约数与倍数进阶篇

约数与倍数相互依存，有如下关系式：

$$\boxed{\text{两数的最大公约数与最小公倍数的乘积等于两数的乘积，} gcd(a,b) \times lcm(a,b) = a \times b}$$

注意: 该性质不能推广到三个及以上的情形。

因为有上述关系式，所以，我们只要有求最大公约数的方法，最小公倍数就可以通过上述关系式得到。这也是很多软件中，只有求最大公约数的函数，而没有提供求最小公倍数的函数的原因。

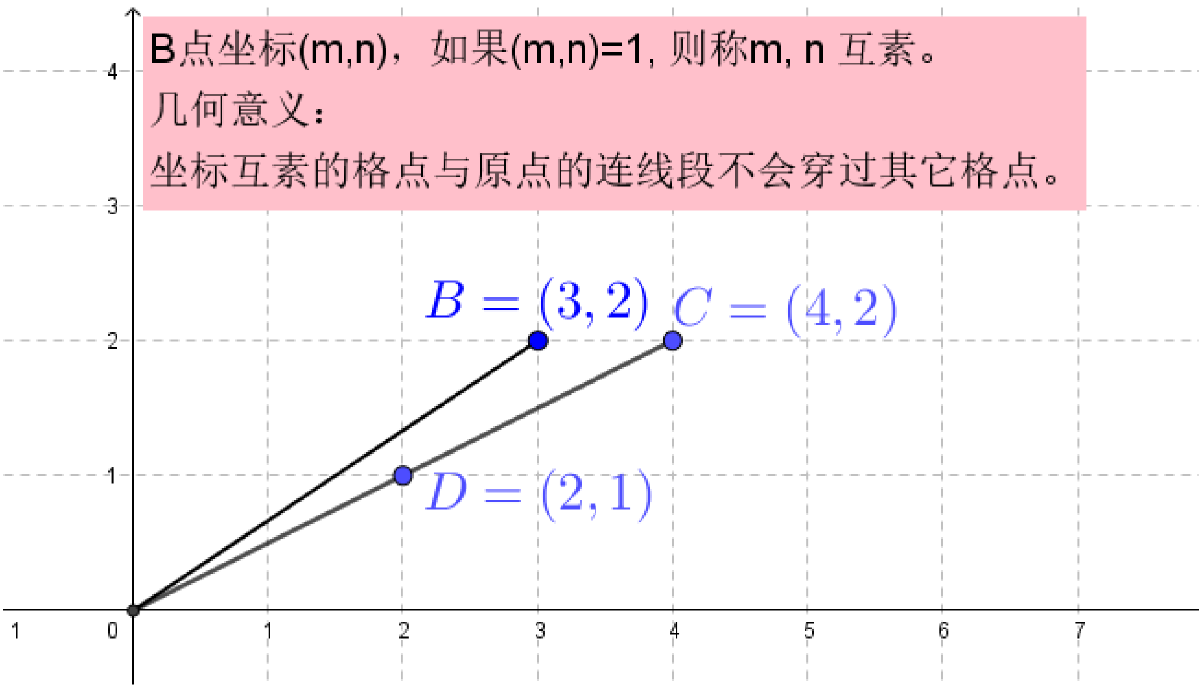
多个数互素

如果 $(a,b)=1$, 即最大公约数为1，则称 a、b 互素。譬如 (4,9)=1, (6,7)=1

1. 两个连续整数一定互素，$(n,n+1)=1,\ n \in \mathrm{N}$
2. 奇数和偶数一定互素，$(2n,2m+1)=1,\ n,m \in \mathrm{N}$
3. 求多个数的最大公约数，可以用嵌套完成：$gcd(a,b,c)=gcd(gcd(a,b),c)$，便于程序实现。

互素的几何现象：在平面坐标系中，互素的两个数组成的格点到原点的连线，不会穿过其他格点。

互素的几何现象GGB



应用例题

例1 时间周期问题

成阿姨每6天去一次菜市场，李伯伯每8天去一次菜市场，今天早上他俩刚好在菜市场相遇，问下一次在菜市场相遇是几天后?

$A.\ 12 \qquad B.\ 18 \qquad C.\ 24 \qquad D.\ 48$

解析：成阿姨每6天去一次菜市场，则成阿姨下次去菜市场的天数就是6天、12天、18天后、……，都为6的倍数，同理李伯伯去菜市场的天数就是8的倍数。

要使得两人在菜市场再次相遇，则下次去菜市场的天数一定是两人的公倍数，题干问的是下次两人在菜市场相遇的时间，故此题就是两人去菜市场天数的最小公倍数，6与8的最小公倍数为24，选择C项。

例2 长度切割问题

有三根铁丝，分别长12米、18米、24米，现在要把它截成同样长的小段且铁丝没有浪费，最少可以截多少段?

