2011 中环杯八年级模拟试题三

参考答案

一、 填空题

1. 化简$\sqrt{-xy^2}+\sqrt{-x^2y}$=（$\sqrt{xy}$（$\sqrt{-x}+\sqrt{-y}$） ）

2. 已知X_1和X_2是方程$2x^2-4mx+2m^2+3m-2=0$的两个根，$X_1{}^2+X_2{}^2$的最小值是（ $\frac{7}{8}$ ）

[解]由一元二次方程根与系数的关系(韦达定理)得到:

$X_1+X_2=2m$ (1)

$X_1 \cdot X_2=(2m^2+3m-2)/2$ (2)

$X_1{}^2+X_2{}^2=(X_1+X_2)^2-2X_1X_2=4m^2-(2m^2+3m-2)=2m^2-3m+2=2(m-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}+2$

当 $m=\frac{3}{4}$时，$X_1{}^2+X_2{}^2$的最小值是 $2-\frac{9}{8}=\frac{7}{8}$

3. 已知关于 X 的方程$x^2+(a-2)x+a=0$ 的两个根都是整数，求 a=（ 0 或 8 ）

【解】设一元二次方程的两个整数根分别是 m 和 n，由韦达定理得到：

$m+n=2-a$ （1）

$mn=a$ （2）

（1）+（2）得：

$m+n+mn=2$

$(m+1)(n+1)=3$

因为 m+1,n+1 都是整数，而 3 是质数，只有 1 和 3 这两个整数因子，所以

$\begin{cases} m+1=1 \\ n+1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} m+1=-1 \\ n+1=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} m+1=3 \\ n+1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} m+1=-3 \\ n+1=-1 \end{cases}$

分别得到：

1)m=0, n=2, a=mn=0, 2)m=-2, n=-4, a=mn=8,

3)m=2,n=0, a=mn=0, 4)m=-4,n=-2,a=mn=8

故 a 有两个值 0 或 8

4. 整数 x、y 满足$56\le x+y\le 59$，$0.9<\frac{x}{y}<0.91$，求 x-y=（ -3 ）

【解】尝试,从第二个不等式得到: x<y, 故 x-y<0, 且 x，y 是整数

1) 如果 x-y=-1，验证

2) 如果 x-y=-2，验证

3）如果 x-y=-3，验证

5. 因式分解 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=$（ $(x^2+3x+1)(x^2+4x+1)$ ）

【解】$x^4+7x^3+14x^2+7x+1=$ （$x^4+7x^3+12x^2$）$+2x^2+7x+1$

$=(x^2+3x)(x^2+4x)+(x^2+3x)+(x^2+4x)+1$

$=(x^2+3x+1)(x^2+4x+1)$

6. *四位数 abcd 是一个完全平方数，且 ab=2cd+1，则这个四位数是（ 5929 ）

[解]颇有难度。不妨设 ab=A，cd=B，

又因为 ab=2cd+1，故 A=2B+1， (1)

四位数 abcd 可化成 100A+B=201B+100 (2)

abcd 是一个四位数 ，即 1000<AB<10000，

所以其平方根(不妨设为 xy)是两位数，故 31<xy<100， (3)

故 $abcd=(xy)^2$ (4)

由（2）和（4）得到

(xy-10)(xy+10)=201B = 3*67*B (5)

据此可以分析：左边是两个相差 20 的整数的乘积，则右边也必是两个相差 20 的整数的乘积。

与 67 相差 20 的整数是 47 和 87，且能被 3 整除，则只有 87=3*29

从而 B=29，A 就是 2*29+1=59

故 $abcd=5929=77^2$.

