整除与余数问题 2012-9-15

知识点

一、带余除法：若有 a÷b=q…r，则 a＝b×q＋r，0≤r＜b，（r=0,→整除，约数，倍数）

二、三大余数定理：余数的加法定理、乘法定理和同余定理

1. ***余数加法定理：若 A mod c=r, B mod c=s, →(A+B) mod c=(r+s) mod c, 特例 nA mod c=nr mod c，例如：∵ 11 mod 9=2，∴11n mod 9=2n mod 9（n 为正整数）***
2. ***余数乘法定理：若 A mod c=r, B mod c=s, → AB mod c=rs mod c，特例 A^n mod c=r^n mod c，例如：∵ 10 mod 9=1，∴10^n mod 9=1^n mod 9=1（n 为正整数）***
3. ***同余定理：A mod c=r, B mod c=r, →(A-B) mod c=(r-r) mod c = 0, c|(A-B)，特例 任意正整数 N，与其各位数字之和 S，∵N mod 9=S mod 9，∴ 9|（N-S），如 N=13579 mod 9=7，S=1+3+5+7+9=25 mod 9=7，故 N-S=13579-25=13554 mod 9=0，即 9|13554***
4. ***数的整除要求掌握：能 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 整除的数判断方法。***
5. ***推广到更一般的有：***
   a) ***一个数被 2 或 5 整除，与这个数的个位数字被 2 或 5 除，所得余数相同；***
   b) ***一个数被 4 或 25 整除，与这个数的末两位组成的数被 4 或 25 除，所得余数相同；***
   c) ***一个数被 8 或 125 整除，与这个数的末三位组成的数被 8 或 125 除，所得余数相同；***
   d) ***一个数被 3 或 9 整除，与这个数的各位数字和被 3 或 9 除，所得余数相同；***
   e) ***一个数被 11 整除，与这个数的奇数位数字和、偶数位数字和的差被 11 除，所得余数相同；***

【例 1】 一个六位数$\overline{1082\square\square}$能被 **23** 整除，末两位数有多少种情况？

解 1：从最小的数开始

108200÷23=4704……8

8+15=23，就没有余数了。108215,就是一解，不断加 23.

108215+23=108238, 108238+23=108261, 108284

解 2：（杨逸飞）从最大的数开始

也可以从 108299÷23=4708……15，

108299-15=108284，不断减 23，得到各种可能。

解 3：（徐得濠）将六位数拆成 108200+ab，∵108200 mod 23=8, 且 23|（108200+ab），

∴ ab mod 23=（23-8）=15，故两位数 ab 可以为 15+23k，k 可以取 0,1,2,3，共四种情况。

【例 2】 **能被 11 整除的最小九位数是多少？**

解 1：（刘思源等）若某数可被 11 整除，则其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差为 11 的倍数，要这样的数最小，首位取 1，十位取 1，其余数位取 0，即所求数为 100000010。

解 2：最大的八位数为 99999999，除以 11 的余数为 0，再加上 11，就是最小的九位数：100000010.

解 3：最小的九位数为 100000000，而 100000000 mod 11=1，要使 100000000 除以 11，所得余数为 0，则至少需要增加 10，也可以得到。

【例 3】 **已知四位数 abcd 是 11 的倍数，且 b+c=a，bc 为两位完全平方数，求此四位数**

解：（刘思源）bc 为两位数，又是完全平方数，我们知道两位完全平方数有：

16, 25, 36, 49, 64, 81，∵a=b+c

∴分别对应 a 为 7, 7, 9, 13, 10, 9，而 a 是 1-9 的数字，故 49, 64 可以舍去。

剩下来确定 d：

∵716d, 725d,936d,981d 是 11 的倍数，奇数位之和与偶数位之和的差是 11 的倍数，

∴（7+6）-（1+d）=12-d ≡0（mod 11），故 d=1, 7161 是所求四位数；

同理 7+5-2-d=10-d，0≤d≤9，不存在这样的 d，使得 10-d 能被 11 整除；

9+6-3-d=12-d ≡0（mod 11），故 d=1，9361 是另一个解；

9+1-8-d=2-d ≡0（mod 11），故 d=2,9812 是一解。

故共有三个解：7161,9361,9812

注：这里明确了 bc 为两位完全平方数，故 b≠0，否则还要考虑 00,01,04,09 这四种情况，否则还要加上这样 3 个四位数 1012,4048,9097.

