-ABE}=V_{G-ABE}=V_{A-BGE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BGE}\cdot AB$

$S_{\Delta BGE}=32-\frac{1}{2}(2\times8+2\times4+4\times4)=12$

$\therefore V_{O_1-ABE}=\frac{1}{3}\cdot12\cdot4=16$

11、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，且，$b_n>0$（$n\in N$），若 $a_n-a_1=\log_a b_n-\log_a b_1(n>1,n\in N,a>0,a\neq1)$，求 a 的取值.

解：由 $b_n>0$ 得 $b_1>0$， $q>0$

由已知，得 $a_1+(n-1)d-a_1=\log_a(b_1q^{n-1})-\log_a b_1$

$(n-1)d>(n-1)\log_a q$

∵ $n\neq 1$，∴ $d=\log_a q$

由对数定义得 $a^d=q$

当 $d=0$， $q=1$ 时，得 $a>0$， $a\neq 1$.

当 $d\neq 0$， $q=1$ 时，得 $a=1$． 这与已知 $a\neq 1$ 相矛盾.

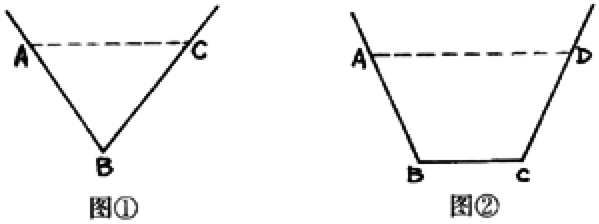
当 $d\neq 0$， $q\neq 1$ 时，得 $a=q^{\frac{1}{d}}$.

综上：当 $d=0,q=1$ 时， $a>0,a\neq 1$

当 $d\neq 0$， $q=1$ 时， a 的取值集合为空集

当 $d\neq 0$， $q\neq 1$ 时， $a=q^{\frac{1}{d}}$

12、已知水渠在过水断面面积为定值的情况下，过水湿周越小，其流量越大.现有以下两种设计，如图：



图①　　　　图②

图①的过水断面为等腰△ABC，$AB=BC$，过水湿周 $l_1=AB+BC$.

图②的过水断面为等腰梯形 $ABCD, AB=CD, AD \parallel BC, \angle BAD=60°$， 过水湿周 $l_2=AB+BC+CD$.若 ΔABC 与梯形 $ABCD$ 的面积都为 S，

（I）分别求 l_1和l_2 的最小值；

（II）为使流量最大，给出最佳设计方案.

解（Ⅰ）在图①中，设$\angle ABC=\theta$，$AB=BC=a$.

则$S=\frac{1}{2}a^2\sin\theta$．由于$S$、$a$、$\sin\theta$皆为正值，可解得$a=\sqrt{\frac{2S}{\sin\theta}}\geq\sqrt{2S}$.

当且仅当$\sin\theta=1$，即$\theta=90°$时取等号.

所以$l_1=2a\geq 2\sqrt{2S}$.

在图②中，设$AB=CD=m$，$BC=n$．$\angle BAD=60°$可求得

$AD=m+n$，$S=\frac{1}{2}(n+m+n)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m$

解得$n=\frac{2S}{\sqrt{3}m}-\frac{m}{2}$.

$$l_2=2m+n=2m+\frac{2S}{\sqrt{3}m}-\frac{m}{2}=\frac{2S}{\sqrt{3}m}+\frac{3m}{2}\geq 2\sqrt{\sqrt{3}S}=2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}.$$

当且仅当$\frac{2S}{\sqrt{3}m}=\frac{3m}{2}$，即$m=\sqrt{\frac{4S}{3\sqrt{3}}}$时取等号.

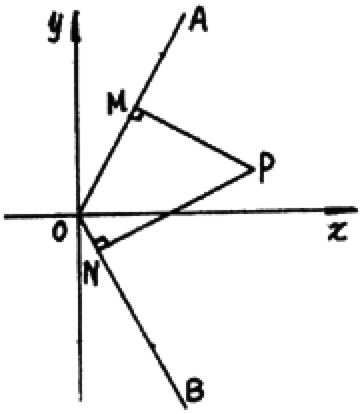
（Ⅱ）由于$\sqrt{2}>\sqrt[4]{3}$，则l_2的最小值小于l_1的最小值.

所以在方案②中当l_2取得最小值时的设计为最佳方案.

13、已知：如图，射线 OA 为 $y=2x(x>0)$，射线 OB 为 $y=-2x(x>0)$，动点 $P(x,y)$在$\angle AOx$的内部，$PM\perp OA$于M，$PN\perp OB$于 N，四边形 $ONPM$ 的面积为 2..

（I）动点 P 的纵坐标 y 是其横坐标 x 的函数，求这个函数 $y=f(x)$的解析式；

（II）确定 $y=f(x)$的定义域.



解：（Ⅰ）设$M(a,2a)$，$N(b,-2b)$　$(a>0,b>0)$.

则$|OM|=\sqrt{5}a$，$|ON|=\sqrt{5}b$

由动点P在$\angle AOx$的内部，得$0<y<2x$.

$\therefore|PM|=\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\frac{2x-y}{\sqrt{5}}$，$|PN|=\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y}{\sqrt{5}}$

$\therefore S_{四边形ONPM}=S_{\Delta ONP}+S_{\Delta OPM}$

$=\frac{1}{2}(|OM|\cdot|PM|+|ON|\cdot|PN|)=\frac{1}{2}[a(2x-y)+b(2x+y)]$

$=\frac{1}{2}[2(a+b)x-(a-b)y]=2$

$\therefore 2(a+b)x-(a-b)y=4$ ①

又 $k_{PM}=-\frac{1}{2}=\frac{y-2a}{x-a}$，$k_{PN}=\frac{1}{2}=\frac{y+2b}{x-b}$

分别解得 $a=\frac{x+2y}{5}$，$b=\frac{x-2y}{5}$

代入①式消去 a、b，并化简得 $x^2-y^2=5$.

$\because y>0$，$\therefore y=\sqrt{x^2-5}$.

（Ⅱ）由 P 在 $\angle AOx$ 内部，得 $0<y<2x$.

又垂足 N 必须在射线 OB 上，否则 O、N、P、M 四点不能构成四边形，所以还必须满足条件 $y<\frac{1}{2}x$

$\therefore \begin{cases}0<\sqrt{x^2-5}<2x\\ \sqrt{x^2-5}<\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow 0<\sqrt{x^2-5}<\frac{1}{2}x\Leftrightarrow \sqrt{5}<x<\frac{2\sqrt{15}}{3}$

所以 $y=f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\sqrt{5}<x<\frac{2\sqrt{15}}{3}\right\}$

14、解关于 x 的不等式：$\log_a(x^2-x-2)>\log_a(x-\frac{2}{a})+1(a>0，a\neq1)$

解：原不等式等价于

$\log_a(x^2-x-2)>\log_a(ax-2)$……①

1° 当 $a>1$ 时，①式可化为

$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ ax-2>0,\\ x^2-x-2>ax-2\end{cases}$

从而$\begin{cases}ax-2>0,\\ x^2-x-2>ax-2,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x>\dfrac{2}{a},\\ x<0\text{或}x>a+1\end{cases}$

$\therefore x>a+1$

2° 当$0<a<1$时，①式可化为

$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ ax-2>0,\\ x^2-x-2<ax-2\end{cases}$$

从而$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2<ax-2\end{cases}$ 即$\begin{cases}x<-1\text{或}x>2\\ 0<x<a+1\end{cases}$

$\therefore x\in\Phi$

综上所述，当$a>1$时，原不等式的解集为$\{x\,|\,x>a+1\}$；当$0<a<1$时，不等式的解集为Φ

15、在三角形 ABC 中，三内角满足 A＋C＝2B，$\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$的值

解：∵A+C=2B，∴A+C=120°，B=60°

又∵$\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，∴$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$

$\therefore 2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$

即$2\cdot(\dfrac{1}{2})\cos\dfrac{A-C}{2}=-\sqrt{2}(-\dfrac{1}{2}+2\cos^2\dfrac{A-C}{2}-1)$

$2\sqrt{2}\cos^2\dfrac{A-C}{2}+\cos\dfrac{A-C}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=0$

令$\cos\dfrac{A-C}{2}=t$，则上式为$2\sqrt{2}t^2+t-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=0$

$\therefore t_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},t_2=-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$\because|\cos\dfrac{A-C}{2}|\le 1$，$\therefore\cos\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16、已知复数 $z_1=2-\sqrt{3}x+xi$，$z_2=\sqrt{3}y-1+(\sqrt{3}-y)i$，x、y 属于 R，若$|z_1|=|z_2|$

且 $\arg z_1/z_2=90^\circ$，求$\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)^{10}$的值

解：$\because |z_1|=|z_2|, \arg\frac{z_1}{z_2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore z_1 = z_2 i$

$\therefore 2-\sqrt{3}x+xi=[\sqrt{3}y-1+(\sqrt{3}-y)i]i$

$=y-\sqrt{3}+(\sqrt{3}y-1)i$

$\therefore \begin{cases} 2-\sqrt{3}x=y-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3}y-1 \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\therefore z_1=2-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$，

$z_2=\sqrt{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1+(\sqrt{3}-\frac{1+\sqrt{3}}{2})i=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$\therefore \frac{z_1+z_2}{2}=\frac{1}{2}[(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2})+(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2})i]=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

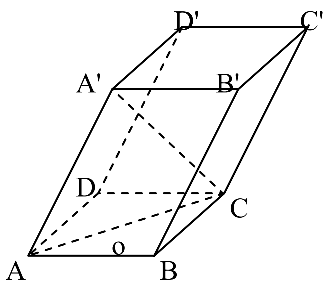
$\therefore (\frac{z_1+z_2}{2})^{10}=\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

17、如图，平行六面体 ABCD－A'B'C'D'中，AC＝$2\sqrt{2}$，BC＝AA'＝A'C＝2，∠ABC＝90°，点 O 是点 A'在底面 ABCD 上的射影，且点 O 恰好落在 AC 上.

（1）求侧棱 AA'与底面 ABCD 所成角的大小；

（2)求侧面 A'ADD'底面 ABCD 所成二面角的正切值；

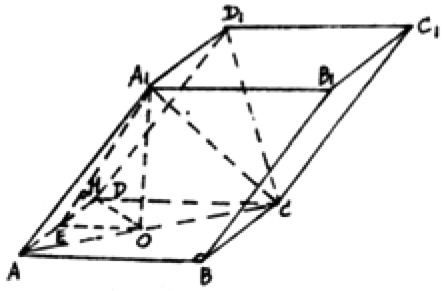
（3）求四棱锥 C－A'ADD'的体积.



解：（I）连 A_1O，则 $A_1O\perp$平面 $ABCD$ 于 O

……1 分（文 1 分）

$\therefore \angle A_1AO$ 就是侧棱 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成的角　　……1 分（文 2 分）



在ΔA_1AC中，$A_1A = A_1C = 2, AC = 2\sqrt{2}$

$A_1A^2 + A_1C^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2 = AC^2$

$\therefore \Delta A_1AC$是等腰直角三角形

$\therefore \angle A_1AO = 45°$，即侧棱$A_1A$与底面$ABCD$所成角为45°，

（II）在等腰$Rt\Delta A_1AC$中，$A_1O \perp AC$，$\therefore A_1O = \dfrac{1}{2}AC = \sqrt{2}$，且$O$为$AC$中点，

过O作$OE \perp AD$于E，连A_1E。$\because A_1O \perp$平面$ABCD$于O，

由三垂线定理，知$A_1E \perp AD$，

$\therefore \angle A_1EO$是侧面A_1ADD_1与底面$ABCD$所成二面角的平面角。

$\because \angle ABC=90°$，$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$，$\therefore$底面$ABCD$是正方形。

$\therefore OE \overset{//}{=} \dfrac{1}{2}AB = 1$。

在$Rt\Delta A_1EO$中，$tg\angle A_1EO = \dfrac{A_1O}{EO} = \sqrt{2}$。

即所求二面角的正切值为$\sqrt{2}$。

（III）由（II）知，$A_1E \perp AD, AD = BC = 2, A_1E = \sqrt{A_1O^2 + OE^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$。

$\therefore S_{A_1ADD_1} = AD \cdot A_1E = 2\sqrt{3}$。

$\because A_1E \perp AD, OE \perp AD$，$\therefore AD \perp$平面$A_1EO$。

$\because AD \subset 平面A_1ADD_1$，$\therefore$平面 $A_1ADD_1 \perp 平面A_1EO$，它们的交线是 A_1E。

过 O 作 $OH \perp A_1E$，则 $OH \perp 平面A_1ADD_1$。

$$OH = \frac{OE \cdot A_1O}{A_1E} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}。$$

又$\because O是AC$的中点，$\therefore$点 C 到平面 A_1ADD_1 的距离 $h = 2OH = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

$$\therefore V_{C-A_1ADD_1} = \frac{1}{3}S_{A_1ADD_1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}。$$

另解：$V_{C-A_1ADD_1} = \dfrac{1}{3}V_{B_1BCC_1-A_1ADD_1} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$。

18、在工厂生产中，若机器更新过早，则生产潜力未能充分发挥而造成浪费；若更新过迟，老机器生产效率低，维修与损耗费用大，也会造成浪费.因此，需要确定机器使用的最佳年限（即机器使用多少年平均费用最小）

某工厂用 7 万元购买了一台新机器，运输安装费 2 千元，每年投保、动力消耗固定的费用为 2 千元；每年的保养、维修、更换易损件的费用逐年增加，第一年为 2 千元，第二年为 3 千元，第三年为 4 千元，……，即每年增加 1 千元，问这台机器的最佳使用年限是多少年？并求出年平均费用的最小值.

