“数学解题能力展示”初赛分析总结拓展

崔梦迪

轰轰烈烈的“数学解题能力展示”(迎春杯)初赛已经结束了，本次考试共有 10 道题目，采用 **3+3+4** 的形式，题目整体难度不是很大。但**考试的目的并不是得分的多少，而是要通过考试发现自己的不足，调整自己的学习方法和方向**，所以不管我们考得怎样，都应该仔细去分析一下试卷：找到自己错误的原因！下面崔老师就对每一道题进行一个简短地分析，认真地研究一下吧：

1、 算式 $2013\times\dfrac{5.7\times4.2+\dfrac{21}{5}\times4.3}{\dfrac{14}{73}\times15+\dfrac{5}{73}\times177+656}$ 的计算结果是____________.

【考点】：计算专题——提取公因数

【难度】：★

【解题过程】：

$$\begin{aligned}2013\times\frac{5.7\times4.2+\frac{21}{5}\times4.3}{\frac{14}{73}\times15+\frac{5}{73}\times177+656}&=2013\times\frac{5.7\times4.2+4.2\times4.3}{\frac{14}{73}\times15+\frac{15}{73}\times59+656}\\&=2013\times\frac{4.2\times(5.7+4.3)}{\frac{15}{73}\times(14+59)+656}\\&=2013\times\frac{4.2\times10}{\frac{15}{73}\times73+656}\\&=2013\times\frac{42}{15+656}\\&=2013\times\frac{42}{671}\\&=126\end{aligned}$$

【点评】：

这道题不是难题，考察了计算专题中的提取公因数，只要认真运算，应该不会出问题.

2、 某日，小明和哥哥聊天，小明对哥哥说："我特别期待 2013 年的到来，因为，2、0、1、3 是四个不同的数字，我长这么大，第一次碰到这样的年份．"哥哥笑道："是呀，我们可以把像这样的年份叫做'幸运年'，这样算来，明年恰好是我经历的第 2 个'幸运年'了．"那么，哥哥是____________年出生的．

【考点】：计数专题——有序枚举

【难度】：★

【分析过程】：

其实就是问比 2013 小的各位数字互不相同的四位数，简单的枚举就可以了。

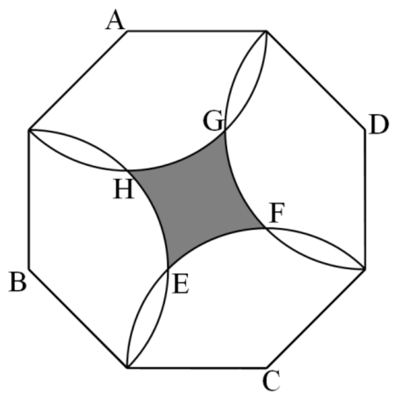
【解题过程】：

2013、2012、2011、2010、2009、…、2000、1999、…、1990、1989、1988、1987

【点评】：

这道题也不难，属于简单枚举，而且在枚举的过程中还发现从 2009 到 2000 和从 1999 到 1990 必有相同的数字，很简单啊！

3、 如图，分别以正八边形的四个顶点 *A*、*B*、*C*、*D* 为圆心，以正八边形边长为半径画圆．圆弧的交点分别为 *E*、*F*、*G*、*H*．如果正八边形边长为 100 厘米，那么，阴影部分的周长是____________厘米．　（π 取 3.14）



【考点】：曲线型面积、正多边形

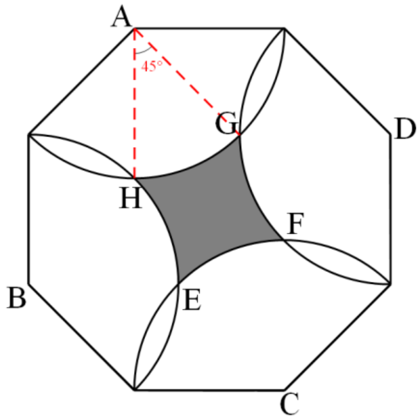
【难度】：★☆

【分析过程】:

因为阴影部分是由四段相同的弧组成的，所以**题目的关键是求 $\angle HAG$ 的度数**。

【解题过程】:

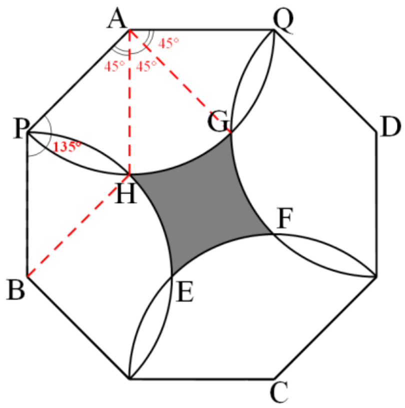
※方法一：度量法



由度量可知 $\angle HAG = 45^\circ$ ，所以阴影部分的周长是：

$$C = 4\times\frac{45^\circ}{360^\circ}\times\pi\times200 = 100\pi = 314$$

※方法二：官方解法



因为：多边形外角和为 360°

所以：正八边形每一个外角为 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

所以：正八边形每一个内角为 135°

又因为： AP、PB、BH、HA 都是半径

所以：四边形 $APBH$ 是菱形

所以： $\angle AHB = 135^\circ$

所以： $\angle AHB = 135^\circ$

所以：$\angle PAH = \angle PBH = 45^\circ$

所以： $\angle QAG = 45^\circ$

即： $\angle HAG = 45^\circ$

阴影部分的周长是：

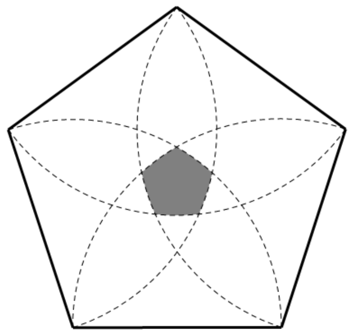
$$C = 4 \times \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 200 = 100\pi = 314 \text{（厘米）}$$

【点评】：

这道题也算是一道老题了，改编自一道很经典的题目，原题是把阴影部分放在了正五边形中，解题方法如出一辙。原题如下：

【原题回放】：

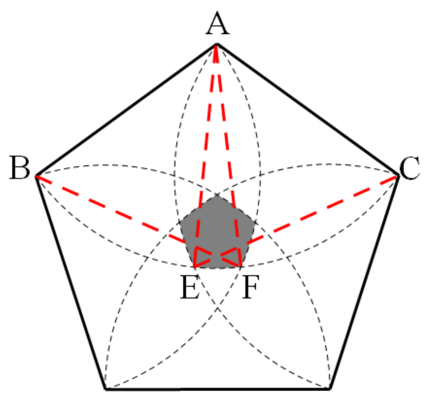
如图所示，画虚线的部分是花纹。已知图中正五边形的变长为 100cm，请问把中央阴影部分包围起来的 5 条虚线的周长是多少？



【分析过程】：

阴影部分是由五段相同的弧组成的，所以**题目的关键还是在于求每一段弧所对的圆心角的度数**。

【解题过程】：



因为：多边形外角和为360°

所以：正五边形每一个外角为$\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$

进而：正五边形每一个内角为108°

又因为：AB、BF、FA都是半径

所以：三角形ABF是等边三角形

所以：$\angle BAF=60^\circ$

所以：$\angle CAE=60^\circ$

即：$\angle EAF=\angle BAF+\angle CAE-\angle BAC=60^\circ+60^\circ-108^\circ=18^\circ$

阴影部分的周长是：

$$C=5\times\frac{18^\circ}{360^\circ}\times\pi\times200=50\pi=157\text{（厘米）}$$

4、 由 2、0、1、3 四个数字组成（可重复使用）的比 2013 小的四位数有__________个.

【考点】：计数专题——加乘原理

【难度】：★☆

【分析过程】：

通过枚举，分别枚举出千位为 1 和千位为 2 的情况。

【解题过程】：

千位为 1 的情况：1 □□□，共有：$4\times4\times4=64$种

千位为 2 的情况：2 0 0 □，共有： 4 种

2 0 1 □，共有： 3 种

∴ 比 2013 小的四位数有：$64+4+3=71$ 种。

【点评】：

这是一道比较简单的加乘原理题目，很传统。从高位开始分析，难度不大。

5、 小于 200 且与 200 互质的所有自然数的和是___________.

