二（多）元一次方程组(第 1 课时)

【知识链接】

一、 《孙子算经》下卷第 31 题即著名的“鸡兔同笼”问题：

今有雉、兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问：雉、兔各几何？

答曰：雉二十三，兔一十二。

术曰：上置三十五头，下置九十四足。半其足，得四十七，以少减多，再命之，上三除下三，上五除下五，下有一除上一，下有二除上二，即得。

又术曰：上置头，下置足，半其足，以头除足，以足除头，即得。

代数解法就是：设有鸡 x，兔 y，因为 1 鸡 1 头 2 足，1 兔 1 头 4 足，按照已知 35 头，94 足列方程组如下：

以头为要素所列方程为 $x+y=35$

以足为要素所列方程为 $2x+4y=94$

二、最典型的二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \text{写成矩阵形式为} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

这里 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 为已知数，a_1 与 b_1, a_2 与 b_2 至少有一个不为零。

（1）当 a_1：$a_2 \neq b_1$：b_2 时，有唯一一组解；

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

（2）当 a_1：$a_2=b_1$：$b_2=c_1$：c_2 时，有无穷多组解；

（3）当 a_1：$a_2=b_1$：$b_2 \neq c_1$：c_2 时，无解。

三、应用题常规解题步骤

列二元一次方程组解应用题的一般步骤可概括为“**审、找、列、解、答**”五步，即：

（1）审：通过审题，把实际问题抽象成数学问题，分析已知数和未知数，并用字母表示其中的两个未知数；

（2）找：找出能够表示题意两个相等关系；

（3）列：根据这两个相等关系列出必需的代数式，从而列出方程组；

（4）解：解这个方程组，求出两个未知数的值；

（5）答：在对求出的方程的解做出是否合理判断的基础上，写出答案.

【例题讲解】

例 1 已知关于 x 的方程 $2a(3x+2)-1=(2b+1)x$ 有无数多个解，求 a 与 b 的值。【$a=b=1/4$】

例 2 已知关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases} ax+2y=1+a \\ 2x+2(a-1)y=3 \end{cases}$$

分别求出当 a 为何值时，方程组有唯一一组解；无解；有无穷多组解。【$a\neq 2,-1;a=-1;a=2$】

例 3 设 m，n 是给定的实数，已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx-y=1+n \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2nx+y=1+m \end{cases}$ 有相同的解，求 m，n 的值。　　【$m=5, n=2$】

例 4 求方程组 $\begin{cases} |x|+y=12 \\ x+|y|=6 \end{cases}$ 的解的组数。　【1 组解, $x=-3, y=9$】

例 5 已知 x，y，z 为实数，满足 $x+2y-5z=3$，$x-2y-z=-5$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为（　　）。

（A）$\dfrac{1}{11}$　　（B）0　　（C）5　　（D）$\dfrac{54}{11}$　　【D】

二元一次方程组的应用(第 2 课时)

例 6 小刘在马路上匀速行走，发现每隔 6 分钟从背后驶过一辆 122 路公交车，每隔 3 分钟从迎面驶来一辆 122 路公交车，假设每辆 122 路公交车行驶速度相同，而且 122 路公交车总站每隔固定时间发一辆车，那么发车间隔的时间是多少分钟？

(参考答案)

例 7 有四个正整数，其中任意三个数的算术平均数与第四个数的和，分别等于 29,23,21,17，则这四个数中最大的一个是多少？

(参考答案)

例 8 某加工厂制作了甲、乙两种无盖长方体小盒，如图 8－1，然后又利用边角料裁出了正方形硬纸片 150 张，长方形硬纸片 300 张，并且长方形的宽与长方形边长相等，如图 8－2，再将这些硬纸片全部用于制作这种小盒，还可制成甲乙两种小盒各多少个？