【例 4】 **两个三位$\overline{abc},\overline{def}$的和$\overline{abc}+\overline{def}$能被 37 整除，证明：六位数$\overline{abcdef}$也能被 37 整除。**

证明：（杨逸飞，刘思源）$\because 37\,|\,(\overline{abc}+\overline{def})$，$\therefore \overline{abc}+\overline{bcd}=37m \quad (m为整数)$

又$\because \overline{abcdef}=\overline{abc}\times 1000+\overline{def}$

$=\overline{abc}\times 999+\overline{abc}+\overline{def}$

而$999=9\times 3\times 37$，

$\therefore \overline{abcdef}=37\times 27\times \overline{abc}+37m$

$=37(27\times \overline{abc}+m)$

$\therefore 37\,|\,\overline{abcdef}$

【例 5】 **已知一个七位自然数$\overline{62xy427}$是 99 的倍数（其中x,y是 0 到 9 中的某个数字），试求$950x+24y+1$的值，简写出求解过程。**

分析：要判断某数能否被一个合数整除，只须将这个合数分解成两个互质的约数的乘积，若这个整数能分别被这两个约数整除，则这个数能被这个合数整除。

$\overline{62xy427}$是 99 的倍数，而 $99=9\times 11$，故$\overline{62xy427}$分别是 9 和 11 的倍数，由被 9，11 数整除的数的特点而解此题。

解：$\because 99\,|\,\overline{62xy427}$，$\therefore 9\,|\,\overline{52xy427}$且$11\,|\,\overline{62xy427}$

$\therefore 6+2+x+y+4+2+7=18+3+x+y$是 9 的倍数，

即$3+x+y=9m$（m为自然数）$\because 0\le x\le 9, 0\le y\le 9$，

$\therefore 3 \le x+y+3 \le 21$。$\therefore x+y+3=9$，或 $x+y+3=18$

$\therefore x+y=6$ 或 $x+y=15$

$\because 11 \mid \overline{62xy427}$，$\therefore 11 \mid [(6+x+4+7)-(2+y+2)]$

即　$11 \mid (13+x-y)$　　故 $2+x-y$ 是 11 的倍数

又 $\because -9 \le x-y \le 9$，即 $-7 \le 2+x-y \le 11$

$\therefore x-y=-2$或$x-y=9$　　$\therefore x+y$与$x-y$ 同奇偶，

$\therefore \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=9 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases}$（不是数字 0~9，不合题意，舍去）

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore 950x+24y+1=950\times 2+24\times 4+1=1997$

【例 6】　**设 p 是质数，证明：满足 $a^2=pb^2$ 的正整数 a，b 不存在。**

证明：反证法，

证法 1：假定存在正整数 a，b，使得 $a^2=pb^2$

∵p|右边，∴$p|a^2$，且 p 是质数，故 p|a，即存在 a_1，使得 $a=pa_1$，　代入原式，得到：

$(pa_1)^2=pb^2$，化简，得 $b^2=pa_1^2$，

同理可得 p|b，存在 b_1，使得 $b=pb_1$，代入上式，得 $a_1^2=pb_1^2$

显然，这个过程可以一直进行下去，即 $a=p^na_n, b=p^nb_n$，n 可以为无穷大，与 a，b 是给定的有限正整数矛盾。（到这一步，只有刘思源理解了，可以接受）

证法 2：（换思路）假定存在正整数 a，b，使得 $a^2=pb^2$

令 a，b 的最大公约数（a，b）=d，$a=a_1d$, $b=b_1d$，则（a_1, b_1）=1，所以

$a_1^2d^2=pb_1^2d^2, a_1^2=pb_1^2$

所以　$p|a_1^2$，由于 p 是质数，可知 $p|a_1$，即 $a_1=pa_2$，则 $pa_2^2=b_1^2$，

同理可得 p|b1，即 a1，b1 都含有 p 这个因子，与（a_1, b_1）=1 矛盾。

证法 3：利用完全平方数个位数的特点，只能是 0,1,4,5,6,9. 如果 p=2，就是证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证法 4：$p=(a/b)^2$，　p 是正整数，所以 b|a，不妨设 a=bk，k 为正整数，显然 k≠1，否则 p=1,1 不是素数，故 k>1，从而 $p=k^2$，故 k|p，这与 p 是素数矛盾。

【例 7】　**求证：一个十进制数被 9 除所得的余数，等于它的各位数字被 9 除所得的余数。**

证明：设十进制数为 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$，

∵10≡1（mod 9），故对任意正整数 k≥1，有：$10^k\equiv 1$（mod 9）

因此：

$$N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$$
$$\equiv(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)\pmod 9$$

