

第二十三届(2012 年)“希望杯”全国数学邀请赛培训题

“希望杯”命题委员会

初中一年级

说明:其中图形都是从免费二维平面几何软件 Geogebra 和三维几何软件 Cabri 3D 得到.

一. 选择题(以下每题的四个选项中, 仅有一个是正确的. 请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内)

1. 计算: $1 - (-2)^2 + \frac{-2 \times (-1)^2}{2} = (\quad)$

- (A) -2 (B) -1 (C) -4 (D) 4

2. 某堰塞湖的水位是 730.13 米, 若以“千米”为计量单位, 则该水位的科学记数法表示是()

- (A) 7.3013×10^2 (B) 0.073013×10^2
(C) 7.3013×10^{-1} (D) 0.73013×10^{-1}

3. 如图 1, 半径为 r 的小圆在半径为 R 的大圆内. 已知阴影部分面积是小圆面积的 3 倍. 则 $\frac{r}{R} = (\quad)$

- (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{1}{2}$

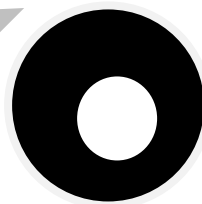


图 1

4. 若有理数 a, b 在数轴上的位置如图 2 所示:

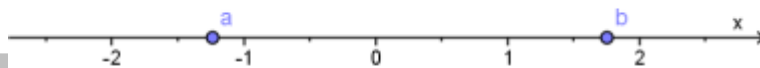


图 2

则下列各式中正确的是()

- (A) $-a > b$ (B) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
(C) $a + b > 1$ (D) $-\frac{b}{a} > 1$

5. 已知分数 a 的分母是 2012, 分子是整数, 为使 $|\frac{3}{5} - a|$ 的数值最小, a 的分子应当是()

- (A) 1206 (B) 1207
(C) 1205 (D) 1208

6. 若一个绝对值不等于 0 或 1 的有理数的相反数的负倒数是 a , 则这个有理数是()

- (A) $\frac{1}{a}$ (B) $-a$ (C) $-\frac{1}{a}$ (D) a

7. 计算: $2012+2011-2010-2009+2008+2007-2006-2005+\cdots+4+3-2-1=(\quad)$

- (A) 2011 (B) 2012 (C) 0 (D) 1

8. If $a < -2$, $-1 < b < 0$, $H = -a - b$, $O = a^2 + b^2$, $P = -a + b^2$, and $E = a^2 - b$, then the magnitude relation of the four number H, O, P, and E is()

- (A) $H < O < P < E$
(B) $P < H < O < E$
(C) $H < E < P < O$
(D) $O < P < E < H$

(英汉小词典: magnitude relation: 大小关系)

9. 定义符号“ \star ”的意义是:

$$a \star b = (a+1) \times b,$$

如果 $(x \star 2) \star 3 = 27$, 那么 x 的值等于()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. 如图 3 所示, 其中 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = (\quad)$

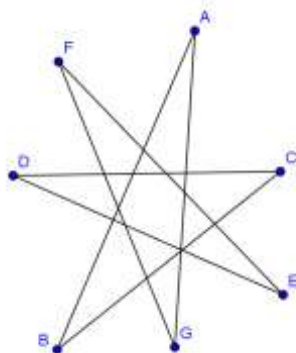


图 3

(A) 180°

(C) 360°

(B) 225°

(D) 120°

11. 已知 a, b 均为非零有理数, $5a$ 与 $7b$ 互为相反数, 那么 $\frac{a}{b} = (\quad)$

- (A) $\frac{5}{7}$ (B) $-\frac{5}{7}$ (C) $\frac{7}{5}$ (D) $-\frac{7}{5}$

12. 下面四句关于约数和倍数的话中正确的是()

- (A) 正整数 a 和 b 的最小公倍数一定小于 ab
(B) 正整数 a 和 b 的最大公约数一定不大于 a
(C) 正整数 a 和 b 的最小公倍数一定不小于 ab
(D) 正整数 a 和 b 的最大公约数一定大于 a

13. 如图 4, $\triangle ABE$ 是边长为 21 的正三角形。已知四边形 BCDE 的周长是 $\triangle ABE$ 周长的两倍。则五边形 ABCDE 的周长是()