7. 2^{100} 是（ 31 ）位数

【解】设 $x=2^{100}$，两边取对数得到：

lgx=100lg2=30.102999566398119…

所以 x=10^30.102999566398119…

故 10^30<x<10^31

因为 10^{30} 是一个 31 位数，10^{31} 是 32 位数，

所以 $x=2^{100}$ 是一个 31 位数。

或者 $2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}>10^{30}$ ，还要判断上限小于 10^{32}

8. 正整数 n 小于 100，[n]表示不超过 n 的最大整数，满足等式$[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{6}]=n$，满足这样的 n 有（ 16 ）个。

[解]分析得知，当 n 是 6 的倍数时，即 n=6k （k=1,2，…，16）时，

$[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{6}]=3k+2k+k=6k=n$

故这样的 n 共有 16 个。

或者：利用不等式 $x-1<[x]\leqslant x$，不难得到：

$[n/2]\leqslant n/2$，$[n/3]\leqslant n/3$， $[n/6]\leqslant n/6$

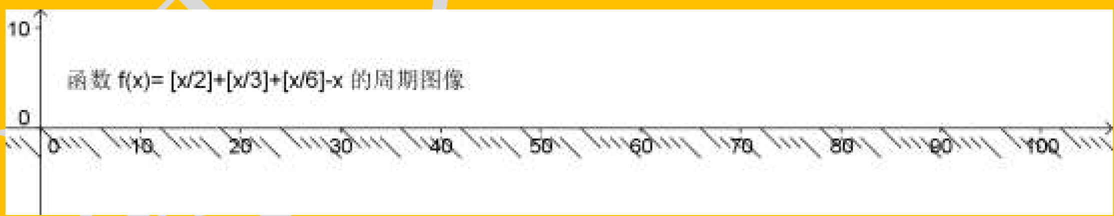
相加得到：$[n/2]+[n/3]+[n/6]\leqslant n/2+n/3+n/6=n$

由题意知道：$[n/2]+[n/3]+[n/6]=n$

所以不等式$[n/2]\leqslant n/2$，$[n/3]\leqslant n/3$， $[n/6]\leqslant n/6$ 都取等号。

显然，满足这样条件的 n 必须是 6 的倍数，所以 n=6,12，…，96. 共 16 个。

函数图像如下：



二、 动手动脑

9. 已知一次函数 f(x)=kx+b

① 若 f(x+1)=9x+12，求 f(x)的表达式

② 若 f[f(x)]=9x+12，求 f(x)的表达式

③ 若 f(x)=9x+12，求所有满足 f[f(x)]-8f(x)=69 的所有 x 的值

【解】

1)因为 f(x)=kx+b, 所以 f(x+1)=k(x+1)+b （1）

且已知 $f(x+1)=9x+12$,　　　　　　　（2）

对比（1）（2）得到 $k=9$，$b=12-9=3$，故 $f(x)=9x+3$

2) 因为 $f(x)=kx+b$, 所以 $f[f(x)]=kf(x)+b=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b$　　　　　(3)

又已知 $f[f(x)]=9x+12$,　　　　　　　　　　　　　　　　(4)

对比（3）和（4）得到 $k^2=9$, $(k+1)b=12$

解得：$k_1=3$, $b_1=3$, 或者 $k_2=-3$, $b_2=6$

这时 $f_1(x)=3x+3$,　$f_2(x)=-3x+6$

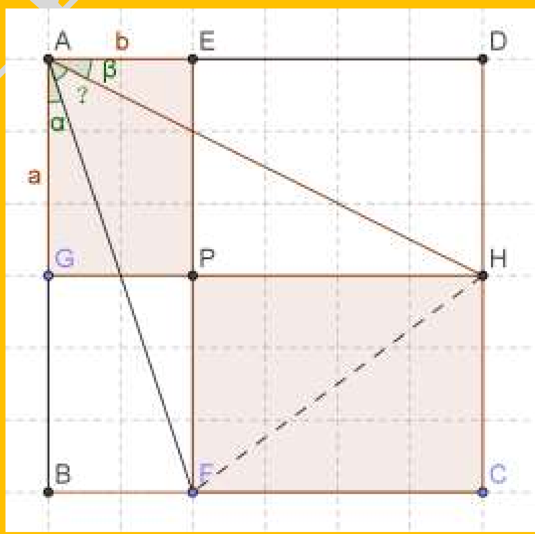
3) 已知 $f(x)=9x+12$, 所以

$f[f(x)]-8f(x)=9f(x)+12-8f(x)=f(x)+12=9x+24=69$

故 $x=5$

10. 如图正方形 ABCD 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割成四个小矩形，EF、GH 交与点 P。若矩形 PFCH 的面积恰好是矩形 AGPE 的 2 倍，求∠HAF 的度数。

