

分数应用题讲解

什么是单位 1

在小学学习数学的过程中，**单位 1** 这个概念非常重要，解应用题过程中，一定要明确 **单位1** 的概念。**单位1** 不是一个神秘的东西，它表示**一个整体**；

比如我们把一块蛋糕平均分成三份，每一份是 $\frac{1}{3}$ ，这个时候，**这一整块蛋糕就是 单位1；整个班级人数，全部的路程长度，所有的工作量，一本书的页数，树的棵数** 等等都是常见的单位1。

如何确定单位1

可以从应用题中总结规律，找到最快判别 **单位1** 的方法。

首先来看关键词：“比” “的” “比XX的多或少”

例题1

一条公路，已经修好了 2 千米，这时“未修的”比“已修的”多 $\frac{1}{5}$ ，这条公路全长多少？

在这道应用题中，“比”字后面的是“已经修好的长度”，“的”字前面的也是“已经修好的长度”，因此 **单位1 是已经修好的长度**。在这道题中，我们不把全长作为单位1。

解析：未修的里程“比”已修的里程多 $\frac{1}{5}$ ，因为已修里程为 2 km，所以未修里程是 $2 + 2 \times \frac{1}{5} = 2\frac{2}{5}$ km，全程就是 已修+未修 = $2 + 2\frac{2}{5} = 4\frac{2}{5}$ km。

画线段图如下：

已修：——2km——
未修：—— $\frac{1}{5} \times 2$ ——

答：全程长 $4\frac{2}{5}$ km。

例题2

爸爸买了一箱猕猴桃 40 千克，第一天吃了 这箱 的 $\frac{1}{2}$ ，第二天比第一天 少吃了 $\frac{1}{4}$ ，第二天吃了多少千克？

这里要抓住关键的两句话（下划线的两句）。

第一句：“的”字前面的是 **单位1**，第二句：“比”字后面的是 **单位1**

解析：第一天吃了 $40 \times \frac{1}{2} = 20$ kg，
第二天比第一天少吃 $20 \times \frac{1}{4} = 5$ kg，故第二天吃了 $20 - 5 = 15$ kg。

画线段图如下：

第一天：—— $\frac{1}{2}$ ——
第二天：—— $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ —— } 40 kg

第一天 $40 \times \frac{1}{2} = 20 \text{ kg}$

第二天 $20 - 20 \times \frac{1}{4} = 15$, 或者 $40 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}) = 40 \times \frac{3}{8} = 15 \text{ kg}$

答：第二天吃了 15 千克。

在做分数乘法和分数除法的应用题时，第一步就是明确单位1，通过“比”字后或前的几个字明确好单位1，当然一个复杂的应用题中不止一个单位1，需要分开讨论。

为什么要找到单位1（求一个数的几分之几是多少）

一个数乘以分数的意义，比如 $5 \times \frac{1}{4}$ 表示 **5的** $\frac{1}{4}$ 是多少，同样的 5的 $\frac{1}{4}$ 是多少也可以用乘法式子 $5 \times \frac{1}{4}$ 来计算，此处“的”表示的就是一个乘法。

求5的 $\frac{1}{4}$ 是多少，就是把 **5** 看作一个整体（单位1），平均分成 **4** 份，求一份是多少？有关于单位1的概念都是这样的思想！

例题3

小明的零花钱是 **20** 元，张强的零花钱是小明零花钱的 $\frac{1}{4}$ ，问张强有多少元零花钱？

在这道题中，“的”字前面的数量也就是“小明零花钱”为单位1，“的”就表示乘法，因此张强的零花钱是： $20 \times \frac{1}{4} = 5$ 元。

因此找到单位1是我们去做分数乘法和分数除法最重要的第一步。

例题4

樟树可以活 **800** 年，榆树的寿命是樟树的 $\frac{5}{8}$ ，枣树的寿命是榆树的 $\frac{4}{5}$ ，枣树的寿命是多少年？

解题过程：榆树： $800 \times \frac{5}{8} = 500$ （年），枣树： $500 \times \frac{4}{5} = 400$ （年）

