第十二届“中环杯”中学生思维能力训练活动

初二年级模拟练习题(二)答案

一. 填空题：

1. 关于 x 的方程 $(x-5)(x+3)(x+6)(x-10)=20x^2$ 的有理根的个数是（ 0）。

【解 1】分析 20=2x2x5, 3：6=5:10=1:2，将 20 的两个因数 2 分别给左边的 6 和 10，得到：

$(x-5)(x+3)(x/2+3)(x/2-5)=5x^2$, （1）

不妨设 $y=x/2$, ➔ $x=2y$, （1）式可以化为

$(2y-5)(2y+3)(y+3)(y-5)=20y^2$

重新组合，$[(2y-5)(y+3)][(2y+3)(y-5)]=20y^2$，展开得到：

$(2y^2-5y+6y-15)(2y^2+3y-10y-15)=20y^2$,

将 $2y^2-15$ 看成一个整体，得到：

$[(2y^2-15)+y][(2y^2-15)-7y]=20y^2$,

$(2y^2-15)^2-6y(2y^2-15)-7y^2-20y^2=0$,

$(2y^2-15)^2-6y(2y^2-15)-27y^2=0$,

$[(2y^2-15)+3y][(2y^2-15)-9y]=0$,

$2y^2+3y-15=0$ （2）

或者 $2y^2-9y-15=0$ （3）

（2）的判别式=9+120=129=3x43

（3）的判别式=81+120=201=3x67

都不是平方数，所以无有理根。

[解 2]直接计算 $[(x-5)(x+6)][(x+3)(x-10)]-20x^2=0$

$(x^2-30+x)(x^2-30-7x)-20x^2=0$

$(x^2-30)^2-6x(x^2-30)-27x^2=0$

$(x^2-30-9x)(x^2-30+3x)=0$

$x^2-30-9x=0$ 或者 $x^2-30+3x=0$

两者都无有理根（判别式都不是完全平方数）。

2. 设 f(n) 为正整数 n(十进制) 的各数位上的数字的平方之和，比如 $f(123)=1^2+2^2+3^2=14$。记 $f_1(n)=f(n)$，$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$，k=1，2，3，…，则 $f_{2006}(2006)=$(145)。

【解】原题有误，**将 $f(f_{k+1}(n))$ 改为 $f(f_k(n))$.**

因为 $f_1(2006)=f(2006)=40$, $f_2(2006)=f(40)=16$, $f_3(2006)=f(16)=37$,

$f_4(2006)=f(37)=9+49=58$, $f_5(2006)=f(58)=25+64=89$, $f_6(2006)=f(89)=145$,

$f_7(2006)=f(145)=42$, $f_8(2006)=f(42)=20$, $f_9(2006)=f(20)=4$,

$f_{10}(2006)=f(4)=16$, ……

所以从 16 开始，f_n 是以周期为 8 的形式重复出现。

故 $f_{2006}(2006)=f_{2004}(16)=f_{4+250\times 8}(16)=f_4(16)=145$。

3. 已知：p+q+r=9，$\dfrac{p}{x^2-yz}=\dfrac{q}{y^2-zx}=\dfrac{r}{z^2-xy}$，则 $\dfrac{px+qy+rz}{x+y+z}$=(9)。

【解】显然用到因式分解公式 $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

设 $p=k(x^2-yz), q=k(y^2-zx), r=k(z^2-xy)$　$k\neq 0$,

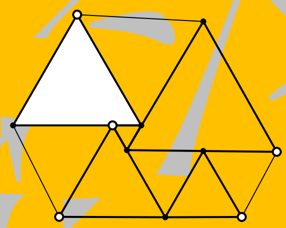
由题意知　$k(x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy)=9$

$px+qy+rz=k(x^3-xyz+y^3-xyz+z^3-xyz)=k(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=9(x+y+z)$