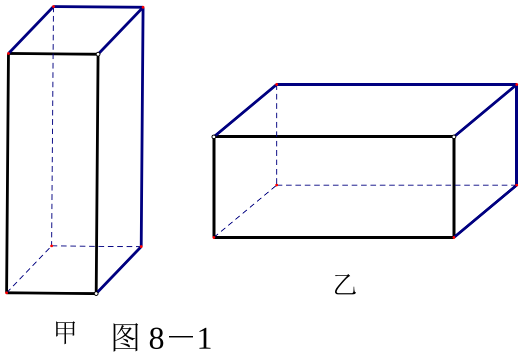


图 8－1

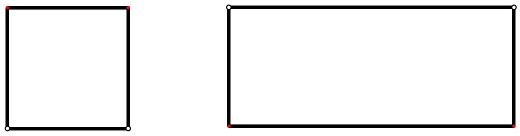


图 8－2

(参考答案)

例 9 一个时钟有时针与分针，但钟面上没有数字，在早上 T 时刻，钟在镜子中的影像显示出早上 X 时刻，且 X 比 T 迟了 5 小时 28 分，问 T 是早上几时几分？

(参考答案)

例 10 牛吃草问题：某牧场，草每天都匀速生长（每天增长的量相等），若在牧场上放牧 24 头牛，则 6 天吃完牧草；若放牧 21 头牛，则 8 天吃完牧草。设每头牛每天吃草的量都是相等的，问：（1）如果放牧 16 头牛，那么几天可以吃完牧草？（2）要使牧草永远吃不完，至多放牧几头牛？

(参考答案)

例 11 浓度问题：现有含糖 15%的糖水 20 克，含糖 40%的糖水 15 克，另有足够多的糖和水，要配制成含糖 20%的糖水 30 克。

（1）试着设计多种配制方案；

（2）试着对你的各种方案作一评价，哪一种用糖最省？哪一种现有糖水的浪费最少？

(参考答案)

例 12 趣味题目：一列正在行进的队伍长 100 米，传令兵从队尾走到队首，又从队首走到队尾，这列队伍正好前进了 100 米，已知队伍的速度和传令兵的速度保持匀速不变，问传令兵共走了多少米？ [$100(1+\sqrt{2})$]

(参考答案)

【回家作业】

1. 关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} ax-2by=2 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3ax-5by=9 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ 具有相同的解，求 a，b 的值[a=2,b=3]

2. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ ax+6y=12 \end{cases}$，问 a 为何值时，方程组有无数多组解？只有一组解？

[a=4; $a\neq 0$, x=0, y=2]

3. 对于任意的数 a，b，关于 x，y 的二元一次方程$(a-b)x-(a+b)y=a-b$ 都有一组公共解，这组公开解为多少？ [x=1,y=0]

4. 解方程组 $\begin{cases} |x-y|=x+y-2 \\ |x+y|=x+2 \end{cases}$ [x=1,y=2]

5. 若 a，b，c，d，e 满足方程组

$$\begin{cases} 2a+b+c+d+e=6 \\ a+2b+c+d+e=12 \\ a+b+2c+d+e=24 \\ a+b+c+2d+e=48 \\ a+b+c+d+2e=96 \end{cases}$$

试着确定 $3d+2e$ 的值。

[$a+b+c+d+e$=31, 相减 不难得到 d=17，e=65，$3d+2e$=181]

6. 已知 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{2(b-c)}=\dfrac{c+a}{3(c-a)}$，$a$，$b$，$c$ 互不相等，求证：$8a+9b+5c=0$

(参考答案)

7. 汽车以每小时 72 千米的速度在公路上行驶，开向寂静的山谷，驾驶员按一声喇叭，4 秒后听到回响，这时汽车离山谷多远？（声音的速度为 340 米/秒） [640m]

(参考答案)

8. 小钱问叔叔有多少岁，叔叔说“我像你这么大时，你才 4 岁；你到我这么大时，我就 40 岁了。”问小钱和叔叔今年各是多少岁？ [16,28]

(参考答案)

9. 一个自行车轮胎，若安装在前轮，则自行车行驶 5000*km* 后报废，若安装在后轮，则自行车行驶 3000*km* 后报废，行驶一定路程后可以交换前、后轮胎，如果交换前、后轮胎，要使一辆自行车的一对新轮胎同时报废，那么这辆车将能行驶多少千米？ [3750*km*]

(参考答案)

