分　数

分数是上海市六年级上学期数学教育中很重要的一课。
要求：掌握分数的四则运算；分数的大小比较；分数与无限循环小数的互化；分数计算常用方法。

1、**裂项法：**是计算中需要发现规律、利用公式的过程，裂项与通项归纳是密不可分的，本讲要求学生掌握裂项技巧及寻找通项进行解题的能力；
2、**错项法：**通过交叉相减得到更简便的结果；
3、**换元法：**让学生能够掌握等量代换的概念，通过等量代换将复杂算式变成简单算式；
4、**循环小数与分数拆分：**掌握循环小数与分数的互化，循环小数之间简单的加、减运算，涉及循环小数与分数的主要利用运算定律进行简算的问题；

4、通项归纳法

通项归纳法也要借助于代数，将算式化简，但换元法只是将“形同”的算式用字母代替并参与计算，使计算过程更加简便，而通项归纳法能将“形似”的复杂算式，用字母表示后化简为常见的一般形式。

一、裂项法

1.1 “裂差”型运算

(1)对于分母可以写作两个因数乘积的分数，即$\frac{1}{a\times b}$形式的，这里我们把较小的数写在前面，即$a<b$，那么有$\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

(2)对于分母上为 3 个或 4 个连续自然数乘积形式的分数，即：

$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$，$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$形式的，我们有：

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{1}{3}[\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}]$$

1.2 裂差型裂项的三大关键特征：

（1）分子全部相同，最简单形式都是 1 的，复杂形式可都是 x(x 为任意自然数)的，但是只要将 x 提取出来即可转化为分子都是 1 的运算；

（2）分母上均为几个自然数的乘积形式，并且满足相邻 2 个分母上的因数“首尾相接”；

（3）分母上几个因数间的差是一个定值。

1.3 “裂和”型运算：

常见的裂和型运算主要有以下两种形式：

（1）$\frac{a+b}{a\times b}=\frac{a}{a\times b}+\frac{b}{a\times b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ （2）$\frac{a^2+b^2}{a\times b}=\frac{a^2}{a\times b}+\frac{b^2}{a\times b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

裂和型运算与裂差型运算的对比：

裂差型运算的核心环节是“两两抵消达到简化的目的”，裂和型运算的题目不仅有“两两抵消”型的，同时还有转化为“分数凑整”型的，以达到简化目的。

1.4 整数裂项:

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)\times n=\frac{1}{3}(n-1)\times n\times(n+1)$

(2) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+(n-2)\times(n-1)\times n=\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$

1.5 基本题型，T1 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\frac{1}{2010\times2011}$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011})$

$=(1-\frac{1}{2011})=\frac{2010}{2011}$

1.6 课堂练习，T2 计算：$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\cdots\frac{1}{2006\times2009}$

$=\frac{1}{3}\times[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots\frac{1}{2005}-\frac{1}{2008})+(\frac{1}{2006}-\frac{1}{2009})]$

$=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009})$

1.7 拓展训练， T3 计算：$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\frac{1}{1+2+3+\cdots}$

通项为$\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，故原式= $2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$=$1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$

T4 计算：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots\frac{1}{98\times99\times100}$

通项为$\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}]$，故

原式=$\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{9900})=\frac{4949}{19800}$

T5 计算：从 1,2,3，…，100 中取 10 个不同的数，使它们的倒数和等于 1，这 10 个数可以是：<u>2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 10</u>

提示：$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})=1-\frac{1}{10}$，将右边的分数移到左边即可。

$\frac{1}{10}+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n(n+1)}=1$

T6 计算：$\frac{5}{1\times2\times3}+\frac{7}{2\times3\times4}+\frac{9}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{19}{8\times9\times10}$

提示：通项为$\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{n}{(n-1)n(n+1)}+\frac{n+1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{(n-1)n}$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

原式$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{9})$

$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(1-\frac{1}{9})$

$=\frac{3}{2}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{10})=\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15}$

T7 计算：$\frac{1}{2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{3}{2\times3\times4}+\frac{4}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{9}{2\times3\times4\cdots\times10}+\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times10}$

提示：从最后两项相加开始，逐项向前相加，最后结果为 1.

