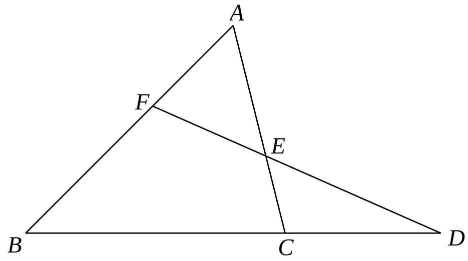
第七讲
梅涅劳斯定理
与塞瓦定理

课前预习

1．证明梅涅劳斯定理：

如图，F、E分别为AB、AC上的任意一点，D为FE与BC延长线的交点.

求证：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.



【分析】 法一：（面积法）联结AD、BE.

$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BEF}}\Rightarrow\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BED}}$，

$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle CED}}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle AED}}$

故$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BED}}\cdot\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle CED}}\cdot\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle AED}}=1$

法二：（平行线法）过C作$CG/\!/AB$，则$\frac{CE}{EA}=\frac{CG}{AF}$，$\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CG}$，

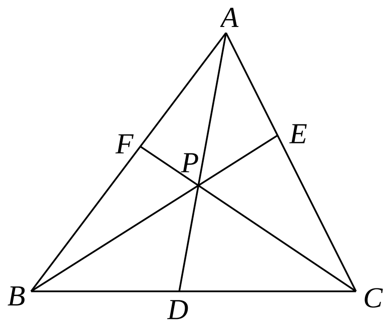
故$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{AF}=1$

法三：作高法，过A、B、C分别向DF作垂线，略.

2．证明塞瓦定理：

$\triangle ABC$中，D、E、F分别在BC、AC、AB上，且AD、BE、CF交于点P.

求证：$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$.



【分析】 法一：直线BPE截$\triangle ACD$，由梅涅劳斯定理得

$\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AP}{PD}=1$

直线CPF截$\triangle ABD$，由梅涅劳斯定理得

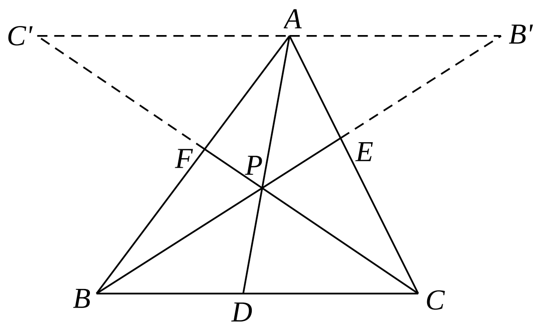
$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

两式相乘，$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

法二：由燕尾定理，即可得

法三：过A作BC边的平行线，分别交BE、CF的延长线于B'、C'．由平行线分线段成比例定理，得$\frac{BD}{DC}=\frac{AB'}{AC'}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB'}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{AC'}{BC}$．上面三式两边分别相乘得：

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$



模块一 梅涅劳斯定理

知识要点

梅涅劳斯定理

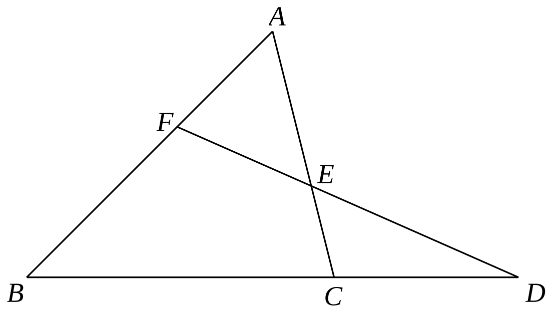
梅涅劳斯（$Menelaus$，公元98年左右），是希腊数学家兼天文学家．梅涅劳斯定理是因他的发现者而命名的平面几何中的一个重要定理．

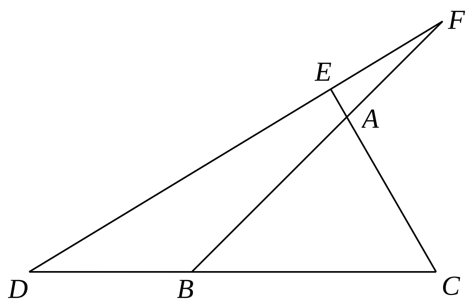
梅涅劳斯定理：

一直线截$\triangle ABC$的边BC、CA、AB或其延长线于点D、E、F，那么$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$．

梅涅劳斯定理的逆定理：

如果点D、E、F是$\triangle ABC$的边BC、CA、AB或其延长线上的点，并且$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，那么点$D$、$E$、$F$三点共线．





