

第二十二届（2011 年）“希望杯”全国数学邀请赛培训题

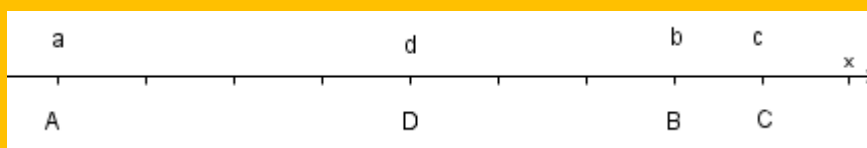
初中二年级

一、选择题（以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内）

1. 如图 1，数轴上的四个点 A、B、C、D 分别代表整数 a、b、c、d。若

$$\sqrt{-a} - b = -1, \sqrt{c} - b = -1, \text{ 则 } d \text{ 的值是 ()}$$

- (A) -3 (B) 0 (C) 1 (D) 4



(图 1)

2. 已知 $a = \frac{2010}{2009 \times 2011}$, $b = \frac{2011}{2010 \times 2012}$, $c = \frac{1}{2011}$, 则 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $b < a < c$ (D) $c < a < b$

3. 下列各数中，最大的是 ()

- (A) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ (B) $2 + \sqrt{6}$ (C) $\sqrt{20}$ (D) $\sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{5\frac{1}{2}}$

4. 已知 a 是实数，并且 $a^2 - 2010a + 4 = 0$ 则代数式 $a^2 - 2009a + \frac{8040}{a^2 + 4} + 5$ 的值是 ()

- (A) 2009 (B) 2010 (C) 2011 (D) 2012

5. Given two non-zero real numbers a and b , satisfy

$$|2a - 4| + |b + 2| + \sqrt{(a - 3)^2 b^2 + 4} = 0, \text{ then the value of } a + b \text{ is ()}$$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. If the linear function $y = ax + b$ passes through the point $(-2, 0)$, but not the first Quadrant, then the solution set for $ax > b$ is ()

- (A) $x > -2$ (B) $x < -2$ (C) $x > 2$ (D) $x < 2$

7. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(\frac{1}{a}, -b)$, 那么它可能不经过点 ()

- (A) $(-\frac{1}{a}, b)$ (B) $(\frac{1}{b}, -a)$ (C) $(-b, \frac{1}{a})$ (D) $(b, -\frac{1}{a})$

8. 已知 a 是实数, 关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=5a \\ x+2y=1-2a \end{cases}$ 的解不可能出现的情况是 ()

(A) x 、 y 都是正数 (B) x 、 y 都是负数
(C) x 是正数、 y 是负数 (D) x 是负数、 y 是正数

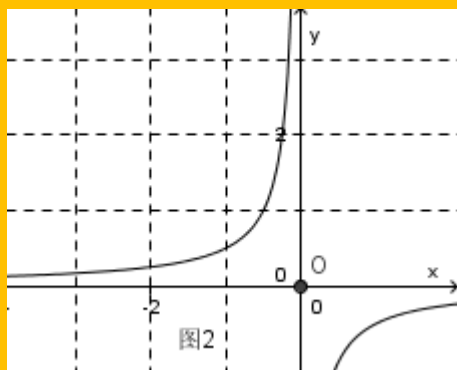
9. If a and b are non-zero real numbers and $(1-99a)(1+99b)=1$, then the value for

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + 1 \text{ is ()}$$

(A) 1 (B) 100 (C) -1 (D) -1

10. 如图 2 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第二象限的图像, 则 k 的可能取值是 ()

(A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$



11. 在直角坐标系上, 点 (x_1, y_1) 关于点 (x_2, y_2) 的对称点坐标是 ()

(A) $(x_2 - 2x_1, y_2 - 2y_1)$ (B) $(x_1 - 2x_2, y_1 - 2y_2)$
(C) $(2x_1 - x_2, 2y_1 - y_2)$ (D) $(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)$

12. 一个长方体盒子的最短边长 50cm, 最长边长 90cm. 则盒子的体积可能是 ()

(A) 4500 cm^3 (B) 180000 cm^3 (C) 90000 cm^3 (D) 360000 cm^3

13. 若两个角可以构成内错角, 则称为“一对内错角”. 四条直线两两相交, 且任意三条直线不交于同一点. 那么, 在这个几何图形中, 可以构成的内错角的两个角的对数是 ()

