分式方程提高复习题

1. 解方程 $\frac{4x}{x^2+2x+4}-\frac{3x}{x^2-3x+4}=-\frac{7}{3}$ 【x=2】

2. 解方程 $\frac{3x^2+4x-1}{3x^2-4x-1}=\frac{x^2+4x+1}{x^2-4x+1}$ 【x=0，±1】

3. 解方程 $x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=5$ 【x=－1，2】

4. 解方程 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$ 【x=1，$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$】

5. 解方程 $\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+5}+\dfrac{3x-3}{x^2-3x+8}=\dfrac{19}{15}$ 【x=5,5/2,$\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$】

6. 解方程 $\dfrac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\dfrac{13-x}{x+1}\right)=42$ 【x=1,6,3± √2】

7. 解关于 x 的方程 $\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{b+x}{a+x}=2\dfrac{1}{2}$ 【a≠b, x=a－2b,b－2a; a=b 无解】

8. 如果方程 $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+a}{x(x-2)}=0$ 只有一个实数根，求 a 的值及对应的原方程的根。

【a=－7/2, x=1/2; a=－4, x=1; a=－8, x=－1】

《分式方程复习提高》参考答案

1. 解 初步估算 x=0 不是原方程的解，所以 $x\neq0$。

原方程左边分式的分子和分母分别除以 x，有 $\frac{4}{x+\frac{4}{x}+2}-\frac{3}{x+\frac{4}{x}-3}=-\frac{7}{3}$

发现有公共部分，不妨设 $u=x+\frac{4}{x}$，则上述方程可化为 $\frac{4}{u+2}-\frac{3}{u-3}=-\frac{7}{3}$

解这个方程，得到 $u=4$ 或 $u=-\frac{24}{7}$，

于是有 $x+\frac{4}{x}=4$， 或 $x+\frac{4}{x}=-\frac{24}{7}$，

解得 x=2，经检验，x=2 是原方程的解。

注：形如 $\frac{a_1x}{bx^2+c_1x+d}+\frac{a_2x}{bx^2+c_2x+d}=m$ （$m\neq0$）的分式方程，均可变形为

$\frac{a_1}{bx+\frac{d}{x}+c_1}+\frac{a_2}{bx+\frac{d}{x}+c_2}=m$（$m\neq0$），再用换元方法求解。

（返回）

2. 解 考虑到分子分母只有一次项的系数互为相反数，故可考虑用合分比定理来化简，原方程化为

$$\frac{(3x^2+4x-1)+(3x^2-4x-1)}{(3x^2+4x-1)-(3x^2-4x-1)}=\frac{(x^2+4x-1)+(x^2-4x+1)}{(x^2+4x-1)-(x^2-4x+1)}$$

$$\frac{6x^2-2}{8x}=\frac{2x^2+2}{8x}$$

当 $x\neq0$ 时，解得 $x=\pm1$，

经检验，$x=\pm1$ 是原方程的根，x=0 也是原方程的根。

注：**使用合分比定理化简时，可能发生增根与**失根**的现象，故需仔细验根。

（返回）

3. 解 方程左边是平方和的形式，凑完全平方得到

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+2x\bullet\frac{2x}{x+2}=5$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\bullet\frac{x^2}{x+2}-5=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}+5\right)\left(\frac{x^2}{x+2}-1\right)=0$$

于是有 $\frac{x^2}{x+2}$+5=0，即 $x^2+5x+10=0$，无实数解 （其判别式Δ=25-40=-15<0）

或 $\dfrac{x^2}{x+2}$－1=0，即 x^2－x－2=0，（x+1）（x－2）=0， 所以 x=－1,2

经检验 x=－1，x=2 都是方程的解。

（返回）

4. 解 原方程可以化为

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+1=\frac{19}{6}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{13}{6}$$

令 $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$， 则有 $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{6}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}$

所以 $y_1=\dfrac{2}{3}$， $y_2=\dfrac{3}{2}$

当 $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{2}{3}$ 时，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$；

当 $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$ 时，x=1；

经检验， x=1，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的解。

注：类似 $x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}$ 至多有两个根，可以化为一元二次方程求根，显然 $a\neq1$ 时，$x=a$ 与 $x=1/a$ 就是所求的两个根。

（返回）

5. 解 原方程可化为

$$\frac{x^2-3x+8}{x^2+5}+\left(\frac{3x-3}{x^2-3x+8}+1\right)=\frac{19}{15}+1$$

即 $\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+5}+\dfrac{x^2+5}{x^2-3x+8}=\dfrac{34}{15}$

令 $u=\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+5}$， 则有 $u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{3}$， 即 $u=\dfrac{3}{5}$， 或 $u=\dfrac{5}{3}$

当 $\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+5}=\dfrac{3}{5}$ 时，（2x－5）（x－5）=0，x=5 或 5/2

当 $\dfrac{x^2-3x+8}{x^2+5}=\dfrac{5}{3}$ 时，$2x^2+9x+1=0$，$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{4}$

经检验，都是方程的根。

（返回）

6. 解 令 $\frac{13-x}{x+1}$=y，则原方程可化为 $\begin{cases} xy(x+y)=42; \\ xy+(x+y)=13; \end{cases}$

又根据所设得到 13－x=xy+y，即

由韦达定理可得 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=7 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+\sqrt{2} \\ y=3-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-\sqrt{2} \\ y=3+\sqrt{2} \end{cases}$

经检验，都是原方程的根。

（返回）

7. 解 设 $y=\frac{a+x}{b+x}$，则原方程化为 $y+\frac{1}{y}=2+\frac{1}{2}$

所以 y=2，或 y=1/2

当 a+x=2（b+x）时，x=a－2b；

当 b+x=2（a+x）时，x=b－2a；

将 x=a－2b, 或 x=b－2a 代入分母 b+x, 得 a－b, 2(b－a), 代入分母 a+x，得 2(a－b),b－a,

所以 当 a≠b 时，x=a－2b, 或 x=b－2a 都是原方程的根；当 a=b 时，无解。

（返回）

8. 解 原方程两边同时乘以 x(x－2), 得到整式方程

$$2x^2-2x+(a+4)=0 \quad ①$$

（1）若方程①有两个相等的实数根，则

一元二次方程的判别式Δ=4－4・2（a+4）=0

解得 a= －7/2, 此时方程①的两个相等的实数根为 1/2

（2）若方程①有两个不等的实数根，而其中一个根使原方程分母为零，即方程①有一个根为 0 或 2（增根）。

（2.1）当 x=0 时，代入方程①得 a+4=0， 即 a=－4，这时方程①的另外一个根为 x=1，经验算，x=1 确实是原方程的一个根，它不会使原分式方程的分母为零。

（2.2）当 x=2 时，代入方程①得 8－4+（a+4）=0，即 a=－8. 这时方程①的另外一个根为 x=－1，经验算，x=－1 确实是原方程的一个根，它不会是原分式方程的分母为零。

综上所述，若原分式方程只有一个实数根，所求的 a 分别为－7/2, －4, －8, 其对应的唯一根分别为 1/2, 1, －1.

（返回）