【考点】： 数论专题——约倍质合

【难度】： ★★

【分析过程】：

将 200 分解质因数可知：$200=2^3\times5^2$，可知：**和 200 互质的自然数一定是奇数且不是 5 的倍数**，所以用小于 200 的所有奇数的总和减去奇数中 5 的倍数总和，答案就出来了。

【解题过程】：

∵ $200=2^3\times5^2$

∴ 比 200 小且与 200 互质的数一定是奇数且不是 5 的倍数

∴ 其总和为：

$$(1+3+5+\cdots+199)-(5+15+25+\cdots+195)=\frac{(1+199)\times100}{2}-\frac{(5+195)\times20}{2}$$

$$=\frac{200\times100}{2}-\frac{200\times20}{2}$$

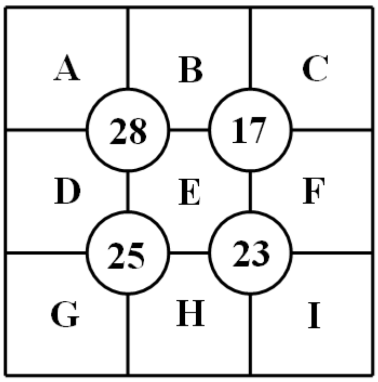
$=10000-2000$

$=8000$

【点评】：

这道题也不难，典型的约倍质合问题，当然也可以用**容斥原理**做，但难度有点大。

6、 在 3×3 的九宫格内填入数字 1 至 9（每个数字都恰好使用一次），满足圆圈内的数恰好为它周围四个方格的数字之和，例如 $A+B+D+E=28$，那么 $\overline{ACEGI}$ 组成的五位数是________.



【考点】：杂题——数阵图、幻方

【难度】：★★☆

【分析过程】：

采用数阵图幻方的通法：出总和、列幻和（少重复）、求重复，逐步分析最终得出结果。

【解题过程】：

因为：$A+B+C+D+E+F+G+H+I=45$

而：$A+B+C+D+2E+F+G+H=28+23=51$

所以：$E=C+G+6$

即：$E=9$　C 和 G 是 1 或 2（如图一）

又因为：$B+C+E+F=17$（17 最小，先研究）

所以：$C=1$　$G=2$

B 和 F 是 3 或 4（如图二）

又因为：$A+B+E+D=28$（28 最大，第二研究）

所以：$B=4$　$F=3$

A 和 D 是 7 或 8

进而：H 和 I 是 5 或 6（如图三）

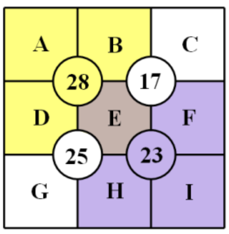
又因为：$D+E+H+G=25$

所以：$D+H=14$

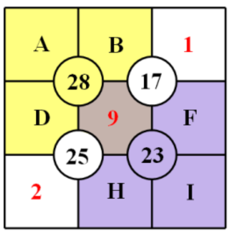
所以：$D=8$　$H=6$

进而：$A=7$　$I=5$（如图四）

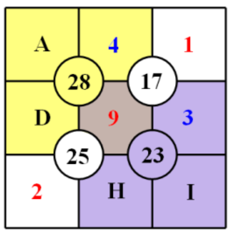
即：$\overline{ACEGI}=71925$.



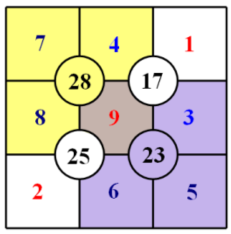
（图一）



（图二）



（图三）



（图四）

【点评】：

这道题是典型的数阵图，近几年比较流行，但这道题中规中矩，只要按部就班的进行推理，答案就能得到了。

7、 四个不同的自然数和为 2013，那么这四个自然数的最小公倍数最小是___________.