10. 五猴分桃：五只猴子平均分一堆桃子，不能恰好分完，天黑了，它们把桃子留在原地，各自找一块地方睡觉去，月亮出来了，其中一只猴子偷偷地跑出来，吃掉多余的一个桃子，剩下的桃子正好可以平均分成五份，它抱起自己应得的一份，回去睡觉了；过了一会儿，另一只猴子也偷偷跑出来，吃掉了一个桃子，剩下的桃子刚好能平均分成五份，它也抱走了自己的一份，回去继续睡觉；

（1）问原来的那一堆桃子至少应该是多少个？ [21]

（2）若第三、四、五只猴子，也和前面两只猴子一样，吃掉一个桃子，然后拿走自己的一份，问原来的桃子至少有多少个？最后至少剩下多少个桃子？ [3121，1020]

(参考答案)

11. 一旅游团 50 人到一宾馆住宿，宾馆的客房有三人间，二人间和单人间三种，其中三人间的每人每晚 20 元，二人间的每人每晚 30 元，单人间的每晚 50 元。

（1)若旅游团共住满了 20 间客房，问三种客房各住了几间？怎样住消费最低？[6 种，p（15,0,5）=1150 元]

（2）该旅游团中，若安排是夫妻的住二人间，单身的（成人）住三人间，小孩可以随父母住在一起，现已知有 4 对夫妻各带了 1 个小孩，单身的 30 人，其中男性 17 人，有 2 名单身神经衰弱患者要求住单人间，问这一行人共需要多少间客房？[20 间]

(参考答案)

《二元一次方程组》参考答案

例 6 （2008 年全国初中数学竞赛题）解：设公交车的行驶速度为 x 米/分，人的行走速度为 y 米/分，同向行驶的相邻两车的间距为 s 米。

每隔 6 分钟从背后开过一辆车，则
每隔 3 分钟从迎面驶来一辆车，则

$$\begin{cases} 6x-6y=s \\ 3x+3y=s \end{cases}$$

由此得到 $s=4x$， 所以 $s/x=4$

答：公交车从总站发车间隔的时间为 4 分钟。

(返回)

例 7 解 设四个数分别为 x，y，z，w，则由题设得到：

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y+z)+w=29 \\ \frac{1}{3}(x+y+w)+z=23 \\ \frac{1}{3}(x+z+w)+y=21 \\ \frac{1}{3}(y+z+w)+x=17 \end{cases}$$

上述四个方程相加，得到：2（$x+y+z+w$）=90， $x+y+z+w=45$
将 $x+y+z=45-w$ 代入第一个方程，得到：$15+2w/3=29$, $w=14\times3/2=21$
将 $x+y+w=45-z$ 代入第二个方程，得到：$15+2z/3=23$, $z=8\times3/2=12$
将 $x+z+w=45-y$ 代入第三个方程，得到：$15+2y/3=21$, $y=6\times3/2=9$
将 $y+z+w=45-x$ 代入第四个方程，得到：$15+2x/3=17$, $x=2\times3/2=3$
所以，这四个数中，最大的一个是 21.

(返回)

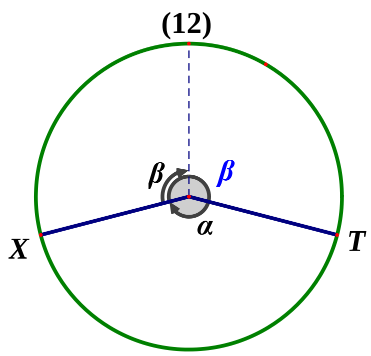
例 8 解：甲种无盖纸盒需要长方形纸板 4 块，正方形纸板 1 块，乙种无盖纸盒需要长方形纸板 3 块，正方形纸板 2 块，故设甲种纸盒为 x 个，乙种纸盒可做 y 个，则有

$$\begin{cases} 4x+3y=300 & (1) \\ x+2y=150 & (2) \end{cases}$$

（1）+（2）得到：5（$x+y$）=450， $x+y=90$ （3）
（2）—（3）得到：$y=150-90=60$，代入（3）得到 $x=90-60=30$
答：可做成甲、乙两种无盖纸盒各 30 个和 60 个。