解：设使用 n 年为最佳年限，则每年的平均费用

$$y = \frac{1}{n}\{7 + 0.2 + 0.2n + [0.2 + 0.3 + 0.4 + \cdots + (0.2 + (n-1) \times 0.1]\}$$

$$= \frac{1}{n}(7.2 + 0.35n + 0.05n^2)$$

$$= \frac{7.2}{n} + 0.05n + 0.35$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{7.2}{n} \times 0.05n} + 0.35$$

$= 1.2 + 0.35 = 1.55$（万元）。

当且仅当 $\dfrac{7.2}{n} = 0.05n$，即 $n^2 = \dfrac{7.2}{0.05} = 144$，即 $n = 12$ 时取等号。

答：这台机器最佳使用年限为 12 年，且年平均费用的最小值为 1.55 万元。

19、已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1＝2$，对于任意的 $n∈N$，都有 $a_n＞0$，且$(n＋1)a_n^2＋a_na_{n＋1}$

$-na_{n+1}^{2}=0$，又知数列$\{b_n\}$:$b_1=2^{n-1}+1$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项 a_n 以及它的前 n 项和 S_n；

(2)求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n；

(3)猜想 S_n 和 T_n 的大小关系，并说明理由.

解：（Ⅰ）$\because a_n>0(n\in N),(n+1)a_n^2+a_na_{n+1}-na_{n+1}^2=0$

$\therefore (n+1)(\frac{a_n}{a_{n+1}})^2+(\frac{a_n}{a_{n+1}})-n=0$。

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n(n+1)}}{2(n+1)}=\frac{-1\pm(2n+1)}{2(n+1)}=\begin{cases}-1,\\ \frac{n}{n+1}.\end{cases}$$

$\therefore a_n>0$，$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n}{n+1}$。

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$。

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\dots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$。

$=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\dots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=n$。

$\therefore \frac{a_n}{a_1}=n$，

$\therefore$ 又 $a_1=2$，$\therefore a_n=2n$。

$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$。

（Ⅱ）$\because b_n=2^{n-1}+1$，

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + n$

$= \dfrac{2^0(2^n - 1)}{2 - 1} + n$

$= 2^0 + n - 1$。

（Ⅲ）$T_n - S_n = (2^n + n - 1) - (n^2 + n) = 2^n - n^2 - 1$

当$n = 1$时，$T_1 - S_1 = 2^1 - 1^2 - 1 = 0$，$\therefore T_1 = S_1$；

当$n = 2$时，$T_2 - S_2 = 2^2 - 2^2 - 1 = -1 < 0$，$\therefore T_2 < S_2$；

当$n = 3$时，$T_3 - S_3 = 2^3 - 3^2 - 1 = -2 < 0$，$\therefore T_3 < S_3$；

当$n = 4$时，$T_4 - S_4 = 2^4 - 4^2 - 1 = -1 < 0$，$\therefore T_4 < S_4$；

当$n = 5$时，$T_5 - S_5 = 2^5 - 5^2 - 1 = 6 > 0$，$\therefore T_5 > S_5$；

当$n = 6$时，$T_6 - S_6 = 2^6 - 6^2 - 1 = 27 > 0$，$\therefore T_6 > S_6$。

猜想：当$n \geq 5$时，$T_n > S_n$。

即$2^n - n^2 - 1 > 0$。亦即$2^n > n^2 + 1$。

下面用数学归纳法证明：

1° 当$n = 5$时，前面已验证成立；

2° 假设$n = k(k \geq 5)$时，$2^k > k^2 + 1$成立，那么当$n = k + 1(k \geq 5)$时，

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k^2 + 1) = k^2 + k^2 + 2$

$\geq k^2 + 5k + 2$

$> k^2 + 2k + 2$

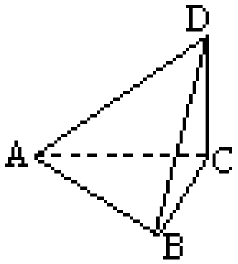
$= (k + 1)^2 + 1$。

$\therefore$ 当$n = k + 1(k \geq 5)$时，$2^{k+1} > (k + 1)^2 + 1$也成立。

由以上$1°$、$2°$可知，当$n\ge 5$时，有$T_n > S_n$；当$n=1$时，$T_1 = S_1$；

当$2\le n<5$时，$T_n < S_n$。

20、将两副三角板放成如图所示的形状，使二面角 D－AC－B 成直二面角。已知：BC=CD，∠ACD=∠ABC=90^0.求：二面角 C－AB－D 的大小。



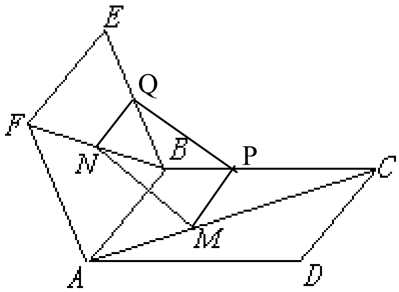
证：如图∵平面 ACD⊥平面 ABC，CD⊥AC，∴CD⊥平面 ABC.

∵斜线 BD 在平面 ABD 上的射影为 BC，AB⊥BC，∴AB⊥BD.即∠DBC 为二面角C－AB－D 的平面角。

∵BC=CD，CD⊥BC，

∴∠DBC=45^0

21、正方形 ABCD 和正方形 ABEF 折成一个二面角,M、N 分别是对角线 AC 和 BF 上的点,且 AM=FN(如图),求证：MN//平面 BEC.



证明：如图，分别过 M、N 作MP∥DC 交 BC 于 P，NQ ∥EF 交EB 于 Q，连接 PQ ∵EF∥AB∥CD，

∴MP∥NQ

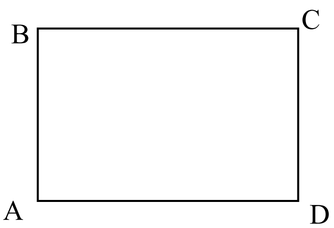
又∵AM＝FN，∴在正方形 ABEF和正方形 ABCD 中，MP=NQ

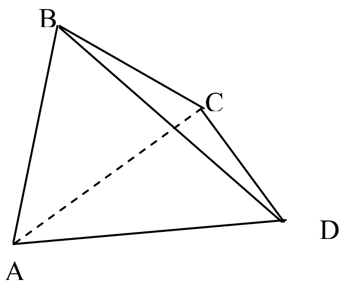
∴ 四边形 MPQN为平行四边形

∴MN∥PQ，∵ $PQ\subset 平面EBC$， $MN\not\subset 平面EBC$

∴MN∥平面 EBC

22、矩形 ABCD(AB≤BC)中,AC=$2\sqrt{2}$,沿对角线 AC 把它折成直二面角 B－AC－D 后,BD=$\sqrt{5}$,求 AB、BC 的长.





解：如图，

分别过 B、D 作 BE⊥AC 于 E，DF⊥AC 于 F，

设∠BAC＝θ，则 AB＝ACcosθ ＝$2\sqrt{2}$ cosθ ，

$BE=DE=AB\sin\theta=\sqrt{2}\sin 2\theta$,

$AE=AB\cos\theta=2\sqrt{2}\cos^2\theta$ $\therefore EF=AC-2AE$

$=2\sqrt{2}-2\times 2\sqrt{2}\cos^2\theta=-2\sqrt{2}\cos 2\theta$

折叠后，在平面 ACD 内过 E 作 EG∥FD, 且 EG=FD, 连接 DG、BG、BD，则∠BEG 为二面角 B－AC－D 的平面角，∴∠BEG＝90°

于是 $BG=\sqrt{2}BE=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin 2\theta=2\sin 2\theta$

$\therefore BG^2+DG^2=BD^2$，即：$(2\sin 2\theta)^2+(-2\sqrt{2}\cos 2\theta)^2=5$

$\therefore 4(\cos 2\theta)^2=1$, $\therefore \cos 2\theta=\pm\frac{1}{2}$,

$\because AB\leqslant BC$，$\therefore \cos 2\theta=-\frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$,

故 $AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$.

23、在三棱锥 A－BCD 中,E、F 分别是线段 AD、BC 上的点,满足 $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$,AB=CD=3,且 AB 与 CD 所成的角为 60^o,求 EF 的长.

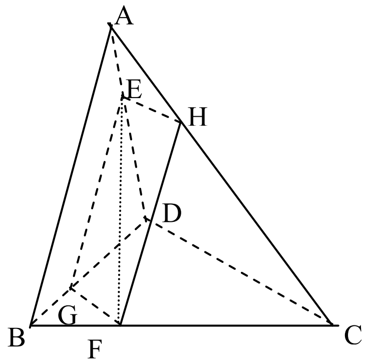
解：如图，过 E 分别作 EG∥AB 交 BD 于 G，EH∥DC 交 AC 于 H，连接 GH、FH，由条件，易知 EGFH 为平行四边形。

∴∠GEH 为异面直线 AB 与 CD 所成的角或其补角。

∴∠GEH＝60° 或 120°

又 $EG=\frac{2}{3}AB=2$，$EH=\frac{1}{3}AB=1$,

由余弦定理得：



$EF=\sqrt{2^2+1^2\pm 2\times 2\times 1\times\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{7}$

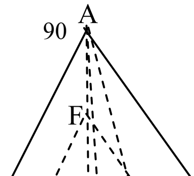
24、如图,△ABC 和△DBC 所在平面互相垂直 ,AB=BC=BD,∠CBA=∠DBC=120^o,求

(1) AD 与平面 BCD 的成角;

(2) AD 与 BC 的成角;

(3) 二面角 A-BD-C 的正切值.

解：（1）如图，过 A 作 AE⊥CB 与 CB 的延长线交与 E，连接 DE,



∵平面 ABC⊥平面 DBC∴AE⊥平面 DBC，
∴∠ADE 即为 AD 与平面 CBD 所成的角。
∵AB＝BD，∠CBA=∠DBC，EB＝EB
∴∠ABE＝∠DBE，∴△DBE≌△ABE
∴DE⊥CB 且 DE＝AE
∴∠ADB＝45° ∴AD 与平面 CBD
所成的角为 45°
（2）由（1）知 CB⊥平面 ADE
∴AD⊥BC 即 AD 与 BC 所成
的角为 90°.
（3）过 E 作 EM⊥BD 于 M
由（2）及三垂线定理知，AM⊥BD，
∴∠AME 为二面角 A－BD－C 的平面角的补角.
∵AE＝BE＝2ME，∴tg∠AME＝2
故二面角 A-BD-C 的正切值为－2.

25、如图：已知平面四边形 ABCD,AC、BD 相交于 O,AB=AD,CB=CD, ∠ABC=120°,且 PA⊥平面 ABCD.

(1)若 AB=PA=$\sqrt{6}$,求 P 到直线 BC 的距离;

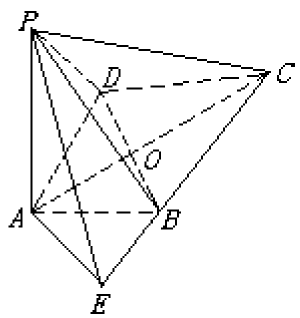
(2)求证平面 PBD⊥平面 PAC.