所以 $\dfrac{px+qy+rz}{x+y+z}=9$

4. 如图是由9个等边三角形拼成的六边形，若已知中间的最小等边三角形的边长是 a，则六边形的周长是(30a)。



第4题

【解】设右下方的等边三角形的边长是 x，则其他等边三角形的边长分别是 x，x+a，x+2a，x+3a，且有 x+3a=2x，所以 x=3a，从而六边形的周长是 30a。

5. 自然数 a 满足 21a 的后三位数字是 241，那么 a 最小为(241)。

解：只要证明 21a=241(mod1000)，则原结论得证。

设 21a=1000m+241，此时问题转化成求一次不定方程整数解的问题了，这个问题我们非常熟悉。因为(21，1000)=1，我们不妨先考虑 21s-1000t=1 的解的情况。

使用辗转相除法可知，21×381-1000×8=1，故该方程的特殊解为：s=381，t=8，从而 21a=1000m+241 的特殊解为：a=241s，m=241t，故只要取 a=241s+1000m =241×381+1000m=91821+1000m=91821+1000(n+91)=821+1000k(n 为整数，k=n+91)，就能使 21a 的后三位数字是 241。

6. 已知实数 a、b 满足 $3\sqrt{a}+|b|+c^2=5$，$s=2\sqrt{a}-3|b|+2c^2=\sqrt{a}+2|b|$，则 s 的取值范围是($2\leqslant s\leqslant\dfrac{20}{7}$)。

解：s=$\begin{cases}-\dfrac{3}{7}\sqrt{a}+\dfrac{20}{7}\leqslant\dfrac{20}{7}\\ \dfrac{3}{5}|b|+2\geqslant 2\end{cases}$。

7. 甲、乙两人分别从东门和西门两地同时出发，相向而行，相遇后甲又走了 8 分钟到达西门。若乙从西门到达东门需要 6 分钟，则甲从东门到西门所需时间是(　12)分钟。

解：设从东门到西门的距离为 1，x 为甲从东门到相遇处所用的时间，那么有 $\frac{x}{8+x}+\frac{x}{6}=1$，解得：x=4，所用时间为 4+8=12

8. 如下图 1，在矩形 ABCD 中，动点 P 从点 B 出发，沿 B→C→D→A 的方向运动至点 A 处停止，设点 P 的运动的路程为 x，△ABP 的面积为 y，如果 y 关于 x 的函数图像如图 2 所示，则矩形 ABCD 的面积为(20)。

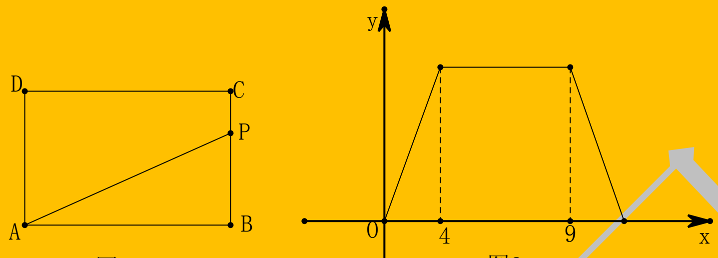


图1　图2

第8题

解：由图可知点 P 由 B 向 C 点运动过程中，路程 x 由 0 到 4，面积由 0 开始增加。而当点 P 由 C 向 D 运动的过程中，路程由 4 到 9，但面积没有发生变化，说明 BC=4，CD=5。所以矩形的面积为 20。

二. 动手动脑题

1. 已知关于 x 的方程 $4x^2-8nx-3n=2$ 和 $x^2-(n+3)x-2n^2+2=0$，是否存在这样的 n 值，使第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根?若存在，请求出这样的值；若不存在，请说明理由。

解：$\triangle=(-8n)^2-4\times4\times(-3n-2)=(8n+3)^2>0$。

可见，n 为任意实数，方程 $4x^2-8nx-3n=2$ 都有实数根，记这两个实数根为α、β，则 $\alpha+\beta=2n$，$\alpha\beta=\frac{-3n-2}{4}$。