(返回)

例 9 解：镜面反射影像之间的对应关系如图所示：
左右颠倒，上下一致，有中心对称轴。



首先需要知道的是时针每小时顺时针走了 30°，我们将两个时刻同时画在同一个圆上，这样，两时刻之间的关系，就转化为圆上两圆心角之间的关系。列出关于两个时刻时针所对应的角度 α，β 的方程组，解出 α，β 之后，再对应到时刻 T 与 X。
由题设，两个时刻 X 与 T 相差为 5 小时 28 分，（T 为早上时刻），设（从 12 点处出发顺时针方向计算）X 时刻时针对应的角度为 α，T 时刻时针对应的角度为 β，则在钟面上它们所对应的角度之差为

$$\alpha-\beta=（5\frac{28}{60}）\times30 \doteq 164°$$

另外 $\alpha+\beta=360°$

联立解方程组，得到：$\beta=(360°-164°)/2=98°$，

对应时刻为 $98/30=3\frac{4}{15}$，即 T 为凌晨 3 小时 16 分钟。

答：T 时刻为凌晨 3 时 16 分。

(返回)

例 10 牛吃草问题解答：学会设未知数，草每天增长量 y 是不变的，每头牛每天的吃草量 x 也是定值，牧场原有草量 a，16 头牛 z 天吃完草量。

（1）根据题意，$x>0, y>0, z>0$，且满足

$$\begin{cases} a+6y=24\times 6x & (1) \\ a+8y=21\times 8x & (2) \\ a+zy=16\times zx & (3) \end{cases}$$

(2)－(1) 得到 $y=12x$ (4)

(3)－(2) 得到 $(z-8)y=8x(2z-21)$ (5)

将(4)代入(5) 得到 $12x(z-8)=8x(2z-21)$

$3(z-8)=2(2z-21)$

解得 $z=18$

（2）设放牧 w 头牛，牧草永远吃不完，则必须使 w 头牛每天吃的草量不大于草每天的增长量，即 $wx\leqslant y$ （6）

将（4）代入（6）得 $wx\leqslant 12x$，

因为 $x>0$，所以 $w\leqslant 12$，所以最多可以放牧 12 头牛。

答：若放牧 16 头牛，18 天可以吃完牧草；要使牧草永远吃不完，最多只能放牧 12 头牛。

(返回)

例 11 浓度问题解答：浓度=溶质/溶液×100%，两种不同浓度的溶液混合，满足

$$m\times p\%+n\times q\%=(m+n)\times r\%$$

溶液配制方案有：（1）只用糖和水；（2）不用含糖 40%的糖水；（3）不用含糖 15%的糖水；（4）两种糖水各用 10 克等。分别列出四种方案所对应的二元一次方程组。

（一）因为有两种不同含糖量的糖水和足够多的糖和水供配制之用，于是可以有下面四种方案：

①不用现有的糖水，只用糖和水。

设用糖 x 克，水 y 克，则

$$\begin{cases} x+y=30 \\ x=30\times 20\% \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} x=6 \\ y=24 \end{cases}$$

②将含糖 15%的糖水 20 克全用上，但不用含糖 40%的糖水。

设用糖 x 克，用水 y 克，则

$$\begin{cases} 20+x+y=30 \\ 20\times 15\%+x=30\times 20\% \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$$

③将含糖 40%的糖水 15 克全用上，但不用含糖 15%的糖水。

由于含糖 40%的糖水 15 克中有糖 6 克，而所要配制的含糖 20%的糖水 30 克也有糖 6 克，数量相等，所以只要用含糖 40%的糖水 15 克再加水 15 克即可。

④用两种糖水各 10 克。
设用糖 x 克，用水 y 克，则

$$\begin{cases}10+10+x+y=30\\10\times15\%+10\times40\%+x=30\times20\%\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}x=0.5\\y=0.5\end{cases}$$

（二）上述各种解法中，第③种方法用糖最省（不用糖）。
第②、④种方法与其他方法相比，现有糖水用得最多（浪费最少），有没有比现有糖水浪费更少的方法呢？理想的方法是 30 克糖水均由现有糖水构成，即不加糖和水。