证明(1)延长 CB,过 A 在平面α内作 AE⊥CB,垂足为 E.

∵∠ABC=120°,∴∠ABE=60°,在 Rt△ABE 中：AE=AB·sin60° $=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

∵PA⊥平面α, AE⊥EB, ∴AE 是 PE 在平面α内的射影,
∴ PE ⊥ EB, ∴ PE 为点 P 到 BC 的距离. 在 Rt△PAE 中：

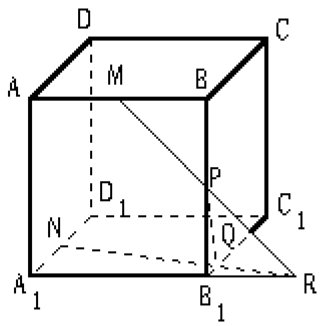
PE=$\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{6+\dfrac{9\times 2}{4}}=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.



(2)在四边形 ABCD 中,取 BD 中点 O,连 AO、CO,
∵AB=AD,CD=CB,BO=OD,

∴AO⊥BD,CO⊥BD,
∴A、O、C 共线,∴AC⊥BD.
又 PA⊥α,∴PA⊥BD,
∴BD⊥平面 PAC,∵BD⊂平面 PBD,
∴平面 PBD⊥平面 PAC.

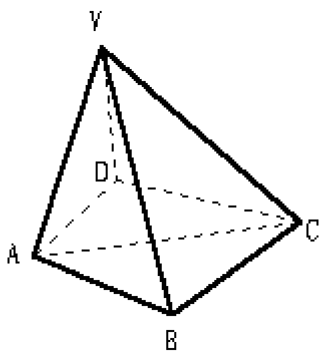
26、如图，正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 8cm，M、N、P 分别是 AB、A_1D_1、BB_1 的中点；（1）画出过 M、N、P 三点的平面与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线以及与平面 BB_1C_1C 的交线；（2）设过 M、N、P 三点的平面与 B_1C_1 交于点 Q，求 PQ 的长；



解：（1）设 M、N、P 三点确定的平面为 α，则 α 与平面 AA_1B_1B 的交线为直线 MP，设 $MP\cap A_1B_1=R$，则 RN 是α 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线，设 $RN\cap B_1C_1=Q$，则直线 PQ 就是所要画的平面 α 与平面 BB_1C_1C 的交线；

（2)正方体的棱长为 8cm,B_1R=BM=4cm，$\frac{B_1Q}{A_1N}=\frac{RB_1}{RA_1}$，故 $B_1Q=\frac{4}{12}\times 4=\frac{4}{3}$（cm),在 Rt△$PB_1Q$ 中,B_1P=4cm,$B_1Q=\frac{4}{3}$ cm，$\therefore PQ=\sqrt{B_1P^2+B_1Q^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$（cm）

27、如图,四棱锥 V-ABCD 中,∠BCD=∠BAD=90°，又∠BCV=∠BAV=90°，求证:VD⊥AC;



证明：∠BCD=∠BAD=90° $\Rightarrow$ BC⊥CD，BA⊥AD

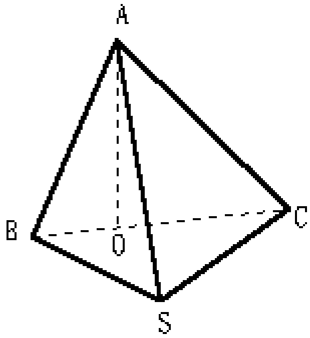
∠BCV=∠BAV=90° $\Rightarrow$ BC⊥CV，BA⊥AV

∴BC⊥平面 VCD，BA⊥平面 VAD

∴BC⊥VD，BA⊥VD

∴VD⊥平面 ABC，∴VD⊥AC

28、过点 S 引三条长度相等不共面的线段 SA、SB、SC，且∠ASB=∠ASC=60°，∠BSC=90°，
求证：平面 ABC⊥平面 BSC。

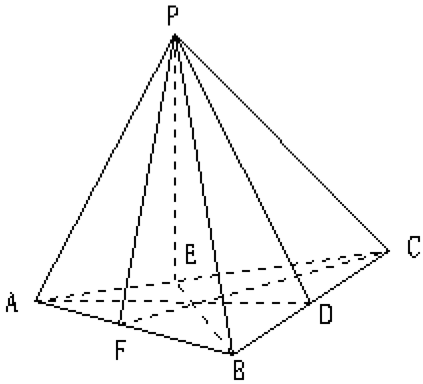


证明：作 AO⊥平面 SBC，O 为垂足，

∵SA=SB，∠ASB=60°，∴AB=AS，同理 AS=AC，∴AB=AS=AC，∴O 为△BSC 的外心，又∠BSC=90°，故 O 为 BC 中点，即 AO 在平面 ABC 内，所以平面 ABC⊥平面 BSC。

29、三棱锥 P-ABC 中，三侧棱 PA、PB、PC 两两相互垂直，三侧面面积分别为 S_1、S_2、S_3，底面积为 S，三侧面与底面分别成角 α、β、γ，（1）求 S（用 S_1、S_2、S_3表示）；（2）求证：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；

解：设 PA=a，PB=b，PC=c，则 $S_1=\frac{1}{2}ab$，$S_2=\frac{1}{2}bc$，$S_3=\frac{1}{2}ca$，
作 PD⊥BC 于 D，连 AD，
易证 BC⊥平面 PAD，
于是 BC⊥AD；
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times AD$，
在 Rt△APD 中，$AD^2=a^2+PD^2$，
在 Rt△BPC 中，$PD^2=\frac{b^2c^2}{BC2}=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$，



∴$AD^2=a^2+\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{BC^2}$

∴$S_{\triangle ABC}{}^2=(\frac{1}{2}BC\times AD)^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=S_1^2+S_2^2+S_3^2$

∴$S=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$

证明：由（1）知，PD⊥BC，AD⊥BC，∴∠PDA 是侧面 PBC 与底面 ABC 所成二面角的平面角，不妨设∠PDA=α，

$PD^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$，$AD^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}$

∴$\cos^2\alpha=\frac{PD^2}{AD^2}=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$；

同理 $\cos^2\beta=\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$；

$\cos^2\gamma=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

；

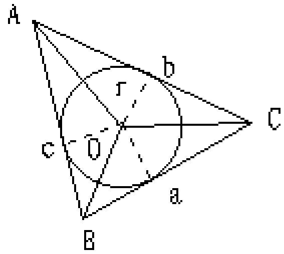
∴$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

30、如图，四棱锥 P-ABCD 的侧棱 PA⊥底面 ABCD，底面 ABCD 是直角梯形，其中∠DAB=∠CBA=90°，又 AD=AB=$\frac{1}{2}$BC，∠APB=arcsin$\frac{3}{5}$，试求侧面 APB 与侧面 CPD 所成的角。

解：设 AD=AB=$\frac{1}{2}$BC=3a，由 Rt△PAB≌Rt△PAD，∠APB=arcsin$\frac{3}{5}$，得 PD=PB=5a，PA=4a，

延长 CD、BA 交于 E，连 PE，作 BF⊥PE 于 F，连 CF，可证 BC⊥平面 PBE，则 CF⊥PE（ 三垂线定理），
从而∠BFC 是二面角 B-PE-C 的平面角，设其为 θ ；

显然 AD 是△EBC 的中位线，∴EA=AB=3a，即 EB=6a，可得 PE=PB=5a
在△PBE 中，用面积关系得：PE×BF=BE×PA



∴BF= $\frac{BE\times PA}{PE}=\frac{6a\cdot 4a}{5a}=\frac{24}{5}a$

由 Rt△BCF，$\mathrm{tg}\theta=\frac{BC}{BF}=\frac{5}{4}$，∴ $\theta=\mathrm{arctg}\frac{5}{4}$；

本题还可以用射影面积法。

31、多面体表面积为 S，外切于表面积为 36π （平方单位）的球，求这个多面体的体积；

分析：可仿照平面几何类似问题，连结三角形的内切圆圆心和各个顶点的线段，将三角形面积分为三个部分，且有 S= $\frac{1}{2}$ r（a+b+c）；

解：球的半径 R=3，连结球心和多面体各个顶点 ，得到的锥体体积之和就是多面体的体积，这些锥体的高都是半径 R，

故 V= $\frac{1}{3}R\sum S_i$ =S（立方单位）。

32、给定一个圆锥和两个平面 α 、β ，其中 α ∥β ，且它们与圆锥底面平行，若平面 α 把圆锥侧面分成面积相等的两部分，平面 β 把圆锥分成体积相等的两部分，求夹在 α 、β 间的几何体的体积与圆锥体积之比。

分析：本题涉及到截锥性质：截面积与底面积的比为对应元素的平方比，截得的圆锥的体积与原圆锥的体积之比是对应元素的立方比。

解：设给定圆锥的底面半径为 R，高为 H，则 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2H$；

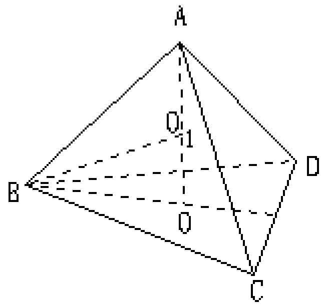
设平面α、β 与圆锥侧面相交所得两圆半径分别为 r_1 和 r_2，

由截锥性质得：$$\left(\frac{r_1}{R}\right)^2=\frac{1}{2},\left(\frac{r_2}{R}\right)^3=\frac{1}{2},\therefore r_1=\frac{1}{\sqrt{2}}R,r_2=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}R$$

显然 $r_2>r_1$，即平面β 比平面α 离圆锥底面近些，又设截得的两圆锥的高分别是 h_1 和 h_2，则夹在α、β 间的圆台的高 h，有：

$h=h_2-h_1=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H$；

$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\times(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$



$=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\times\frac{1}{3}\pi R^2H$

$\therefore V_{圆台}:V_{圆锥}=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

33、在一个每边长均为 1 的正三棱锥内部有 1 3 个点，其中任三点不共线，任四点不共面，试证：其中至少有一个以这些点中的四个点为顶点的三棱锥，其体积 $V<\frac{\sqrt{2}}{48}$

证明：设棱长均为 1 的正三棱锥为 A-BCD，AO 是它的高，今在 AO 上取一点 O_1，使 $O_1A=O_1B=O_1C=O_1D$，可求得 $OB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AO=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

进而求得 $O_1A=O_1B=O_1C=O_1D=\frac{\sqrt{6}}{4}$；

以 O_1 为点，以 A-BCD 得四个面为底面的四个三棱锥显然等积，

且 $V'=\frac{\sqrt{2}}{48}$；

在三棱锥内部的 13 个点，因为其中任三点不共线，任四点不共面，由抽屉原理，至少有四点落在以 O_1 为顶点的四个小三棱锥的同一个三棱锥内，那幺这四点为顶点的三棱锥的体积 V $<\dfrac{\sqrt{2}}{48}$。

34、进货原价为 80 元的商品 400 个，按 90 元一个售出时，可全部卖出。已知这种商品每个涨价一元，其销售数就减少 20 个，问售价应为多少时所获得利润最大？

解：设售价为 $90+x$ 元时利润为 y，此时售量为 $400-20x$.

$$y=(90+x)(400-20x)-(400-20x)\times 80=20(20-x)(10+x)=20[-(x-5)^2+225].$$

当 $x=5$ 时，$y_{\max}=4500$（元）。

答：售价为 95 元时获利最大，其最大值为 4500 元。

35、20 个劳动力种 50 亩地，这些地可种蔬菜、棉花、水稻。这些作物每亩地所需劳力和预计产值如下表。应怎样计划才能使每亩地都能种上作物（水稻必种），所有劳力都有工作且作物预计总产值达最高？

作物	劳力/亩	产值/亩
蔬菜	1/2	0.6 万元
棉花	1/3	0.5 万元
水稻	1/4	0.3 万元

解：设种 x 亩水稻（0<x≤50），y 亩棉花（0<x≤50）时，总产值为 h 且每个劳力都有工作。

$\therefore h=0.3x+0.5y+0.6[50-(x+y)]$ 且 x、y 满足 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{2}[50-(x+y)]=20.$

