整除篇

整数的整除性问题，是**数论 Number Theory**中的最基本问题，也是国内外数学竞赛中最常出现的内容之一．由于整数性质的论证是具体、严格、富有技巧，它既容易使学生接受，又是培养学生逻辑思维和推理能力的一个有效课题。因此，了解一些整数的性质和整除性问题的解法是很有必要的。

一、整除的基本概念

1.1 整除的定义

所谓**整除**，就是一个整数被另一个整数“**除尽**”，其数学定义如下：

若整数 b 除以非零整数 a，商为整数，且余数为零，即存在整数 k，使得 $b=ak$，我们就说 b 能被 a 整除，或称 a 能整除 b。b 为被除数，a为除数，即$a|b$（“|”是整除符号），读作“a整除b”或“b能被a整除”。

若不存在这样的整数 k，使得 $b=ak$，我们就说 b 不能被 a 整除，或称 a 不能整除 b，记作 $a\nmid b$

1.2 约数与倍数

如果 $a\mid b$, a 叫做 b 的约数（或因数Factor），b 叫做a 的倍数。整除属于除尽的一种特殊情况。

二、整除的判断法

2.1 尾数判断法--被2、5、 4、25、8、125整除的数

- 能被2或5整除的数：**个位数字**能被2或5整除，那么这个数能被2或5整除（偶数都能被2整除）
- 能被4或25整除的数：**末两位**能被4或25整除，那么这个数能被4或25整除
- 能被8或125整除的数：**末三位**能被8或125整除，则该数一定能被8或125整除

2.2 数字求和法--被3、9整除的数

- 能被3整除的数：**各个数位上的数字和**能被3整除，那么这个数能被3整除
- 能被9整除的数：**各个数位上的数字和**能被9整除，那么这个数能被9整除
- 弃3法和弃9法: 当位数较多时，我们可以逐步去掉3或9的倍数，只用剩下的不足3或9的数字和来判断

2.3 “截尾、倍数、加减、验和差”四步法--能被7、13、17整除的数

- 能被7整除的数：若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，**减去个位数的2倍**，如果差是7的倍数，则原数能被7整除。如果差太大或心算不易看出是否为7的倍数，就需要继续上述「**截尾、2倍、相减、验差**」的过程，直到能清楚判断为止。例如，判断133是否7的倍数的过程如下：$13-3\times2=7$，所以133是7的倍数；又例如判断6139是否7的倍数的过程如下：$613-9\times2=595$，$59-5\times2=49$，所以6139是7的倍数，余类推。
- 能被13整除的数：若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，**加上个位数的4倍**，如果和是13的倍数，则原数能被13整除。如果和太大或心算不易看出是否13的倍数，就需要继续上述「**截尾、4倍、相加、验和**」的过程，直到能清楚判断为止。
- 能被17整除的数：若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，**减去个位数的5倍**，如果差是17的倍数，则原数能被17整除。如果差太大或心算不易看出是否17的倍数，就需要继续上述「**截尾、5倍、相减、验差**」的过程，直到能清楚判断为止。

2.4 奇偶位求差法--被11整除的数

- (1) 奇数位（从左往右数）上的数字和与偶数位上的数字和之差（大数减小数）能被11整除，则该数就能被11整除。 或
- (2) 11的倍数检验法也可用上述检查7的「割尾法」处理, 过程唯一不同的是：倍数不是2而是1。

2.5 组合法--被6、10、12整除的数

- 能被6整除的数：各数位上的数字和能被3整除的偶数，如果一个数既能被2整除又能被3整除，那么这个数能被6整除
- 能被10整除的数：如果一个数既能被2整除又能被5整除，那么这个数能被10整除（即个位数为零）
- 能被12整除的数：若一个整数能被3和4整除，则这个数能被12整除
- 其他类推

2.6 1001法--被7、11或13整除的数

- 还有一种判断整数能不能被7整除的方法，这种方法也可以用来判断整数是否能被11或13整除，由于这种方法的基础是 $7\times 11\times 13=1001$，所以我们将它为“$1001法$”。

  以15946为例，我们将15946从左往右数到第一位与第四位（中间相隔两位）上的数都减去1，则得5936，实际上相当于减去 10×1001，减去的是$7\times 11\times 13$的倍数，因此由性质2可知，要考查15946是否能被7、11、13整除，只须考查5936是否能被7、11、13整除就行了，再从5936的第一位和第四位上都减去5(因为最高位是5，要减去 $5005=1001\times 5$)，得931，则15946能不能被7、11、13整除的问题变成了考查931能不能被7、11、13整除，如果我们把大于7的数字都减去7，实际上就是要考查231是否能被7整除，这时只须用一次“去一减二法”得21，就能判定 7 | 15946；931的奇、偶数位上的数字和之差不是11的倍数，所以不能被11 ∤ 15946；同样 13 ∤ 15946。

  又如，用“1001法”考查 841945 能不能被7、11、13整除，由于 1001×841=(1000+1)×841=841000+841=841841，所以841945-841841=945-841=104 （实际上是前三位都是841,即多次用“1001法的结果），因此我们只须考查104是否能被7、11、13整除即可，此时用“去一减二法”得2，故知 7 ∤ 841945；104的奇偶数位上的数字和的差为4，不是11的倍数，故不能被11整除；但是 13 | 104，所以 13 | 841945。

  这里要注意，因为$1001=7\times 11\times 13$，所以“$1001法$”不光能用来判断7的整除性，还可以用来判断11和13的整除性，由于104不能被11整除而能被13整除，所以我们可以判定841945不能被11整除而能被13整除。这是一个很有用的知识点。

2.7 三位截断法--被7、11、13整除的数

- 利用“1001法”进行判断时，如果位数较多（数字较长），可以先将整数从右到左每三个数一节地分开，再从右边数起按下面办法计算（下式的证明要用到“同余式”的知识，此处从略）：**[第一节] – [第二节] + [第三节] - [第四节] +…**，计算所得的数如果是7，11或13的倍数，原数就能被7，11或13整除；如果算得的数不是7，11或13的倍数，则原数就不能被7，11或13整除。

  即“末三位数字组成的数”与“末三位以前的数字组成的数”之**差** 能被7、11或13整除。

  举例：29‘071的末三位是071，前面是29，之差71-29=42，因为 7|42，所以 7|29071，同理，$\because 11\nmid 42, \therefore 11\nmid 29071; \because 13\nmid 42, \therefore 13\nmid 29071$

三、小结

4.1 尾数判定法: 适合于2、5；4、25；8、125
4.2 数字和判定法: 适合于3、9、99等
4.3 奇偶位求差法: 适合于11等
4.4 三位截断法: 适合于7、11、13
4.5 1001法: 适合于7、11、13
4.6 四步法，截尾-倍大-和或差-验和或差: 适合于7、11、13、17