设用含糖 15%的糖水 x 克，含糖 40%的糖水 y 克，则

$$\begin{cases}x+y=30\\15x\%+40y\%=30\times20\%\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}x=24\\y=6\end{cases}$$

但含糖 15%的糖水总共才有 20 克(≤24 克)， 故此解答不切实际，由于缺少的 4 克 15%的糖水中的糖分可用 40%的糖水补充，所以最省的方法应是只加水，不加糖。

设用现有糖水共 y 克，其中含糖 15%的糖水 x 克，加水 a 克，则

$15x\%+(y-x)\times40\%=30\times20\%$

$y+a=30$

整理得到 $y=5x/8+15\ (0\leqslant x\leqslant20)$, 当 $x=20$ 时，$y_{max}=27.5$，此时 $a=30-y=2.5$
即用 15%的糖水 20 克，40%的糖水 7.5 克，加水 2.5 克，可使得现有糖水浪费最少。

(返回)

例 12 趣味传令兵问题：此问题可以分为两部分：（1）追及问题，传令兵从队尾到队首，这段时间内，设队伍行进了 s，（2）相遇问题，传令兵折返，从队首往回走，再次回到队尾，这段时间内，队伍正好行进了 $100-s$。
设传令兵速度为 x，队伍行进速度为 y， 则

追及过程中，时间相同， 即
相遇过程中，时间也相同， 即

$$\begin{cases}s/y=(100+s)/x & (1)\\ s/x=(100-s)/y & (2)\end{cases}$$

(1)×(2) 得到 $s^2=(100+s)(100-s)$， 解得 $s=100/\sqrt{2}=50\sqrt{2}$,

传令兵共行进了 $100+2s=100+100\sqrt{2}=100(1+\sqrt{2})$ 米。

答：传令兵共行进了 $100(1+\sqrt{2})$ 米。

(返回)

【回家作业参考答案】

6. 解 设 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{b+c}{2(b-c)}=\frac{c+a}{3(c-a)}$=$k$，故$(a+b)=k(a-b)$, $b+c=2k(b-c)$, $c+a=3k(c-a)$, 由此可得

$6(a+b)=6k(a-b)$, $3(b+c)=6k(b-c)$, $2(c+a)=6k(c-a)$, 以上三式相加，得到
$6(a+b)+3(b+c)+2(c+a)=6k(a-b+b-c+c-a)$, 即 $8a+9b+5c=0$

(返回)

7. 解 设车离山谷 x 米，车的速度为 72000 米/小时=20 米/秒，声音传输距离与车行驶距离之差等于 $2x$，即 $2x$=（340－20）×4，故 x=640 米

(返回)

8. 解 年龄差不变，设小钱现在 x 岁，叔叔现在 y 岁，则有

	小钱	*叔叔*
今年	x	y
小钱	4	x
叔叔	y	40

由于年龄差不变，所以有 $\begin{cases} x-4=y-x \\ y-4=40-x \end{cases}$

解得 $x=16$，$y=28$

(返回)

9. 解 假设前轮每千米损耗为 1/5000, 后轮每千米损耗为 1/3000, 设前、后两轮胎交换之前各行驶了 x 千米和 y 千米，则有

$$\begin{cases} x/5000+y/3000=1 & (1) \\ x/3000+y/5000=1 & (2) \end{cases}$$

联立解方程组，（1）×15000+（2）×15000，得到：

$8(x+y)=2\times15000$

$x+y=3750$ **km**

（另解 （1）+（2） 得到 $(x+y)(1/3000+1/5000)=2$, $x+y=2/(1/3000+1/5000)$ ）

答：两轮胎同时报废，行驶路程为 3750 千米。

(返回)

10. 解 （1）设原来的桃子共有 x 个，第一只猴子吃掉一个后，抱回的桃子为 y 个，第二只猴子吃掉一个后，抱回的桃子为 z 个，则可得到方程组

$$\begin{cases} x-1=5y & (1) \\ 5y-y-1=5z & (2) \end{cases}$$

显然这里的 x，y，z 都是正整数，消去未知数 y，可得

$4x-4=25z+5$， $4(x-1)=5(5z+1)$，所以 $4|(5z+1)$，z 最小可取 3，这时 x=21.