即 N 被 9 除所得余数等于它的各位数字之和被 9 除所得的余数。

注：（1）被 9 整除的充要条件就是各位数字之和能被 9 整除；

（2）弃九法就是依据这个结论的。

【例 8】一位魔术师让观众写了一个六位数 a，并将 a 的各位数字相加得到 b，他让观众说出 a-b 中的 5 个数字，观众报出 1,3,5,7,9， 魔术师便说出余下的那个数，问那个数是多少？

【解】由于一个数 a 除以 9 所得的余数与这个数的各位数字和 b 除以 9 所得的余数相同，由同余定理得：9|（a-b）。

六位数 a 的各位数字之和在 1（最小的六位数 100000）和 54（最大的六位数 999999）之间，故 a-b 最多也只能是六位数，由题意给出了 5 个数（1,3,5,7,9），设余下的第 6 个数为 x，则

9|（1+3+5+7+9+x）

9|（7+x）

∵ 0≤x≤9，∴x=2

注：同样用了弃九法，与数字 9 相除所得余数关系，用模 9 来猜数字谜，用模 9 检验结果是否错误，可见模 9 的应用极其丰富。

【例 9】 若 $p,q,\dfrac{2p-1}{q},\dfrac{2q-1}{p}$ **都是正整数，并且 p>1, q>1, 求 pq 的值。**

【解】（1）如果 p=q，则

$\dfrac{2p-1}{q}=2-\dfrac{1}{q}$ 不是整数，所以 p≠q;

（2）不妨设 p<q, 则

$$1\le\frac{2p-1}{q}<\frac{2q-1}{q}=2-\frac{1}{q}<2$$

∵ $\dfrac{2p-1}{q}$ 是正整数，∴ $\dfrac{2p-1}{q}$=1， 即 q=2p−1

从而 $\dfrac{2q-1}{p}=\dfrac{4p-3}{p}=4-\dfrac{3}{p}$，是正整数，且 p>1，故 p=3,

从而 q=5，所以 pq=3×5=15

【例 10】 **将正整数 N 写在任意一个正整数的右边（例如：将 2 写在 35 的右边，得到 352)，如果**

得到的新数都能被 N 整除，那么 N 称为“魔术数”，问：在小于 130 的正整数中，有多少个魔术数？

【解】设小于 130 的魔术数 N，接在任意正整数 P 的右边，得到 $\overline{PN}$，显然 N 可以为 1 位数，2 位数和 3 位数，以下分别讨论：

（1） N 为 1 位数，则 $\overline{PN}$ =10P+N，N|(10P+N), N|10P 对任意 P 成立，故 N|10，所以 N=1,2,5;

（2） N 为 2 位数，则 $\overline{PN}$ =100P+N， N|(100P+N), N|100P 对任意 P 成立，故 N|100，且 10≤N≤99, $100=2^2\times5^2$, 所以 N=10,20,25,50;

（3） N 为 3 位数，则 $\overline{PN}$ =1000P+N， N|(1000P+N), N|1000P 对任意 P 成立，故 N|1000，且 100≤N≤130, $100=2^3\times5^3$, 所以 N=100,125 ;

故小于 130 的魔术数共有 9 个，分别是 1,2,5,10,20,25,50,100,125。

注：通过上述分类讨论，可以得到：k 位魔术数一定是 10^k 的约数。

综合结果如下：

1 位魔术数为 1,2,5;

2 位魔术数为 10,20,25,50;

3 位魔术数为 100,125,200,250,500;

3 位或 3 位以上的魔术数，每种个数均为 5.

注 2：类破坏数，破坏数 N 放在任意自然数 P 的右边，使得（N+1）不能整除 PN。

【例 11】 **有多少个自然数除 200，余数为 8?**

【解】设 n 为满足题意的自然数，则存在一个数 p，使得 200=np+8 （n>8）

所以 np=192, 因此 n 应该是 192 的约数，原问题转化为求 192 的大于 8 的约数的个数。

因为 $192 = 2^6X3$，所以 192 的约数个数为（6+1）x（1+1）=14 个。

另外 n>8, 故小于 8 的约数：1,2,3,4,6，8 不符合要求，故符合题意的自然数共有 14-6=8 个。

注：本题为余数问题的基础题型，需要学生明白一个重要知识点，就是把余数问题---即**“不整除问题”转化为整除问题。方法为用被除数减去余数，即得到一个除数的倍数；或者是用被除数加上一个“除数与余数的差”，也可以得到一个除数的倍数。**

【例 12】 **一个两位数除 310，余数是 37，求这样的两位数。**

【解】本题中 310-37=273，说明 273 是所求余数的倍数，而 273=3×7×13，所求的两位数约数还要满足比 37 大，符合条件的有 39，91.