在这道题中，单位1在发生变化，一开始是樟树，后面是榆树，**单位1** 在发生变化，顺着解下去就能得到最后的答案，当然还有不止那么简单的单位1转变。

例题5

一本书有 **240** 页，鹏鹏第一天看了全书的 $\frac{1}{4}$ ，第二天看了余下的 $\frac{1}{6}$ ，第三天应从多少页开始看？

解题过程：第一天： $240 \times \frac{1}{4} = 60$ （页），第一天看了60页，余下 $240-60=180$ 页；

第二天： $180 \times \frac{1}{6} = 30$ （页）

总共两天看了90页，第三天从91页开始看。

比一个数多或少 几分之几

经过上面的拆解，我们已经知道 **一个数的几分之几是多少** 应该怎么去求了，直接用 **乘法**。在此基础上我们再进行加深，当然这种题也不难，只需要在此基础上再加上一步就能求出正确答案。

例题6

第一根绳子长 **2** 米，第二根绳子比第一根绳子长 $\frac{1}{4}$ ，那么第二根绳子长多少米？

明确单位1是第一根绳子，不用管太多，用单位1乘以分数， $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ （米）

那么也就是说第二根绳子比第一根绳子长 $\frac{1}{2}$ 米，第一根绳子是2米，那么第二根绳子就是 $2 + \frac{1}{2} = 2.5$ 米。

答：第二根绳子长2.5米。

例题7

食堂买进 **600** 千克大米，第一天吃了总数的 $\frac{1}{5}$ ，第二天比第一天多吃了 $\frac{1}{8}$ ，那么第二天吃了多少千克大米？

解析：画线段图如下：

第一天： $\frac{1}{5}$
第二天： $\frac{1}{8 \times 1/5}$
第二天后：...

} 600 kg

第一天 $600 \times \frac{1}{5} = 120$ kg

第二天比第一天多吃了多少呢？ $120 \times \frac{1}{8} = 15$ （千克）也就是说第二天比第一天多吃了15千克，第一天吃的数量在“的”的前面是单位1

第二天 $120 + 120 \times \frac{1}{8} = 135$ ，或者 $600 \times (\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{8}) = 600 \times \frac{9}{40} = 135$ kg

答：第二天吃了 135 千克。

例题8

某车间有男职工 **80** 名，女职工的人数比男职工少 $\frac{1}{5}$ 。女职工有多少人？

在这道题中，“比”后面的数量是男职工的人数，因此男职工为单位1，男职工的 $\frac{1}{5}$ 可以顺利的求出 $80 \times \frac{1}{5} = 16$ 人，也就是说女职工比男职工少16人， $80 - 16 = 64$ 人。

为了说明问题，选取的例子都是典型例题，当然也有较为综合的例题，内核思想不变，只是题目的步骤增加不少。

例题9

十一黄金周，北京故宫第一天的门票收入240万元，第二天的门票收入比第一天增加了 $\frac{1}{8}$ ，第三天的收入是第二天收入的 $\frac{5}{9}$ ，这三天共收入多少元？

解析：画线段图如下：

第一天： 240
第二天： $\frac{1}{8 \times 240}$
第三天： $\frac{5}{9}$

} 第二天 $\times 5/9$

第二天： $240 + 240 \times \frac{1}{8} = 270$ (万元)

第三天： $270 \times \frac{5}{9} = 150$ (万元)

总共三天： $240 + 270 + 150 = 660$ (万元)

答：故宫这三天的收入总和是660万元。

分数乘除法公式

现在我们引入三个概念：**标准量**，**比较量**和**分率**（也可以理解为**总量**，**分量和占比**）

标准量为单位1，是一个整体，比较量就是标准量的几分之几（分率）。

例题10

把一个**10**千克蛋糕平均分成**5**份，求其中一份蛋糕重量是多少千克？

$$10 \times \frac{1}{5} = 2 \text{ (千克)}$$

在这道题中，标准量（总量）就是一个蛋糕10千克，比较量（分量）2千克，分率（占比）就是 $\frac{1}{5}$

因此：**比较量=标准量×分率** 或 **分量=总量×占比**

由此可以引申：**标准量=比较量÷分率**，**分率=比较量÷标准量**，**总量=分量÷占比**，**占比=分量÷总量**

类似 路程、速度和时间的关系式：**路程=速度×时间**

分数应用题的分类

1. 求一个数是另一个数的几分之几（分率或占比）

这类问题的特点：已知两个量，比较它们间的倍数关系，解这类题用**除法**。

- 求 a 是 b 的几分之几： $a \div b = \frac{a}{b}$ 即可得到分率（几分之几）
- 求 a 比 b 多几分之几：相差量÷单位1的量=分率（多几分之几），即 $(a - b) \div b = \frac{a - b}{b} = \frac{a}{b} - 1$
- 求 a 比 b 少几分之几：相差量÷单位1的量=分率（少几分之几），即 $(b - a) \div b = \frac{b - a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$