- (A) 137 (B) 147
(C) 157 (D) 167

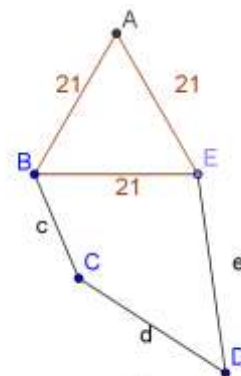


图 4

14. 若有理数 a 和 b 都不等于 0, 且 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|} = -1$,

则 a, b()

- (A) 异号 (B) 同号
(C) 不能同为正数 (D) 不能同为负数

15. If $a+b=0$, then the equation $ax+b=0$ for x has ()

- (A) only one root
(B) only one root or no root
(C) only one root or infinite roots
(D) no root or infinite roots

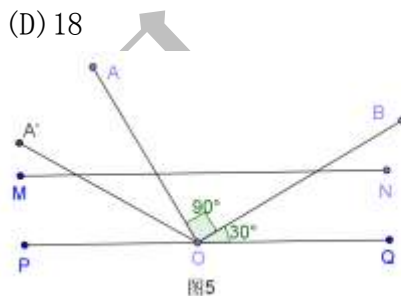
(英汉小词典: infinite roots: 无穷多个根)

16. 某个星期中, 从周一到周五这五天的日历号数之和为 70, 则这一周的星期六的日历号数是 ()

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18

17. 图 5 中的直线 $MN \parallel PQ$, 在 PQ 上取点 O , 画出射线 OA 与射线 OB 垂直, 且使得 $\angle BOQ = 30^\circ$, 在以点 O 为旋转中心, 射线 OA 逆时针旋转 30° 的位置上再画射线 OA' , 这时图中 30° 的角共有 () 个

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7



18. 对于数 x , 符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

若 $[\frac{3x+a}{2}] = 3$ 有正整数解, 则正数 a 的取值范围是 ()

- (A) $0 < a < 2$ 或 $2 < a \leq 3$
(B) $0 < a < 5$ 或 $6 < a \leq 7$
(C) $1 < a \leq 2$ 或 $3 \leq a < 5$
(D) $0 < a < 2$ 或 $3 \leq a < 5$

19. 某市 2011 年 9 月份的平均房价是每平方米 6800 元, 比 2008 年同期的房价平均每平方米上涨了 3000 元, 假设这三年该市房价的平均增长率都是 x , 则关于 x 的方程是 ()

- (A) $(1+x)^3 = 3000$ (B) $3000(1+x)^3 = 6800$
(C) $(6800-3000)(1+x)^2 = 6800$ (D) $(6800-3000)(1+x)^3 = 6800$

20. 若三角形的一个内角等于另两个内角和的 2 倍。则此三角形的最大角是 () 度

- (A) 90 (B) 115 (C) 120 (D) 135

21. 2012 的所有正约数的和是 ()

- (A) 3528 (B) 2607 (C) 2521 (D) 2012

22. 等腰 $\triangle ABC$ 的一个外角度数是 100° , 则这个三角形的三个内角中最大角与最小角的度数差是 ()

- (A) 30° (B) 20° 或 50° (C) 60° (D) 30° 或 60°

23. 已知 $a(b+2)$ 是一个不为 0 的常数, 且当 $a=2$ 时, $b=1$; 那么当 $b=4$ 时, $a=$ ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

24. 满足 $x^2 - 4y^2 = 2011$ 的整数对 (x, y) 的组数是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

25. 若一个凸多边形的边数恰好是从某个顶点引出的对角线的条数的 $\frac{4}{3}$ 倍,

则这个多边形的内角和是()

- (A) 1080° (B) 1540° (C) 1800° (D) 2160°

26. 设五个数 a, b, c, d, e 均在 $0, 1, 2$ 中取值, 且 $a+b+c+d+e=6$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10$, 则 $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$ 的值是()

- (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20

27. 如图 6, $\triangle ABC$ 中, $EF \parallel BC$, $\angle A$ 的平分线交 EF 于 H , 交 BC 于 D , 记 $\angle ADC = \alpha$, $\angle ACB$ 的一个邻补角为 β , $\angle AEF = \gamma$ 。则 α, β, γ 的关系是()