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

14. 如图 3, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线相交于 D 点, $\angle ADC = 130^\circ$, 那么 $\angle CAB$ 的大小是 ()

(A) 80° (B) 50° (C) 40° (D) 20°

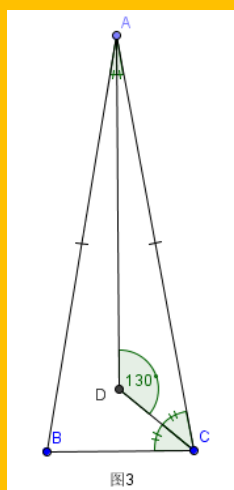
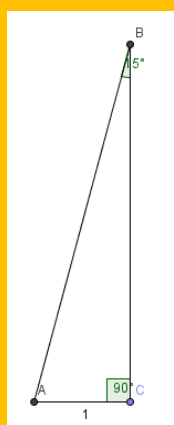


图3

15. Given $\triangle ABC$ with $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, $AC = 1$, then the length of BC is ()
- (A) $2 + \sqrt{3}$ (B) $3 + \sqrt{2}$ (C) $3 - \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$



16. 已知三角形三边的长分别为 a, b, c , 且 a, b, c 均为整数, 若 $b = 7, a < b$, 则满足条件的三角形的个数是 ()
- (A) 30 (B) 36 (C) 40 (D) 45
17. 三角形三边的长分别为 a, b, c , 且 $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 则三角形是 ()
- (A) 等边三角形 (B) 直角三角形
(C) 以 a 为腰的等腰三角形 (D) 以 a 为底的等腰三角形
18. 有 4 个命题:
- 一组对边相等, 一组对角相等的四边形是平行四边形;
 - 一组对边平行, 一组对角相等的四边形是平行四边形;
 - O 是四边形 $ABCD$ 内一点, 若 $AO = BO = CO = DO$, 则四边形 $ABCD$ 是矩形;
 - 若四边形的两条对角线互相垂直, 则这个四边形是菱形。
- 其中正确的命题个数是 ()
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

19. 如图 4, 正方形 $ABCD$ 的面积是 486, 点 P_0 在 AD 上, 点 P_1 在 P_0B 上, 且 $P_0P_1 = \frac{1}{2}P_1B$; 点 P_2 在 P_1C 上, 且 $P_1P_2 = \frac{1}{2}P_2C$; 点 P_3 在 P_2B 上, 且 $P_2P_3 = \frac{1}{2}P_3B$; \dots ; 点 P_6 在 P_5C 上, 且 $P_5P_6 = \frac{1}{2}P_6C$, 则 $\triangle P_6BC$ 的面积是 ()

- (A) 81 (B) $\frac{81}{2}$ (C) $\frac{64}{3}$ (D) $\frac{128}{3}$

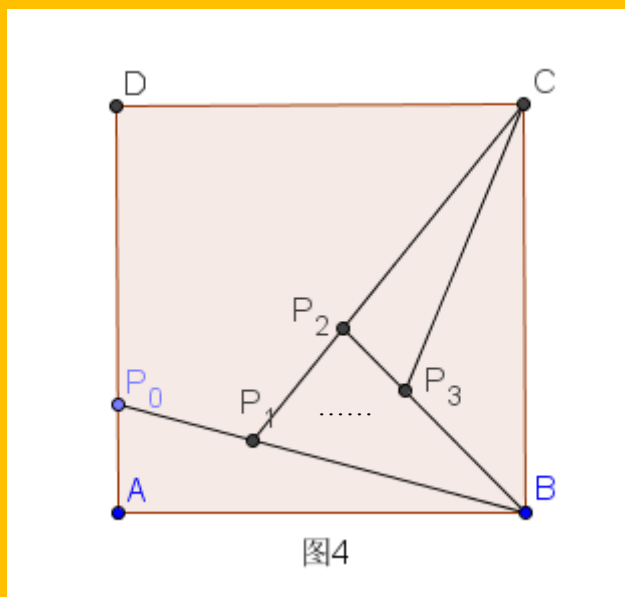
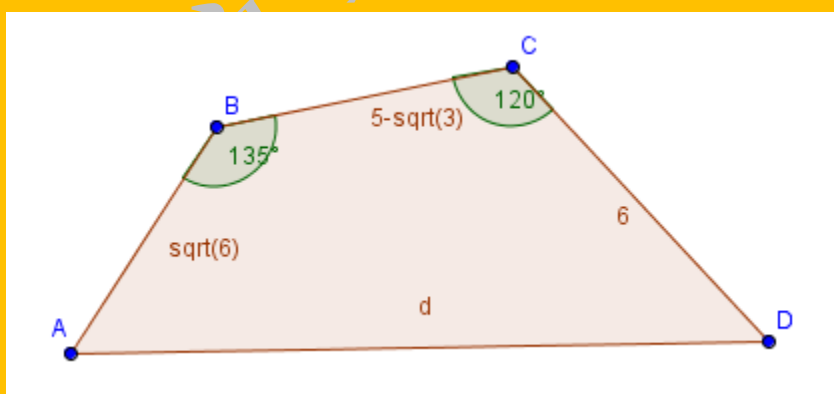


