

# 八升九数学 第一讲

---

## Lesson 1 锐角三角比定义和应用

### 1. 定义

$Rt\triangle ABC$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle C = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  有如下定义:

- 正弦  $\sin A = \frac{a}{c}$
- 余弦  $\cos A = \frac{b}{c}$
- 正切  $\tan A = \frac{a}{b}$
- 余切  $\cot A = \frac{b}{a}$
- 直角三角形内角关系:  $\angle A + \angle B + \angle C = \pi = 180^\circ$ ,  $\angle A + \angle B = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$
- 勾股定理:  $a^2 + b^2 = c^2$

### 2. 特殊锐角三角比计算与性质

针对直角三角形锐角为  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ,  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ,  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ , 不难算出其正弦、余弦、正切和余切。

### 3. 同角三角比关系:

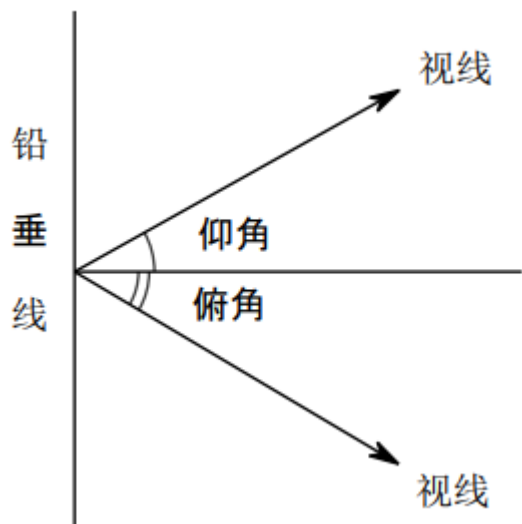
- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ,
- $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ,
- $\tan A \cdot \cot A = 1$

### 4. 余角三角比关系

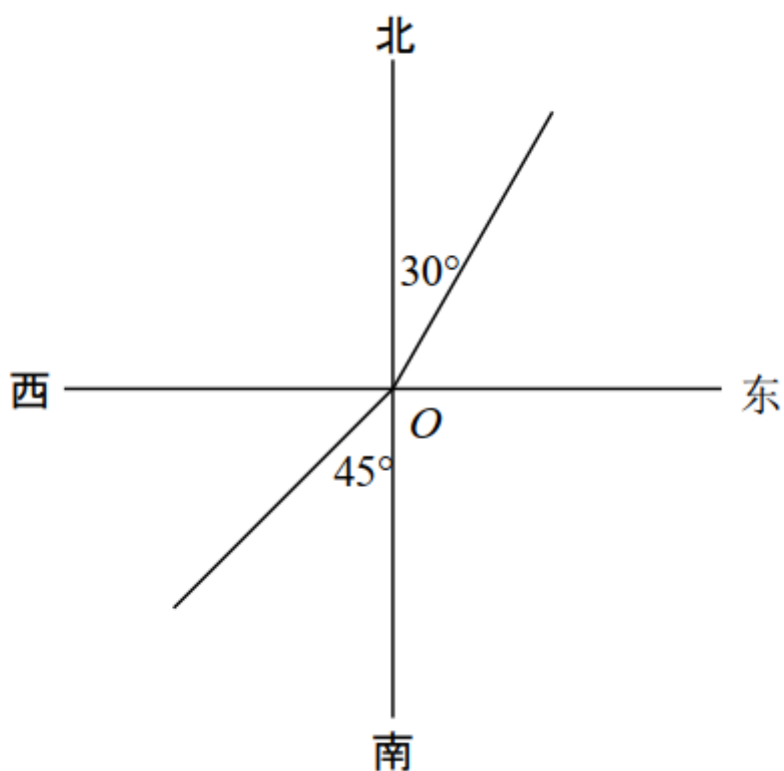
- $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ ,  $\cos A = \sin(90^\circ - A)$
- $\tan A = \cot(90^\circ - A)$ ,  $\cot A = \tan(90^\circ - A)$