二、错项法

2.1 基本题型，T8 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$

【分析】等比数列，公比为$\frac{1}{2}$。设 S=$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$设，不难得到

$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}}$

从而 S-$\frac{1}{2}$S=$\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2^{101}}$，S=1-$\frac{1}{2^{100}}$

2.2 课堂练习，T9 计算：$7+7^2+7^3+\ldots+7^{100}$

【分析】公比为 7 的等比数列。$S=7+7^2+7^3+\ldots+7^{100}$

$7S=7^2+7^3+\ldots+7^{101}$；两式交叉相减得到：（7-1）$S=7^{101}-7$，S=（$7^{101}$-7）/6

2.3 拓展训练，T10 计算： $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots$

【分析】分子是等差数列，分母是等比数列。

S= $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots$

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots$

两式相减得到：$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ $\frac{n}{2^{n+1}}$

$S=1+\frac{1}{2}+\cdots$ $-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^n}-\frac{n}{2^n}$

$=\frac{2^{n-1}}{2^n-1}-\frac{n}{2^n}$

T11 计算： $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})+\frac{1}{2^{15}}$

【分析】乘以一个（**1-** $\frac{1}{2}$ ）就可以了。

原式= $\frac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\ldots(1+\frac{1}{2^8})}{(1-\frac{1}{2})}+\frac{1}{2^{15}}=\frac{1-\frac{1}{2^{16}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{15}}=2$

2.4 延伸说明

等比数列求和，a，aq，aq^2，…，aq^{n-1}，该数列是比值为 q 的等比数列。

其和 S_n=a（$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$）=a($1-q^n$)/(1-q),（q≠1）就是用错项相减得到的。

三、换元法与公式应用

3.1 基本题型，T12 计算：

$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ … … …

【分析】设 $a=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\ )$，原式= $a(1+a-\frac{1}{2002})-(1+a)(a-\frac{1}{2002})$

展开就是：$\frac{1}{2002}$

3.2 课堂练习，T13 计算：

$(\frac{531}{135}+\frac{579}{357}+\frac{753}{975})\times(\frac{579}{357}+\frac{753}{975}+\frac{135}{531})-(\frac{531}{135}+\frac{579}{357}+\frac{753}{975}+\frac{135}{531})\times(\frac{579}{357}+\frac{753}{975})$

【分析】找出同类项。设 a= $\frac{579}{357}+\frac{753}{975}$，b= $\frac{531}{135}$

原式= $(b+a)\times(a+\frac{1}{b})-(b+a+\frac{1}{b})\times a$ =1

3.3 拓展训练

（1）大小比较

T14 比较 $\frac{778899}{778901}$ 与 $\frac{777776}{777778}$ 的大小？

【分析】设 a=778899，b=777776，显然 a>b. 求差 $\frac{a}{a+2}-\frac{b}{b+2}=\frac{2(a-b)}{(a+2)(b+2)}>0$；

求比: $\frac{a}{a+2}\div\frac{b}{b+2}=\frac{ab+2a}{ab+2b}>1$

T15 若 A= $\frac{1}{1998^2-1998+1}$，B= $\frac{1}{1998^2-1997\times1998+1997^2}$，比较 A 与 B 的大小。

【分析】B= $\frac{1}{1998+1997^2}=\frac{1}{1998^2-1998+1}=A$

T16 试比较 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\frac{99}{100}$ 与 $\frac{1}{10}$ 的大小。

【分析】设 A= $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\frac{99}{100}$，B= $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\frac{98}{99}$，A 和 B 各项比较：

2/3>1/2, 4/5>3/4,….,98/99>97/98,1>99/100

所以 0<A<B,

另外 AxB=1/100 ,故 A^2<AxB=1/100, 所以 A<1/10

（2）估值取整

T17 求 $\frac{1}{\frac{1}{1339}+\frac{1}{1340}+\cdots\frac{1}{2007}}$ 的整数部分是 __2__。

【解】设原式为 S，则：

$\frac{1}{S}=\frac{1}{1339}+\frac{1}{1340}+\cdots\frac{1}{2007}$

因为 $\frac{1}{2007}<\frac{1}{n}<\frac{1}{1339}(1339<n<2007)$

故 $\frac{669}{2007}<\frac{1}{S}<\frac{669}{1339}$，$\frac{1339}{669}<S<\frac{2007}{669}$，[不等式缩小范围]

所以 $2\frac{1}{669}<S<3$，S 的整数部分是 2.