即 $h=-\dfrac{3}{20}x+27, 4\le x\le 50, x\in N.$

欲使 h 为最大，则 x 应为最小，故当 $x=4$（亩）时，$h_{\max}=26.4$ 万元，此时 $y=24$（亩）。

故安排 1 人种 4 亩水稻，8 人种 24 亩棉花，11 人种 22 亩蔬菜时农作物总产值最高且每个劳力都有工作。

36、某企业在今年年初向银行贷款 a 万元，年利率为 r；从今年年末开始，每年末向银行偿还一定的金额，预计五年内还清，问每年末平均偿还的金额应是多少？

解：设平均每年末应向银行偿还 x 万元，则每年尚欠银行款依次为：

$$a+ar-x=a(1+r)-x, a(1+r)-x+[a(1+r)-x]\cdot r-x=a(1+r)^2-x(1+r)-x, \cdots\cdots$$

第五年欠款应等于零，即：

$$a(1+r)^5=-x[(1+r)^4+(1+r)^3+\cdots+(1+r)+1]=a(1+r)^5-x\cdot\frac{(1+r)^5-1}{r}=0.$$

$$\therefore x=\frac{ar(1+r)^5}{(1+r)^5-1}$$

故平均每年末向银行偿还金额$\dfrac{ar(1+r)^5}{(1+r)^5-1}$万元。

37、某市 1994 年底人口为 20 万，人均住房面积为 8m^2，计划 1998 年底人均住房面积达 10m^2。如果该市每年人口平均增长率控制在 1%，要实现上述计划，这个城市每年平均至少要新增住房面积多少万m^2（结果以万m^2为单位，保留两位小数）。

解：设平均每年至少要新增住房面积x万m^2。四年共新增住房面积 4x万m^2。此时住房总面积应为$20\times8+4x$万m^2。另一方面，到 1998 年底总人口为 20（1+1%）^{4}万。按人均 10m^2计，1998 年底应有住房面积为 20×10×（1+1%）^{4}万m^2。据题意有：

$$20\times8+4x\geq200(1+1\%)^4,即x\geq50(1+1\%)^4-40.$$

因$1.01^4\approx1.0406.$

故$x\geq50\times1.0406-40=52.03-40=12.03.$

即$x\geq12.03.$

故该城市每年至少要新增住房面积 12、03 万m^2，才可达人均住房面积 10m^2的目标。

38、铁道机车运行 1 小时所需的成本由两部分组成，固定部分为m元，变动部分与运行速度V（千米/小时）的平方成正比。比例系数为 k（k≠0）。如果机车匀速从甲站开往乙站，为使成本最省应以怎样的速度运行？

解：设以速度V匀速运行成本最省，甲、乙两站相距S千米，则机车匀速从甲站到乙站所需时间为$t=\dfrac{S}{V}$.总成本为y元。

$\therefore y=(m+KV^2)\dfrac{S}{V}=S(KV+mV)\geq 2S\sqrt{Km},$

仅当$V=\sqrt{\dfrac{m}{K}}$时，y有最小值，

故机车以速度$\sqrt{\dfrac{m}{K}}$千米/小时匀速运行时，成本最省。

39、某渔场养鱼，鱼的重量增长率第一年为 400%，以后每年重量增长率都是前一年的三分之一。同时鱼每年要损失预计重量的 10%。预计养鱼的费用第一年是鱼苗成本的 20%，以后每年的费用 M（t）与年数 t 满足关系式$M(t)=\dfrac{a}{10}\sqrt{t^2-7t+13}$（其中$a$为鱼苗成本，$t\geq 2$且$t\in N$）。问该渔场的鱼养几年后全部捕捞，鱼的产值高且费用较少（设鱼苗价 30 元/斤，成鱼市场价 7 元/斤）。

解：设第n年鱼的产值a_n为最高。p为鱼苗总重量，则

$$p=\frac{a}{30}\text{且}a_1=7p(1+4)(1-\frac{1}{10})=\frac{63}{2}p=\frac{21}{20}a,$$
$$a_2=7p(1+4)(1+\frac{4}{3})(1-\frac{1}{10})^2=a_1(1+\frac{4}{3})(1-\frac{1}{10})=\frac{63\times 21}{20}p=\frac{441}{200}a.$$

$$a_3=7p(1+4)(1+\frac{4}{3})(1+\frac{4}{3^2})(1-\frac{1}{10})^3=a_2(1+\frac{4}{3^2})(1-\frac{1}{10})$$
$$=\frac{63\times 21\times 13}{200}p=\frac{441\times 13}{2000}a$$

$$a_4=a_3(1+\frac{4}{3^3})(1-\frac{1}{10}),\cdots\cdots,$$
$$a_n=a_{n-1}(1+\frac{4}{3^{n-1}})\cdot\frac{9}{10}.$$

当$a_{n+1}\leq a_n$时$,3^n\geq 36,\therefore n\geq 4.$

即第 4 年鱼的产值最高；另一方面，

$$M(t)=\frac{a}{10}\sqrt{t^2-7t+13}=\frac{a}{10}\sqrt{(t-\frac{7}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

当$t=3$或 4 时，$M(t)_{\min}=\dfrac{a}{10}.$

下面比较第 4 年比第 3 年增加的产值 G 与该年投入的费用$\dfrac{a}{10}$的大小。

若 $G\neq 0$ 则取$t=4$；

若$G \le \frac{a}{10}$, 则取$t=3$.

$\because G = a_4 - a_3 = \frac{1}{30}a_3 = \frac{1911}{2000} \times \frac{a}{10} \prec \frac{a}{10}$.

∴取$n=3$，即该渔场三年后捕捞，鱼的总产值高且费用较少。

40、过椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的左焦点$F_1$的弦AB，过A，B分别向左准线引垂线，垂足分别为M，N，当线段MN最大时，求直线AB的方程。

解：由已知方程得F_1（－4，0），设直线AB方程：$y=\mathrm{tg}\alpha(x+4)$,代入椭圆方程

$(9\mathrm{ctg}^2\alpha+25)y^2-72\mathrm{ctg}\alpha\cdot y-81=0, |MN|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y$

$=\frac{90}{\frac{9}{\sin\alpha}+16\sin\alpha} \le \frac{90}{2\sqrt{9\times16}}=\frac{15}{4}$，当$\sin\alpha=\frac{3}{4}$时，|MN|最大$\frac{15}{4}$，此时

$k=\pm\frac{3}{7}\sqrt{7}$

∴直线方程为：$y=\pm\frac{3}{7}\sqrt{7}(x+4)$.

41、已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的长轴两端点为A、B，

（1）过焦点F作垂直于长轴的弦PP′，当tg∠APB=$-2\sqrt{3}$时，求C的离心率；

（2）如果C上存在一点Q，且∠AQB=120^0，求C的离心率的范围。

解：(1)设F为右焦点；P在x轴下方，横坐标为c，则纵坐标为$\frac{b^2}{a}$.

$k_{PA}=\frac{b^2}{a(a+c)}$，$k_{PB}=\frac{-b^2}{a(a-c)}$.

∴tg∠APB=$\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}\cdot k_{PA}}=-\frac{2a^2}{c^2}$，∴$-\frac{2a^2}{c}=-2\sqrt{3}$，∴e=$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

(2)设θ (x，y)，由对称性，不妨设θ 在x轴上方，即y＞0.

$k_{AQ}=\frac{y}{x+a}$，$k_{BQ}=\frac{y}{x-a}$，∴ $-\sqrt{3}$ =tg∠AQB= $\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}}$.

∴ $\sqrt{2}$ $=(x^2+y^2-a^2)+2ay=0$.

此方程与椭圆方程联立，可求出 y=0 或 $y=\frac{2\sqrt{3}ab^2}{3c^2}$.由 y=0，得 Q 与 A 或 B 重合，舍去.当 $y=\frac{2\sqrt{3}ab^2}{3c^2}$ 时，由 Q 在椭圆上半部.

∴ $y=\frac{2\sqrt{3}ab^2}{3c^2}$ ≤b，∴ $\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴e∈ $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$.

42、按复利计算利息的一种储蓄，本金为 a 元，每期利率为 r，设本利和为 y，存期为 x，写出本利和 y 随存期 x 变化的函数式，如果存入本金 1000 元，每期利率 2.25%，试计算 5 期后的本利和是多少？

解：已知本金为 a 元

1 期后的本利和为

$y_1=a+a\times r=a(1+r)$；

2 期后的本利和为

$y_2=a(1+r)+a(1+r)r=a(1+r)^2$；

3 期后的本利和为

$y_3=a(1+r)^3$；

……

x 期后的本利和为

$y=a(1+r)^x$

将 $a=1000$（元），r=2.25%，$x=5$ 代入上式得

$y=1000\times(1+2.25\%)^5$

$=1000\times1.0225^5$

由计算器算得

$y=1117.68$（元）

答：复利函数式为 $y=a(1+r)^x$，

5 期后的本利和为 1117.68 元

评述：此题解答的过程体现了解题的思路，再现了探究问题的过程，容易被学生接受。

43、某乡镇现在人均一年占有粮食 360 千克，如果该乡镇人口平均每年增长 1.2%，粮食总产量平均每年增长 4%，那么 x 年后若人均一年占有 y 千克粮食，求出函数 y 关于 x 的解析式。

分析：此题解决的关键在于恰当引入变量，抓准数量关系，并转化成数学表达式，具体解答可以依照例子。

解：设该乡镇现在人口量为 M，则该乡镇现在一年的粮食总产量为 360M。

经过 1 年后

该乡镇粮食总产量为 360M（1+4%），

人口量为 M（1+1.2%）

则人均占有粮食为 $\dfrac{360M(1+4\%)}{M(1+1.2\%)}$；

经过 2 年后

人均占有粮食为 $\dfrac{360M(1+4\%)^2}{M(1+1.2\%)^2}$

……

经过 x 年后

人均占有粮食 $y=\dfrac{360M(1+4\%)^x}{M(1+1.2\%)^x}$

即所求函数式为：

$y=360(\dfrac{1.04}{1.012})^x$

评述：这是一个有关平均增长率的问题，如果原来的产值的基础数为 N，平均增长率为 P，则对于时间 x 的总产值 y 可以用下面的公式，即 $y=n(1+p)^x$

解决平均增长率的问题，常用这个函数式。

44、购买一件售价为 5000 元的商品，采用分期付款方法.每期付款数相同，购买后 1 个月付款一次，过 1 个月再付一次，如此下去，到第 12 次付款后全部付清.如果月利率为 0.8%，每月利息按复利算（上月利息要计入下月本金），那么每期应付款多少（精确到 1 元）？

解：设每期付款 x 元，根据题意，得到

$$x+1.008x+1.008^2x+\cdots+1.008^{11}x=5000\times1.008^{12}.$$

所以 $x(1+1.008+1.008^2+\cdots+1.008^{11})=5000\times1.008^{12}$.

由等比数列前 n 项和的公式得

$$x\cdot\frac{1-1.008^{12}}{1-1.008}=5000\times1.008^{12}$$

$$x=\frac{5000\times1.008^{12}\times0.008}{1.008^{12}-1}$$

由计算器算得 $x\approx439$（元）.

答：每期应付款约 439 元.

解法二：设每期付款 x 元，第 n 期后欠款数记作 a_n 那么，

第 1 期后的欠款数为

$$a_1=5000(1+0.008)-x$$

第 2 期后的欠款数为

$$a_2=a_1(1+0.008)-x$$

$$=5000(1.008)^2-x(1+1.008)$$

第 3 期后的欠款数为

$$a_3=a_2(1+1.008)-x$$

$$=5000(1.008)^3-x(1+1.008+1.008^2).$$

……

第 12 期后的欠款数为

$$a_{12}=a_{11}(1+1.008)-x$$

$$=5000(1.008)^{12}-x(1+1.008+1.008^2+\cdots+1.008^{11}).$$

因为第 12 期全部付清，所以 $a_{12}=0$ 即

$$5000(1.008)^{12}-x(1+1.008+1.008^2+\cdots+1.008^{11})=0,$$

$$\therefore x\cdot\frac{1-1.008^{12}}{1-1.008}=5000\times1.008^{12},$$

解得　$x≈439$（元）.
答：每期应付款约 439 元.