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4n^2+3n+2$。

由方程 $x^2-(n+3)x-2n^2+2=0$ 得 $[x-(2n+2)][x+(n-1)]=0$，解得 $x_1=2n+2$，$x_2=1-n$。

若 x_1 为整数，则 $4n^2+3n+2=2n+2$，从而 $n_1=0$，$n_2=-\frac{1}{4}$。

当 $n_1=0$ 时，$x_1=2$ 是整数。当 $n_2=-\frac{1}{4}$ 时，$x_1=\frac{3}{2}$ 不是整数，舍去。

若 x_2 为整数，则 $4n^2+3n+2=1-n$，从而 $n_3=n_4=-\frac{1}{2}$。

当 $n=-\frac{1}{2}$ 时，$x_2=\frac{3}{2}$ 不是整数，舍去。

综上可知，当 n=0 时，第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根。

2. 一叠纸牌共 2000 张，每张牌上都标有一个数，数从 1 到 2000。这叠牌并不是按数的大小顺序排列的。现将这叠牌这最上面的一张取出放在桌上，而将第二张牌移到这叠牌的最下面。再将剩下的这叠牌中的第一张移到桌上，并放在桌上的那张牌的右边，同样将那叠牌的第二张移到这叠牌的最下面。这个过程不断重复直到所有牌都已放在桌上为止。然后发现从左往右数，牌上数字大小是依

次上升的：1，2，3，…，1999，2000。问在原来的那叠牌中，有多少张牌在标有数 1999 的牌的上面?

解：若纸牌共有 2^n 张，则按题设操作最后放在桌上最右边的是原来的第 2^n 张，右边第二张是原来的第 2^{n-1} 张。而 $1024=2^{10}<2000<2^{11}$，故可先考虑取走 2000-1024=976 张，在剩下的 1024 张，按原序号排应为：1953，1954，…，1999，2000，2，4，…，1952，而标有数 1999 的牌应在其中的第 512 张，即原序号为[512-(2000-1953)]×2=928。

因此，原序号为 928 的牌上面的数是 1999，从而该牌上面有 927 张。

3. 用标有 1g，2g，6g，26g 的砝码各一个，在一架无刻度的天平上称重物，如果天平两端均可放置砝码，求可以称出的不同克数(正整数的重物)的种数共有多少种?

解：(1)当天平的一端放 1 个砝码，另一端不放砝码时，可以称出 1g，2g，6g，26g；

(2) 当天平的一端放 2 个砝码，另一端不放砝码时，可以称出 3g，7g，8g，27g，28g，32g；

(3) 当天平的一端放 3 个砝码，另一端不放砝码时，可以称出 9g，29g，33g，34g；

(4) 当天平的一端放 4 个砝码，另一端不放砝码时，可以称出 35g；

(5) 当天平的一端放 1 个砝码，另一端也放 1 个砝码时，可以称出 1g，4g，5g，20g，24g，25g；

(6) 当天平的一端放 1 个砝码，另一端放 2 个砝码时，可以称出 3g，5g，7g，18g，19g，21g，22g，23g，25g，27g，30g，31g；

(7) 当天平的一端放 1 个砝码，另一端放 3 个砝码时，可以称出 17g，23g，31g，33g；

(8) 当天平的一端放 2 个砝码，另一端也放 2 个砝码时，可以称出 19g，21g，29g；

综上所述，去掉重复的克数后，共有 28 种。

4. 如图是一个立方体魔方，我们可以从图中看到它的右侧、上侧和前侧。如果面对魔方右侧，顺时针转动右侧第一层 90 度，我们记作进行了一次 R 操作；如果逆时针转动魔方右侧第一层 90 度，则记作 R′。对于上侧和前侧分别进行相同的旋转操作，分别记作 U、U′、F、F′。现在对魔方转动如下：FRUR′FU′RF′R′U，那么图中的阴影面被转到了哪里?请在图中标出。

答案如图所示。