T18 求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{2008^2}<2$

【分析】通项分析法 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ (n>1)$

所以左边<1+(1-1/2)+(1/2-1/3)+…+(1/2007-1/2008)=2-1/2008<2

T19 设 A=$48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$，求 A 的整数部分（2005 年全国初中数学竞赛题）

【分析】原式化为 A=48x$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{102})$

=12x$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102})$

设 b=$\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}$，不难得到 4/102<b<4/99,

12x2.0429292929<A<12x2.044117647059, 即 24.5151515<A<24.529, A 的整数部分是 24

四、循环小数与分数拆分

4.1 循环小数化分数结论

	纯循环小数	混循环小数
分子	循环节中的数字所组成的数	循环小数去掉小数点后的数字所组成的数与不循环部分数字所组成的数的差
分母	n 个 9，其中 n 等于循环节所含的数字个数	按循环位数添 9，不循环位数添 0，组成分母，其中 9 在 0 的左侧

$0.\dot{a}=\frac{a}{9}$；　$0.\dot{a}\dot{b}=\frac{\overline{ab}}{99}$；　$0.0\dot{a}\dot{b}=\frac{\overline{ab}}{99}\times\frac{1}{10}=\frac{\overline{ab}}{990}$；　$0.a\dot{b}\dot{c}=\frac{\overline{abc}-a}{990}$，……

证明：设 S=0. aaaa…，则 10S=a. aaaaa…=a+0. aaaaa…=a+S, 所以 9S=a， S = a/9

同理：S = 0. ababab…=0. ab+0. 00abab…, 100S=ab+0. abab…=ab+S, 99S=ab, S=ab/99

4.2 单位分数的拆分

分析：分数单位的拆分，主要方法是：

从分母 N 的约数中任意找出两个 m 和 n, 有：

$$\frac{1}{N}=\frac{1(m+n)}{N(m+n)}=\frac{m}{N(m+n)}+\frac{n}{N(m+n)}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\quad（和）$$

从分母 N 的约数中任意找出两个 m 和 n （$m>n$），有：

$$\frac{1}{N}=\frac{m-n}{N(m-n)}=\frac{m}{N(m-n)}-\frac{n}{N(m-n)}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\quad（差）$$

4.3 基本题型

T20 例： $\frac{1}{10}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}=\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}=\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}=\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}$

本题 10 的约数有:1,10,2,5.。

例如：选 1 和 2，有：

$$\frac{1}{10}=\frac{1(1+2)}{10(1+2)}=\frac{1}{10(1+2)}+\frac{2}{10(1+2)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$$

从上面变化的过程可以看出，如果取出的两组不同的m和n，它们的数值虽然不同，但是如果m和n的比值相同，那么最后得到的A和B也是相同的．本题中，从 10 的约数中任取两个数， 共有$C_4^2=6$种，但是其中比值不同的只有 5 组：(1，1)；(1，2)；(1，5)；(1，10)；(2，5)，所以本题共可拆分成 5 组．具体的解如下：

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$$

T21 计算：$0.5\dot{4}+0.\dot{3}\dot{6}$ =________；$1.\dot{2}\times1.\dot{2}\dot{4}+\frac{19}{27}$ =__________ ；

【分析】化成分数再计算。$0.5\dot{4}=\frac{54-5}{90}=\frac{49}{90}$,$0.\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$， $\frac{49}{90}+\frac{4}{11}=\frac{899}{990}=0.9\dot{0}\dot{8}$

同理，$1.\dot{2}=1+0.\dot{2}=1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$，$1.\dot{2}\dot{4}=1+\frac{24}{99}=\frac{123}{99}$

$$1.\dot{2}\times1.\dot{2}\dot{4}+\frac{19}{27}=\frac{11}{9}\times\frac{123}{99}+\frac{19}{27}=\frac{41}{27}+\frac{19}{27}=\frac{20}{9}=2.\dot{2}$$

T22 某学生将1.2 乘以一个数a时，把1.2 误看成 1.23，使乘积比正确结果减少 0.3.则正确结果该是多少?

