第十二届“中环杯”中学生思维能力训练活动

初二年级选拔赛

题型	一、填空题	二、动手动脑题	共计
得分			

一. 填空题:(每题 7 分,共 56 分。)

1. 已知△ABC 的三条边长为 a,b,c,满足 $a^2+2b^2+c^2-2bc-6a-8b+25=0$,那么,这个三角形是(锐角)三角形。(填:锐角、直角或者钝角)

[解]不难将原方程化为:

$(a-3)^2+(b-c)^2+(b-4)^2=0$

∵三个非负数之和为 0,∴每一个都是 0.

即 a=3,b=4,c=b=4.

显然是等腰三角形,且是**锐角三角形**。

2. 计算:$\sqrt{2}\times\sqrt{4+2\sqrt{3}}\times\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$=($\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$)。

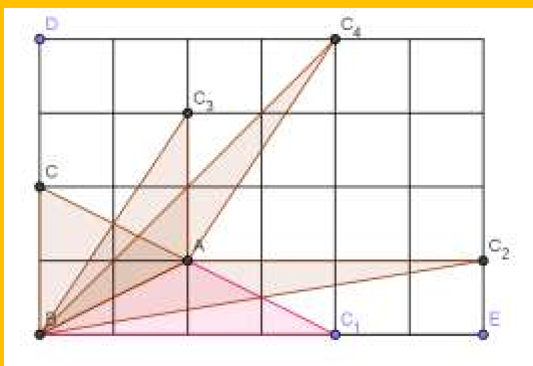
【解】$4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$,$7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$,$2-\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2/2$

故原式=$\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)\times(2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$

$=\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

3. 在方格纸上,每个小方格的顶点叫做格点,每个小方格的面积为 1 个平方单位。以格点为顶点的三角形叫做格点三角形。如图,在 6×4 的方格纸上,以 AB 为边的格点△ABC 的面积为 2 个平方单位,则符合条件的 C 点共有(5)个。

【解】共有 5 个格点,C,C_1~C_4,参见下图。思路:以 AB 为底边的三角形,比较容易找到 C 和 C_1 两点(分别占据 AB 两侧),分别与 AB 构成面积为 2 个平方单位的三角形.再利用等底等高的三角形面积相等的原则,过 C 和 C_1 做 AB 的平行线,得到 C_3,C_4 以及 C_2.不管是 6x4 网格,还是扩大的 9x9 的网格,都可以利用此方法得到。



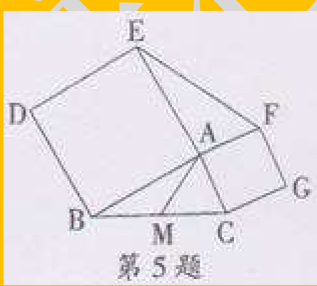
4. 已知直线 l 经过点 A(1,2)和 B(k,3)(k 是一个常数),那么直线的解析式为(y=(x+2k-3)/(k-1) 或 x=1 (k=1))。

【解】直线方程可以假设为 y=ax+b
经过 A（1,2），即表示 x=1, y=2 满足上述式子，　2=a+b　　　　（1）
经过 B（k，3），则 3=ka+b　　　　（2）
（2）-（1）得到：（k-1）a=1，
当 k≠1 时，　a=1/(k-1)，这是 b=2-a=（2k-3）/(k-1)，此时，直线的解析式为 y=（x+2k-3）/(k-1)　　　（k≠1）