### 5. 解直角三角形的应用

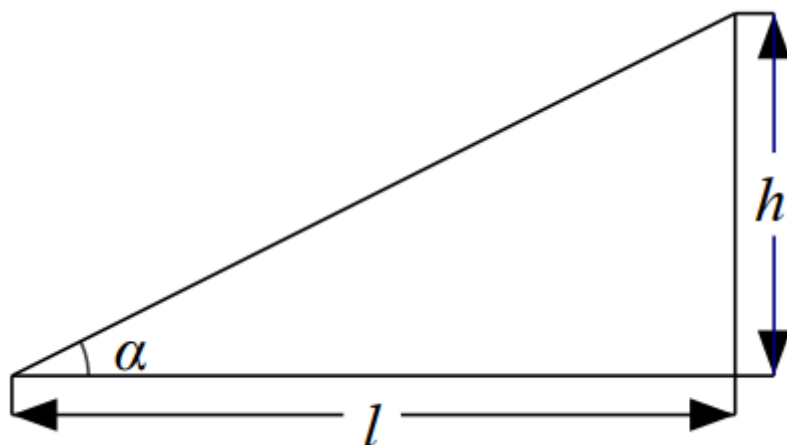
(1) 仰角与俯角: 同一铅锤面内视线和水平面的夹角, 视线在水平线上方的叫做仰角, 在水平线下方的叫做俯角



(2) 方向角：从正北或正南方向到目标方向所形成的小于 $90^\circ$ 的角



(3) 坡度与坡角：坡面的铅垂高度  $h$  和水平长度  $l$  的比叫做坡面坡度（或坡比），记作  $i$  ( $i = \frac{h}{l}$ )；坡面与水平面的夹角叫做坡角，记作  $\alpha$ , ( $\tan \alpha = i = \frac{h}{l}$ ). 坡度经常写成  $1 : m$  的形式，如  $i = 1 : 2.4$



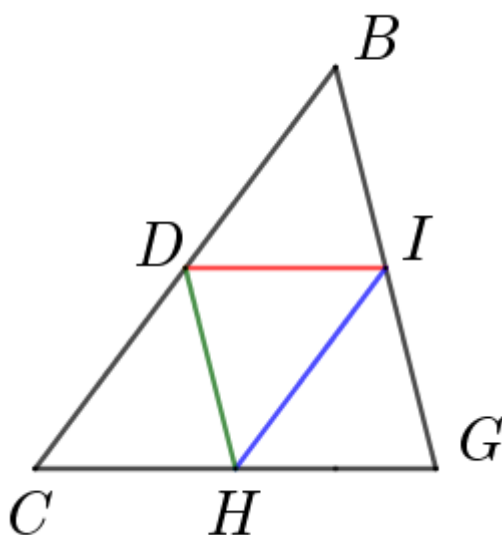
## 6. 三角形中位线定理

在任意 $\triangle BCG$ 中,  $D, H, I$ 分别是 $BC, CG, GB$ 的中点。则有:

$$DH = \frac{BG}{2}, DH \parallel BG$$

$$HI = \frac{BC}{2}, HI \parallel BC$$

$$DI = \frac{CG}{2}, DI \parallel CG$$



## 7. 平行线定理

在 $\triangle ABC$ 中,  $D, E, F$ 分别是 $AB, BC, AC$ 线段上的点。

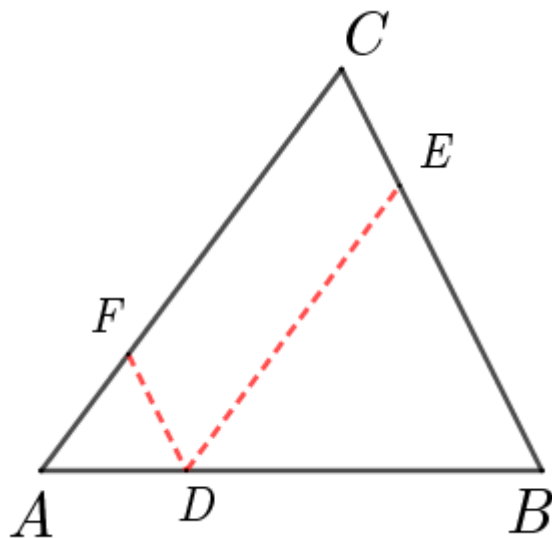
已知:  $DE \parallel AC, DF \parallel BC$ , 则有