【当然，也可以通过 $x=6z+(z+9)/4$, 得到，$4|(z+9)$，$4|(z+1)$，得到 z 最小也是取 3，这是不定方程有最小解的题目】

（2）设最初有桃子 n，第一只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下 $\frac{4}{5}(n-1)$；

第二只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下 $\frac{4}{5}[\frac{4}{5}(n-1)-1]=(\frac{4}{5})^2(n-1)-\frac{4}{5}$；

第三只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下 $(\frac{4}{5})^3(n-1)-(\frac{4}{5})^2-\frac{4}{5}$；

第四只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下 $(\frac{4}{5})^4(n-1)-(\frac{4}{5})^3-(\frac{4}{5})^2-\frac{4}{5}$；

第五只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下 $(\frac{4}{5})^5(n-1)-(\frac{4}{5})^4-(\frac{4}{5})^3-(\frac{4}{5})^2-\frac{4}{5}$；

最后剩下的桃子为 $(\frac{4}{5})^5 n-(\frac{4}{5})^5-(\frac{4}{5})^4-(\frac{4}{5})^3-(\frac{4}{5})^2-\frac{4}{5}=(\frac{4}{5})^5 n-\frac{4/5-(4/5)^6}{1-4/5}=(\frac{4}{5})^5(n+4)-4$,

最后剩下的桃子为正整数，故 $n+4$ 最小是 $5^5=3125$，即 n 最小为 3121，剩下 $4^5-4=1020$ 个，答：仅分两次，原来一堆桃子至少 21 个；分五次时，原来一堆桃子至少 3121 个，至少剩下 1020 个桃子。

(返回)

11. 解 （1）设三人间，二人间，单间分别住了 x, y, z 间，根据题意，得到

$$\begin{cases} x+y+z=20 & （1） \\ 3x+2y+z=50 & （2） \end{cases}$$

以 z 为参数，将 z 看成已知数，求解 x 和 y，得到

（2）－（1）×2， 得到 $x=z+10$

将 x 代入（1），得到 $y=10-2z=2(5-z)$

因为 $0\leqslant y\leqslant 20$， 所以 $0\leqslant z\leqslant 5$，而且 x，y，z 都是整数，由此得到：z 可取 0,1,2,3,4,5；

故 （x，y，z）可能是（10,10,0）（11,8,1）（12,6,2）（13,4,3）（14,2,4）（15,0,5）

住宿费用计算公式为 $f=20\times3x+30\times2x+50z=60x+60y+50z=60(x+y)+50z=1200-10z$，此时对应的住宿费分别为（1200,1190,1180,1170,1160,1150），费用最低是 1150 元，当 15 间三人房和 5 间单人房时，费用最低。

（2）设夫妻所住房间为 x 间，男单身住 y 间（三人间），女单身住 z 间（三人间），用 $[m]$ 表示不超过 m 的最大整数。

由题意，要考虑两名患者的性别，分三种情况：

第一，若两名患者均为男性，则有

$$\begin{cases} y=(17-2)/3+2=7 \\ z=[(30-17)/3]+1=5 \end{cases}$$

(单身女共 30－17=13 人，住 4 个三人间剩 1 人，需要增加 1 单间)

第二，若两名患者为一男一女，则有

$$\begin{cases} y=[(17-1)/3]+1+1=7 \\ z=(30-17-1)/3+1=5 \end{cases}$$

第三，若两名患者都是女性，则有

$$\begin{cases} y=[17/3]+1=6 \\ z=[(30-17-2)/3]+1+2=6 \end{cases}$$

由上可知，无论哪种情况，$y+z=12$，而夫妻用房 $x=(50-30-4)/2=8$, 所以这一行人共需用房 $x+y+z=20$ 间。

答：第一问中，住满 20 间房，有 6 种可能，其中 15 间三人房和 5 间单人房情况下，费用最低；第二问的最佳答案是这一行人需要 20 间房。

(返回)