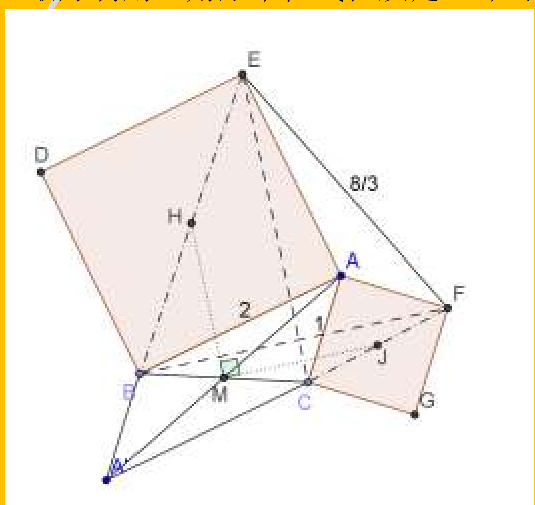
当 k=1 时，显然 直线的解析式是 x=1

5.　如图，在△ABC 外作正方形 ABDE 和 ACGF，M 是 BC 的中点。已知 AB=2，AC=1，EF=$\frac{8}{3}$，那么，AM=（ 4/3 ）。
【解】考虑到 AM 是△ABC 的边 BC 上的中线，一般的规则利用倍长中线法。
延长 AM 至 A’，使得 AM=MA’，连接 BA’。
不难证明：△AMC≌△A’MB （SAS：AM=MA’，∠AMC=∠A’MB，CM=MB）
所以：A’B=AC=AF（正方形 ACGF），
∠BA’M=MAC ➔ A’B//AC➔∠A’BA +∠BAC=180°；
又：∠BAC+∠FAE=180°
所以　∠A’BA=∠EAF
从而 △ABA’≌△AEF（SAS：A’B=AF，∠A’BA=∠FAE，BA=AE 正方形 ABDE）
所以：AA’=EF，AM=EF/2=4/3

【扩充】其实本题的正方形边长 1 和 2 是多余的，AM 始终是 EF 的一半。
同时还可以扩充：取两个正方形的中心为 H、J，连接 MH，MJ。
求证：MH⊥MJ，且 MH=MJ，即△MHJ 为等腰直角三角形。
请读者自己证明．提示：作辅助线 EC 和 BF，利用三角形全等证明△AEC≌△ABF，即可证明：EC=BF。
另外还可以证明 EC⊥BF。最好利用三角形中位线性质定理即可。



第 5 题



6.　有 2011 个数 a_1，a_2，……a_{2011}，每个数都只能取 1 或者-1，那么它们的

两两乘积之和 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_1a_{2011}+a_2a_3+\cdots\cdots+a_2a_{2011}+\cdots\cdots+a_{2011}a_{2011}$ 的最小正值为（ 7 ）。

【解】因为 2011 个数只能取 1 或-1，所以两两相乘的结果只能有两种情况：

(1)要么是 1（两数同时取 1 或-1）；

(2)要么是-1（两数分别是 1 或-1）。

2011 个数，两两相乘，共有 $C_{2011}^2=\dfrac{2011\times2010}{2\times1}$ 个组合(奇数个)。

我们假设有 n 个数取 1，则有（2011-n）个数取-1，两两组合就是：

(a)乘数为 1 的有多少项呢：n 个 1 两两相乘+（2011-n）个-1 两两相乘，

共 $C_n^2+C_{2011-n}^2=\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{(2011-n)(2010-n)}{2}=n^2-2011n+2011\times1005$ （1）

(b)乘数为-1 的有多少项呢：n 个 1 和（2011-n）个-1 两两相乘，

共 n（2011-n） $=-n^2+2011n$ （2）

故两两相乘的总和 S(n)=（1）-（2）$=2n^2-4022n+2011\times1005$ （3）

其中 $0\leqslant n\leqslant2011$，且 n 为自然数，

题目转换成了 **求函数 S(n)在定义域[0,2011]之间的最值问题,n 为自然数。**

（3）式的右边可以化为：

$S(n)=2(n-\dfrac{2011}{2})^2-\dfrac{2011}{2}$

当 n 最接近 2011 的一半时，S(n)有最小值，因为 n 为自然数，故不妨设 n=2010/2=1005, S(1005)=-1005, 同理 n=2012/2=1006, S(1006)=-1005 这是最小负整数值。