$$(1) \triangle BDE \sim \triangle BAC \implies$$

$$DE : AC = BE : BC = BD : BA$$

$$(2) \triangle ADF \sim \triangle ABC \implies$$

$$DF : BC = AD : AB = AF : AC$$



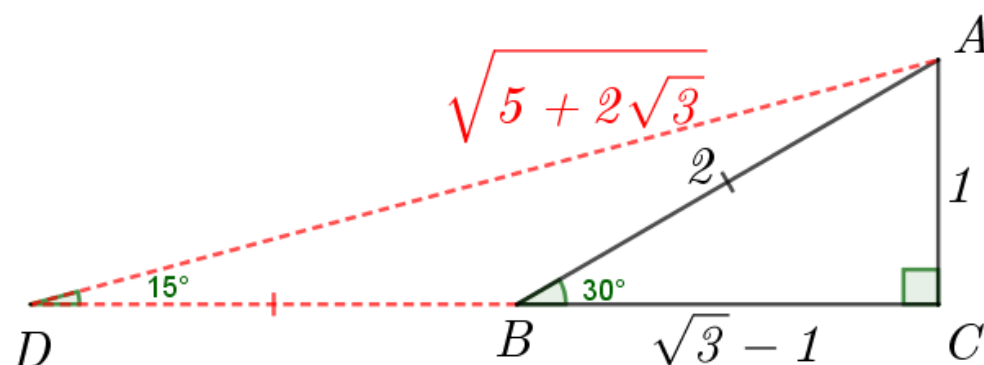
## 8. 经典例题

(1) 几何方法计算  $15^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $18^\circ$  的三角比

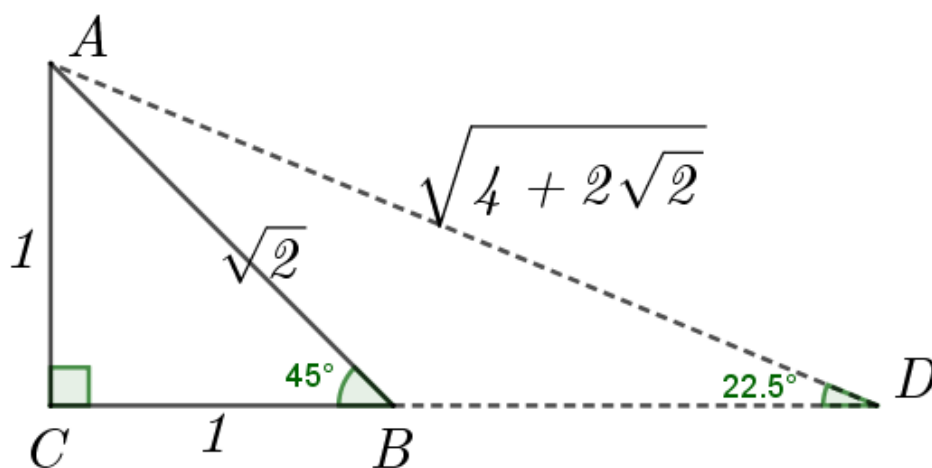
- $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$
- $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ,  $\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ,  $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$ ,  $\cot 22.5^\circ = \sqrt{2} + 1$
- $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

作辅助线方法如下：

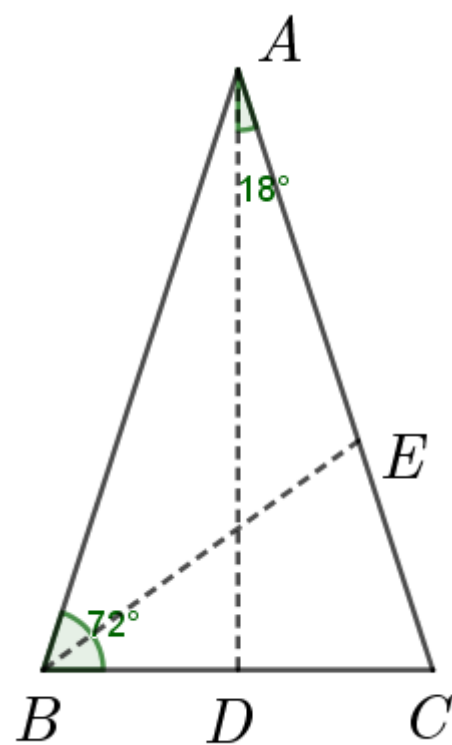
1.  $15^\circ$ 角如下



2.  $22.5^\circ$ 角如下



3.  $18^\circ$ 角如下



#### 4. 黄金分割与五角星

