2003 年“宇振杯”上海市初中数学竞赛
答案详解

一、 填空题

1、【答案】$-ax^2+bx-c$

【解析】已知 C 为函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像，那么 C 关于 y 轴对称的曲线为 C_1，则 C_1 的方程为 $y=a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2-bx+c(a\neq0)$;$C_1$ 关于 x 轴对称的曲线为 C_2，则 C_2 的方程为$-y=ax^2-bx+c(a\neq0)$,即 $y= -ax^2+bx-c(a\neq0)$

2、【答案】10.95

【解析】设小王从甲店买了 a 只笔，按照题设中两商店的优惠条件，显然，a=0，a=5 或者 a=10.

当 a=0 时，即小王不从甲店买，全从乙店买，此时他将花掉 13×0.85=11.05(元)；

当 a=5 时，即小王从甲店花 5 块钱得到 6 只笔，再从乙店中买 7 只笔就可以了，此时，他将花掉 1×5+7×1×0.85=10.95（元）；

当 a=10 时，即小王从甲店花 10 块钱得到 12 只笔，再从乙店中买 1 只笔就可以了，此时，他将花掉 1×10+1=11（元）

对比以上结果，显然，小王最少需要花 10.95 元。

3、【答案】0.005

【解析】已知 a+b+c=0，即 $a+b= -c$ （1）

由 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 以及 $a^2+b^2+c^2=0.1$，则（a+b）$^2-2ab+c^2=c^2-2ab+c^2=0.1$，得

$ab=c^2-0.05$ （2）

所以，

$$
\begin{aligned}
a^4+b^4+c^4&=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+c^4\\
&=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2+c^4\\
&=[c^2-2(c^2-0.05)]^2-2(c^2-0.05)^2+c^4\\
&=(0.1-c^2)^2-2(c^2-0.05)^2+c^4\\
&=(0.01+c^4-0.2c^2)-2(c^4-0.1c^2+0.0025)+c^4\\
&=0.005
\end{aligned}
$$

4、【答案】0°<∠A<90°

【解析】已知 ABCD 为四边形，所以，∠A>0，又知 ABCD 为凸四边形，所以∠A 的最大值必须小于 CD 与 BC 共线时的长度，当 CD 与 BC 共线时，AB=8，AD=6，BD=BC+CD=4+6=10，此时因为 $6^2+8^2=10^2$，所以，此时，∠A=90°，所以，满足题意的∠A 大小的范围是 0°<∠A<90°

5、【答案】44

【解析】由题意，设 $x^2+x-n=(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$,两边对应得 a-b=1，ab=n，由 a-b=1 得 a=b+1，代入 ab=n 得 b（b+1）=n，可见 n 是两个连续自然数的乘积，所以在 1-100 之间，两个连续自然数相乘是：1×2=2 、2×3=6 、3×4=12、 4×5=20 、5×6=30 、…43×44=1892,44×45=1980.因为 45×46>2003，因此，所有满足条件的 n 的所有值共有 44 个:2,6,12,20,30,…,1892,1980

6【答案】527

【解析】因为 $\frac{1}{m^2+m}+\frac{1}{(m+1)^2+(m+1)}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{23}$，提公因式得

$$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{23}$$

即 $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{23}$

消去后得 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{23}$

移项得 $m=23\times\frac{n+1}{n+24}$

已知 m，n 都是正整数，经检验，当且仅当 $n+24=23^2=529$ 时，才能使得满足 $m=23\times\frac{n+1}{n+24}$ 的 m 为正整数，此时，n=529-24=505，

$$m=23\times\frac{n+1}{n+24}=23\times\frac{23^2-24+1}{23^2}=22$$

所以，m+n=22+505=527

7、【答案】 $\frac{1}{2}k(k^2+1)$

【解析】观察列的特征，每一列除以 k 的余数都是相同的：根据去掉数的特征知道，选的数不可能在同一列，也就是说，它们的除以 k 的余数是不可能相同的：所以，所取出的 k 个数除以 k 后余数一定分别为 0,1,2,3，…，k-1，所以，取的数可以使对角线上的数字，即 1，k+2,2k+3,3k+4，…，k^2,这 k 个数的和是

$1+(k+2)+(2k+3)+(3k+4)+\cdots+k^2$

$=1+(k+2)+(2k+3)+(3k+4)+\cdots+[(k-1)k+k]$

$=k[1+2+\cdots+(k-1)]+(1+2+3+\cdots+k)$

$=k[k-1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}]+[k+\frac{k(k-1)}{2}]$

$=\frac{1}{2}k(k^2+1)$

8、【答案】5π

【解析】因为三角形 ANB 为正三角，所以，顶点 A 在翻转过程中的轨迹：或者半径为 1 的圆心角为 120 度的扇形弧，或者为半径为 1 圆心角为 30 度的扇形弧。

当三角形 ANB 在 PN 上旋转时，A 的轨迹为：2 个为半径为 1 圆心角为 120 度的扇形弧；

当三角形 ANB 在 PQ 上旋转时，A 的轨迹为：1 个为半径为 1 圆心角为 30 度的扇形弧，1 个半径为 1 圆心角为 120 度的扇形弧。

当三角形 ANB 在 MQ 上旋转时，A 的轨迹为：1 个为半径为 1 圆心角为 30 度的

扇形弧，2 个为半径为 1 圆心角为 120 度的扇形弧；
当三角形 ANB 在 MN 上旋转时，A 的轨迹为：2 个为半径为 1 圆心角为 120 度的扇形弧。
然后，A 点不动，N 点旋转 1 个为半径为 1 圆心角为 30 度的扇形弧，正三角形 ANB 恰好回到原来起始位置。
综上，顶点 A 在翻转过程中形成轨迹，恰好是：2 个为半径为 1 圆心角为 30 度的扇形弧和 7 个为半径为 1 圆心角为 120 度的扇形弧，总长为

$$2\times(2\pi\times1\times\frac{30}{360})+7\times(2\pi\times1\times\frac{120}{360})=\frac{30}{6}\pi=5\pi$$