- (A) $\alpha - \beta = \gamma$ (B) $2\alpha - \beta = \gamma$
(C) $3\alpha - \beta = \gamma$ (D) $4\alpha - \beta = \gamma$

28. 方程 $|x+1| + |x-2| = 3$ 的正整数解共有()

个

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

29. 已知数串: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, 依照这前 15 个数的分子、分母的构成规律排列下去, 第 100 个数是()

- (A) $\frac{4}{8}$ (B) $\frac{6}{9}$ (C) $\frac{8}{10}$ (D) $\frac{10}{11}$

30. 甲、乙、丙三人用擂台赛形式进行训练。每局两人单打比赛, 另一人当裁判。每一局输者当下一局的裁判, 而原来的裁判与赢者比赛。一天训练结束时, 统计甲共打 12 局, 乙共打 21 局, 而丙共当裁判 8 局。那么整个比赛中第 10 局的输者()

- (A) 必是甲 (B) 必是乙 (C) 必是丙 (D) 不能确定

二. 填空题

31. 计算: $[(0.125 - \frac{3}{4})^2 - (0.125)^2]^2 =$ _____。

32. 若一个角的余角比这个角的补角的 $\frac{1}{3}$ 小 10° , 则这个角的余角是 _____ $^\circ$, 这个角的补角是 _____ $^\circ$ 。

33. 计算: $\frac{2008^2 + 2006}{2006^2 - 2008} \times \frac{4010^2 - 8020}{2006 \times 2009 - 4} =$ _____。

34. 某人若在同一斜坡上往返, 上坡速度为 v_1 m/s, 下坡速度为 v_2 m/s, 则往返一次的平均速度 $v =$ _____ m/s。

35. 若 $|x-y+1| + (y+5)^2 = 0$, 则 $xy =$ _____。

36. 如图 7, 矩形纸带 $MLPN$ 中, $\angle BAP = 30^\circ$, 沿虚线 AB 将纸带折起来压平成图 8, 则 $\angle BEA =$ _____。

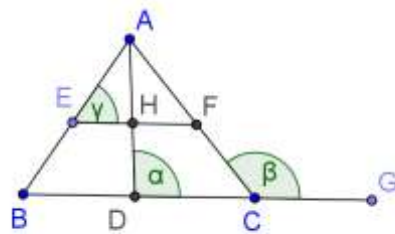


图6

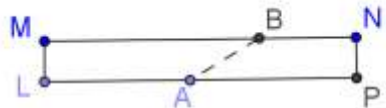


图7

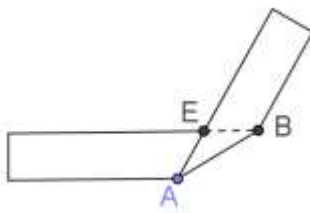


图8

37. 一辆汽车从 A 地驶往 B 地, 前 $\frac{1}{4}$ 路段为普通公路, 速度是 60km/h; 其余路段为高速公路, 速度为 90km/h。汽车从 A 地到 B 地一共行驶了 5 小时, 则 A, B 两地的距离是_____km。

38. 已知一个直角三角形两条直角边之差是 1, 斜边长为 5, 则这个直角三角形的面积等于_____。

39. 已知 $mn \neq 0$, 且 $\frac{1}{m+3}$ 与 $\frac{n-3}{9}$ 互为相反数, 则 $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} =$ _____。

40. 如图 9, 共 6 个同样的小正方体码放在 5 乘 5 的方格纸上, 则正视图是_____。

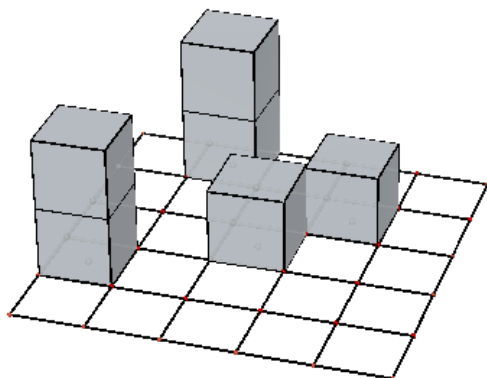


图 9(从 Cabri 3D 中画出)