图4

20. 如图 5, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 135^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, $BC = 5 - \sqrt{3}$, $CD = 6$, 则 AD 的长是 ()

- (A) $5 + \sqrt{3}$ (B) 8 (C) $2\sqrt{13}$ (D) $2\sqrt{19}$



21. 已知函数 $y = (1-a)x + a + 4$ 的图像不经过第四象限, 则满足题意的整数 a 的个数是 ()

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

22. If the figure 6 is composed of 24 equilateral triangles, then how many non-congruent distinct right triangles with vertices on the intersecting points are possible in this figure?()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



23. 若在 $1, 2, 3, \dots, 2010$ 前任意添加一个正号或者负号, 则 ()

- (A) 它们的和是奇数
(B) 它们的和是偶数
(C) 若有奇数个负号, 则它们的和是奇数; 若有偶数个负号, 则它们的和是偶数
(D) 若有奇数个负号, 则它们的和是偶数; 若有偶数个负号, 则它们的和是奇数

24. 方程 $27x + 81y = 9999$ 的整数解有几组? ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 多于 2

25. 将 $3, 4, 5, 6, 7, 8$ 这六个数从左到右写成一排, 使得每相邻的两个数的和都是质数, 则这样的写法的种数是 ()

- (A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24

26. 某农户养了鸡和兔各若干, 如果平均每个动物有 2.5 只腿, 那么鸡的数量与兔的数量的比等于 ()

- (A) 2 (B) 2.4 (C) 3 (D) 3.5

27. 一个人步行从 A 地出发, 匀速向 B 地走去. 同时另一个人骑摩托车从 B 地出发, 匀速向 A 地驶去. 二人在途中相遇, 骑车者立即把步行者送到 B 地, 再向 A 地驶去, 这样他在途中所用的时间是他从 B 地直接驶往 A 地原计划所用时间的 2.5 倍, 那么骑摩托车者的速度与步行者速度的比是 ()

- (A) 2:1 (B) 3:1 (C) 4:1 (D) 5:1

28. 12 页书的页码用 15 个数码: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2$.

下面的数码的个数中, 不能用来计算一本书的页数的是 ()

- (A) 534 (B) 1998 (C) 1999 (D) 2010

29. 方程 $2u + v + x + y + z = 3$ 的非负整数解 (u, v, x, y, z) 有几组?

- (A) 10 (B) 20 (C) 24 (D) 30

30. 老师问 5 个学生, 昨天晚上你们有几个复习数学了?

张: 没有人

李: 一个人

王: 两个人

赵: 三个人

刘: 四个人

老师知道昨天我岸上它们有人复习数学了, 也有人没有复习数学, 复习了的人说的是真话, 那么这 5 个学生中复习了数学的人数是()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

31. 已知 x 为正整数, 设 $A = x^3 + 3x^2 - 45x - 175$, 若 A 为完全平方数, 则 A 的最小值是_____

32. 若 $5^8 - 1$ 能被 20 至 30 之间的两个整数整除, 则这两个整数分别是和_____.

