

分数乘除法讲解

倒数 reciprocal / multiplicative inverse

拼音是dào shù

1. 非零整数 n 的倒数是 $\frac{1}{n}$
2. 分数 $\frac{b}{a}$ 的倒数是 $\frac{a}{b}$, 此处 $a \neq 0, b \neq 0$
3. 互为倒数的两个数的乘积为1, 即 $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$
4. 带分数的倒数求法, 先化成假分数, 然后利用第2条规则即可得到
5. 除0以外的数都有倒数, 乘积为1的两个数是互为倒数关系。

举例:

1. 15的倒数是 $\frac{1}{15}$
2. 分数 $\frac{3}{4}$ 的倒数是 $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
3. 带分数 $3\frac{2}{5}$ 的倒数是 (1) 化成假分数 $\frac{17}{5}$, (2) 再颠倒就是 $\frac{5}{17}$
4. 倒数是本身的数 即 $x = \frac{1}{x}$, 所以 $x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$

分数分类

1. 分数值**小于1**的分数, 为**真分数(<1)**, 即 分子小于分母的分数为真分数(Proper fraction), 真分数都小于1
2. 分数值**大于或等于1**的分数, 为**假分数(≥ 1)**, 即 分子大于或等于分母的分数为假分数(improper fraction), **假分数不小于1**
3. 整数和真分数合成的数叫带分数, 带分数都大于1

例如: $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ 是真分数

$\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{7}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{13}{11}$ 是假分数

$2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{7}, 3\frac{16}{113}$ 是带分数

例题

1. 写出所有分母是7的真分数
 - $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$
2. 写出所有分子是7的假分数
 - $\frac{7}{1}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{7}$
3. 写出6个分母是7的假分数
 - $\frac{10}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}, \frac{14}{7}, \frac{15}{7}, \frac{16}{7}$

4. 分母是7的所有真分数有 6 个, 其中最大的是 $\frac{6}{7}$, 最小的是 $\frac{1}{7}$; 分子是7的假分数有 7 个, 最大的是 $\frac{7}{7}$
5. 分数单位是 $\frac{1}{9}$ 的最大真分数是 $\frac{8}{9}$, 最小假分数是 $\frac{9}{9}$

分数乘法 Fractional multiplication

乘法法则

分数的分子与分子相乘, 分母与分母相乘, **能约分的要先约分**, 分子不能和分母乘。

乘法分类

1. 分数乘整数时, 用分数的分子和整数相乘的积做分子, 分母不变。 **能约分的要先约分**。

$$\begin{aligned} \circ \frac{2}{3} \times 4 &= \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \\ \circ 5 \times \frac{3}{7} &= \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7} \\ \circ \frac{5}{8} \times 4 &= \frac{5}{2} \times 1 = 2\frac{1}{2}, \text{先约分} \\ \circ \frac{a}{b} \times c &= c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b} \end{aligned}$$

2. 带分数乘以整数时

$$\begin{aligned} \circ \text{将带分数化成假分数, 用分类1的方法做乘法} \\ \text{如 } 2\frac{1}{5} \times 4 &= \frac{11}{5} \times 4 = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5} \\ \circ \text{或者将带分数看成是“整数+真分数”, 利用乘法分配律进行简便运算} \\ \text{如 } 2\frac{1}{5} \times 4 &= (2 + \frac{1}{5}) \times 4 = 8 + \frac{4}{5} = 8\frac{4}{5} \\ \text{如 } 5 \times 3\frac{2}{7} &= 5 \times (3 + \frac{2}{7}) = 15 + \frac{10}{7} = 15 + 1\frac{3}{7} = 16\frac{3}{7} \\ \text{如 } 3 \times 4\frac{3}{5} &= 3 \times (4 + \frac{3}{5}) = 12 + \frac{9}{5} = 12 + 1\frac{4}{5} = 13\frac{4}{5} \end{aligned}$$

3. 分数乘分数, 用分子相乘的积做分子, 分母相乘的积做分母, **能约分的先约分**, 带分数必须化成假分数。

$$\begin{aligned} \circ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}, bd \neq 0 \\ \circ \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} &= \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15} \\ \circ \frac{355}{113} \times \frac{2}{5} &= \frac{71}{113} \times \frac{2}{1} = \frac{142}{113} = 1\frac{29}{113} \end{aligned}$$

$$\circ 1\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{5} = \frac{\cancel{5}^1}{3} \times \frac{13}{\cancel{5}_1} = \frac{1}{3} \times \frac{13}{1} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

分数除法 Fraction division

除法法则

分数除法实际上可以化成分数乘法，除以一个数，等于乘以这个数的**倒数**

分数乘除法结果要求化为最简，**除数不能为 0**。

除法分类

1. 分数除以整数：如果分子是整数的倍数，则用分子除以整数，分母不变，否则，分子不变，分母乘以整数，结果都要化成最简分数。

$$\circ \frac{42}{30} \div 7 = \frac{42 \div 7}{30} = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{30}_5} = \frac{1}{5}$$

$$\circ \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

2. 分数除以分数：等于乘以除数的倒数，整数可以看成分母为1的假分数，带分数要化成假分数。

$$\circ \frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\circ \frac{7}{12} \div 1\frac{2}{3} = \frac{7}{12} \div \frac{5}{3} = \frac{7}{\cancel{12}_4} \times \frac{\cancel{3}^1}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

$$\circ 2\frac{3}{5} \div 5\frac{1}{5} = \frac{13}{5} \div \frac{26}{5} = \frac{\cancel{13}^1}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{26}_2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

几个特殊情况

1. $0 \div a = 0, a \neq 0$
2. $b \times 0 = 0 \times b = 0$
3. $c + 0 = 0 + c = c$
4. $d - d = 0, d + d = 2d$
5. $e \times 1 = e, e \times e = e^2$
6. $f \div 1 = f$

本节总结

1. 了解倒数概念，并懂得其在除法中的应用
2. 分数的几种出现形式，真分数、假分数和带分数区别
3. 分数乘法法则和约分准则，结果必须化简，即结果是最简分数或整数
4. 分数除法转化为分数乘法，转化为乘以除数的倒数