41. 某经济技术开发区到 2001 年累计投资总额已达到 36.23 亿美元。从 2001 年到 2007 年, 累计投资总额依次为 36.23; 42.99; 63.31; 88.13; 109.13; 140.48; 168.62(亿美元)。

则 2007 年比上一年的投资增长了_____%(取二位小数)。

42. 在一条公路上汽车 A、B、C 分别以每小时 80km, 70km, 50km 的速度行驶。早上 8 时, 汽车 A、C 从甲站开往乙站, 同时, 汽车 B 从乙站开往甲站, 途中车 B 与车 A 相遇两个半小时后再与车 C 相遇, 则甲、乙两站的距离是_____km。

43. 若 30030 的质因数的(算术)平均数为 M, 则与 M 最接近的整数是_____。

44. 若等式 $\overline{13x} \times \overline{3y5} = \overline{4554z}$ 中的 x, y, z 为 0~9 的数字, 则 $x =$ _____, $\overline{xyz} =$ _____。

45. 若 $(x+1)^2 + (x-3)^2 = 16$, 则 $(3-x)^2(1+x)^2 =$ _____。

46. If rational number a, b, and c satisfy $a < b < c$, then

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=\underline{\hspace{2cm}}。$$

47. 若 $x+y=5$, $xy=-11$, 则 $(x-y)^2=\underline{\hspace{2cm}}$, $x^3+y^3=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

48. For integer number x and y , define $x\&y=(x+y)(x-y)$, then $3\&(4\&5)=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

49. 有一个正方体在它的各个面上分别标上字母 A, B, C, D, E, F, 甲, 乙, 丙, 三位同学从不同的方向去观察这个正方体, 观察结果如图 10 所示, 则 F 的对面是 。

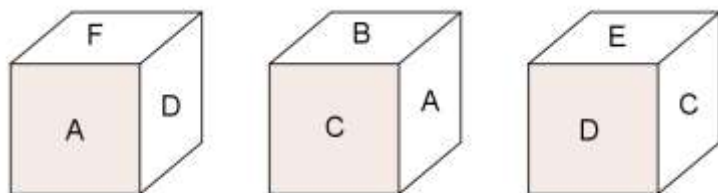


图10

50. 小聪学玩魔方, 向小笨拜师学艺。小笨首先出了一道题考小聪。将下列四个图形中的每个小正方形都标上了颜色。若要求一个正方体两个相对面上的颜色都一样, 那么下列 4 个展开图中有 个是正确的。



图11

51. 小明以 60 元/块的价格卖了两块猪肉, 其中一块儿赚了 20%, 另一块儿亏了 20%, 则小明最后 (填“盈利”或“亏损”)了 元钱。

52. 有一个两位数, 将它乘以 9, 得到一个三位数; 将这个三位数再乘以 9, 结果仍然是一个三位数。则原来的两位数是 。

53. 根据半岛电视台报道, 阿富汗战争共导致阿富汗全国 22.1% 的人口受伤, 12.92% 的人口死亡。据统计, 阿富汗战后的总人口是 2212 万人。那么在这场战争中, 共导致阿富汗百分之 的人口伤亡。阿富汗在战前的人口总数是 万人。(保留 4 为有效数字)

54. 若 $a+b=6$, $a^2+b^2=26$, 则 $|a-b|=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

55. 如图 12, 在 4×4 的棋盘中, 每个方格都可以摆放一个“兵”或“卒”。当一个格子摆上“兵”后, 其所在的行 为该“兵”管辖, 此行的其余方格不能再摆上一“兵”或一“卒”。按此规则, 你在 4×4 的棋盘中最多可以摆放的“兵”和“卒”共 枚。

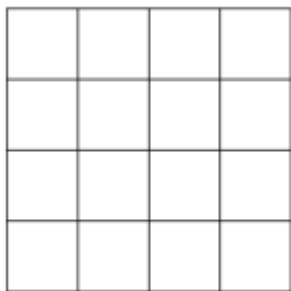


图12

56. 如图 13, 三角形 ABC 各边的四等分点 D, E, F 分别与点 C, B, A 相连, 得到一个小三角形 GHI, 那么三角形 GHI 的面积与三角形 ABC 的面积比是_____。

