数论精选题（一）

1． 证明: 由 2009 个 1 和任意个 0 组成的正整数不是完全平方数；

(答案)

2． 试说明:存在最左边 2009 位都是 1 的形如 $\underbrace{11\ldots1}_{2009}{*}{*}{*}\ldots{*}$ 的正整数(*代表阿拉伯数字)是完全平方数；

(答案)

3． 2009 年 9 月 9 日的年、月、日组成“长长久久，永不分离”的吉祥数字 20090909，而它也恰好是一个不能再分解的素数。若规定含素因数 20090909 的数为吉祥数，请证明最简分数 $\dfrac{m}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{20090908}$ 的分子 m 是吉祥数；

(答案)

4． 证明一个正整数，当且仅当它不是 2 的整数幂时，可以表示成若干个（至少两个）连续正整数的和；

(答案)

5． 某个三位数自乘后，所得乘积的末三位数与原三位数相同，请问: 满足上述性质的所有不同的三位数的和是多少？

(答案)

6． m^4-3m^2+9 为素数，那么满足要求的 m 有______个；

(答案)

7． 梯形 ABCD 的上底，高，下底为从小到大的三个连续正整数且这三个正整数使 x^3-30x^2+ax（a 为常数）的值为同样顺序的三个连续正整数；那么梯形 ABCD 的面积为______；(2012 年新知杯第 7 题）

(答案)

8． 求出最小正整数 n，使其恰有 144 个不同的正因数，且其中有 10 个连续整数；(第 26 届 IMO 预选题)

(答案)

9． 求 72 的所有约数（因数）的和；

(答案)

10． 把 1,2,3,4，…，80,81 这 81 个数任意排列成 a_1，a_2，a_3，⋯,a_{81}，计算：$|a_1-a_2+a_3|$，$|a_4-a_5+a_6|$，⋯，$|a_{79}-a_{80}+a_{81}|$；再将这 27 个数任意排列为 b_1，b_2，b_3，⋯，b_{27}，计算：$|b_1-b_2+b_3|$，$|b_4-b_5+b_6|$，⋯，$|b_{25}-b_{26}+b_{27}|$；如此继续下去，最后得到一个数 x，问 x 是奇数还是偶数？

(答案)

《数论精选题》参考答案

1．完全平方数的特征: mod 3 为 0 或 1，2009 个 1 和若干个 0 组成的数模 3，等于 2009 mod 3=（2+9）mod 3=2 （弃 3 法），故不可能是完全平方数。

（<u>返回</u>）

2．令 A=$\underbrace{11\ldots1}_{2009}$，则 构造 B=A×$\mathbf{10^{2009}}$+5×A+1= A×（**9A+1**）+5×A+1=$(3A)^2$+6A+1=$(3A+1)^2$

（<u>返回</u>）

3．首尾两两相加，得到 $(1+\frac{1}{20090908})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{20090907})+\ldots+(\frac{1}{10045454}+\frac{1}{10045455})$

$=20090909(\frac{1}{20090908}+\frac{1}{2\times20090907}+\ldots+\frac{1}{10045454\times10045455})$

$=20090909\times\frac{P}{20090908!}$ 故分子含有 20090909 这个素因数，是吉祥数。

（<u>返回</u>）

4．证明：任何一个正整数 n 都可以表示成（《奇数和偶数》章节有介绍）$2^k\times q$ （k 为非负整数，q 为正奇数）；构造法：

$$n=\quad(2^k-\frac{q-1}{2})+(2^k-\frac{q-3}{2})+\ldots+(2^k-\frac{q-q}{2})+$$

$$(2^k+\frac{q-1}{2})+(2^k+\frac{q-3}{2})+\ldots+(2^k+\frac{q-q}{2})$$

是几个连续正整数的和；

反之，若 $n=(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+q)$, (几个连续正整数的和),

则 $n=qk+q(q+1)/2=q(2k+q+1)/2$, 因为 **$q$ 是大于 1 的正奇数**，不是 2 的倍数，所以 n 不是 2 的整数幂；

（<u>返回</u>）

5．解：设这个三位数为$\overline{abc}$，由已知得

$\overline{abc}^2\equiv\overline{abc}$ (mod 1000)，由同余定理得

$2^3\times5^3\mid\ \overline{abc}(\overline{abc}-1)$；

因为 $\overline{abc}$与$\overline{abc}-1$是连续整数,即（$\overline{abc}$，$\overline{abc}-1$）=1，所以两者必互素，且是三位数，