*注意定理中提到的三个点的位置，在梅涅劳斯定理的逆定理中，三个点要么只有两个在三角形边上，要么一个都不在三角形边上．即该逆定理成立的前提是三个点有偶数个点在三角形边上．否则为塞瓦定理的逆定理．

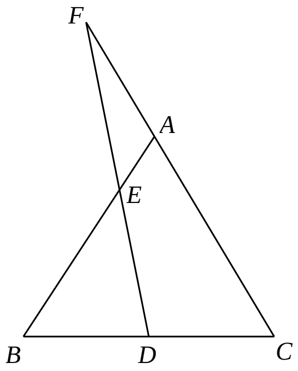
梅涅劳斯定理的应用，一是求直线形中线段长度比例的计算（共线线段的比），即在$\frac{BD}{DC}$、$\frac{CE}{EA}$、$\frac{AF}{FB}$三个比中，已知其中两个可以求得第三个；二是利用逆定理来证明三点共线．

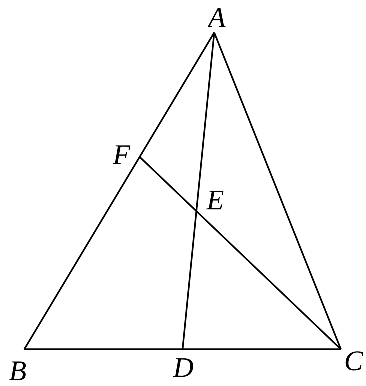
例题精讲

【例题1】

⑴ 已知$\triangle ABC$中，D是BC的中点，经过D的直线交AB于E，交CA的延长线于F．求证：$\frac{FA}{FC}=\frac{EA}{EB}$．

⑵ 设AD为$\triangle ABC$的边BC上的中线，直线CF交AD于E，交AB于F．求证：$\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{FB}$．





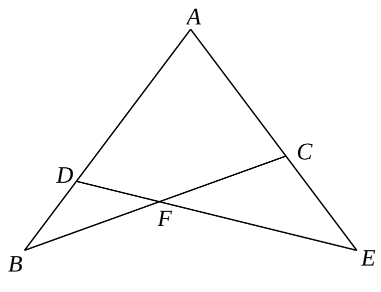
【分析】 ⑴ 直线交$\triangle ABC$三边于D、E、F三点，应用梅氏定理，$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{FC}=1$，

又因为$CD=BD$，所以$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{FC}=1$，即$\frac{FA}{FC}=\frac{EA}{EB}$．

⑵ 直线FC截$\triangle ABD$，$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$，$\frac{AE}{ED}=\frac{CB}{DC}\cdot\frac{FA}{BF}=\frac{2FA}{BF}$

【例题2】

⑴ 如图，点D是$\triangle ABC$的边AB上一点，点E在边AC的延长线上，DE交BC于点F，若$\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$，$\frac{AC}{CE}=\frac{4}{3}$，求$\frac{BF}{FC}$的值．

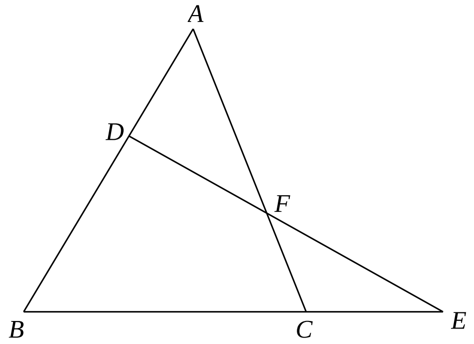


【分析】 $\triangle ABC$被直线DFE所截，$\therefore\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$（梅涅劳斯定理）

$\therefore\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$，$\frac{AC}{CE}=\frac{4}{3}$，$\therefore\frac{CE}{EA}=\frac{3}{7}$，$\therefore\frac{5}{2}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{3}{7}=1$，$\therefore\frac{BF}{FC}=\frac{14}{15}$

若学生接受较好，也可求$\frac{DF}{FE}$．

⑵已知 D、F 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB、AC 上的点，且 $AD:DB=CF:FA=2:3$，联结 DF 交 BC 边延长线于 E，那么 $EF:FD=$________.