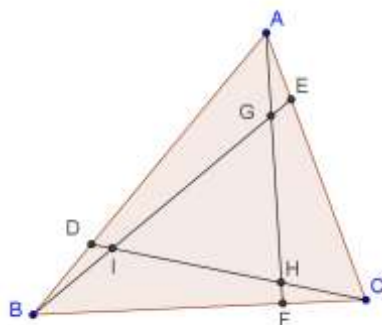


图13

57. 如图 14, 有一棱长为 3 的正方体, 将其每个面画上黑线分成 9 个边长相等的小正方形。现在沿画曲线的小正方形的四边向下打孔, 使正方体被打出一个方孔。然后将这个被打方孔的正方体浸没在一盆绿水中, 于是它被染绿了。接着沿所有的黑线将正方体切开。则仅有一面是绿色的小正方体有_____个, 恰有两面是绿色的小正方体有_____个。

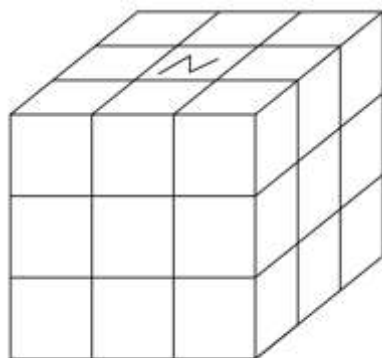


图14

58. 已知 $a=2010x+2010y$, $b=2011x+2011y$, $c=2012x+2012y$, 则

$$(a-b)^2 - (b-c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

59. 若关于 x 的方程 $2x-3a=0$ 与 $3x+a-7=0$ 的根互为相反数, 则 $a=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

60. 若 $\frac{xy}{x+y}=3$, 则

$$\frac{6x+4xy+6y}{9x+4xy+9y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

61. 甲和乙依次轮流从一个包裹中拿糖果。甲取 1 枚，乙取 2 枚，然后甲取 3 枚，乙取 4 枚，依次类推。如果谁遇到包裹中的糖果少于他这次应取的枚数时，谁就将包裹中剩的所有糖果都取光。如果甲共取了 101 枚糖果，那么包裹中最初有糖果 枚。

62. 若 $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=0$, 则 $a^{23}+b^{23}+c^{23}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

63. 为了由数 321321321321 得到被 9 整除的最大的数，必须擦去的数码是 ，得到的被 9 整除的最大的数是 。

64. 两个凸多边形，边数之比是 1:3，内角和的度数之比是 1:5，则这两个多边形的边数是 。

65. 若 $(x-2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\underline{\hspace{2cm}}$, $a_2+a_4=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

66. 若 a, b, c, d 都是质数，且 $a^2+b^2+c^2=78$, $a^2-b^2=cd^2$, 则 $a-b+c-d=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

67. 对任意实数 x , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如果 $[x]=3$, $[y]=1$, $[z]=1$, 那么 $[x+y-z]$ 的值等于 。

68. 方程: $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8\right\}=1$ 的解 $x=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

69. 已知 w, x, y, z 四个数都不等于 0，也互不相等，如果 $w+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{w}$, 那么 $w^2x^2y^2z^2=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

70. 当 $a \cdot c \neq 0$ 时，规定 $a*c=\frac{a}{c}-\frac{c}{a}$, 那么 $2*(5*3)=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

71. 下表中已经填 2、0、1、2 四个数，每行中右边数减去左边数都相等，每列中下边数减去上边数也都相等，那么这表中 16 个数的总和是 。

2			
	0		2
		1	

72. 当 $x=1$ 时, $ax^3+bx^2+cx-3=9$, 且 $a:b:c=1:2:3$, 那么 $3a+2b+c=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

73. 已知 m, n 均为正整数，且满足

$$\frac{4m}{3}-75=n+\frac{2m}{9}$$

则当 $m=\underline{\hspace{2cm}}$ 时, n 取得最小值 。

74. 由最小的十个质数作分子和分母，组成五个分数: $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}, \frac{17}{19}, \frac{23}{29}$ 。它们由小到大的顺序是 。