五、高考考前指导

第一部分（选择题）

1．一直线与直二面角的两个面所成的角分别为α、β，则α+β 的范围为：（　　）
（A）0<α+β<π/2　　（B）α+β>π/2
（C）0≤α+β≤π/2　　（D）0<α+β≤π/2

2．已知平面α 与平面β 相交，a 是α 内的一条直线，则：（　　）
（A）在β 内必存在与 a 平行的直线　　（B）在β 内必存在与 a 垂直的直线
（C）在β 内必不存在与 a 平行的直线　　（D）在β 内不一定存在与 a 垂直的直线

3．从编号为 1，2，3，4……，9 的这九个球中取 4 个球，使它们编号之和为奇数，再把这 4 个球排成一排，不同的排法总数有：（　　）
（A）1440　　（B）1320　　（C）1500　　（D）1400

4．下列条件中，能使 sinα+cosα>1 成立的是：（　　）
（A）0<α<π/2　（B）0<α<π　（C）π/4≤α≤π/2　（D）0<α<3π/2

5．已知曲线 C 的极坐标方程ρ=2$\cos 2\theta$，给定两点 P(0，π/2)，Q（-2，π），则有（　　）
（A）P 在曲线 C 上，Q 不在曲线 C 上　　（B）P、Q 都不在曲线 C 上
（C）P 不在曲线 C 上，Q 在曲线 C 上　　（D）P、Q 都在曲线 C 上

6．已知 xy<0，且 x+y=1，而 $(x+y)^9$ 按 x 的降幂排列的展开式中，第二项不大于第三项，则 x 的取值范围是（　　）
（A）（-∞，$\frac{1}{5}$）　（B）[$\frac{4}{5}$+ ∞)　（C）（1，+∞）　（D）（-∞，$-\frac{4}{5}$]

7. 若 z∈C，arg z=π / 6，|z+1|的最小值是 x，|z－2|的最小值是 y，则 arg(x+yi)=（　　）
（A）π / 12　　（B）π / 6　　（C）π / 4　　（D）π / 3

8．若函数 $f(x)=(\sin x+1)(2a-\sin x-1)$的最大值为 a^2，则 a 的取值范围是（　　）
（A）R　　（B）（2，+∞）　　（C）[0，2]　　（D）（-∞，0）

9．设 $P_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$P_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，M 为双曲线 y = $\frac{1}{x}$上位于第一象限的点，给出下列 3 个命题：①$|MP_2|-|MP_1|=2\sqrt{2}$；②以线段 MP_1 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=2$ 相切；

③存在常数 b，使 M 到直线 $y=-x+b$ 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}|MP_1|$；则其中正确命题的序号为（　　）

（A）①③　　（B）①②　　（C）①　　（D）①②③

10．把圆：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$ 绕原点逆时针旋转 120° 所得的圆的方程为（　　）

（A）$x^2+y^2-(\frac{D+\sqrt{3}E}{2})x+(\frac{\sqrt{3}D-E}{2})y+F=0$

（B）$x^2+y^2+(\frac{D+\sqrt{3}E}{2})x+(\frac{\sqrt{3}D-E}{2})y+F=0$

（C）$x^2+y^2-(\frac{\sqrt{3}D+E}{2})x+(\frac{D-\sqrt{3}E}{2})y+F=0$

（D）$x^2+y^2+(\frac{\sqrt{3}D+E}{2})x+(\frac{D-\sqrt{3}E}{2})y+F=0$

11．停车场划出一排 12 个停车位置，今有 8 辆车需要停放，要求空车位在一起，不同的停车方法有（　　）

（A）P_8^8 种　　（B）P_{12}^8 种　　（C）$p_8^8\cdot C_8^1$ 种　　（D）$P_8^8\cdot C_9^1$ 种

12．函数 y=f(x)存在反函数 $Y=f^{-1}(x)$，把 Y=f（x）的图象在直角坐标平面内绕原点顺时针转动 90° 后是另一个函数的图象,这个函数是（　　）

(A) $y=f^{-1}(-x)$　　(B) $y=f^{-1}(x)$　　(C) $y=-f^{-1}(x)$　　(D) $y=-f^{-1}(-x)$

13．三棱锥 P-ABC 中，$\angle APC=90^{\circ}$，$\angle APB=60^{\circ}$，$PB=BC=4$，$PC=3$，则二面角 $B-PA-C$ 的平面角的余弦值为(　　)

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{6}$

14．函数 $y=\sin x-\cos x$ 及 $y=\sin x+\cos x$ 的图象关于（　　）

（A）x 轴对称　　（B）y 轴对称　　（C）直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称　　（D）$x=\frac{\pi}{4}$ 对称

15．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_7+a_{10}=17$，$a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{14}=77$，若$a_k=13$，则其中$k=$（　　）

（A）16　　（B）18　　（C）20　　（D）22

16．若$A=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x\mid ax-3=0\}$，且$A\cup B=A$，则实数a的集合为（　　）

（A）{1}　　（B）{3}　　（C）{1，3}　　（D）{0，1，3}

17．若 A、B、C 为锐角三角形 ABC 的三个内角，则下列不等式中恒成立的是（　　）

（A）$\log_{\cos C}(\dfrac{\sin A}{\cos B})>0$　　（B）$\log_{\cos C}(\dfrac{\cos A}{\sin B})>0$

（C）$\log_{\sin C}(\dfrac{\sin A}{\cos B})>0$　　（D）$\log_{\sin C}(\dfrac{\sin A}{\sin B})>0$

18．若$a>b>c$且$a+b+c=0$，则下列不等式中恒成立的是（　　）

（A）$ab>bc$　　（B）$ac>bc$　　（C）$ab>ac$　　（D）$a|b|>c|b|$

19．将直线l沿y轴的负方向平移a $(a\neq 0)$个单位，再沿x轴正方向平移$a+1$个单位得直线l'，此时直线l'与l重合，则直线l'的斜率为（　　）

（A）$\dfrac{a}{a+1}$　　（B）$-\dfrac{a}{a+1}$　　（C）$\dfrac{a+1}{a}$　　（D）$-\dfrac{a+1}{a}$

20．集合$A=\{z\mid |z-1|\leq 1, z\in C\}$，$B=\{z\mid \arg(1-z)\geq \dfrac{\pi}{2}, z\in C\}$，在复平面内，$A\cap B$所表示的图形面积为（　　）

（A）π　　（B）$\dfrac{3\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

21．已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1+a^n}=\beta$（$\beta$为常数），则$a$的取值范围是（　　）

（A）$a\neq -1$　　（B）$|a|>1$　　（C）$-1<a\leq 1$　　（D）$a>0$ $a=1$

22．函数$y=f(x)$在$(0,2)$上为增函数，而函数$y=f(x+2)$是偶函数，则下列不等式中成

立的是（　　）

（A）$f(1)<f(\dfrac{5}{2})<f(\dfrac{7}{2})$　　（B）$f(\dfrac{7}{2})<f(1)<f(\dfrac{5}{2})$

（C）$f(\dfrac{5}{2})<f(1)<f(\dfrac{7}{2})$　　（D）$f(\dfrac{7}{2})<f(\dfrac{5}{2})<f(1)$

23．对于二项式$(\frac{1}{x}+x^3)^n$，四位同学作出了四种判断：

① 存在$n\in N$，展开式中有常数项；

② 对任意$n\in N$，展开式中没有常数项；

③ 对任意$n\in N$，展开式中没有x的一次项；

④ 存在$n\in N$，展开式中有x的一次项．

上述判断中正确的是（　　）

（A）①与③　　（B）②与③　　（C）②与④　　（D）①与④

24．幂函数$y=x^{\frac{1}{3}}$的图象上横坐标满足$x^2-x\le 6$且$x\in Z$的所有点可以确定的直线（　　）

（A）15 条　　（B）12 条　　（C）11 条　　（D）9 条

第二部分（填空题）

1．在某次考试中，要求学生做试卷中 8 个考题中的 6 个，并且要求至少包含前 5 题中的 3
个，则考生答题的不同选法种数是__________种。

2．若函数$f(x)$满足对任意的x_1、$x_2\in R$，$x_1<x_2$，有$f(x_1)>f(x_2)$，且$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，满足这些条件的函数$f(x)$可以是______（只需写一个）。

3．矩形 ABCD 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$，沿对角线 AC 将矩形折成直二面角$B-AC-D$，，则 B 与 D 之间的距离是________。

4．已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\frac{n-\sqrt{99}}{n-10.5}\ (n\in N)$，则数列$\{a_n\}$的前 30 项中最大的项是________。

5．一个酒杯的轴截面是抛物线的一部分，其方程是$x^2=2y\quad(0\le y\le 20)$，在杯中放入一
个球，要使球触及酒杯的底部，则球的半径r的取值范围是________。

6．给出下列命题：

①直线$x=\frac{\pi}{8}$是函数$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{4})$的图象的一条对称轴；

②函数$y=\sin(-2x+\frac{\pi}{4})$的单调递增区间是$[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}]\ (k\in Z)$；

③函数 $y = tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\sin x}$ 的最小正周期是 π；

④若 α、β 为第一象限角，且 $\alpha > \beta$，则 $tg\alpha > tg\beta$。

其中错误命题的序号是______________。

7．已知关于 x 的实系数方程 $x^2 - 2ax + a^2 - 4a + 4 = 0$ 的两个虚根为 x_1、x_2，且 $|x_1| + |x_2| = 3$，则 a 的值为______________。

8．已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1A = AB = 2$，若棱 AB 上存在一点 P，使得 $D_1P \perp PC$，则棱 AD 的长的取值范围是______________。

第三部分（复数与三角）

1．已知函数 $f(x) = A\sin\omega x + B\cos\omega x$（其中 A、B、$\omega$ 是实数，且 $\omega > 0$）的最小正周

期是 2，且当 $x = \dfrac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2；

（1）、求函数 $f(x)$ 的表达式；

（2）、在闭区间 $[\dfrac{21}{4}, \dfrac{23}{4}]$ 上是否存在 $f(x)$ 的对称轴？如果存在，求出其对称轴的方程，

若不存在，说明理由。

2．在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知

$$f(B) = 4\sin B\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}) + \cos 2B;$$

（1）、若对任意的△ABC，有 $|f(B) - m| < 2$，求实数 m 的取值范围；

（2）、设 $z_1 = a(\cos A + i\sin A)$，$z_2 = a(\cos B + i\sin B)$，$z_3 = a(\cos C + i\sin C)$，且

$|z_1| + |z_3| = \sqrt{3}|z_2|$，当 $f(\dfrac{\pi}{2} - B) = 2$ 时，求 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}$。

第四部分（数列）

1． 已知数列$\{a_n\}$的前n项之和为S_n，且满足$a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0\ (n\geq 2)$， $a_1=\dfrac{1}{2}$

（1）、求证：$\{\dfrac{1}{S_n}\}$是等差数列；

（2）、求a_n的表达式；

（3）、若$b_n=2(1-n)a_n\ (n\geq 2)$，求证：$b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}+\cdots+b_n^{\ 2}<1$。

2．已知等比数列$\{X_n\}$的各项为不等于 1 的正数，数列$\{Y_n\}$的通项公式为

$Y_n=\log_{X_n}(2a^2-3a+1)$，其中 1＜a＜$\dfrac{3}{2}$为常数，对于 k 、t∈N，k≠t ，满足$Y_k=\dfrac{1}{2t+1}$，$Y_k=\dfrac{1}{2t+1}$ ，$Y_t=\dfrac{1}{2k+1}$，是否存在自然数N_0使得 n＞N_0时， X_n＞1 恒成立？若存在求出

相应的N_0，若不存在，请说明理由。

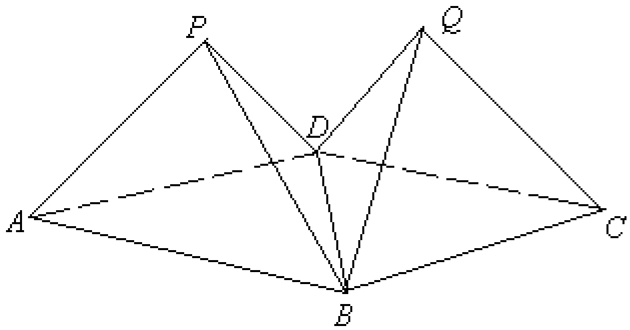
第五部分（立体几何）

1．如图，桌上放有两个相同的正四面体$P-ABD$和$Q-CBD$；

（1）、求证： $PQ\perp BD$；

（2）、求二面角$P-BD-Q$的余弦值；

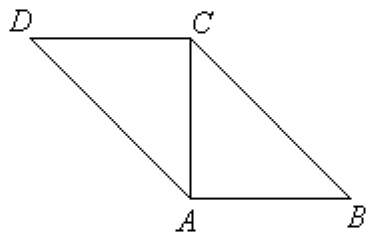
（3）、若正四面体的棱长为a，求点P到平面QBD的距离。



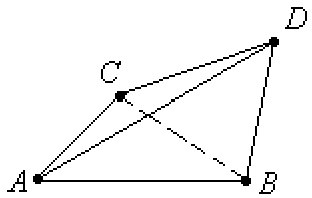
2．在平行四边形$ABCD$中，$AB=AC=CD=a$，$\angle ACD=90^\circ$，将该平行四边形ABC沿AC折成一个60°的二面角；