注意：“比”后面的量为 单位1的量，作为除数使用。

2. 已知“单位1的量”和分率（占比），求对应的量。

这类问题的特点：已知单位1的量，求一个数的几分之几是多少的数量，解这类题型，通常用**乘法**。

- 求 a 千克的 $\frac{n}{m}$ 是多少千克？ $a(\text{单位1}) \times \frac{n}{m}(\text{分率}) = \text{是多少千克或分量(分率对应的量)}$
- 求比 a 千克多 $\frac{n}{m}$ ，多多少千克？ $a(\text{单位1}) \times \frac{n}{m}(\text{分率}) = \text{多的千克(分率对应的量)}$
- 求比 a 千克多 $\frac{n}{m}$ 是多少千克？ $a(\text{单位1}) \times (1 + \frac{n}{m})(\text{分率}) = \text{是多少千克(分率对应的比较量或分量)}$

- 求比 a 千克少 $\frac{n}{m}$, 少多少千克? $a(\text{单位}1) \times \frac{n}{m}(\text{分率}) = \text{少的千克}(\text{分率对应的比较量})$
- 求比 a 千克少 $\frac{n}{m}$ 是多少千克? $a(\text{单位}1) \times (1 - \frac{n}{m})(\text{分率}) = \text{是多少千克或分量}(\text{分率对应的比较量})$

3. 已知一个数的几分之几是多少, 求这个数。

这类问题的特点: 已知一个数的几分之几是多少的数量, 求“单位1”的量, 解这类题型, 通常用 **除法**。

- 一个数的 $\frac{n}{m}$ 是 a , 求这个数。 $a(\text{分率对应的量}) \div \frac{n}{m}(\text{分率}) = \text{单位}1\text{对应的量}$
- a 比一个数多 $\frac{n}{m}$, 求这个数。 $a(\text{分率对应的量}) \div (1 + \frac{n}{m})(\text{分率}) = \text{单位}1\text{对应的量}$
- 一个数比另一个数多 $\frac{n}{m}$, 一个数比另一个数多 a , 求另一个数。
 $a(\text{分率对应的量}) \div \frac{n}{m}(\text{分率}) = \text{单位}1\text{对应的量}$

总结: 分数应用题解法

正确审题

要正确审题, 否则前功尽弃。首先根据题中的分率句子, 准确判断单位1的量和对应量(通常情况下看分率是“谁的几分之几”, 谁就是单位1的量), 且判断单位1的量已知(用乘法)或者单位1的量未知(用除法或者列方程); 其次会把“比”字句转换成“是”字句; 第三是能够将模糊分率句转换成较详细的句子。

画线段图

线段图有直观、形象等特点。按照数量比例, 恰当选用实线或虚线把已知条件和问题表示出来, 数形结合, 有利于确定解题思路。

对应量、分率、单位1的量之间的转换

例题11

一批货物, 第一次运走总数的 $\frac{1}{5}$, 第二次运走总数的 $\frac{1}{4}$, 还剩下 110 吨。对应量, 分率, 单位1的量之间的对应关系如下:

- 单位1的量: 货物的总重量;
- 第一次运走的量: 总重量的 $\frac{1}{5}$;
- 第二次运走的量: 总重量的 $\frac{1}{4}$;
- 两次运走的重量占比: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$;
- 两次后剩下的量: $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$;
- 两次后剩下的分率与对应量: 110和 $\frac{11}{20}$;
- 对应总量就是 $110 \div \frac{11}{20} = 110 \times \frac{20}{11} = 200$ 吨

寻找分率

在解决较复杂的分数应用题时, 需要将“间接分率”转化为“能够解题的分率”, 也就是我们需要的分率, 由已知的分率联想到和它相关的分率。

例题12

一项工程, 已经完成了全部的 $\frac{7}{10}$, 那么未完成的 $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$