所以 （1）$2^3|\overline{abc}$，$5^3|\overline{abc}$-1，得到$\overline{abc}$=376 或

（2）$2^3|\overline{abc}$-1，$5^3|\overline{abc}$，得到 $\overline{abc}$=625

故满足条件的三位数只有 376 和 625，其和为 1001．（376^2=141 376， 625^2=390 625）

（<u>返回</u>）

6． 解：m^4-3m^2+9=(m^2+3)^2-9m^2=(m^2+3+3m)(m^2+3-3m) 为素数，而(m^2+3+3m)，(m^2+3-3m) 都可以看成一元二次方程，且判别式都是 9-12=-3<0, 二次项系数 1>0, 故都是大于 0 的数，则只能有(m^2+3+3m)=1 或(m^2+3-3m)=1，分别解得 m =-1，-2,1,2；

经检验，当 m=±1 时，m^4-3m^2+9==1-3+9=7 是素数；

当 m=±2 时，m^4-3m^2+9==16-12+9=13 也是素数；

所以共有 4 个。

（返回）

7． 解：因为梯形的上底、高、下底为从小到大的三个连续正整数，不妨设梯形的高为 t，则上底为 t-1，下底为 t+1，故梯形面积为 t^2；

由题意知：$(t-1)^3-30(t-1)^2+a(t-1)+1=t^3-30t^2+at=(t+1)^3-30(t+1)^2+a(t+1)-1$

化简整理得： $\begin{cases}3t^2-3t-60t+30+a-1=0\\3t^2+3t-60t-30+a-1=0\end{cases}$，消去元 a，得 t=10，故梯形面积为 t^2=100

（返回）

8． 解：根据题目要求，n 是 10 个连续整数积的倍数，因而必然能被 2,3,4，……，10 整除，由于 8=2^3,9=3^2,10=2×5，故其标准分解式中，**至少含有 2^3 • 3^2 • 5 • 7 的因式**，因此，若设

n= $2^{a_1}\cdot3^{a_2}\cdot5^{a_3}\cdot7^{a_4}\cdot11^{a_5}\cdots$，则 a_1≥3，a_2≥2，a_3≥1，a_4≥1，由

$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)\ldots=144$，而$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)\geq4\cdot3\cdot2\cdot2=48$，144=3×48

故最多还有一个 a_j>0 (j≥5), 满足 a_j+1≤3, 即 a_j≤2，为使 n 最小，自然应该取 2≥a_5≥0．

由 $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)(a_5+1)=144$ （a_5≠0）

或 $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)=144$ （a_5=0），

考虑 144=2^4×3^2 的可能分解，并比较相应 n 的大小，可知符合要求（最小）的 a_1=5，a_2=2，a_3= a_4= a_5=1，故所求的 n=5，(尽量让 a_1 最大)

（返回）

9． 解：72 分解素因数为 2^3×3^2，所以，72 的所有约数的和为

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=195$

【注】若正整数 n 的素因数分解为 n= $p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_k^{a_k}$，那么 n 的所有约数的和为

$$\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+\cdots+p_i^{a_i})=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$$

（返回）

10． 解：因为 $a_i-a_{i+1}+a_{i+2}$ 与 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$ 同奇偶（两者之和为偶数），i=1,2,3，…，79，

$b_i=|a_i-a_{i+1}+a_{i+2}|=a_i-a_{i+1}+a_{i+2}$，即 b_i 与 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$ 同奇偶；$b_i\equiv a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$（mod 2）；

∴$\sum_{i=1}^{27}b_i\equiv\sum_{i=1}^{81}a_i\equiv\sum_{i=1}^{81}i\equiv1$（mod 2）为奇数；如此继续下去，最后 x 也是奇数。

（返回）