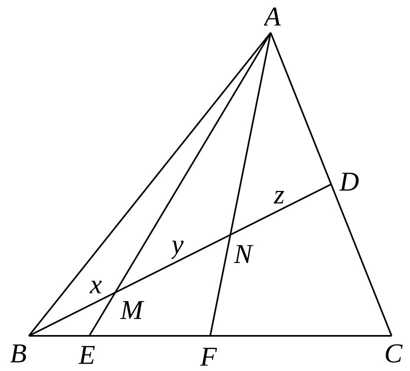
【分析】 直线 DFE 截 $\triangle ABC$，$\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}=1$，$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{BE}{EC}=1$，$\frac{BE}{EC}=\frac{9}{4}$

直线 AFC 截 $\triangle DBE$，$\frac{EF}{FD}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BC}{CE}=1$，$\frac{EF}{FD}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$，$\frac{EF}{FD}=\frac{2}{1}$，$EF:FD=2:1$

也可一次梅涅劳斯搞定

【例题3】

如图，E、F 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的点，且 $BE:EF:FC=1:2:3$，中线 BD 被 AE、AF 截得的三线段为 x、y、z，求 $x:y:z$.



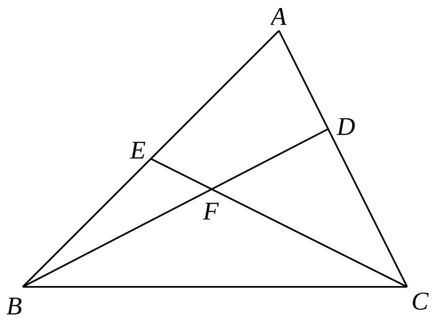
【分析】 $x:y:z=6:8:7$

$\triangle BCD$ 被直线 AME 所截，由梅涅劳斯定理得 $\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DM}{MB}=1$，即 $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{y+z}{x}=1$，得 $5x=2y+2z$；根据重心得 $x+y=2z$，解得 $x:y:z=6:8:7$

【例题4】

如图所示，设 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 上，BD 与 CE 交于 F，$AE=EB$，$\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$，$S_{\triangle ABC}=40$．求 S_{AEFD}．

八升九衔接班

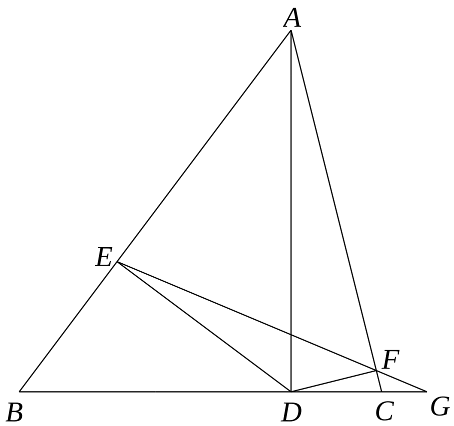


【分析】　对$\triangle ECA$和截线BFD，由梅氏定理得：$\dfrac{EF}{FC}\cdot\dfrac{CD}{DA}\cdot\dfrac{AB}{BE}=1$，即$\dfrac{EF}{FC}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{1}=1$，

所以$\dfrac{EF}{FC}=\dfrac{1}{3}$．所以$S_{\triangle BFE}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle BEC}=\dfrac{1}{8}S_{\triangle ABC}$，$S_{AEFD}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BEF}=\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{8}\right)S_{\triangle ABC}=11$．

【例题5】

已知AD是$\triangle ABC$的高，D在线段BC上，且$BD=3$，$CD=1$，作DE与AB垂直，DF与AC垂直，E、F分别是垂足，联结EF并延长，交BC延长线于G，求CG．



【分析】　如图，设$CG=x$，则由梅涅劳斯定理$\dfrac{4+x}{x}\cdot\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AE}{EB}=1$．

由射影定理，$\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{DC^2}{AD^2}$，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AD^2}{BD^2}$，于是$\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{4+x}{x}=1$，得$x=\dfrac{1}{2}$．

