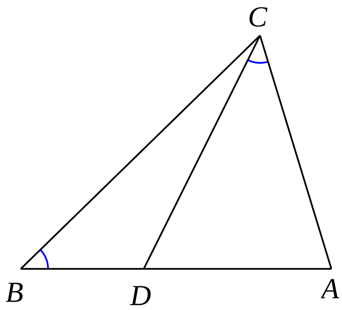
第五讲

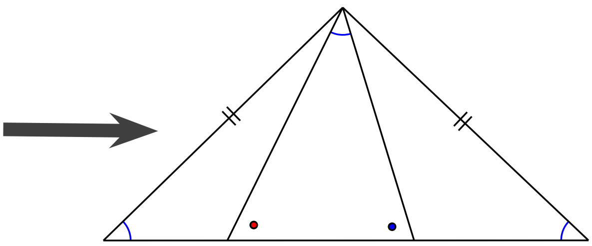
相似之共边与旋转

模块一 共边型

共边型：



“共边”型



“共边”型变形

角：$\angle DAC=\angle CAB$， $\angle ACD=\angle B$， $\angle ADC=\angle ACB$．

边：$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{CD}{BC}$， $AC^2=AD\cdot AB$

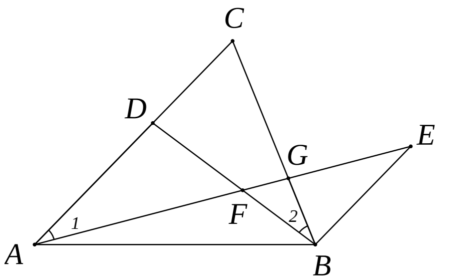
形：$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$

例题精讲

【例题1】

如图，在$\triangle ABC$中，点D在边AC上，AE分别交BD、BC于F、G，$\angle 1=\angle 2$，$\dfrac{AF}{EF}=\dfrac{DF}{BF}$．

求证：$BF^2=FG\cdot EF$．



【分析】 $\because\dfrac{AF}{EF}=\dfrac{DF}{BF}$，$\therefore AD/\!/BE$，$\therefore\angle E=\angle 1=\angle 2$

$\therefore\triangle FBG\backsim\triangle FEB$（共边型），$\therefore BF^2=FG\cdot EF$

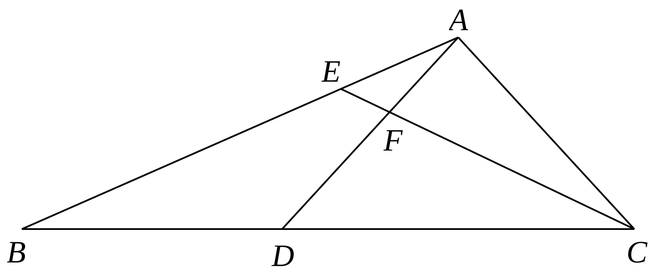
【例题2】

已知：如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在边BC、AB上，$BD=AD=AC$，AD与CE相交于点F，$AE^2=EF\cdot EC$．

⑴求证：$\angle ADC=\angle DCE+\angle EAF$；

⑵求证：$AF\cdot AD=AB\cdot EF$．

八升九衔接班



【分析】 ⑴证 $\triangle EAF\backsim\triangle ECA$， $\angle ADC=\angle ACD=\angle DCE+\angle ACE=\angle DCE+\angle EAF$ ；

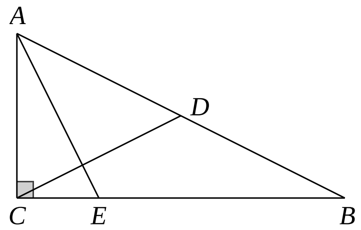
⑵证 $\triangle FAE\backsim\triangle ABC$， 得 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{EF}{AD}$

【例题3】

$Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90°$， AE 垂直于 AB 边上的中线 CD，交 BC 于点 E .

⑴ 求证： $AC^2=BC\cdot CE$ ；

⑵ 若 $CD=3$， $AE=4$，求边 AC 、 BC 的长.



【分析】 ⑴ $\angle CAE=\angle DCB=\angle B$， $Rt\triangle ACB$ 与 $Rt\triangle ECA$ 有公共角 $\angle ACE$，

$\therefore$ $\triangle ACB\backsim\triangle ECA$，得 $\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{CB}{CA}$，即 $AC^2=CE\cdot CB$

⑵ 由⑴ $\triangle ACB\backsim\triangle ECA$， $\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{AB}{EA}$，而 $AB=2CD=6$， $AE=4$

$\therefore$ $\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{3}{2}$，即 $EC=\dfrac{2}{3}AC$，由勾股定理 $AC^2+EC^2=AE^2$， $AC=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

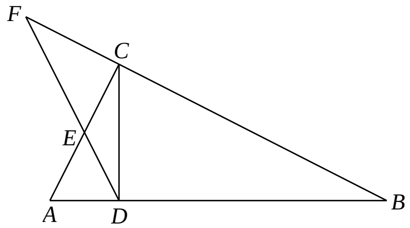
$\therefore$ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{12\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$.