75. 如图 15，三角形 ABC 中， $\angle ACB=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$ 。以 B 为中心，将三角形 ABC 顺时针旋转，使得点 A 落在边 CB 延长线上的 A_1 点，此时点 C 落在点 C_1 的位置。连接 AA_1, CC_1 ，相较于点 O， CC_1 交 AB 于 D， AA_1 交 BC_1 于 E。则

$$(S_{\triangle AOD} + S_{\triangle ABE}) - (S_{\triangle COE} + S_{\triangle CBD}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

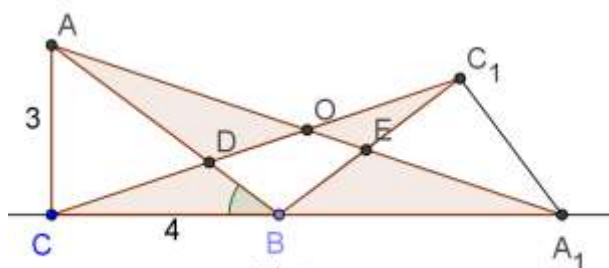


图15

三. 解答题

76. 证明：三个相邻奇数的乘积一定能被 3 整除。

77. 已知 P 是矩形 ABCD 的边 AB 上任意一点，试过 P 作两条直线，将矩形分成三个面积相等的图形。

78. 在题板上写有数 12。每分钟将该数乘以或者除以 2 或 3，并将结果写在题板上代替原数。证明：恰经过 1 小时，写在题板上的数不会等于 54。

79. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 8$ 。如图 16，过 BC 的中点 D 及 DC 的中点 E，分别作垂直于 BC 的线段交 AC 于点 G 及 F。连接 AD，AE，GB，GE，FD，FB，GD 与 AE、BF 分别交于点 I、H。在图中两个角互为余角的共有多少对？

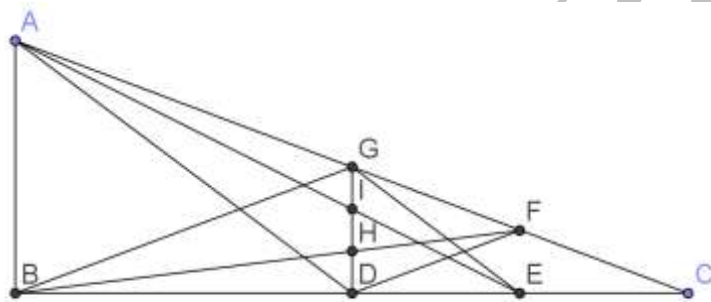


图16

80. 将数字 1, 2, 5, 4, 6 填入图 17 中的小圆圈中。从 1 开始顺时针依次两个数字可产生 5 个两位数 12, 25, 54, 46 和 61。从 1 开始逆时针依次两个数字可产生另 5 个两位数 16, 64, 45, 52 和 21。

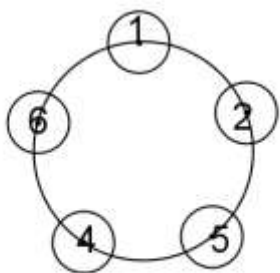


图17

(1) 验证：

$$12^2 + 25^2 + 54^2 + 46^2 + 61^2 \\ = 16^2 + 64^2 + 45^2 + 52^2 + 21^2.$$

(2) 对任意 5 个不等的非零数字 a, b, c, d, e ，可以生成 10 个两位数 \overline{ab} ，

\overline{bc} , \overline{cd} , \overline{de} , \overline{ea} 和 \overline{ae} , \overline{ed} , \overline{dc} , \overline{cb} , \overline{ba} , 请证明:

$$\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{cd}^2 + \overline{de}^2 + \overline{ea}^2 = \overline{ae}^2 + \overline{ed}^2 + \overline{dc}^2 + \overline{cb}^2 + \overline{ba}^2.$$

(3) 写出 10 个彼此不等的两位数, 使得其中 5 个两位数的平方和等于其余 5 个两位数的平方和。

翔文学习免费提供

xiangwenjy@gmail.com

QQ: 2254237433



翔文学习
SHARING

来源:《数理天地》初中版 2011 增刊, 请购买书籍, 6 元。