【考点】：数论专题——约倍质合

【难度】：★★★☆

【分析过程】：

设出这四个不同的自然数的最小公倍数 M ，然后研究它的最值。

【解题过程】：

设这四个自然数的最小公倍数为 M ，则：$M(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})=2013$

若 M 最小，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ 要最大，则 a、b、c、d 要尽可能的小

若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$，则：$M=2013\times\frac{12}{25}$ ，不成立；

若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{61}{30}$，则：$M=2013\times\frac{30}{61}=990$，成立；

∴ 这四个自然数的最小公倍数最小是 990.

【点评】：

这道题很经典！早在 **2009 年“学而思杯”二试（仁华补考）**就考过类似的题目，**此题共有四种问法：最大公约数最大（小）值、最小公倍数最大（小）值**。原题如下：

【原题重现】：

若 a、b、c 是三个互不相同的大于 0 的自然数，且 $a+b+c=1155$，则他们最大公约数的最大值是____________；最小公倍数的最小值是____________；最小公倍数的最大值是____________。

【解题过程】：

※最大公约数的最大值：

设 a、b、c 的最大公约数为 M ，则：$M(a+b+c)=1155=3\times5\times7\times11$

若 M 最大，则 $a+b+c$ 要最小，则 a、b、c 要尽可能的小

若 $a+b+c=1+2+3=6$，则：$M=\frac{1155}{6}$，不成立；

则：$a+b+c=7$，此时 M 最大：$M=165$.

※最小公倍数的最小值：

设a、b、c的最大公约数为N，则：$M(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=1155$

若M最小，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$要最大，则$a$、$b$、$c$要尽可能的小

若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$，则：$M=1155\times\frac{6}{11}=105\times6=630$

此时M最小：$M=630$.

※最小公倍数的最大值：

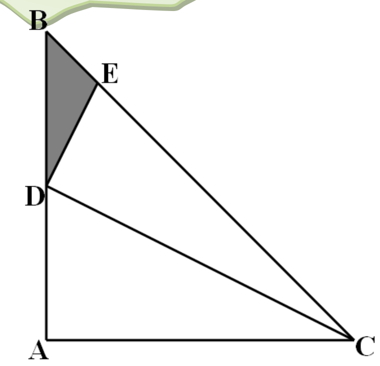
若最小公倍数取最大值，则a、b、c应该两两互质，于是题目转化成了：

若$a+b+c=1155$，求$a\times b\times c$的最大值.

由“和一定，差小积大”可知：

$$a\times b\times c=383\times385\times387=57065085$$

8、在等腰直角三角形 *ABC* 中，∠*A*=90°，*AB* 的长度是 60，*D* 是 *AB* 的中点，且∠*CDE* 为直角，那么三角形 *BDE* 的面积是____________.



【考点】：几何专题——直线型面积

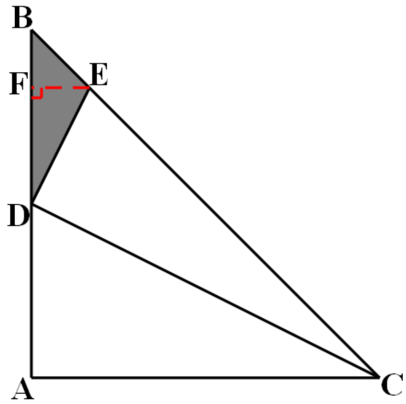
【难度】：★★☆

【分析过程】：

题目中已经给出$BD=30$，只要求出△BDE的BD边上的高，其面积就出来了。

【解题过程】：

※方法一：度量法

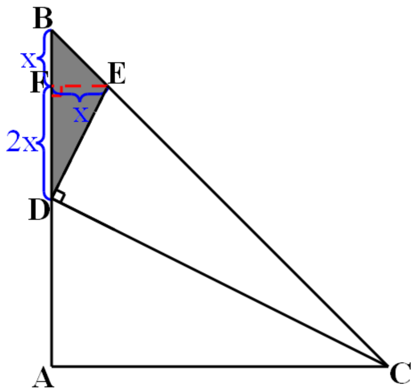


严格的画一个腰为 6 的等腰直角三角形，按照题意画出$\triangle BDE$作出其高，由度量可知：$EF=1$。

所以在本题中，$EF=10$

即：$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times BD\times EF=\frac{1}{2}\times 30\times 10=150$.