模块二 塞瓦定理

知识要点

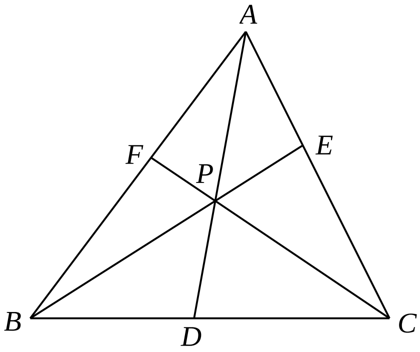
塞瓦定理

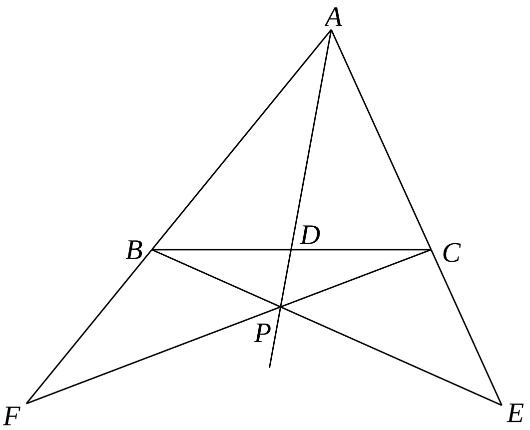
塞瓦（*Ceva*，1647-1734）是意大利数学家兼水利工程师．他在1678年发表了一个著名的定理，后世以他的名字来命名，叫做塞瓦定理．

联结三角形一个顶点和对边（或其延长线）上一点的线段叫做这个三角形的一条塞瓦线．

塞瓦定理： 如果点D、E、F分别在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上或其延长线上，并且AD、BE、CF相交于一点，则$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$．

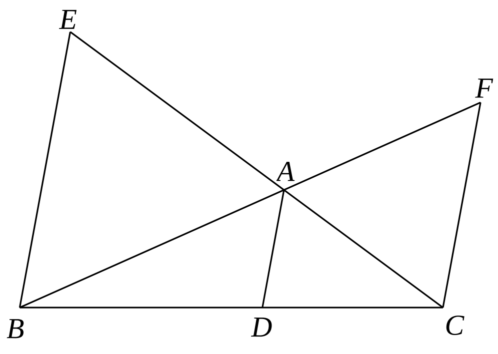
塞瓦定理的逆定理：如果点D、E、F分别在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上或其延长线上，并且$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，则$AD$、$BE$、$CF$相交于一点（或平行）．





只有两种情况（如上图）：D、E、F都在三边上，或只有其中之一在边上

在塞瓦定理的逆定理中，若两条塞瓦线相交，则三条塞瓦线必共点；若两条塞瓦线平行则三条塞瓦线互相平行（如下图）．

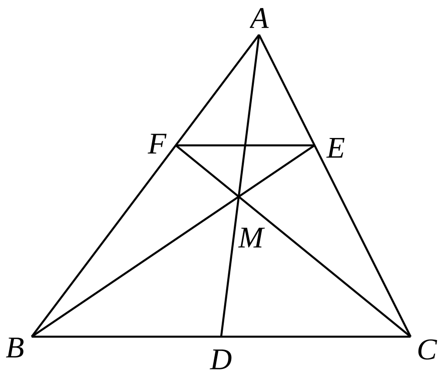


塞瓦定理的应用，一是依据塞瓦定理，可以得出六条线段比例乘积等于1的关系式，利用这个关系式可以证明线段之间的比例式或乘积式；二是利用塞瓦定理的逆定理可证明三线共点问题．

例题精讲

【例题6】

如图，在$\triangle ABC$中，F、E分别在边AB、AC上，且$EF \parallel BC$， 设BE与CF交于点M，AM与BC交于D，求证：D是BC的中点.



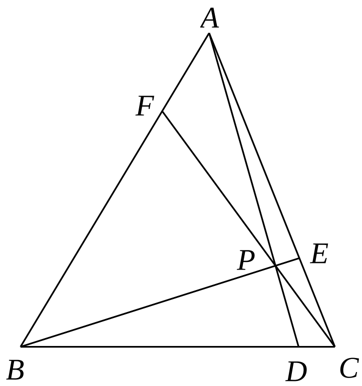
【分析】 $\because EF \parallel BC$，$\therefore \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AE}{EC}$

对$\triangle ABC$和点M应用塞瓦定理可得：$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$.

$\therefore \dfrac{BD}{DC}=1$．即$BD=DC$，$\therefore$ D是BC的中点.

【例题7】

如图，E、F分别为$\triangle ABC$的AC、AB边上的点，且$AE=3EC$，$BF=3FA$，BE、CF交于P，AP的延长线交BC于D．求$AP:PD$的值.



