2000 年“弘晟杯”上海市初中数学竞赛

一、填空题

1.【答案】10.5

2.【答案】A、D

3.【答案】39

4.【答案】$\frac{19\sqrt{6}}{12}$

5.【答案】$\frac{1}{2}<m<2$

6.【答案】$m<-1$ 或 $m\geq 0$

7.【答案】840

8.【答案】(3，2)

9.【答案】$\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$

10.【答案】108

二、

【答案】2997

【解析】解法一：设这个四位数为 $abcd$．考虑 $a+b+c+d$ 的个位数字，乘以 111 后，为原数，个位数字为 d，所以 $a+b+c$ 乘以 111 后尾数为 0，所以 $a+b+c=10$ 或 20.

若 $a+b+c=10$，则原数为 $1110+111d$．

当 $d<9$ 时，原数各位分别为：1，$1+d$，$1+d$，d，前三位之和为 $3+2d=10$，无整数解.

当 $d=9$ 时，原数为 $1110+999=2109$，前三位之和为 3 不等于 10.

若 $a+b+c=20$，则原数为 $2220+111d$．

当 $d<8$ 时，原数各位分别为：2，$2+d$，$2+d$，d，前三位之和为 $6+2d=20$，$d=7$，求得原数为 $2220+777=2997$，满足要求.

当 $d=8$ 时，原数为 $2220+888=3108$，前三位之和为 4 不等于 20.

当 $d=9$ 时，原数为 $2220+999=3219$，前三位之和为 6 不等于 20.

综上，该四位数为 2997.

解法二：设这个四位数是 $1000a+100b+10c+d$．

由已知有 $1000a+100b+10c+d=111(a+b+c+d)$ 有 $889a-11b-101c-110d=0$．

如果 $a=1$，容易有 $110(8-d)+9-11b-101c=0$．显然，$d<8$．下面按照 d 分类：

（1）$d=0$，那么$889a-11b-101c=0$．此时，c只能够是 8，但$81-11b=0$没有整数b使之成立，即无解；

（2）$d=1$，$779a-11b-101c=0$，得$c=7$，但$72-11b=0$无解；

（3）d=2，669-11b-101c=0，c=6，63-11b=0，无解；

（4）d=3，559-11b-101c=0，c=5，54-11b=0，无解；

（5）d=4，449-11b-101c=0，c=4，45-11b=0，无解；

（6）d=5，339-11b-101c=0，c=3，36-11b=0，无解；

（7）d=6，229-11b-101c=0，c=2，27-11b=0，无解；

（8）d=7，119-11b-101c=0，c=1，18-11b=0，无解．

当 a=2 时，110（16-d）-11b-101c+18=0，还是按 d 分类：

（1）d=9，788-11b-101c=0，c=7，81-11b=0，无解；

（2）d=8，898-11b-101c=0，c=8，90-11b=0，无解；

（3）d=7，1008-11b-101c=0，c=9，99-11b=0，b=9．

讨论到这里就得到了 a=2，b=9，c=9，d=7 这个四位数是 2997．

三、

【解答】（1）至少要涂 7 个小方格．假设只涂了 6 格或更少，则 4 行中至少有 1 行未涂或只涂了 1 格．

若某行未涂，其他 3 行中至少有 1 行涂了不多于 2 格，划去这 2 格所在的 2 列，划去其他 2 行，剩下的 4 格都未涂色．

若某行只涂了 1 格，其他 3 行涂了 5 格或更少，则其中至少有 1 行涂了不多于 1 格，划去这 2 格所在的 2 列，划去其他 2 行，剩下的 4 格都未涂色．

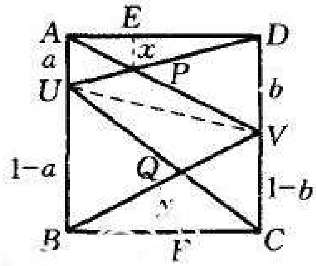
所以只涂了 6 格或更少，不能满足要求．另一方面，如果第 1 行涂 1，2 格，第 2 行涂 2，3 格，第 3 行涂 1，3 格，第 4 行涂第 4 格，能满足要求，所以至少要涂 7 个小方格．

（2）至少要涂 5 个小方格．显然涂 4 格或更少是不满足要求的．如果选 5 个不同行不同列的小方格（如对角线上的 5 个小方格）涂成红色，能满足要求，因为这时任何 2 行 2 列，至多只能包含其中 4 个小方格．

四、

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】如图，



连UV，因为$AU \parallel DV$，所以$S_{\triangle UPV}=S_{\triangle UDV}-S_{\triangle PDV}=S_{\triangle ADV}-S_{\triangle PDV}=S_{\triangle ADP}$. 同理，$S_{\triangle UQV}=S_{\triangle BQC}$.

故$S_{四边形PUQV}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BQC}$. 作$PE\perp AD$，$QF\perp BC$，$E$、$F$为垂足，并设$PE=x$，$QF=y$，则$S_{四边形PUQV}=\frac{1}{2}(x+y)$. 设$AU=a$，$DV=b$，则$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=DE+AE=1$. 故$x=\frac{ab}{a+b}$. 同理，$y=\frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)}=\frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}$. 则

$$S_{四边形PUQV}=\frac{1}{2}\left[\frac{ab}{a+b}+\frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}\right]$$

$$=\frac{(a+b)-\left(a^2+b^2\right)}{2(a+b)(2-a-b)}$$

$$=\frac{2(a+b)-a^2-b^2-\left(a^2+b^2\right)}{4(a+b)(2-a-b)}$$

$$\le\frac{2(a+b)-a^2-b^2-2ab}{4(a+b)(2-a-b)}$$

$$=\frac{(a+b)(2-a-b)}{4(a+b)(2-a-b)}=\frac{1}{4}.$$

等号当且仅当$a=b$时成立. 故四边形$PUQV$面积的最大值是$\frac{1}{4}$.