9、【答案】 $\frac{50\sqrt{57}}{19}$

【解析】设∠BAN= α，∠NAM=β
由已知 MN=AM, AB=BC, ∠MAC=∠BAN, 知∠MAC=α，∠ANM=β，且∠A=∠C
由“外角等于两个不相邻的内角之和”得∠B=∠ANM-∠BAN=β -α
由以上各角知，∠A=∠C=2α +β．又∠A+∠B+∠C=180°，
即 2（2α +β ）+β -α =180°
解得α +β =60°，即∠BAM=60°．
在三角形 BAM 中，由点 M 向 AB 边作高，垂足记作 P，那么

$$PM=AM\times\sin60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$AP=AM\times\cos60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$$

BP=AB-AP=10-2=8

$$BM=\sqrt{BP^2+MP^2}=\sqrt{8^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{19}$$

过 C 点向 AB 边作高，垂足记作 Q。那么，△BPM∽△BQC,从而，$\frac{PM}{CQ}=\frac{BM}{BC}$

即 $\frac{2\sqrt{3}}{CQ}=\frac{2\sqrt{19}}{10}$，解得 $CQ=\frac{10\times\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

所以，△ABC 的面积等于 $\frac{1}{2}$ • AB • CQ= $\frac{1}{2}\times10\times\frac{10\times\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{50\sqrt{57}}{19}$

10、【答案】3

【解析】设∠A=α，那么∠C=3∠A=3α，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle C}$，即

$\frac{8}{\sin\alpha}=\frac{10}{\sin3\alpha}$ 解得 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$，再由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(180°-4\alpha)$

$=10^2+8^2+2\times10\times8\times\cos(4\alpha)$

$=9$

所以，AC=3

二、【解答】令 $f(x)=4x^2-2mx+n$, 则 y=f（x）的图像时开口向上的抛物线，对称轴为 $x=\dfrac{m}{4}$

$$1<x_1、x_2<2\quad\begin{cases}1<\dfrac{m}{4}<2\\ f(\dfrac{m}{4})=-\dfrac{m^2}{4}+n\le 0\\ f(1)=4-2m+n>0\\ f(2)=16-4m+n>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4<m<8①\\ m^2\ge 4n②\\ 4+n>2m③\\ 16+n>4m④\end{cases}$$

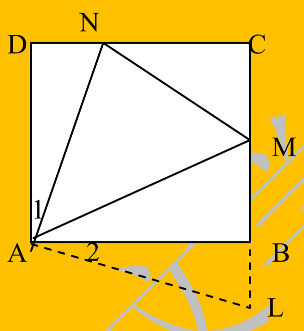
由①知 m=5,6,7，当 m=5 时，由②得 $n\leqslant\dfrac{25}{4}$，故 n≤6，又由③得 n>6，矛盾，

当 m=6 时，由②得 n≤9，又由③、④得 n>8，所以 n=9，

当 n=7 时，由②得 n≤12，又由④得 n>12, 矛盾，

综上所述，m=6，n=9

三、【解答】如图



延长 CB 至 L，使 BL=DN，则 Rt△ABL≌Rt△ADN

故 AL=AN, ∠1=∠2，∠NAL=∠DAB=90°．

又 MN=2-CN-CM=DN+BM=BL+BM=ML, 且 AM=AM,

所以△AMN≌△AML, 故 $\angle MAN=\angle MAL=\dfrac{90°}{2}=45°$

（2）设 CM=x，CN=y，MN=z，则 $\begin{cases}x+y+z=2\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$ 等价于 $\begin{cases}x=2-y-z\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$

于是 $(2-y-z)^2+y^2=z^2$，整理得 $2y^2+(2z-4)y+(4-4z)=0$

因为 y>0,所以 $\triangle=4(z-2)^2-32(1-z)\geqslant 0$，即 $(z+2+2\sqrt{2})(z+2-2\sqrt{2})\geqslant 0$

又因为 z>0,故 $z\geqslant 2\sqrt{2}-2$，当且仅当 $x=y=2-\sqrt{2}$ 时等号成立。

由于 $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle AML}=\dfrac{1}{2}\cdot ML\cdot AB=\dfrac{1}{2}MN\cdot 1=\dfrac{z}{2}$，因此，△AMN 的面积的最小值为 $\sqrt{2}-1$

四、【解答】设 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_7-x_6=a$，且 x_i 对应的函数值为 y_i，则

$$\begin{aligned}\triangle_k&=y_{k+1}-y_k\\&=(ax_{k+1}^2+bx_{k+1}+c)-(ax_k^2+bx_k+c)\\&=a[(x_k+d)-x_k^2]+b[(x_k+d)-x_k]\\&=2adx_k+(ad^2+bd)\end{aligned}$$

故 $\triangle_{k+1}-\triangle_k=2ad(x_{k+1}-x_k)=2ad^2$（常数）。由给出的数据

y_k:	51	107	185	285	407	549	717，得
$\triangle_k$:	56	78	100	122	142	168，	
$\triangle_{k+q}-\triangle_k$:	22	22	22	20	26		

由此可见，549 是被算错的 y 值，其正确值应该是 551.