【解】



设正方形边长为 1，

矩形 AGPE 的边长分别为 AG=a，AE=b，

则面积 $S_{AGPE}=ab$

矩形 PFCH 的边长分别为 PF=1-a，FC=1-b

则面积 $S_{PFCH}=(1-a)(1-b)$

由题意知：

$(1-a)(1-b)=2ab$

即 $a+b+ab=1$

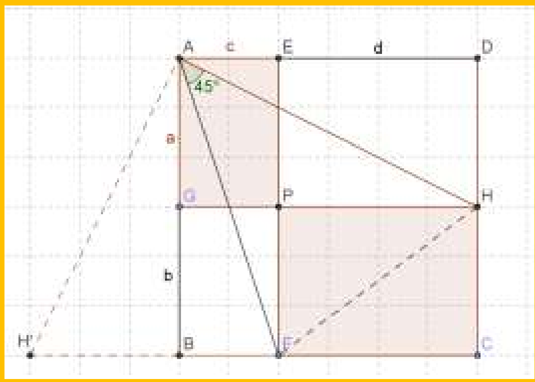
设α =∠BAF，β =∠DAH

则 tgα =b，tgβ =a，

所以 tg（α +β ）=（tgα +tgβ ）/(1-tgα tgβ)=(a+b)/(1-ab)=1

而　0<α +β <90，所以α +β =45°，故角 HAF=90°-45°=45°。

证明二、不利用三角函数，用纯几何方法。通过观察发现，F 向 B 移动，则 H 向 C 移动，（因为角 HAF 不变），大致可以估算角 HAF 为 45°。



将三角形 HAD 绕 A 点顺时针旋转 90° 到 ABH’(AD 与 AB 重合)，

所以　AH=AH’，BH’=DH，AH’⊥AH

设 AG=a，GB=b，AE=c，ED=d，则

$a+b=c+d$　　　　（1）

$bd=2ac$　　　　（2）

由（1）得　$b-d=c-a$，平方得到

$b^2+d^2-2bd=c^2-2ac+a^2$,

即　$b^2+d^2=c^2-2ac+a^2+2bd$　　　(3)

将（2）代入（3）得到：　$b^2+d^2=(c+a)^2$　　　　（4）

由勾股定理得到：

$FH^2=FC^2+HC^2=d^2+b^2$　　　　（5）

由（4）和（5）得到　：　FH=a+c=DH+BF=BH’+BF=H’F

在△FAH’和△FAH 中：

AH’=AH，FH’=FH，AF=AF

所以△FAH’≌△FAH

故 ∠H’AF=∠HAF=90°/2=45°

11. 甲容器盛有6升纯酒精，乙容器盛有10升纯清水，两个容器均未装满，**还可以盛下同样体积的溶液**。现在从乙中倒水给甲直至加满；混合后再从甲中倒混合液给乙，直至加满。此时乙容器中酒精的体积含量为25%，问此时甲中酒精的体积含量为百分之几？

【解】

如何理解:，**还可以盛下同样体积的溶液？**

逆向思维，甲容器总容量为12升，乙容器总容量为20升；

最终状态是乙容器中有酒精为：25%x20=5升，

原来只有甲容器中有酒精6升，

所以甲容器最后只剩下6-5=1升酒精，

题目不清。

12. 利用下图1-6的立体图形，分别使用3个到4个棱长为1的小正方体组成的，用它们如何可以拼出图二中的长方体，每个正方体用且只可用一次，可翻折拼接。在图二中用粗线条画出你的拼法，并标出立体图形的编号。