（1）、求B、D间的距离；

（2）、求点D到直线AB的距离。



（折之前



）

（折之后）

第六部分（函数与不等式）

1．对于任意的$x\in R$，均有$x^2-4ax+2a+30\ge 0$（$a\in R$），求关于x的方程

$\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$的根的范围。

2．已知函数$f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}\ (b<0)$的值域为$[1,3]$；

（1）、求实数b、c的值；

（2）、判断函数$F(x)=\lg f(x)$在$x\in[-1,1]$上的单调性，并给出证明；

（3）、若$t\in R$，求证：$\lg\frac{7}{5}\le F(|t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|)\le\lg\frac{13}{5}$。

3．已知函数$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>b>c)$，点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$是该函数图象上的

两点，且满足 $f(1)=0$， $a^2+a(y_1+y_2)+y_1y_2=0$；

（1）、求证：$b\geq 0$；

（2）、问是否能够保证 $f(x_1+3)$ 和 $f(x_2+3)$ 中至少有一个为正数？请证明你的结论。

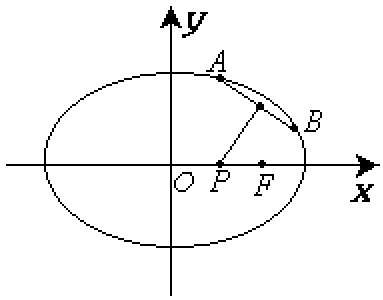
第七部分（解析几何）

1．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{2}{3}$, A、B 是椭圆上关于 x、y 轴均不对称的两点，

线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 P（1，0）.

（1）设 AB 的中点为 C（x_0，y_0），求 x_0的值;

（2）若 F 是椭圆的右焦点，且|AF|+|BF|=3，求椭圆的方程.



2．已知直线 l 是半径为 3 的圆 C 的一条切线， P 是平面上的一动点，作 $PQ\perp l$，垂足为 Q，

且 $|PQ|=2|PC|$；

（1）、试问 P 点的轨迹是什么样的曲线 C？求出该曲线的方程;

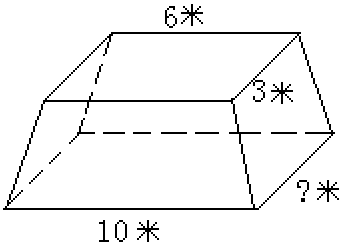
（2）、过圆心作直线交 P 点的轨迹于 A、B 两点，若 $|AC|=2|BC|$，求直线 AB 的方程。

第八部分（应用题）

1．（南京市 2002 年二模）如图，建筑工地有一用细砂堆成的多面体，其上下两个底

面平行且都是矩形，上底面矩形的两边分别为 6 米与 3 米，下底面矩形的长边为 10 米，若此多面体的四个侧面与底面所成的二面角都相等，则其下底面的短边边长为---------（　　）

A．7 米　　　　B．6 米　　　　C．5 米　　　　D．4 米



型　　号	小包装	大包装
重　　量	100 克	300 克
包装费	0.5 克	0.7 克
售　价	3.00 克	8.40 克

2．（南京市 2002 年三模）已知每生产 100 克饼干的原料和加工费为 1．8 元，某食品厂对饼干采用两种包装，其装费及售价如右上图表示，则下列说法中：

①买小包装实惠；　　　　　　　　②买大包装实惠；

③卖 3 包小包装比卖 1 包大包装盈利多；　　　　④卖 1 包大包装比卖 3 包小包装盈利多.

所有正确的说法是----------------------------------（　　）

A．①②　　　　B．①③　　　　C．②③　　　　D．②④

3．（南京市 2002 年三模）有一块长方形的窗台，尺寸为 1 米×0.2 米，现有足够多规格相同

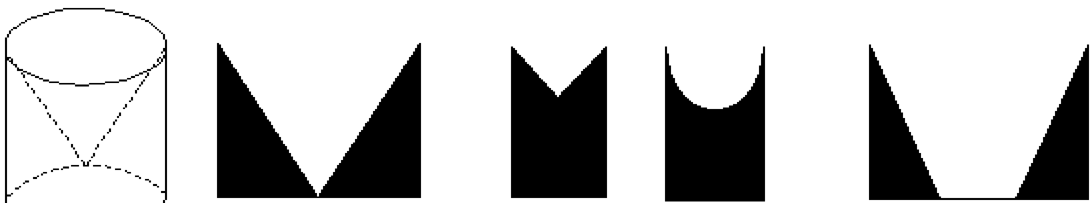
的白色壁砖和蓝色壁砖（规模为 0.2 米×0.2 米），用这些整块壁砖贴满窗台（空隙忽略不

计），可以贴成_________种不同图案。

4．（南京市 2002 年三模）如图所示的几何体是从一个圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为

面，下底面圆心为顶点的圆锥而得到的，现用一个平面去截这个几何体，若这个平面垂

直于圆柱底面所在的平面，那么所截得的图形可能是图中的_________.（把所有可能的图



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

的序号都填上）。

5．（2002 东城区一模）运输一批海鲜，可在汽车、火车、飞机三种运输工具中选择，它们的速度分别为 50 千米/小时，100 千米/小时，500 千米/小时，每千米的运费分别为 a 元、b 元、c 元，且 b＜a＜c，又这批海鲜在运输过程中的损耗为 500 元/小时，

若使用三种运输工具分别运输时各自的总费用（运费与损耗之和）互不相等，试确定使用哪种运输工具总费用最省。（题中字母均为正的已知量）

6．（南京市 2002 年二模）某公司生产的 A 型商品通过租赁柜台进入某商场销售.第一年，商 场为吸引厂家，决定免收该年管理费，因此，该年 A 型商品定价为每件 70 元，销售量为 11.8 万件.第二年，商场开始对该商品征收比率为 p%的管理费（即每销售 100 元要征收 p 元），于是该商品的定价上升为每件 $\dfrac{70}{1-p\%}$ 元，预计年销售量将减少 p 万件.

（1）将第二年商场对商品征收的管理费 y（万元）表示成 p 的函数，并指出这个函数的定义域；

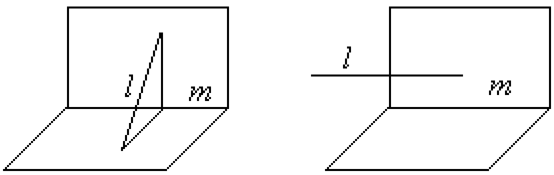
（2）要使第二年商场在此项经营中收取的管理费不少于 14 万元，则商场对该商品征收管理费的比率 p%的范围是多少？

（3）第二年，商场在所收费不少于 14 万元的前提下，要让厂家获得最大销售金额，则 p 应为多少？

高考数学考前指导答案

第一部分（选择题）

1．选 C。只须观察α +β 能否取到特殊值 0 和 $\dfrac{\pi}{2}$ 即可。附图如下：



2．选 B。

3．选 A。先分组：奇数：{1，3，5，7，9}，偶数：{2，4，6，8}，只能从中取奇数个奇数，

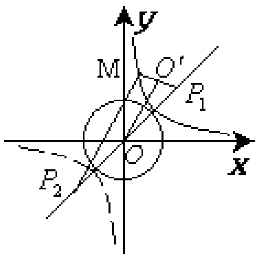
故 $(C_5^1C_4^3+C_5^3C_4^1)P_4^4=1440$ 个。

4．选 A。应用特殊值法，注意到 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 不适合，排除 B、C、D，故 A 正确。

5．选 D。P(0，π /2)即为极点，将其坐标更改为（0，π /4）就在曲线 C 上，Q（-2，π ）更

改为 Q（2，0）就在曲线 C 上。

6．选 C。依题意，$C_9^1x^8y\le C_9^2x^7y^2$，

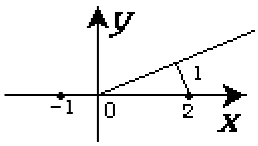


第 9 题图

两边同除以 $x^7y = x^6 \cdot xy < 0$ 得 $x \geq 4y = 4(1-x)$

则 $x \geq \frac{4}{5}$，则 $y = 1-x < 0$，∴ $x > 1$。

7．选 C。应用数形结合的思想：由图可知，x=1，y=1。



第 7 题图

8．选 C。$f(x) = -[\sin x-(a-1)]^2 + a^2$，故 $-1 \leq a-1 \leq 1$，a 的取值范围是[0，2]。

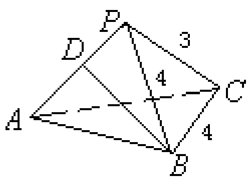
9．选 D。注意到 $P_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$P_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 为等轴双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的焦点，$2a = 2\sqrt{2}$，$c = 2$，由定义知①正确，又应用①的结论，得 $|OO'| = \frac{1}{2}|MP_2| = \frac{1}{2}(|MP_1| + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}|MP_1| + \sqrt{2}$，②正确，同样由定义知直线 $y = -x + b$ 为该双曲线的一条准线 l。附图：见上方。

10．选 A。应用复数的方法。

11．选 D。先选好空车位（当一个元素看待）。

12．选 C。若 (x,y) 是另一个函数的图象上的动点，应用复数的方法求得与之对应的原 $f(x)$ 图象上点的坐标为 $(-y,x)$，则 $x = f(-y)$，即 $y = -f^{-1}(x)$。

13．选 C。应用异面直线上两点之间的距离公式，作 $BD \perp PA$ 于 D，又 $\angle APC = 90°$，



故由 $BC^2 = BD^2 + PC^2 + PD^2 - 2BD \cdot PC \cdot \cos\theta$ 可以求得二面角 $B-PA-C$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$。

14．选 C。

15．选 B。

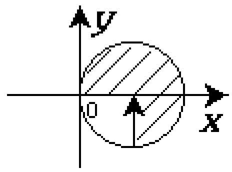
16．选 D。

17．选 B。在锐角三角形 ABC 中由 $A + B > \frac{\pi}{2}$，得 $\sin B > \cos A$，$0 < \frac{\cos A}{\sin B} < 1$，且 $0 < \cos C < 1$。故选 B。

18．选 C。应用特殊值法，令 $a = 1$、$b = 0$、$c = -1$ 即可。

19．选 B。

20．选 B。应用数形结合的思想：



21．选 A。$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0 & (a=1)\\ 1 & (|a|<1)\\ -1 & (|a|>1)\\ \text{不存在} & (a=-1)\end{cases}$

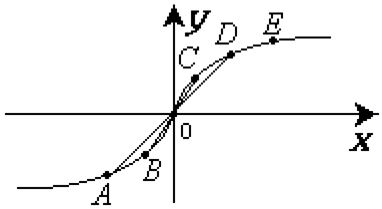
22．选 B。，依题意有 $y=f(x)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数，且周期 $T=4$， $y=f(x)$ 的图象的对

称轴为 $x=2$，结合图形研究可得。

23．选 D。$T_{r+1}=C_n^r x^{4r-n}$ 。

24．选 C。$x=-2$，-1，0，1，2，3 对应的点依次为 A、B、O、C、D、E，
其中 A、D 关于原点 O 对称，B、C 关于原点 O 对称，

故结果是 $C_6^2-C_3^2+1-C_3^2+1=11$ 。



第二部分（填空题）

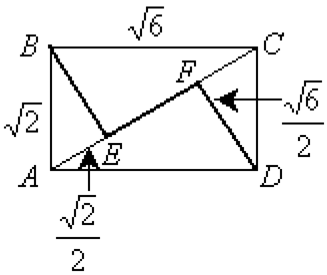
1．28 种。应该严格分类：

应该严格分类：	1 2 3 4 5	6 7 8
取的考题个数：	3	3
	4	2
	5	1

故列式：$C_5^3C_3^3+C_5^4C_3^2+C_5^5C_3^1=28$ 。

2．满足这些条件的函数 $f(x)$ 可以是 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$ 。

3．B 与 D 之间的距离是 $\sqrt{5}$ 。应用异面直线上两点之间的距离公式：



$$d=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

4．数列$\{a_n\}$的前 30 项中最大的项是$22-2\sqrt{99}$。此题应该注意分析a_n的单调性，

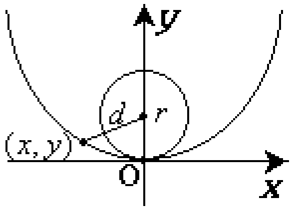
$a_n=\dfrac{n-\sqrt{99}}{n-10.5}=1+\dfrac{10.5-\sqrt{99}}{n-10.5}$，取$n=11$。