33. 已知实数 x, y 满足 $(x + \sqrt{x^2 - 2010})(y + \sqrt{y^2 - 2010}) - 2010 = 0$, 则 $x =$ _____
 $y =$ _____

34. 计算 $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}} =$ _____

35. 若点 P 的坐标 (a, b) 满足 $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 10ab + 16 = 0$, 则点 P 的坐标为_____

36. 已知:

$$2 + \frac{2}{3} = 2^2 \times \frac{2}{3},$$

$$3 + \frac{3}{8} = 3^2 \times \frac{3}{8},$$

$$4 + \frac{4}{15} = 4^2 \times \frac{4}{15},$$

...

$$10 + \frac{b}{a} = 10^2 \times \frac{b}{a}, (\text{其中 } a, b \text{ 是满足条件的最小正整数}),$$

则 $a =$ _____, $b =$ _____

37. 若关于 x 的分式方程 $\frac{m(x+1)-5}{2x+1} = m-3$ 无解, 则 $m =$ _____

38. 当 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 时, 化简 $\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}-1+\sqrt{x-\sqrt{2x-3}}-1=$ _____

39. 若 $a < 0 < b, |a| < |b|$, 且 $a^2 + b^2 = -8ab$, 则 $\frac{a+b}{a-b}=$ _____

40. 若 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 5, \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 7, xy + yz + zx = kxyz$, 则实数 $k=$ _____

41. 已知 6 个数: $3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, 3 \times 2^4, 3 \times 2^5$, 其中最多能选出_____个数, 使得被选出的数中任意两个数的比都不是 2 或者 $\frac{1}{2}$.

42. 若 $x+y+z=6, xy+yz+zx=11, xyz=6$, 则 $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} =$ _____

43. 如果 $(x+3)(x+a)-2$ 可以因式分解为 $(x+m)(x+n)$ (其中 m, n 均为整数), 则 a 的值是_____

44. 若 a, b 是实数, 且 $a+b=2, a^2+b^2+2\sqrt{ab}=\frac{9}{2}$, 则 $ab=$ _____

45. 方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{(1+\sqrt{2})x} + \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})x} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2010}+\sqrt{2011})x} = \frac{1}{\sqrt{2011}}$ 的解是 $x=$ _____

46. 设正整数 $x \neq y$, 且满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{5}$, 则 $x^2 + y^2$ 的值是_____

47. 已知 $\frac{3x+5}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$, 那么 $A^2 + B^2 =$ _____

48. 已知 5 个互不相同的正整数的平均数是 18, 中位数 25, 那么这 5 个正整数中最大数的最大值是_____

49. 先阅读材料:

若整数 a 是整系数方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的解, 则 $-r = a(a^2 + pa + q)$, 说明 a 是 r 因数。

根据以上材料, 可求得 $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$ 的整数解为 $x=$ _____

50. 定义 $f(x) = \frac{1}{1-x} (x \neq 1)$, 那么 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{2010 \text{ 个}} =$ _____

51. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5-2x > 0, \\ 3x+a \geq 0 \end{cases}$ 无实数解, 则 a 的取值范围是_____

52. 已知 a 是正整数, 若关于 x 的方程 $2x - a\sqrt{1-x^2} - a + 4 = 0$ 至少有一个整数根, 则 a 的值是_____

53. 如果三角形三边的长分别为 $1, k, 4$, 代数式 $|2k-5| - \sqrt{k^2 - 12k + 36}$ 的值为 m , 则 m 的取值范围是_____

54. 若 $\triangle ABC$ 三边的长 a, b, c 均为整数, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{ab} = \frac{1}{4}$, $a+b-c=8$, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 S 的最大值是_____, 最小值是_____.

55. 如图 7 所示, 要从 $80\text{cm} \times 160\text{cm}$ 的长方形布料上裁下 2 个半径相等的半圆, 那么裁下的半圆最大直径是_____ cm。

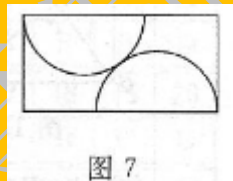


图 7

56. 如图 8 所示, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上, 且 $PC = 2PB$, 若 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle APC = 60^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数是_____

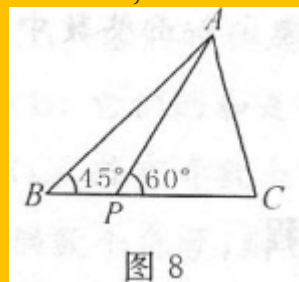


图 8

57. 如图 9 所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 100^\circ$, 延长 AB 到 D , 使 $AD = BC$, 连接 DC , 则 $\angle BCD$ 的度数是_____

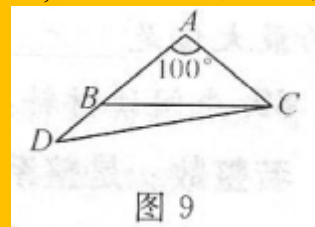


图 9

58. 如图 10 所示, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, $PE \parallel AC$ 交 AB 于 E , $PF \parallel AB$ 交 BC 于 F , $PD \parallel BC$ 交 AC 于 D , 已知 $\triangle ABC$ 的周长是 12cm , 则 $PD + PE + PF =$ _____ cm