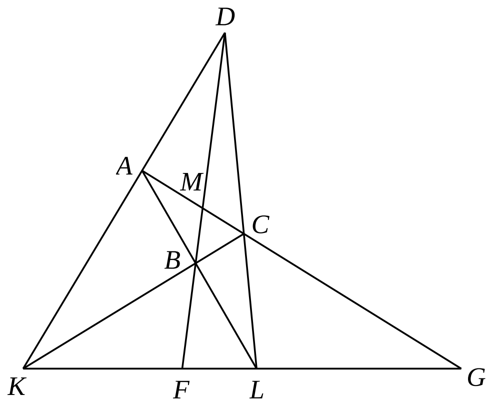
【分析】 $\because P$为$\triangle ABC$的塞瓦点 $\therefore \dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{1}{3}=1$

$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{9}{1}$，$\therefore \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{9}{10}$．$\because EPB$为$\triangle ACD$的梅氏线，

$\therefore \dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{3}=1$，$\therefore \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{10}{3}$.

【例题8】

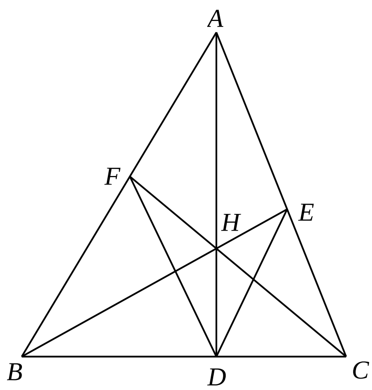
如图，四边形$ABCD$的对边AB和CD，AD和BC分别相交于L、K，对角线AC与BD交于M．直线KL与BD、AC分别交于F、G．求证：$\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$．

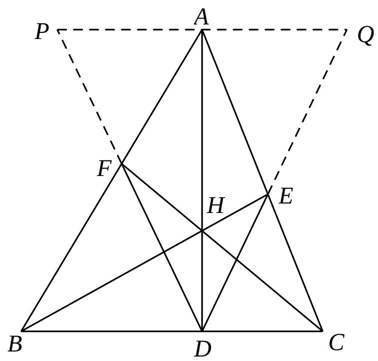


【分析】　对$\triangle DKL$与点B应用塞瓦定理得：$\dfrac{DA}{AK}\cdot\dfrac{KF}{FL}\cdot\dfrac{LC}{CD}=1$．对$\triangle DKL$和截线$ACG$应用梅涅劳斯定理可得：$\dfrac{DA}{AK}\cdot\dfrac{KG}{GL}\cdot\dfrac{LC}{CD}=1$．进而可得$\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$．

【例题9】

锐角$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高线，H是线段AD内任一点，BH和CH的延长线分别交AC、AB于E、F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$．





【分析】　过点A作$PQ\parallel BC$，与DF、DE的延长线分别交于点P、Q，则$DA\perp PQ$．

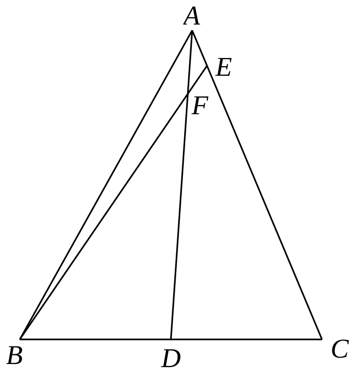
由塞瓦定理，得$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$．

又因为$PQ\parallel BC$，所以$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AP}{BD}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CD}{AQ}$，所以$\dfrac{AP}{BD}\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CD}{AQ}=1$．进而$AP=AQ$．所以$PD=QD$，即$\triangle PQD$是等腰三角形，所以$\angle EDA=\angle FDA$．

本讲巩固

【巩固1】

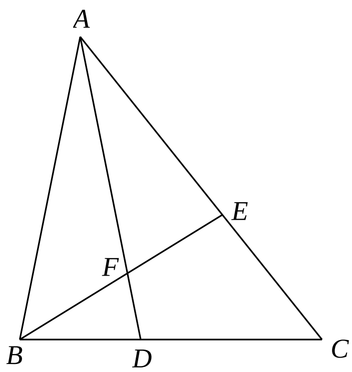
如图，$\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，F 是 AD 上的一点，且 $\frac{AF}{FD}=\frac{1}{5}$，联结 BF 并延长交 AC 于 E，求 $\frac{AE}{EC}$ 的值.



【分析】 在 $\triangle ABC$ 中，由梅涅劳斯定理有 $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}=1$，所以 $\frac{AE}{EC}=\frac{BD\cdot AF}{BC\cdot DF}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

【巩固2】

设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，$\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$，$E$ 是边 AC 上的一点，$\frac{AE}{EC}=\frac{4}{3}$，$AD$ 与 BE 相交于点 F，求 $\frac{AF}{FD}\cdot\frac{BF}{FE}=$________.