但是题目要求最小正值，所以 S(n)>0, n 为自然数。

即：$n>\dfrac{2011+\sqrt{2011}}{2}$，或者 $n<\dfrac{2011-\sqrt{2011}}{2}$

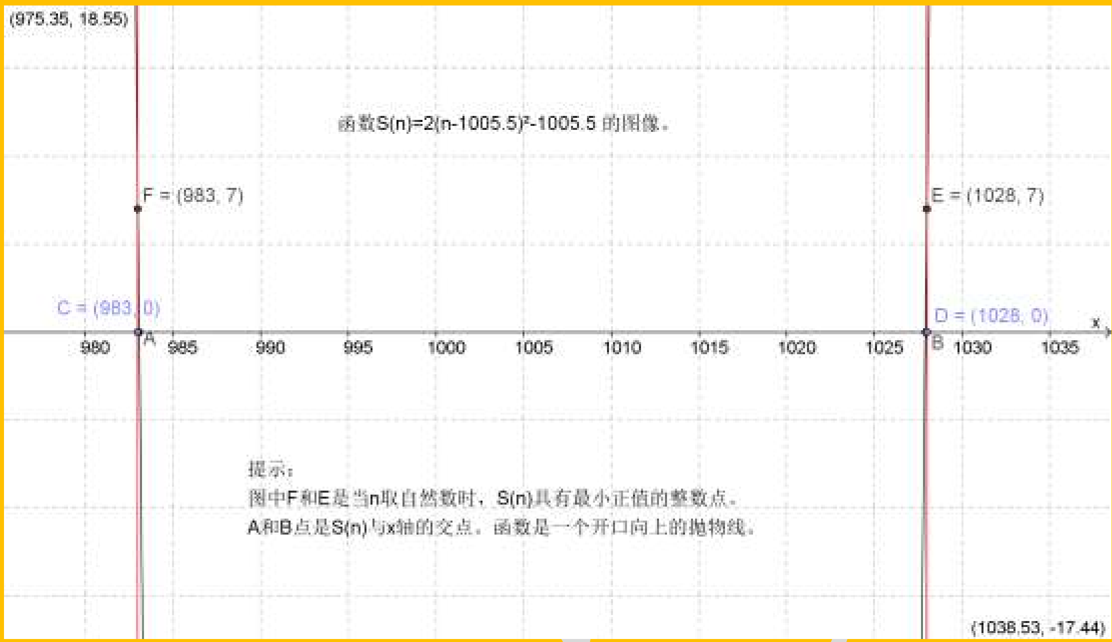
我们注意到 $44^2<2011<45^2$

所以 n>1027.5 或者 n<983

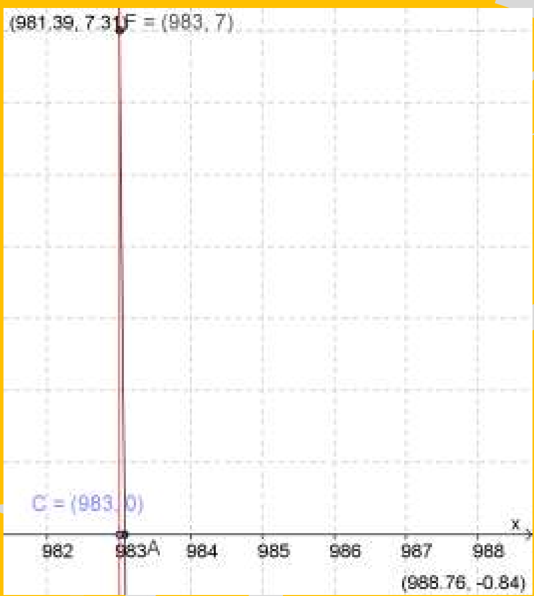
又 n 为自然数，最接近的 n 可取 1028 或 983，(函数的递增递减特性)

经演算可得 S(1028)=S(983)=2025/2-2011/2=7

图像如下：



放大局部 A 点

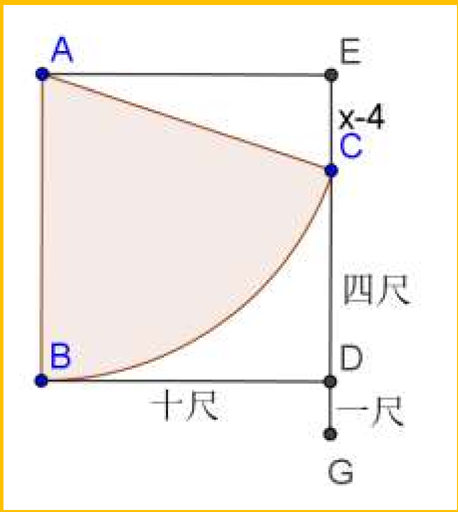


放大局部 B 点

7. 明朝程大位的著作《直指算法统宗》里有一道“荡秋千”的趣题，是用诗歌的形式写的：平地秋千未起，踏板一尺离地，送行二步与人齐，五尺人高曾记。仕女佳人争蹴，终朝笑语欢嬉。从此诗可知，索长为（ 14.5 ）尺。（注：一步=五尺）