※方法二：直线型面积——相似三角形



作$\triangle BDE$的BD边上的高EF

因为：∠CDE 为直角

所以：∠BDE+∠CDA=90°

而：∠DCA+∠CDA=90°

所以：∠BDE=∠DCA

所以：△DEF 和△DAC 形状一样，只是大小不一样

因为：$AC=60=2AD$

所以：$DF=2EF$

设$EF=x$

所以：$BF=x$，$DF=2x$

所以：$3x=30$

所以：$x=10$

所以：$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times BD\times EF=\frac{1}{2}\times 30\times 10=150$.

【点评】:

这道题目略微有点超纲，但是用度量法就简单的多了，呵呵。

9、甲、乙二车分别从 *A*、*B* 两地同时出发，相向匀速而行，当甲行驶过 *AB* 中点 12 千米时，两车相遇．若甲比乙晚出发 10 分钟，则两车恰好相遇在 *AB* 中点，且甲到 *B* 地时，乙距离 *A* 地还有 20 千米．*AB* 两地间的路程是__________千米．

【考点】: 行程专题——多次相遇、含比例行程

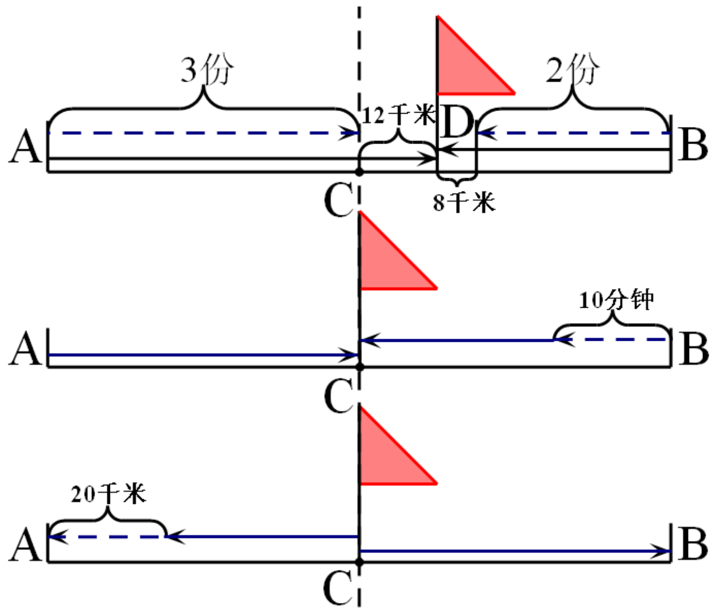
【难度】: ★★★☆

【分析过程】:

利用**“杀人法”**，图 2 和图 3 作比较，巧妙地抓住“**甲每次都走全程一半**”，很容易求出乙的速度，再引入图 1，采用**假设法**，得出甲的速度，进而**用比例设份数**得出全程。

【解题过程】:

因为题中涉及到多次相遇，采用“杀人法”：



如上图，比较图 2 和图 3：甲都走了全程的一半，不难发现，乙 10 分钟走了 20 千米，得出：$v_{乙}$=2 千米/分钟；

在图 1 中，假设甲也走了全程一半，可知：$CD=20$千米，进而可知：当甲走 12 千米时，以走 8 千米，进而可知：$v_{甲}=2\times\frac{12}{8}=3$千米/分钟；