$A.5 \qquad B.7 \qquad C.9 \qquad D.12$

解析：要在截的过程中没有浪费，则截后每一段的长度应该是总长度的约数;又将铁丝截成同样长的小段，则所求为三段铁丝长度的公约数。

铁丝的总长=所截铁丝的段数×每段的长度，要使得段数最少，则由于总长固定，只能让每一段尽可能的长，因此所截每一段的长度为三段铁丝长度的最大公约数。12、18、24的最大公约数为6，三根铁丝所截段数分别为2、3、4，故最少可截9段，选择C项。

注意：一维空间分割问题案例

例3 平面镶嵌问题

用一批正方形地砖铺满一块长25米，宽15米的空地，正方形地砖最大边长为多少?

解析：根据题意，得知该空地的长 25 米需要用 n 个正方形铺满，同时宽 15 米也需要用同样的正方形 m 个铺满，则说明该正方形的边长是 25 和 15 的公约数，因为 n、m 这样的数值表示正方形个数一定是正整数，并且问题求解正方形最大的边长，因此为求解两数的最大公约数。

因为(25,15)=5，所以此题答案为 5 米。

例4 时间周期问题

甲每3天去图书馆一次，乙每8天去图书馆一次，3月1日这天两个人恰好在图书馆相遇，请问下一次两人相遇是在哪天?

解析：类似例1，根据题意，甲每3天去一次，经过了 n 个 3 天，同时乙每 8 天去一次，可能经过了 m 个 8 天，正好两人相遇，因为 n、m 表示个数为正整数，则说明经过的天数一定是 3和8 的公倍数，

又问下一次相遇，则所求为3和8的最小公倍数，即为24天，经过24天的下一次相遇时间为3月25日。

例5 已知最大公约数和最小公倍数，求两数

已知 A、B 两数的最大公约数为 5，最小公倍数为 60，则这两个数分别是多少?

解法1：由最大公约数和最小公倍数的关系式，可知 $A\times B=gcd(A,B)\times lcm(A,B)=5\times 60=300=3\times 2^2\times 5^2$. 因为 $gcd(A,B)=5$，所以 A,B 必定都含有 5 的约数，剩下 12 要拆成互素的两个数的乘积，只能是拆成 $3和4$，故 A、B 只能是 $3\times 5, 4\times 5$,即15和20。

解法2：在短除求解最大公约数的过程中，可以看到最小公倍数中含有最大公约数，则 $60\div 5=12$，12 为这两个数除以最大公约数之后得到的两个商的乘积，并且这两个商是互素的，因此 $12=3\times 4$，所求的两个数分别为 $5\times 3=15$，$5\times 4=20$。

例6 翻牌游戏

设有编号为$1、2、3、\cdots、10$的10张背面向上的纸牌，现有10名游戏者，第1名游戏者将所有编号是1的倍数的纸牌翻成另一面向上的状态，接着第2名游戏者将所有编号是2的倍数的纸牌翻成另一面向上的状态，......，第n名$(n \leq 10)$游戏者，将所有编号都是 n 的倍数的纸牌翻成另一面向上的状态，如此下去，第10名游戏者翻完纸牌后，那些纸牌正面向上的最大编号与最小编号的差是：

$A.2 \qquad B.4 \qquad C.6 \qquad D.8$

解法一：本题初看感觉题目很复杂，但是仔细理解发现这道题目并不复杂，也可以用最简单最原始的方法——**枚举法**解题，1号游戏者会将所有卡片进行翻转，2号则会将编号为2、4、6、8、10进行翻转，3号游戏者则会将编号为3、6、9的卡片进行翻转....依次类推，最终得出结论，正面朝上的卡片编号为 $1,4,9$, 故最终答案为选项 D。

次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
一	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
二	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
三	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-
四	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-
五	+	-	-	+	-	+	+	+	-	+
六	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+
七	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+
八	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+
九	+	-	-	+	-	-	-	-	+	+
十	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-

注意：表格中 + 表示正面， - 表示背面

解法二：本题需要理解题目实质，游戏者需要翻转卡片，而翻转的规则是卡片号为游戏者编号的倍数的需要去翻转，反之，如果游戏者的编号是卡片编号的约数需要翻转，即这张卡片有几个约数就需要翻转几次，但是题目规定卡片最初的状态是背面向上，最终状态为正面向上，即需要翻转奇数次，试想哪些数字的约数个数是奇数个，普通数字的约数个数必然成对出现，而只有**平方数的约数个数为奇数个。**所以这道题的本质即为10以内，最大的平方数和最小的平方数之差为几。显然 $9-1=8$. 答案当选 D。

例7 时间周期问题

某单位小范每5天去体育馆打一次羽毛球，小许每9天去一次，老刘每12天去一次。某天三人在体育馆相遇，那么下一次相遇至少要多少天?