【解】先翻译一下：秋千静止悬挂时，踏板离地的高度是 1 尺。

现在将秋千推高，晃出两步（10 尺）的距离，有人记录了此时踏板离地的高度为 5 尺。仕女佳人争着荡秋千，一整天都欢声笑语；工匠师傅们好奇的是秋千绳索到底有多长呢？



假设 A 点为秋千的支点，从侧面看。

B 为秋千静止时离地最近的点，C 点为推高后 B 点所在的位置。

从 C 作垂线与 B 所在直线交于 D，与地面交于 G。

从圆心 A 作 CG 的垂线，交 GC 延长线为 E。

如图所示。

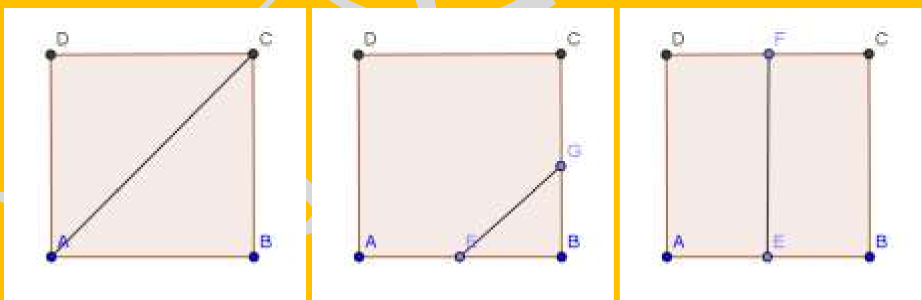
在直角三角形 AEC 中，设索长为 x 尺，由勾股定理得到：

$x^2=(x-4)^2+10^2$

解得 x=14.5 尺， 即绳长为 14.5 尺。

8. 一张正方形纸片，用剪刀沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分；拿去其中一部分，再沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分；又从得到的三部分中拿去其中之一，还是沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分……如此下去，最后得到了 34 个六十二边形和一些多边形纸片。则至少要剪（2005）刀。

解： 正方形被剪一刀，可以得到 3 角形（方法一、沿对角线剪，得 2 个三角形，排除，不合题意），5 边形（方法二、剪相邻的两边，及剪掉一个角，得到 3 角形和 5 边形）或 4 边形（方法三、对折剪，得到 2 个四边形）。

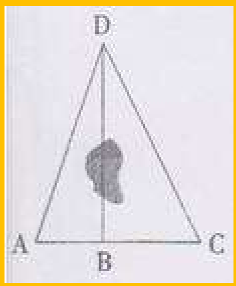


剪一刀变 5 边形，每次增加一刀就增加一边，故四边形必须剪 58 刀才能变成 62 边形。
假如我们已经有 34 个四边形，根据上述分析，需要剪 34x58=1972 刀，才能完成了 34 个 62 变形的制作。
那么，剩下的问题是：如何快速得到 34 个四边形？
显然，第一个四边形对折剪，变 2 个，这是最快的剪法（即方法三）。
这两个四边形分别再对折剪，需要 2 刀变成 4 个，每一刀最多只能增加一个四边形，故至少 33 刀，才能得到 34 个四边形。
综上所述：共需要至少 33+1972=2005 刀，才能够得到 34 个 62 边形。

二. 动手动脑题：（每题 11 分，共 44 分。）

1. 如图，A、B、C 三个村庄在一条东西走向的公路沿线，AB=2 千米，BC=3

千米，在 B 村的正北方有一个 D 村，测得∠ADC=45°。今将△ACD 区域规划为开发区，除其中 5 平方千米的水塘外，均作为建筑或绿化用地。试求这个开发区的建筑及绿化用地的面积是多少平方千米?　　（15-5=10 平方千米）