在图 1 中，设 $AC=3$份，则：$BD=2$份，则：$CD=1$份，可知：1 份等于 20 千米，故全程为：$6\times 20=120$千米。

【点评】：

多人多次行程在“迎春杯”考场上不止出现过一次，只要通过“杀人法”，把题目中的信息分解开来，认真的比较，寻找等量，抓不变量就能得到结果。

10. 老师从写有 1～13 的 13 张卡片中抽出 9 张，分别贴在 9 位同学的额头上．大家能看到其他 8 人的数但看不到自己的数．（9 位同学都诚实而且聪明，且卡片 6、9 不能颠倒）老师问：现在知道自己的数的约数个数的同学请举手．有两人举手．手放下之后，有三个人有如下的对话：
甲：我知道我是多少了．
乙：虽然我不知道我的数是多少，但我已经知道自己的奇偶性了．
丙：我的数比乙的小 2，比甲的大 1．
那么，没有被抽出的四张牌上数的和是___________．

【考点】： 逻辑推理

【难度】： ★★★★☆

【分析过程】：

此题较难，但由于**2009 年“迎春杯”初赛的压轴题也是一道类似的题目**：题目的情景设置，考点设置极为相似，使得这道题的门槛就大大降低了。而这道题的逻辑推理跟 09 年的拿到题目相比要简单的多，所以**只要认真准备过那道题目的考生，这道题应该不在话下**。

题目的关键是分析：**为什么会有“两个人举手”**？只要把这个问题分析清楚，题目基本上就没有什么难度了！

【解题过程】:

将 1～13 这 13 个数通过约数个数进行分类，不难得出：

约数个数分类
- 1 个：1
- 2 个：2、3、5、7、11、13
- 3 个：4、9
- 4 个：6、8、10
- 6 个：12

下面来分析最关键的问题：**“为什么会有两个人举手呢”**？

根据约数个数我们把这 13 个数，分成了 5 类。**也就是说其中有两个人知道了他们在成功的知道了他们在哪一类中**。而他们之所以能知道的原因：**一定是他们看到了除了他们所在那一类以外，其他所有的数！**而问题的关键是他们只看到了 8 个数，所以很容易得出两个结论：

结论一：举手的两个人都来自约数个数有 2 个的那一类；

结论二：除了约数个数有 2 个这一类以外其他所有的数都出现了。

因为 1、4、9、6、8、10、12 已经是 7 个数了，所以在约数个数有 2 个的那一类中只出现了两个数，而且正好是那两个举手的学生的数。

那么现在都有谁知道自己头上的数字了呢？

因为同学们都很聪明，所以在两位学生举手时，他们也能推断出了 1、4、9、6、8、10、12 全都出现了！进而我们得出了这道题的下一个结论：

结论三： 除了来自第二组的两名举手的学生以外其他人都应该知道自己头上的数了。

因为甲知道自己头上的数了，所以甲头上的数字应该出自：1、4、9、6、8、10、12;

因为乙不知道头上的数字，但知道头上数字的奇偶性，可推知：2 一定出现了，乙头上的数字出自：3、5、7、11、13

因为丙的数比乙小 2，比甲大 1，简单的逐一枚举，可最终推知：甲为 8，乙为 11，丙为 9.

所以没有选的数字为：3、5、7、13，其和为 28.

【点评】:

这道题应该是今年迎春杯考场上杀伤力最大的一道题目了，但正向前面的分析中所说，因为 2009 年迎春杯初赛压轴题，题目跟它极为相似，所以**只要认真准备了那道题目，这道题目应该很快就能分析清楚为什么会有两个人举手，进而顺藤摸瓜，得出结论！**

最后作为思考题，我把 2009 年迎春杯的压轴题奉上，作为思考题，大家仿照着第十题的思路，再来研究一下吧：

（2009 数学解题能力展示初赛 15）

小明和 8 个好朋友去李老师家玩，李老师给每人发了一顶帽子，并在每个人的帽子上写了一个两位数，这 9 个两位数互不相同，且每个小朋友只能看见别人的帽子上的数，老师在纸上又写了一个数 A，问这 9 位同学："你知不知道自己帽子上的数字能否被 A 整除，知道的请举手。"结果有 4 人举手。老师又问"现在你知不知道自己帽子上的数字能否被 24 整除，知道的请举手。"结果有 6 人举手.已知小明 2 次都举手了，并且这 9 个小朋友都足够聪明且从不说谎，那么小明看到的别人帽子上的 8 个两位数的总和是__________。