6、因式分解小结

【知识精读】

因式分解是把一个多项式分解成几个整式乘积的形式，它和整式乘法互为逆运算，在初中代数中占有重要的地位和作用，在其它学科中也有广泛应用，学习本章知识时，应注意以下几点。

1. 因式分解的对象是多项式；
2. 因式分解的结果一定是整式乘积的形式；
3. 分解因式，必须进行到每一个因式都不能再分解为止；
4. 公式中的字母可以表示单项式，也可以表示多项式；
5. 结果如有相同因式，应写成幂的形式；
6. 题目中没有指定数的范围，一般指在有理数范围内分解；
7. 因式分解的一般步骤是：

（1）通常采用**一“提”、二“公”、三“分”、四“变”**的步骤。即首先看有无公因式可提，其次看能否直接利用乘法公式；如前两个步骤都不能实施，可用分组分解法，分组的目的是使得分组后有公因式可提或可利用公式法继续分解；

（2）若上述方法都行不通，可以尝试用**配方法、换元法、待定系数法、竖式试除法、大小十字相乘法、求根法、拆项（添项）**等方法；

下面我们一起来回顾本章所学的内容。

【分类解析】

1. 通过基本思路达到分解多项式的目的

例 1. 分解因式 $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

分析：这是一个六项式，很显然要先进行分组，此题可把 $x^5-x^4+x^3$和$-x^2+x-1$分别看成一组，此时六项式变成二项式，提取公因式后，再进一步分解；也可把 x^5-x^4， x^3-x^2， $x-1$分别看成一组，此时的六项式变成三项式，提取公因式后再进行分解。

解一：原式$=(x^5-x^4+x^3)-(x^2-x+1)$

$$
\begin{aligned}
&=x^3(x^2-x+1)-(x^2-x+1)\\
&=(x^3-1)(x^2-x+1)\\
&=(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

解二：原式$=(x^5-x^4)+(x^3-x^2)+(x-1)$

$$
\begin{aligned}
&= x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1) \\
&= (x-1)(x^4+x^2+1) \\
&= (x-1)[(x^4+2x^2+1)-x^2] \\
&= (x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

解三：不难看出 $x=1$，可以使得原式=0，说明原式含有$(x-1)$这个因式，利用竖式试除法，可以得到。或者待定系数法也可以。

2. 通过变形达到分解的目的

例 2. 分解因式 x^3+3x^2-4

解一：将 $3x^2$ 拆成 $2x^2+x^2$，则有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= x^3+2x^2+(x^2-4) \\
&= x^2(x+2)+(x+2)(x-2) \\
&= (x+2)(x^2+x-2) \\
&= (x-1)(x+2)^2
\end{aligned}
$$

解二：将常数 -4 拆成 $-1-3$，则有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= x^3-1+(3x^2-3) \\
&= (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(3x+3) \\
&= (x-1)(x^2+4x+4) \\
&= (x-1)(x+2)^2
\end{aligned}
$$

解三、不难发现有 $x=1$，使得原式=0，待定系数法，设原式=$(x-1)(x^2+ax+4)$，展开为 $x^3+ax^2-4x-x^2+ax+4= x^3+(a-1)x^2+(a-4)x+4$ 与原式对比，有 $a-1=3$，$a=4$，继续利用平方和公式得到结果。

3. 在证明题中的应用

例 3：求证：多项式 $(x^2-4)(x^2-10x+21)+100$ 的值一定是非负数

分析：现阶段我们学习了两个非负数，它们是完全平方数、绝对值。本题要证明这个多项式是非负数，需要变形成完全平方数。

证明：$(x^2-4)(x^2-10x+21)+100$

$$
\begin{aligned}
&= (x+2)(x-2)(x-3)(x-7)+100 \\
&= (x+2)(x-7)(x-2)(x-3)+100 \\
&= (x^2-5x-14)(x^2-5x+6)+100
\end{aligned}
$$

设 $y=x^2-5x$，（也可以设为 $y=x^2-5x+6$），则

$\text{原式}=(y-14)(y+6)+100=y^2-8y+16=(y-4)^2$
$\because \text{无论}y\text{取何值都有}(y-4)^2\geq 0$
$\therefore (x^2-4)(x^2-10x+21)+100\text{的值一定是非负数}$

4. 因式分解中的转化思想

例 4：分解因式：$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

分析：本题若直接用公式法分解，过程很复杂，观察 $a+b$，$b+c$ 与 $a+2b+c$ 的关系，努力寻找一种代换的方法。

解：设 $a+b=A$，$b+c=B$，$a+2b+c=A+B$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{原式}&=(A+B)^3-A^3-B^3\\
&=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3-A^3-B^3\\
&=3A^2B+3AB^2\\
&=3AB(A+B)\\
&=3(a+b)(b+c)(a+2b+c)
\end{aligned}$$

说明：在分解因式时，灵活运用公式，对原式进行“代换”是很重要的。

中考点拨：

例 5．在 ΔABC 中，三边 a,b,c 满足 $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$

求证：$a+c=2b$

证明：$\because a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$

$\therefore a^2+6ab+9b^2-c^2+10bc-25b^2=0$
$\text{即}(a+3b)^2-(c-5b)^2=0$
$(a+8b-c)(a-2b+c)=0$
$\because a+b>c$
$\therefore a+8b>c\text{，即}a+8b-c>0$
$\text{于是有}a-2b+c=0$
$\text{即}a+c=2b$