【解】由题意得：$1.2\dot{3}a-1.23a=0.3$，即：$0.00\dot{3}a=0.3$，所以有：$\frac{3}{900}a=\frac{3}{10}$．解得$a=90$，

所以$1.2\dot{3}a=1.2\dot{3}\times90=\frac{111}{90}\times90=111$

4.4 课堂练习

T23 将$\frac{1}{15}$写成分母不同而分子是 1 的两个单位分数之和，最多有几种？

【分析】15 的约数有 1,3,5,15，共 4 个。每次取两个，共 6 种取法，另外，比例相同的两个数，结果一样，故不考虑，总共有效的组合只有 4 种。它们是（1,3）（1,5）（1,15）（3,5），

$$\frac{1}{15}=\frac{1+3}{15(1+3)}=\frac{1}{60}+\frac{1}{20}=\frac{1+5}{15(1+5)}=\frac{1}{90}+\frac{1}{18}=\frac{1+15}{15(1+15)}=\frac{1}{240}+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{3+5}{15(3+5)}=\frac{1}{40}+\frac{1}{24}$$

T24 将循环小数0. 与0. 相乘，取近似值，要求保留一百位小数，那么该近似值的最后一位小数是多少?

【分析】0. ×0. $=\frac{27}{999}\times\frac{179672}{999999}=\frac{1}{37}\times\frac{179672}{999999}=\frac{4856}{999999}=0.$

循环节有 6 位，100÷6=16……4，因此第 100 位小数是循环节中的第 4 位 8，第 101 位是 5．这样四舍五入后第 100 位为 9．

T25 $0.\dot{d}2\dot{5}=\frac{n}{810}$，求正整数 n=_____ 。

【分析】$0.\dot{d}2\dot{5}=\frac{\overline{d25}}{999}=\frac{n}{810}$

所以 $\frac{\overline{d25}}{37}=\frac{n}{30}, d=9, n=750$

4.5 拓展训练

T26 已知：真分数$\frac{a}{7}$化为小数后，如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是 1992，那么a是多少?

【分析】$\frac{1}{7}$=0. ，$\frac{2}{7}$ =0. ，$\frac{3}{7}$ =0. ，$\frac{4}{7}$ =0. ，$\frac{5}{7}$ =0. ，$\frac{6}{7}$ =0. ．因此，真分数$\frac{a}{7}$化为小数后，从小数点第一位开始每连续六个数字之和都是 1+4+2+8+5+7=27，又因为 1992÷27=73……21，27−21=6，而 6=2+4，所以$\frac{a}{7}$=0. ，即$a=6$．

T27 已知：真分数$\frac{a}{7}$化成循环小数之后，小数点后第 2009 位数字为 7，则a是多少？

【分析】我们知道形如 $\frac{a}{7}$ 的真分数转化成循环小数后，循环节都是由 6 位数字组成，2009÷ 6= 33⋯⋯ ，因此只需判断当a为几时满足循环节第 5 位数是 7，经逐一检验得$a=3$。

T28 如果$\frac{1}{2009}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$，$A$，$B$ 均为正整数，则B最大是多少？

【分析】公式 $\frac{1}{N}=\frac{m-n}{N(m-n)}=\frac{m}{N(m-n)}-\frac{n}{N(m-n)}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$，如果要让$B$尽可能地大，实际上就是让上面的式子中的$n$尽可能地小而$m$尽可能地大，因此应当$m$取最大的约数，而$n$应取最小的约数，因此$m=2009$，$n=1$，所以$B=2009\times2008$．

T29 填空$\frac{1}{10}=\frac{1}{(\ )}-\frac{1}{(\ )}-\frac{1}{(\ )}=\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}$ （2 个扩充到 3 个）

【分析】10 的约数有四个，1,2,5,10，任取 3 个配对，如（10-5-2）（10-5-1）（10-2-1）（5-2-1）。凑成和也有四种（1+2+5）（1+2+10）（2+5+10）（1+5+10）