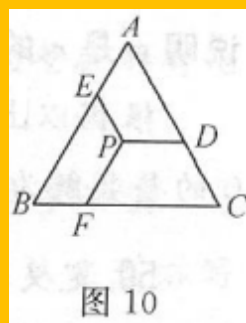


图 10

59. 如图 11 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=7, AC=11$, 点 M 是 BC 的中点, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, $MF \parallel AD$, 则 $FC =$ _____

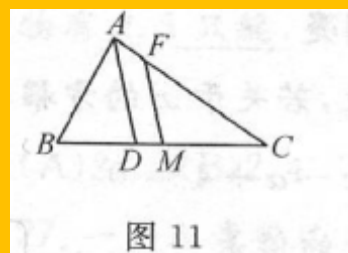


图 11

60. 如图 12 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC, \angle ACB = 80^\circ$, 在 $\triangle ABC$ 内取一点 M , 使得 $\angle MBA = 30^\circ, \angle MAB = 10^\circ$, 那么 $\angle AMC$ 的度数是 _____

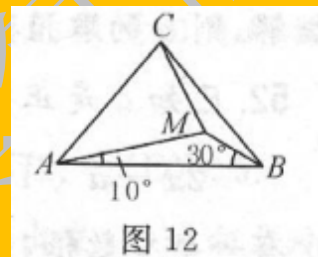


图 12

61. 如图 13 所示, P 是长方形 $ABCD$ 内一点, 已知 $PA=3, PB=4, PC=5$, 则 PD^2 的值为 _____

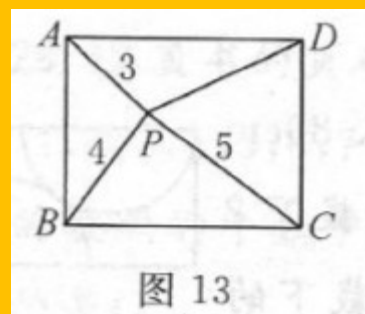


图 13

62. 如图 14 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC, AD = DB, AB = AC, \angle ACD = 30^\circ$, 则 $\angle BAD$ 的度数是 _____

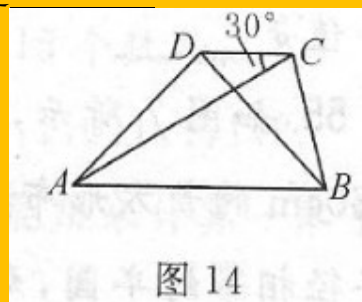


图 14

63. 如图 15 所示, 点 E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, BC 的中点, 连接 AF, EC 交于点 G ,

则 $\frac{S_{\text{四边形}BFGE}}{S_{\text{四边形}AGCD}} =$ _____

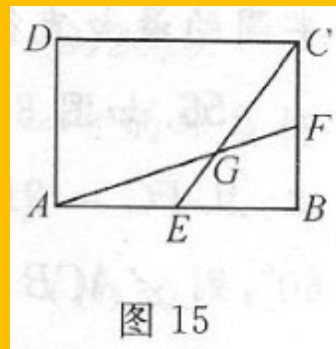
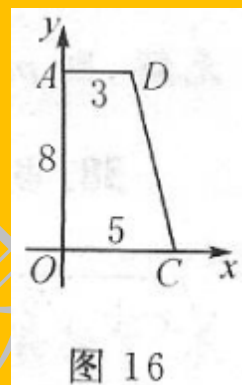


图 15

64. 如图 16 所示, 在平面直角坐标系内放置一个直角梯形 $AOCD$, 已知 $AD=3$, $AO=8$, $OC=5$, 若点 P 在梯形内且 $S_{\triangle PAD}=S_{\triangle POC}$, $S_{\triangle PAO}=S_{\triangle PCD}$, 那么点 P 的坐标是_____



65. 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 上的点 A 的横坐标为 2, 线段 AB 在直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 上, 且 $AB = 5$, 线段 AB 向右平移 2 个单位后, 点 B 的坐标为_____

66. 一次函数 $y = -2x + 6$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B , 点 P 在线段 AB 上, OP (O 是坐标原点) 将 $\triangle OAB$ 分成面积为 1:2 的两部分, 则过点 P 的反比例函数解析式为_____