5．$0<r\le 1$。令抛物线$x^2=2y\quad(0\le y\le 20)$上的动点$(x,y)$到$(0,r)$的距离为$d$，

$d=\sqrt{x^2+(y-r)^2}=\sqrt{[y-(r-1)]^2+2r-1}\quad(0\le y\le 20)$，依题意$d$以坐标原点到

$(0,r)$的距离为最小，故有$r-1\le 0$，即$0<r\le 1$

附图：



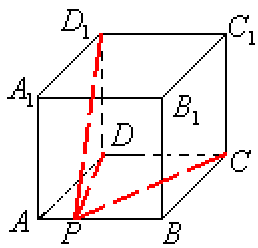
6．②④。

7．a的值为$\dfrac{1}{2}$。由$|x_1|+|x_2|=3$两边平方，得$|x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1x_2|=9$，即：

$x_1x_2+x_1x_2+2x_1x_2=9$，$4x_1x_2=9$，$(a-2)^2=\dfrac{9}{4}$，则a的值为$\dfrac{1}{2}$（$a=\dfrac{7}{2}$舍去）。

8．棱AD的长的取值范围是$(0,1]$。

应用三垂线定理，只要底面矩形的 AB 边上存在一点 P`使得$DP\perp PC$即可，故以 CD 为直径的圆与 AB 有交点，则$\dfrac{1}{2}CD\ge AD$，$0<AD\le 1$。



第三部分（复数与三角）

1．解：（1）、$\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\omega}=2\\ \sqrt{A^2+B^2}=2\\ A\sin\dfrac{\omega}{3}+B\cos\dfrac{\omega}{3}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\pi\\ A=\sqrt{3}\\ B=1\\ tg\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{取}\varphi=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$，则 $f(x)=2\sin(\pi x+\dfrac{\pi}{6})$

（2）、存在 $f(x)$ 的对称轴 $x=\dfrac{16}{3}$。

2．解：（1）、经化简得 $f(B)=1+2\sin B$，由对任意的△ABC，有 $|f(B)-m|<2$ 得：

$\begin{cases}-2<m-f(B)<2\\ -2<f(B)-m<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<m<5\\ 1<m\le 3\end{cases}\Rightarrow 1<m\le 3$。

（2）、当 $f(\dfrac{\pi}{2}-B)=2$ 时，$\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$，$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，由 $|z_1|+|z_3|=\sqrt{3}|z_2|$ 得：

$a+c=\sqrt{3}b$，$\Rightarrow\sin A+\sin C=\sqrt{3}\sin B\Rightarrow|A-C|=\dfrac{\pi}{3}$，

则：$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3} & (A>C)\\ \dfrac{5\pi}{3} & (A<C)\end{cases}$。

第四部分（数列）

1．解：（1）、依题意，当 $n\ge 2$ 时，$a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0$，即 $S_n-S_{n-1}+2S_n\cdot S_{n-1}=0$

$\Rightarrow\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，则数列 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 是等差数列，求得 $\dfrac{1}{S_n}=2n\Rightarrow S_n=\dfrac{1}{2n}$

（2）、由（1）$\Rightarrow a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n=1)\\ -\dfrac{1}{2n(n-1)} & (n\ge 2)\end{cases}$

（3）、$b_n=2(1-n)a_n=\dfrac{1}{n}\quad(n\ge 2)$

$$\Rightarrow\quad b_2{}^2+b_3{}^2+\cdots+b_n{}^2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1$$

2．解：当 1＜a＜$\frac{3}{2}$ 时，$2a^2-3a+1\in(0,1)$ 设等比数列{X_n}的公比为 q（$q>0$ 且 $q\neq1$），

由 $\begin{cases} y_k=\dfrac{1}{2t+1} \\ y_t=\dfrac{1}{2k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{x_k}(2a^2-3a+1)=\dfrac{1}{2t+1}>0 \\ \log_{x_t}(2a^2-3a+1)=\dfrac{1}{2k+1}>0 \end{cases}$，由于 $2a^2-3a+1\in(0,1)$，

得：$0<x_k,x_t<1$，$\therefore x_k^{\frac{1}{2t+1}}=x_t^{\frac{1}{2k+1}}=2a^2-3a+1$，

即：$x_k^{2k+1}=x_t^{2t+1}=(x_kq^{t-k})^{2t+1}$，化得：$x_k^{2(k-t)}=q^{(t-k)(2t+1)}$，

不妨设 $t>k$，$\therefore x_k^{-2}=q^{2t+1}$，$q=\sqrt[2t+1]{\dfrac{1}{x_k^2}}>1$，

而当 $q>1$ 时，对于正项等比数列{X_n}来说，一定存在自然数 N_0 使得 n＞N_0 时，

X_n＞1 恒成立。令 $x_n=x_kq^{n-k}>1\Rightarrow x_k^2q^{2(n-k)}>1\Rightarrow q^{-(2t+1)}q^{2(n-k)}>1$

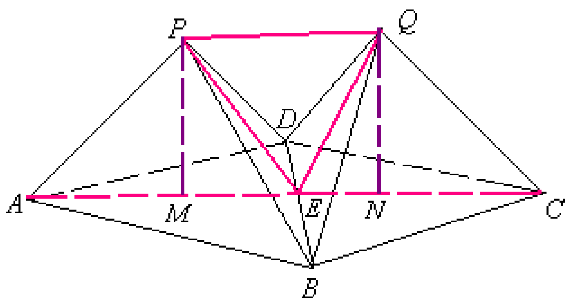
$\therefore n>k+t+\dfrac{1}{2}$，令 $N_0=k+t$，则有当 n＞N_0 时，X_n＞1 恒成立。

第五部分（立体几何）

1．解：（1）、取 BD 的中点 E，先证明 $BD\perp$ 平面 PEQ，得 $PQ\perp BD$；

（2）、即求 $\angle PEQ$，计算出 $MN=PQ=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}\Rightarrow\cos\angle PEQ=\dfrac{7}{9}$；

（3）、应用体积法，$V_{P-QBD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta PQE}\cdot BD\Rightarrow h=\dfrac{2\sqrt{6}a}{9}$。



2．解　（1）、求B、D间的距离为$\sqrt{2}a$；

（2）、点D到直线AB的距离为$\dfrac{\sqrt{7}a}{2}$。

第六部分（函数与不等式）

1．解：依题意，对于任意的$x\in R$，均有$x^2-4ax+2a+30\ge 0$（$a\in R$），

则$\Delta=(4a)^2-4(2a+30)\le 0\Rightarrow -\dfrac{5}{2}\le a\le 3$，

原方程化为$x=(|a-1|+1)(a+3)$

$$=\begin{cases}-(a+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{25}{4} & (-\dfrac{5}{2}\le a\le 1)\Rightarrow \dfrac{9}{4}\le x\le \dfrac{25}{4}\\ (a+\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{9}{4} & (1<a\le 3)\quad \Rightarrow 4<x\le 18\end{cases}$$

则x的范围是$x\in[\dfrac{9}{4},18]$

2．解：（1）、由于$x^2+1>0$恒成立，$\therefore x\in R$，

令$y=\dfrac{2x^2+bx+c}{x^2+1}\Rightarrow (y-2)x^2-bx+y-c=0$，

则$\Delta=b^2-4(y-2)(y-c)\le 0$的解集是$[1,3]$，

故 1 和 3 是$b^2-4(y-2)(y-c)=0$的二根，应用韦达定理求得$b=-2$，$c=2$；

（2）、由（1）知，$f(x)=2-\dfrac{2x}{x^2+1}$，应用函数单调性的定义去判断函数$F(x)=\lg f(x)$在$x\in[-1,1]$上单调减；

（3）应该注意到$-\dfrac{1}{3}\le|t-\dfrac{1}{6}|-|t+\dfrac{1}{6}|\le\dfrac{1}{3}$，则应用（2）的结论，

$F(\dfrac{1}{3})\le|t-\dfrac{1}{6}|-|t+\dfrac{1}{6}|\le F(-\dfrac{1}{3})$，即：$\lg\dfrac{7}{5}\le F(|t-\dfrac{1}{6}|-|t+\dfrac{1}{6}|)\le \lg\dfrac{13}{5}$。

3．解：（1）、依题意，有$(a+y_1)(a+y_2)=0$，则$y_1=-a$或$y_2=-a$，

则方程 $f(x)=ax^2+bx+c=-a$ 有实根，即方程 $ax^2+bx+a+c=0$ 有实根，

$\Delta=b^2-4a(a+c)\ge 0\Rightarrow b^2\ge 4a(a+c)$，

又 $f(1)=a+b+c=0$ 且 $a>b>c$，则 $a>0$、$c<0$、$b=-(a+c)$，

则 $b^2\ge -4ab\Rightarrow b(b+4a)\ge 0\Rightarrow b(3a-c)\ge 0$，

由于 $3a-c>0$，则 $b\ge 0$；

（2）、依题意，$f(1)=0$，即 1 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则另一个根为 $\frac{c}{a}$，且 $\frac{c}{a}<0$，则有 $f(x)=a(x-1)(x-\frac{c}{a})$，不妨设 $y_1=-a$，

即：$a(x_1-1)(x_1-\frac{c}{a})=-a<0$，$\therefore \frac{c}{a}<x_1<1$，$\therefore x_1+3>\frac{c}{a}+3$　　（◆）

又由 $b=-(a+c)$ 及 $a>b>c$ 得 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$，

$\therefore x_1+3>\frac{c}{a}+3>-2+3=1$，

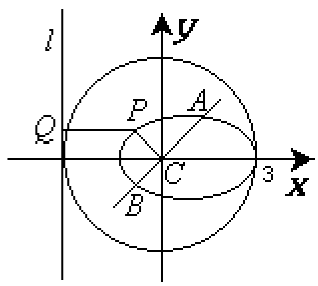
而函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x_1+3)>f(1)>0$，

同理，若 $y_2=-a$，则有 $f(x_2+3)>0$，命题得证。

第七部分（解析几何）

2．解：（1）、建系如图，令 $P(x,y)$，依题意，有 $|x+3|=2\sqrt{x^2+y^2}$，化简得：

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$\therefore P$ 点的轨迹是椭圆。



（2）、设圆心 C 的直线方程为：$y=kx$，

由 $\begin{cases} y=kx \\ 3(x-1)^2+4y^2=12 \end{cases}$ 消去 y 得：

$(3+4k^2)x^2-6x-9=0$，

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，由 $|AC|=2|BC|$ 得 $x_1=-2x_2$，

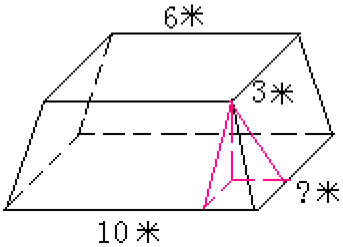
由韦达定理知：$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{6}{3+4k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-9}{3+4k^2} \end{cases}$，把 $x_1 = -2x_2$ 代入得 $\begin{cases} -x_2 = \dfrac{6}{3+4k^2} \\ -2{x_2}^2 = \dfrac{-9}{3+4k^2} \end{cases}$，

消去 x_2，得 $k^2 = \dfrac{5}{4}$，$k = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

则直线 AB 的方程为：$y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$。

第八部分（应用题）

1． A。



2． D。

3．32 种。

4．①③。

5．略。

6．解：（1）依题意，第二年该商品年销量为（11.8-p），年销售收入为 $\dfrac{70}{1-p\%}(11.8-p)$，则

商场该年对该商品征收的总管理费为 $\dfrac{70}{1-p\%}(11.8-p)$p%（万元）.

故所求函数为：$y = \dfrac{7}{100-p}(118-10p)p$.…4 分　由 11.8－p>0 及 p>0

得定义域为 $0 < p < \dfrac{59}{5}$.

（2）由 $y \ge 14$，得 $\dfrac{7}{100-p}(118-10p)p \ge 14$.化简，得

$p^2 - 12p + 20 \le 0$，即$(p-2)(p-10) \le 0$，解得 $2 \le p \le 10$，故当比率在[2%，10%]内时，商场收取的管理费将不少于 14 万元.

