

## 2007 年“新知杯”上海市初中数学竞赛

### 一、填空题（第 1~5 小题，每题 8 分，第 6~10 小题，每题 10 分，共 90 分）

1. 已知  $-1 < 2x - 1 < 1$ ，则  $\frac{2}{x} - 1$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

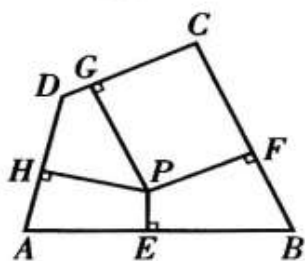
2. 在面积为 1 的  $\triangle ABC$  中， $P$  为边  $BC$  的中点，点  $Q$  在边  $AC$  上，且  $AQ = 2QC$ . 连接  $AP$ 、 $BQ$  交于点  $R$ ，则  $\triangle ABR$  的面积是\_\_\_\_\_.

3. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边顺次为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ . 若关于  $x$  的方程  $c(x^2 + 1) - 2\sqrt{2}bx - a(x^2 - 1) = 0$  的两根平方和为 10，则  $\frac{b}{a}$  的值为\_\_\_\_\_.

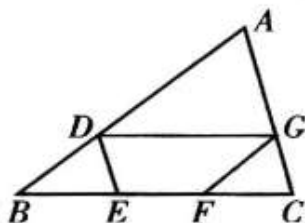
4. 数  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  满足如下条件：对于  $k = 1, 2, \dots, 100$ ， $x_k$  比其余 99 个数的和小  $k$ . 则  $x_{25}$  的值为\_\_\_\_\_.

5. 已知实数  $a, b, c$ ，且  $b \neq 0$ . 若实数  $x_1, x_2, y_1, y_2$  满足  $x_1^2 + ax_2^2 = b$ ， $x_2y_1 - x_1y_2 = a$ ， $x_1y_1 + ax_2y_2 = c$ ，则  $y_1^2 + ay_2^2$  的值为\_\_\_\_\_.

6. 如图，设  $P$  是凸四边形  $ABCD$  内一点，过  $P$  分别作  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  的垂线，垂足分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ . 已知  $AH = 3$ ， $HD = 4$ ， $DG = 1$ ， $GC = 5$ ， $CF = 6$ ， $FB = 4$ ，且  $BE - AE = 1$ . 则四边形  $ABCD$  的周长为\_\_\_\_\_.



7. 如图， $\triangle ABC$  的面积为 1，点  $D$ 、 $G$ 、 $E$  和  $F$  分别在边  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  上， $BD < DA$ ， $DG \parallel BC$ ， $DE \parallel AC$ ， $GF \parallel AB$ . 则梯形  $DEFG$  面积的最大可能值为\_\_\_\_\_.



8. 不超过 1000 的正整数  $x$ ，使得  $x$  和  $x+1$  两者的数字和都是奇数. 则满足条件的正整数  $x$  有\_\_\_\_\_个.

9. 已知  $k$  为不超过 50 的正整数，使得对任意正整数  $n$ ， $2 \times 36n + k \times 23n + 1 - 1$  都能被 7 整除. 则这样的

正整数  $k$  有\_\_\_\_\_个.

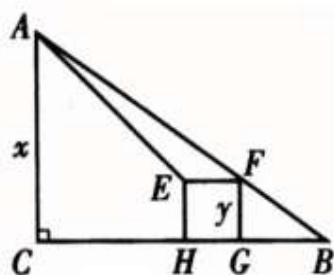
10. 使得  $\frac{p(p+1)+2}{2}$  是完全平方数的所有质数  $p$  为\_\_\_\_\_.

## 二、(20 分)

如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $BC=2$ ,  $AC=x$ , 点  $F$  在边  $AB$  上, 点  $G, H$  在边  $BC$  上, 四边形  $EFGH$  是一个边长为  $y$  的正方形, 且  $AE=AC$ .

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式.

(2) 当  $x$  为何值时,  $y$  取到最大值? 并求出  $y$  的最大值.



## 三、(20 分)

求满足下列条件的正整数  $n$  的所有可能值: 对这样的  $n$ , 能找到实数  $a, b$ , 使得函数  $f(x) = \frac{1}{n}x^2 + ax + b$  对任意整数  $x$ ,  $f(x)$  都是整数.

## 四、(20 分)

在一个盒子里有红、黄、黑三种颜色的小球共 88 个. 已知从中任意取出 24 个, 就可以保证至少有 10 个小球是同色的. 问在满足上述条件下, 无论各种颜色的小球如何分配, 至少要从盒子中任意取出多少个小球, 才能保证至少有 20 个小球是同色的?