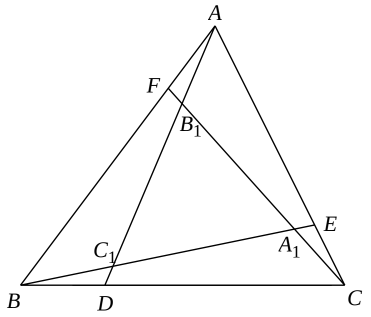


【分析】 由梅涅劳斯定理 $\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，$\frac{BF}{FE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$，故 $\frac{AF}{FD}=\frac{10}{3}$，$\frac{BF}{FE}=\frac{7}{6}$，

$\therefore \frac{AF}{FD}\cdot\frac{BF}{FE}=\frac{35}{9}$

【巩固3】

在$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB上分别取点D、E、F，使$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{3}$．若$BE$与$CF$，$CF$与$AD$，$AD$与$BE$的交点分别为$A_1$、$B_1$、$C_1$．求证：$\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{13}$．



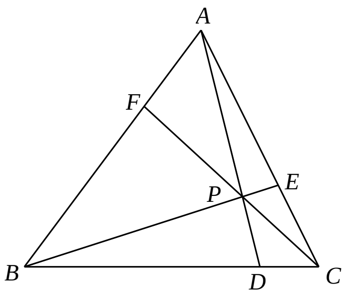
【分析】 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DB_1}{B_1A}=1$，即$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{DB_1}{B_1A}=1$，所以$\dfrac{AB_1}{B_1D}=\dfrac{4}{9}$．因此$\dfrac{AB_1}{AD}=\dfrac{4}{13}$，所以$\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{4}{13}$．

又因为$\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，所以$\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{S_{\triangle ADC}}\cdot\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{13}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{13}$．

同理$\dfrac{S_{\triangle BC_1A}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{13}$，$\dfrac{S_{\triangle CA_1B}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{13}$．进而可得$\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{13}$．

【巩固4】

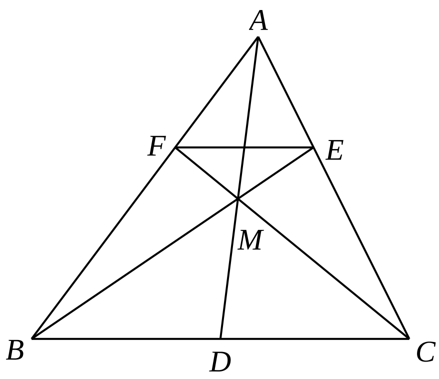
若E、F是$\triangle ABC$中AC、AB边上的点，且有$AF:AB=CE:CA=1:3$，BE交CF于P，AP交BC于D，求$CD:CB$的值．



【分析】 塞瓦定理，$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$，$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=1$，$\dfrac{BD}{DC}=4$，$\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{5}$

【巩固5】

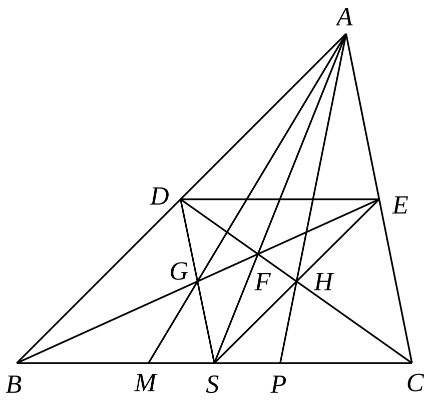
如图，设 M **为**$\triangle ABC$ **内一点，** BM **与** AC **交于点**E**，** CM **与** AB **交于**F**，若** AM **通过** BC **的中点** D**，求证：** $EF \parallel BC$.



【分析】 对$\triangle ABC$和点M应用塞瓦定理可得：$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$． 又因为$BD=DC$，所以$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$． 进而$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AE}{EC}$，所以$EF\parallel BC$．

试题拓展

【拓展1】 如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在AB、AC上，$DE // BC$，BE、CD交于点F，AF延长后交BC于点S，SD与BE相交于点G，SE与CD相交于点H，AG、AH延长后分别交BC于点M、P，求$BM:MP:PC$.



【分析】 由塞瓦定理易知$BS=CS$，又由梅涅劳斯定理，$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PH}{HA}\cdot\frac{AD}{DB}=1$，$\frac{CS}{SP}\cdot\frac{PH}{HA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$，两式相除，注意$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$，$BC=2SC$，得$CP=2SP$，易得$CP=\frac{1}{3}BC$，同理，$BM=\frac{1}{3}BC$，故$BM:MP:PC=1:1:1$.