【例 13】 **求证：（1）8|（55^{1999}+17），（2）8|（3^{2n}+7），（3）17|（19^{1000}-1）**

解：利用将余数化±1 方法。

（1）$\because 55\equiv(-1)\pmod 8$ $\therefore 55^{1999}\equiv(-1)^{1999}\equiv-1\pmod 8$

$55^{1999}+17\equiv-1+17=16\equiv0$（mod 8），即 $8|（55^{1999}+17）$

（2）∵$3^2=9\equiv1$（mod 8），∴$3^{2n}=（3^2）^n=9^n\equiv1^n\equiv1$（mod 8）

$3^{2n}+7\equiv1+7=8\equiv0$（mod 8），即 $8|（3^{2n}+7）$

（3）∵$19\equiv2$（mod 17），∴$19^4\equiv2^4=16\equiv-1$（mod 17）

$19^{1000}-1=（19^4）^{250}-1\equiv（-1）^{250}-1=1-1=0$ （mod 17），即 $17|（19^{1000}-1）$

注：也可以用二项展开公式：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k\text{，这里 }C_n^0=C_n^n=1,C_n^k=C_n^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

【例 14】 求最大的正整数 n，使得 $3^{1024}-1$ 能被 2^n 整除。

【解】利用了平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，$1024=2^{10}$

∵$3^{1024}-1=(3^{512}+1)(3^{256}+1)(3^{128}+1)\cdots(3+1)(3-1)$ ①

对于正整数 k，有 $3^{2^k}+1\equiv(-1)^{2^k}+1=2\ (\text{mod}\ 4)$

上述①右边有 11 个括号中，(3+1）是 4 的倍数，其它的 10 个括号都是 2 的倍数，但不是 4 的倍数，故 n 的最大值为 12.

【例 15】 求使 2^n-1 为 7 的倍数的所有正整数 n

【解】利用将余数化±1 的方法。

∵$2^3=8\equiv1$（mod 7），所以可以对 n 按模 3 进行分类讨论：

（1） 若 n=3k，则 $2^n-1=2^{3k}-1\equiv1^k-1=0$（mod 7）

（2） 若 n=3k+1，则 $2^n-1=2^{3k+1}-1=2\times2^{3k}-1\equiv2\times1^k-1=1$（mod 7）

（3） 若 n=3k+2，则 $2^n-1=2^{3k+2}-1\equiv4\times1^k-1=3$（mod 7）

所以，当且仅当 $3|n$ 时，$7|2^n-1$

【例 16】 已知一个四位数的各位数字之和与这个四位数相加等于 1995，试求这个四位数。

【解】设所求四位数为 $\overline{abcd}$，由题意得

$a+b+c+d+\overline{abcd}=1995$

所以 $1001a+101b+11c+2d=1995$ ①

显然，此时必有 a=1，否则左边必定大于 2002

所以 $101b+11c+2d=994$ ②

此时必有 b=9，

所以 11c+2d=85 ③

对于③式，若 c=8 或 9，左边必定大于 85，等式不成立，若 c≤6，则左边都小于 85，所以只有 c=7. 代入③，得 d=4，

故所求四位数是 1974

【例 17】 **一个自然数的首位数字是 4，将其首位数字 4 移至末尾之后，它的大小降为原来的$\frac{1}{4}$，求满足条件的最小正整数。**

【解】设原来的数为 N=$\overline{4ab\cdots c}=4\times10^n+A$，其中 A=$\overline{ab\cdots c}$，（A 是一个 n 位十进制数），首位 4 移到末尾后，得到数$\overline{ab\cdots c4}$，同样 $\overline{ab\cdots c4}=10A+4$，由题意得：

$4\times10^n+A=4(10A+4)$

∴39A=4×（10^n-4）=4×99…996 （n-1 个 9）

13A=4×33…332 （n-1 个 3）

∵（4,13）=1，13|33…332 ，不难得到 33332 是满足条件的最小值，从而 A 的最小值是 4×33332÷13=10256.所以 N 的最小值就是 410256.