（3）第二年，当商场收取的管理费不少于 14 万元时，厂家的销售收入为

$g(p) = \dfrac{70}{1-p\%}(11.8-p) \quad (2 \le p \le 10)$

$\because g(p)=\dfrac{70}{1-p\%}(11.8-p)=700(10+\dfrac{882}{p-100})$ 为减函数，

∴g（p）$_{max}$=g（2）=700（万元）故当比率为 2%时，厂家销售金额最大，且商场所收管理费又不少于 14 万元.

六、高考试题评析

《用导数探求函数图象的交点》教学设计

湖北省黄冈中学高三数学组 潘际栋

本节课内容是二轮复习中导数的应用的一个比较重要的题型。本节课通过 2006 年高考试题提出问题，再通过导数求解，其中蕴含了丰富的数思想方法，是培养学生探究能力、创新能力、思维能力的极好素材。

[教学目标]

1、 知识目标：巩固导数的应用，能运用导数探求函数的交点及根的分布。

2、 能力目标：培养学生提出问题和解决问题的能力；培养学生的自主探索精神和创新能力。

3、 情感目标：培养学生学习数学的兴趣，在轻松的学习环境中激发潜能、体验成功。

[重点]： 运用导数探求函数的交点

[难点]： 数形结合的思想在解题中的应用

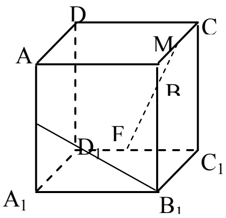
教学环节	教学内容与教学设计	设计说明
引入 课题	一般说来,运用导数可解决五个方面的问题: ① 与切线有关的问题； ② 函数的单调性和单调区间问题； ③ 函数的极值和最值问题； ④ 不等式证明问题； ⑤ 与函数的单调性、极值、最值有关的参数问题)。 提出新问题： 2006 年高考数学导数命题在方向基本没变的基础上，又有所创新。福建理科卷第 21 题研究两个函数的交点个数问题，福建文科卷第 19 题研究分式方程的根的分布问题，湖南卷第 19 题研究函数的交点问题。如何运用导数来考查两个函数的交点呢？	1. 通过问题的提出，切入本节课的内容，培养学生的学生的热情与兴趣。 2. 从以上试卷我们可以发现导数命题创新的两个方面：一是研究对象的多元化，由研究单一函数转向研究两个函数或多个函数，二是研究内容的多元化，由用导数研究函数的性质（单调性、最值、极值）转向运用导数进行函数的性质、函数图象的交点和方程根的分布等的综合研究，实际上就是运用导数考查函数图象的交点个数问题。
探索 研究	**例 1**：（福建理科第 21 题）已知函数 $f(x)=-x^2+8x$, $g(x)=6\ln x+m$ （Ⅰ）略； （Ⅱ）是否存在实数 m，使得 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点？	1. 学生在老师的指导下解决问题，解题过程中充分注重数形结合的思想方法的运用。 2. 高考复习有别于新知识的教学。它是在学生基本掌握了中学数学知识体系、具备了一定的解题经验的基础上的复课数学，也是在

	若存在，求出 m 的取值范围；，若不存在，说明理由。 引申 1：如果（Ⅱ）中“有且只有三个不同的交点”变为“有且只有一个不同的交点”怎么解答呢？ 引申 2：如果（Ⅱ）中“有且只有三个不同的交点”变为“有且只有两个不同的交点”怎么解答呢？	学生基本认识了各种数学基本方法、思维方法及数学思想的基础上的复课数学。其目的在于深化学生对基础知识的理解，完善学生的知识结构，在综合性强的练习中进一步形成基本技能，优化思维品质，使学生在一题多变中充分运用数学思想方法，提高数学能力。高考复习是学生发展数学思想，熟练掌握数学方法理想的难得的教学过程。

规律 总结	用导数探求函数的交点问题的步骤是： ①构造函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$； ②求导 $\varphi'(x)$； ③研究函数 $\varphi(x)$ 的单调性和极值（必要时要研究函数图象端点的极限情况）； ④画出函数 $\varphi(x)$ 的草图，观察与 x 轴的交点情况，列出条件； ⑤求解。	1．由归纳总结解题的基本步履，可以强化学生的认识体验，积累认识经验，形成解决问题的基本策略。 2．总结中深化数形结合的思想。在数学的几乎全部的知识中，处处以数学对象的直观表象及深刻精确的数量表达这两方面给人以启迪，为问题的解决提供简捷明快的途径。它的运用，往往展现出"柳暗花明又一村"般的数形和谐完美结合的境地。
练习 巩固	例 2（2006 年四川卷第 21 题）已知函数 $f(x)=x^3+3ax-1$，$g(x)=f'(x)-ax-5$，其中 $f'(x)$ 是的 $f(x)$ 的导函数。 （Ⅰ）略； （Ⅱ）设 $a=-m^2$，当实数m在什么范围内变化时，函数 y＝f(x) 的图像与直线 y＝3 只有一个公共点。 例 3（2006 年福建文科卷第 21 题）已知 $f(x)$ 是二次函数，不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,5)$，且 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值是 12。 （I）求 $f(x)$ 的解析式； （II）是否存在实数 m，使得方程 $f(x)+\frac{37}{x}=0$ 在区间 $(m,m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由。	1．加强实践，让知识掌握得更牢固，提高学生用所学知识分析和解决实际问题的能力。 2．高考试题重在考查对知识理解的准确性、深刻性，重在考查知识的综合灵活运用。它着眼于知识点新颖巧妙的组合，试题新而不偏，活而不过难；着眼于对数学思想方法、数学能力的考查。高考试题这种积极导向，决定了我们在教学中必须以数学思想指导知识、方法的运用，整体把握各部分知识的内在联系。只有加强数学思想方法的教学，优化学生的思维，全面提高数学能力，才能提高学生解题水平和应试能力。
课堂 小结	1.用导数来探讨函数 y=f(x)的图象与函数 y=g(x)的图象的交点问题; 2．解题中运用的数学思想方法：构造函数法,数形结合的思想方法.	课堂小结是指导学生归纳总结知识的过程。通过总结，指导学生掌握学习知识的方法，明确所学知识的重点及知识的应用及其解决的类型问题，渗透数学思想方法，培养学生学习的能力。
课后 练习	对于公比为 2，首项为 1 的等比数列，是否存在一个等差数列，其中存在三项，使得这三项也是此等比数列中的项，并且项数也相同？证明你的结论。	让学生课后练习，巩固所学知识，从而熟练掌握本节重点，形成相应的数学能力。

武汉市2007届高中毕业生二月调研测试理科数学试卷

试卷讲评说明

题目	设计说明
1.复数 $z=\dfrac{i}{i+1}$ 的值为(　　) A. $\frac{1}{2}(1+i)$　B. $-\frac{1}{2}(1+i)$　C. $\frac{1}{2}(1-i)$　D. $-\frac{1}{2}(1-i)$ 2.在等比数列$\{a_n\}$中, $a_3=\frac{3}{2}$, $S_3=\frac{9}{2}$，则首项 a_1=(　　) A. $\frac{3}{2}$　B. $-\frac{3}{2}$　C. 6 或$-\frac{3}{2}$　D. 6 或$\frac{3}{2}$ 3.已知角α 的正切线是单位长度的有向线段,那么角α 的终边在(　) A. x 轴上　B. y 轴上　C.直线 $y=x$ 上　D.直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上 5.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、M 分别为 AA_1,C_1D_1,BC 的中点,那么直线 B_1E 与 FM 所成角的余弦值为(　　)  A.0　B.1　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{3}$ 6.若 AB 过椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 中心的弦, F_1 为椭圆的焦点, 则△F_1AB 面积的最大值为(　　) A. 6　B.12　C.24　D.48 11.$(1+x)^6(1-x)$ 展开式中 x^2 项的系数是________ 12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=$ ________	一、易题精讲 有些试题是为学生熟练定义、定理、法则等设计的，其目的是强化双基训练，这种题涉及的知识点相对较少，难度显得不大，但这种题往往是综合题的“垫脚石”，起导向作用。一些大题都是由一些基础题组合而成的，综合题其实是基础题的综合，因此这些基础题不可忽视，须正确对待，而今教学中对此类题有两大误区：误区一，流于形式，一带而过；误区二，事无巨细，喋喋不休，纠缠不清。为防止以上误区，正确做法是：①找出解题的突破口，点拔疏通；②看它所反映出的数学思想方法。简而言之，在对它们的讲解时，须“精讲”，将学生引导到某个知识点上即可。
4.已知全集 U=R, A= $\{x\|\dfrac{x+1}{x}\geq0\}$，则 C_UA=(　　) A.$\{x\|-1<x\leq0\}$　B. $\{x\|-1<x<0\}$　C. $\{x\|-1\leq x<0\}$　D. $\{x\|-1\leq x\leq0\}$ 13.如果直线 l 过定点 $M(1,2)$且与抛物线 $y=2x^2$ 有且仅有一个公共点, 那么直线 l 的方程为_______	二、陈题新讲 在讲评过程中，部分例题在经过一次讲解之后，往往被放置一边，久而久之，造成了学生轻视旧题。一味求全猎奇，从而走入题海的现象。实际上，好的例题犹如一部名著，可以一讲再讲，细细揣摩，尤其在复习阶段的教学中，将其变化延伸，拓展学生思维，于旧题中挖掘出新意，找出易错点，留给学生的印象也深刻的多。
8.将 4 个相同的小球投入 3 个不同的盒内, 不同的投入方式共有(　)	三、小题大讲 有些试题，简洁易证，但内涵丰富，若

A. 4^3 种　　B. 3^4 种　　C. 15 种　　D. 30 种 15. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-7$ 的图象是中心对称图形, 其对称中心的坐标为_________	能深入挖掘，善加变化，往往能举一反三，达到以例代类的效果，也就是我们经常说的通过做一题达到会一类，甚至知一片的目的。这样的例题在复习中何乐而不取呢!
14.正四棱锥 $S-ABCD$ 内接于一个半径为 R 的球, 那么这个正四棱锥体积的最大值为_____ 10. 函数 $y=\lvert\cos 2x\rvert+\lvert\cos x\rvert$ 的值域为(　　) A. $[\frac{1}{2}, 2]$　　B. $[\frac{\sqrt{2}}{2},2]$　　C. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{8}]$　D. $[\frac{\sqrt{3}}{2},2]$ (巩固求最值的方法)	四、多题一讲 有些例题，图形的结构、问题的背景、解决的方法有类似之处，甚至有些题目就是同一题设条件，只是求证的结论的表现形式不同而已，因此进行多题一讲是很有必要的。它可以使学生感觉到很多题目可以借助于同一核心知识来解决，只要将题目的内涵与外延挖掘彻底，进而灵活运用就可以了。这样可促使学生的数学复习更有信心，不至于被大量的复习资料弄得无所适从。
7.在△ABC 中, D 为 AC 边的中点, E 为 AB 上一点, BC、CF 交于一点 F, 且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，若, $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}$，则实数λ 的值为(　　) A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$ 题 8	五、一题多讲 有些试题，如果从不同的角度去分析，就会得到不同的解题方法，也就是说从多个角度去想就会有多种解法。这样做可以使思维更开阔，也能从中找到最佳的解题方法。对于小题，有小题的解法，如果作为大题，又有大题的解法
题 8	六、一题多变 有些试题，题设条件中虽然不同，但思考的方法、解决的途径却是相通的。能将一题进行适当变换，让学生在变中寻求不变，这对学生思维的开拓发散必有益处，对处在紧张复习阶段的学生从“题海”中解脱无疑也是一个很好的策略。如果我们教师在平常的复习、备课中注意这方面的研究，对学生在短时间内提高成绩、培养能力定能起积极作用。
9.如果实数 x、y 满足 $\begin{cases} x-4y+3\le 0 \\ 3x+5y-25\le 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$, 目标函数 $z=kx+y$ 的最大值为 12, 最小值 3, 那么实数 k 的值为(　　) A. 2　B. -2　C. $\frac{1}{5}$　D.不存在	七、深题浅讲 有些例题，题型新颖、综合，难度较大，学生往往对此一筹莫展。因此，例题教学时，应根据题目特点，找准突破口，巧妙降低难度。将大题化小，深题化浅，让学生豁然开朗。

题 15.	