解二：大十字相乘法

$1a$	$-2b$	$+c$
$1a$	$+8b$	$-c$

说明：此题是代数、几何的综合题，难度不大，学生应掌握这类题不能丢分。

例 6．已知：$x+\dfrac{1}{x}=2\text{，则}x^3+\dfrac{1}{x^3}=$__________

解：$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x})$

$$=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-2-1]$$
$$=2\times 1$$
$$=2$$

说明：利用 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ 等式化繁为易。

题型展示：

1. 若 x 为任意整数，求证：$(7-x)(3-x)(4-x^2)$ 的值不大于 100。

解：$\because (7-x)(3-x)(4-x^2)-100$

$=-(x-7)(x+2)(x-3)(x-2)-100$

$=-(x^2-5x-14)(x^2-5x+6)-100$

$=-[(x^2-5x)-8(x^2-5x)+16]$

$=-(x^2-5x-4)^2\le 0$

$\therefore (7-x)(3-x)(4-x^2)\le 100$

说明：代数证明问题在初二是较为困难的问题。一个多项式的值不大于 100，即要求它们的差小于零，把它们的差用因式分解等方法恒等变形成完全平方是一种常用的方法。

2. 将 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$ 分解因式，并用分解结果计算 $6^2+7^2+42^2$。

解：$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

$=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2$

$=2(a^2+a)+1+(a^2+a)^2$

$=(a^2+a+1)^2$

$\therefore 6^2+7^2+42^2=(36+6+1)^2=43^2=1849$

说明：利用因式分解简化有理数的计算。

【实战模拟】

1. 分解因式：

(1) $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$

(2) $(a^2+3a-3)(a^2+3a+1)-5$

(3) $x^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$

(4) x^3-7x+6

2. 已知：$x+y=6$，$xy=-1$，求：x^3+y^3的值。

3. 矩形的周长是 28*cm*，两边 *x*,*y* 使 $x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$，求矩形的面积。

4. 求证：n^3+5n是 6 的倍数。（其中 *n* 为整数）

5. 已知：*a*、*b*、*c* 是非零实数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=-3$，求 *a*+*b*+*c* 的值。

6. 已知：*a*、*b*、*c* 为三角形的三边，比较 $a^2+b^2-c^2$和$4a^2b^2$的大小。

【试题答案】

1. （1）解： $原式 = x^3(3x^2-10x-8)-(3x^2-10x-8)$

$$= (x^3-1)(3x^2-10x-8)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1)(x-4)(3x+2)$$

（2）解： $原式 = [(a^2+3a)-3][(a^2+3a)+1]-5$

$$= (a^2+3a)^2-2(a^2+3a)-8$$
$$= (a^2+3a-4)(a^2+3a+2)$$
$$= (a+4)(a-1)(a+1)(a+2)$$

（3）解： $原式 = (x-3y)(x+y)+3x-5y+2$

$$= (x-3y+1)(x+y+2)$$

$$\begin{array}{ll} x\text{-}3y & 1 \\ x+y & 2 \end{array}$$

（4）解： $原式 = 7x^3-6x^3-7x-6$

$$= 7x^3-7x-6x^3-6$$
$$= 7x(x^2-1)-6(x^3-1)$$
$$= 7x(x+1)(x-1)-6(x-1)(x^2+x+1)$$
$$= (x-1)(7x^2+7x-6x^2-6x-6)$$
$$= (x-1)(x^2+x-6)$$
$$= (x-1)(x+3)(x-2)$$

2. 解： $\because x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$

$$= 36+2$$
$$= 38$$

$$\therefore x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$= 6\times(38+1)$$
$$= 234$$

3. 解： $\because x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$

$\therefore (x^3-y^3)+xy(x-y)=0$

即 $(x+y)^2(x-y)=0$

$\therefore x-y=0$

又 $\because x+y=14$

$\therefore x=y=7$

$\therefore$ 面积为 $49cm^2$

4. 证明：n^3+5n

$=n^3-n+6n$

$=n(n+1)(n-1)+6n$

$\because$ 当n为整数时，$n(n-1)(n+1)$是6的倍数。

$\therefore n^3+5n$是6的倍数

5. 解：$\because abc\neq 0$，用 abc 乘以第二个条件等式的两边，得：

$a^2c+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2=-3abc$

即$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+abc+abc+abc=0$

$\therefore (a+b+c)(ab+bc+ac)=0$

则$a+b+c=0$或$ab+bc+ac=0$

若$ab+bc+ac=0$

则$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ac)=0$

$\because a^2+b^2+c^2=1$

$\therefore (a+b+c)^2=1$

$\therefore a+b+c=\pm 1$

说明：因式分解与配方法是代数式化简与求值中常用的方法和手段，应当熟练掌握。

6. 分析：比较两式大小最基本的方法是作差看它们与零的大小。

解：$\because (a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$

$=[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

$\because a,b,c$为三角形三边，且由三角形两边之和大于第三边可知

$a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$，$a-b-c<0$

$\therefore (a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2<0$

$\therefore a^2+b^2-c^2<4a^2b^2$