【解】纯粹代数方法求解,设高 DB=h,则三角形的面积

S=AC*DB/2=5h/2;　　　　（1）

另外：已知一内角为 45°，则三角形的面积又可以由这个内角来表示，

即 S=AD*DC*sin45°/2;　　　　（2）

在直角三角形 ADB 和 BDC 中，由勾股定理得到：

$AD^2=AB^2+DB^2=4+h^2$　　　　（3）

$DC^2=BC^2+DB^2=9+h^2$　　　　（4）

由（1）和（2）得到：$25h^2=AD^2*DC^2*(\sin45°)^2$　　　　(5)

将（3）和（4）代入（5）得到：

$50h^2=(4+h^2)(9+h^2)$

解得：$h^2=1$ 或 $h^2=36$，验算得 h=6 满足条件。

所以三角形 ADC 的面积=5*6/2=15 平方千米，扣除水塘的 5 平方千米，就是 10 平方千米。

答：这个开发区的建筑及绿化用地的面积是 10 平方千米。

2. 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{2x}$，对任意 x≥1，f(mx)+mf(x)<0 恒成立，求：实数 m 的取值范围。

【解】取 x=1，则 $f(mx)+mf(x)=f(m)+mf(1)=m-\frac{1}{2m}+m(1-0.5)=(3m-1/m)/2<0$

$3m-1/m<0$，$(3m^2-1)/m<0$

分情况讨论：

（1）当 m>0 时，$3m^2-1<0$，得到：　$0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$

（2）当 m<0 时，$3m^2-1>0$，得到：$m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$

答：实数 m 的取值范围是 $0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 $m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 已知 4 位数 $\overline{abcd}$ 满足条件：$a+b+c+d=\overline{ab}$，$a\times b\times c\times d=\overline{cd}$ 那么 4 位数

$\overline{abcd}$ 是多少?

【解】由题意知:

$a+b+c+d=10a+b$，$c+d=9a$

$c+d$ 是 9 的倍数，且 $c+d\leqslant 9+9$，所以 $9a\leqslant 18$，$0<a\leqslant 2$；

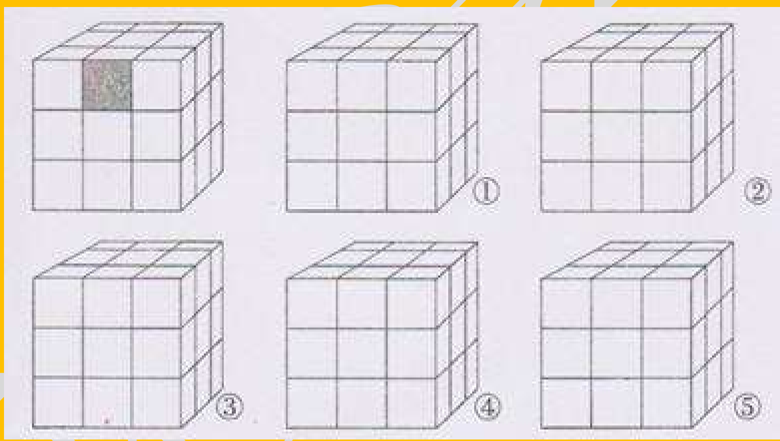
(1) $a=1$ 时，$c+d=9$，$b\times c\times(9-c)=9(c+1)$，依次设 $c=1,2,\ldots,8$，只有 $c=3$ 时，b 为自然数 2 满足条件，其他情况，b 都不是自然数。这个四位数是 1236.

(2) $a=2$ 时，$c+d=18$，故只有 $c=d=9$ 才能满足，这时，$2\times b\times 9\times 9=10\times 9+9$

b 不为自然数，略去。

答：这个四位数是 1236.

4. 如图是一个立方体魔方，我们可以从图中看到它的右侧，上侧和前侧。如果顺时针转动魔方右侧第一层 90 度，我们记作进行一次 R 操作；如果逆时针转动右侧第一层 90 度，则记作 R′。对于上侧和前侧分别进行相同的旋转操作，分别记为 U、U′、F、F′。现在对魔方进行 5 次转动：①U′，②R′，③F′，④R，⑤U，请你在图中依次画出每完成一次转动后，阴影面所在的位置。



【解】每个字母可以看成一个变换，对应一个动作。理解清楚题意后，不难给出正确的位置图。

翔文学习提供,
Email:xiangwenjy@gmail.com
QQ:2254 2374 33