67. 已知 $y_1 = 3x$, $y_2 = \frac{3}{y_1}$, $y_3 = \frac{3}{y_2}$, \dots , $y_{2011} = \frac{3}{y_{2010}}$, 则 $y_2 \cdot y_{2011} =$ _____

68. 已知整数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 使 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 9$, 若 b 是关于 x 的方程 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = 2009$ 的整数根, 则 b 的值是_____

69. 已知 a, b, c 都是 -3 到 3 之间的非零整数, 且 $(b + \sqrt{2})^2 = (a + \sqrt{2})(c + \sqrt{2})$, 则符合条件的 a, b, c 有_____组.

70. 若 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_2 + a_4 =$ _____

71. 将一枚六个面的编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的质地均匀的正方体骰子先后投掷两次, 记第一次掷出的点数为 a , 第二次掷出的点数为 b , 则使关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + by = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 有正整数的概率为_____

72. 先将 100 个杯子排成一列，杯口朝上。从左向右从 1 数到 100，数列 3 的倍数时把杯子翻过来；再从右向左从 1 数到 100，数到 7 的倍数时把杯子翻过来，那么最后有个杯子杯口朝上。

73. 已知 a, b, c, d 分别是一个四位数的千位，百位，十位，个位上的数字，且低位上的数字不小于高位上的数字，当 $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ 取得最大值时，这个四位数的最小值是_____

74. 若对于所有的实数 x ，都有 $f(2^x) + xf(2^{-x}) = x^2$ ，则 $f(2) =$ _____

75. 博览会的门票每张 50 元，每人限购 1 张，现有 10 个小朋友排队购票，其中 5 个小朋友只有 100 元的钞票 1 张，另外 5 个小朋友只有 50 元的钞票 1 张，售票员没有准备零钱，那么最多有_____种排队方法，使售票员总能找得开钱。

三、解答题

76. 某化工厂现有甲种原料 290kg，乙种原料 212kg，计划用这两种原料生产 A 、 B 两种产品共 80 件。生产一件 A 产品需要甲种原料 5kg，乙种原料 1.5kg，生产成本是 120 元；生产一件 B 产品需要甲原料 2.5kg，乙种原料 3.5kg，生产成本是 200 元。

1) 该化工厂现有原料能否保证生产？若能保证生产，有几种生产方案？

2) 设生产 A 、 B 两种产品的总成本为 y 元，其中一种产品的生产件数为 x ，试写出 y 与 x 的函数关系式，并利用函数的性质说明（1）中哪种生产方案总成本最低，最低生产总成本是多少？

77. 若方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ ，求方程组 $\begin{cases} 4a_1x + 3b_1y = 7c_1 \\ 4a_2x + 3b_2y = 7c_2 \end{cases}$ 的解

78. 如图 17，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 3\angle C$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $BE \perp AE$ ，求证： $AC - AB = 2BE$

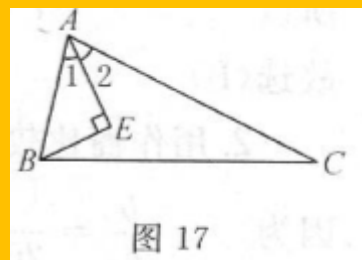


图 17

79. 将编号从 1 到 10 的 10 个白球排成一行，现按照如下要求涂色：

- 1) 涂色的球有 2 个；
 - 2) 被涂色的 2 个球的编号之差大于 2.
- 那么不同的涂色方法有几种？

80. 直线 $y=kx+4$ 分别于 x 轴、 y 轴相交于点 A, B , O 是坐标原点, A 点的坐标为 $(4,0)$,

P 是 OB 上 (O, B 两点除外) 的一点, 过 P 作 $PC \perp y$ 轴交直线 AB 于 C , 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴, 垂足为 D , 设线段 PC 的长为 1, 点 P 的坐标为 $(0, m)$

- 1) 求 k 的值;
- 2) 如果点 P 在线段 OB (O, B 两点除外) 上移动, 求 l 于 m 的函数关系式, 并写出自变量 m 的取值范围;
- 3) 当点 P 运动到线段 OB 的中点时, 四边形 $OPCD$ 为正方形, 将正方形 $OPCD$ 沿着 x 轴的正方向移动, 设平移的距离为 a ($0 < a < 4$), 正方形 $OPCD$ 于 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 S . 试求 S 与 a 的函数关系式.