$A.120 \qquad B.180 \qquad C.540 \qquad D.80$

解析：类似例1，只是多了一个数而已。本题实质考察倍数中的公倍数，关键仍需理解题目本质。问题最终问下一次相遇需过多少天，试想，这一次相遇到下一次相遇，小范是5天去一次，所以过的天数必然是5的倍数;同理小许每9天去一次，所以过的天数必然是9的倍数;老刘是12天去一次，即过的天数必然为12的倍数，所以过的天数应为 $5,9,12$ 的公倍数，这一次到下一次应为最小公倍数。因为 $lcm(5,9,12)=180$, 答案当选 B。

例题8 已知GCD和LCM，求这两个数

两个自然数不成倍数关系，它们的最大公约数是18，最小公倍数是216，求这两个数。

解析：设这两个数分别是 $n, m, \ n \leq m$

$\because (n, m) = 18, \ \therefore n = 18a, \ m = 18b, \ (a, b) = 1$
$[n, m] = 18 \times a \times b = 216$
$a \times b = 12, \therefore a = 3, \ b = 4$

所以这两个数分别是 $18 \times 3 = 54, \ 18 \times 4 = 72$

答：这两个数分别为54和72。

例题9 已知GCD和LCM，求这两个数

两个自然数的最大公约数是6，最小公倍数是420，如果这两个数相差18，求这两个数。

解析：设这两个数分别是 $n, m, n \geq m$

$\because (n, m) = 6, \ \therefore$ 可设$n = 6a, \ m = 6b, \ (a, b) = 1, \ a \geq b$
$\because [n, m] = 6 \times a \times b = 420$
$a \times b = 70,$
$\because n - m = 18, \therefore a - b = 3,$ 故得到$a = 10, \ b = 7$

所以这两个数分别是 $6 \times 10 = 60, \ 6 \times 7 = 42$

答：这两个数分别为60和42。

例题10 求三个数

甲乙的最小公倍数是90，乙丙的最小公倍数是105，甲丙的最小公倍数是126，求甲为多少?

解析：设甲乙丙这三个数分别是 n, m, k

$\because [n, m] = 90 = 2 \times 3^2 \times 5, \ [m, k] = 105 = 3 \times 5 \times 7, \ [n, k] = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$\therefore k = 3 \times 7 \times c, \ n = 2 \times 3^2 \times a, \ m = 3 \times 5 \times b, \ (a, b) = 1, \ (b, c) = 1, \ (a, c) = 1$
得到$a = 1, \ n = 18, \ m = 5$或$15, k = 21$或7
甲数为18，乙丙有三种种可能$(15, 7), (5, 21), (15, 21)$

所以这三个数分别是 $(18, 5, 21), (18, 15, 21), (18, 15, 7)$

答：甲数为18。

例题11 利用约数个数反求原数

甲乙是不同的两个自然数，它们都只含有素因数2和3，并且都有12个约数，它们的的最大公约数是12，求甲乙两数之和是多少?

解析：设甲乙这两个数符合 $2^a \cdot 2^b, \ (a + 1)(b + 1) = 12 = 2^2 \times 3,$

因为 12 有 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ 个约数，可以拆成两组大于1的数相乘，只能是 $2 \times 6, 3 \times 4$。

设 甲为 $2^{a1} 3^{b1}$, 乙为 $2^{a2} 3^{b2}$,
依题意可知：$\gcd(2^{a1} 3^{b1}, 2^{a2} 3^{b2}) = 12 = 2^2 \times 3 \iff min(a_1, a_2) = 2, min(b_1, b_2) = 1$

经过尝试，发现 只有拆成 $3 \times 4, 6 \times 2$, 即 $2^2 \times 3^3, 2^5 \times 3^1$ 时，满足题意。

故两数之和为 $2^2 \cdot 3^3 + 2^5 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3(3^2 + 2^3) = 12 \times 17 = 204$

答：甲乙两数之和是204。

练习题

1. 一个数和16的最大公约数是8，最小公倍数是80，这个数是多少？

2. 一个数和24的最大公约数是8，最小公倍数是120，那么这个数是多少？

3. 两个小于150的数的乘积是2028，它们的最大公约数是13，求这两个数。

4. 两个数的最大公约数是18，最小公倍数是180，两个数的差是54，求这两个数。

5. 三个正整数a、b、c, 已知 a与b、a与c、b与c的最小公倍数分别是525、28和300，那么 a 的值是多少？

6. A、B两数都只含有素因数3和5，它们的最大公约数是75，已知 A 有12个约数，B 有10个约数，那么 A、B 两数之和是多少？

7. 已知 a与b 的最大公约数是14，a与c、b与c 的最小公倍数都是350，且 a不大于b，那么满足条件的自然数 a、b、c 共有多少组？

作业

1. 甲是36，甲乙两数的最大公约数是4，最小公倍数是288，那么乙是多少？

2. 已知两个自然数的积是240，最小公倍数是60，那么这两个数是多少？

3. 已知两数的最大公约数是21，最小公倍数是105，那么这两个数的和是多少？

4. 甲乙两数的最小公倍数是60，乙丙两数的最小公倍数是70，甲丙两数的最小公倍数是84，那么甲数是多少？

5. A、B 两数的最小公倍数是144，已知数 A 有12个约数，数 B 有10个约数，那么 A、B 两数的和是多少？