【例题4】

如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90°$， $CD\perp AB$ 于点 D， E 是 AC 的中点， DE 的延长线交 BC 的延长线于点 F， $EF=5$， $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}$；

⑴ 求证： $\triangle BDF\backsim\triangle DCF$；

⑵ 求 BC 的长.



【分析】 (1) 注：原题为 $\tan B=\frac{1}{2}$

$\because CD\perp AB$， $CE=AE$ $\therefore ED=EC$

$\therefore \angle EDC=\angle ECD=\angle B$ $\therefore \triangle BDF\backsim\triangle DCF$

(2) $\because \triangle BDF\backsim\triangle DCF$， $\therefore \frac{DF}{BF}=\frac{CF}{DF}=\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$

设 $DE=a$， 则 $AC=2DE=2a$

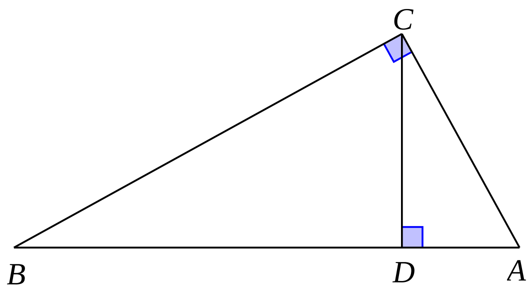
$\because CF=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}(a+5)$， $BF=2DF=2(a+5)$

$\therefore BC=BF-CF=\frac{3}{2}(a+5)$， 又 $\because \frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$ $\therefore BC=2AC=4a$

$\therefore 4a=\frac{3}{2}(a+5)$ $\therefore a=3$ $\therefore BC=4a=12$．

模块二 射影型

射影模型：



角： $\angle B=\angle ACD$， $\angle A=\angle BCD$， $\angle ACB=\angle ADC=90°$

边： $BC^2=BD\cdot BA$， $AC^2=AD\cdot BA$， $CD^2=BD\cdot AD$．

形： $\triangle ACB\backsim\triangle CDB\backsim\triangle ADC$

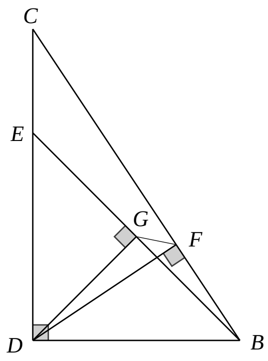
注：遇到直角三角形就想到有互余的角，可以找到两对以上相等的角．

例题精讲

【例题5】

已知，如图，在 $Rt\triangle BDC$ 中，点 E 在 CD 上，$DF\perp BC$，$DG\perp BE$，F、G 分别为垂足.

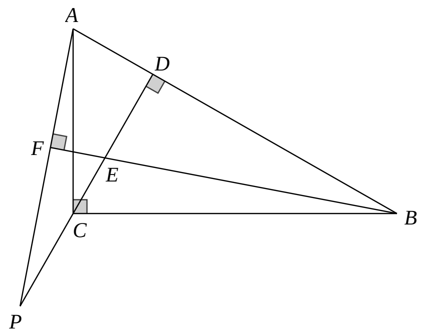
求证： $FG\cdot BC=CE\cdot BG$.



【分析】 可证明$\triangle BGF\backsim\triangle BCE$．从而可得$\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{FG}{CE}$，则 $FG\cdot BC=CE\cdot BG$.

【例题6】

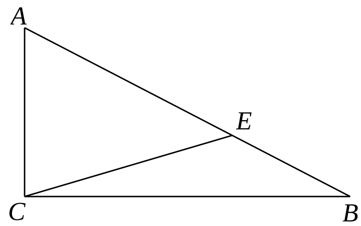
$Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高 $CD=3$，延长 DC 到 P 令 $CP=2$，过 B 作 $BF\perp AP$ 交 CD 于 E，交 AP 于 F，则 $DE=$________.

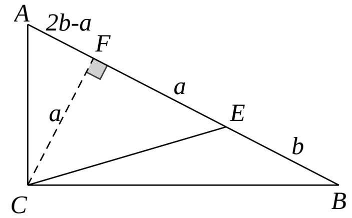


【分析】 由 $\angle P=\angle DBE$，$\triangle ADP\backsim\triangle EDB$，$\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{AD}{PD}\Rightarrow DE=\dfrac{AD\cdot BD}{PD}=\dfrac{CD^2}{PD}=\dfrac{9}{5}$

【例题7】

如图，E 为斜边 AB 的三等分点靠近 B，$\angle AEC=45°$，则 $\dfrac{AC}{BC}=$________.

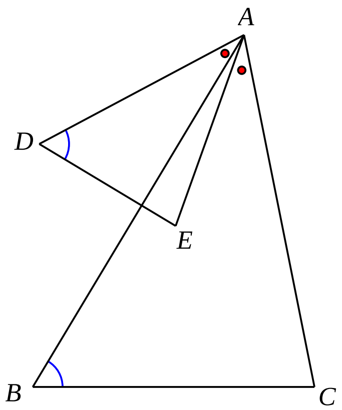




【分析】 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$.

八升九衔接班

模块三 旋转型



旋转模型可看做是A字模型变化而来，其中

角：$\angle B=\angle D$， $\angle DAB=\angle EAC$

形：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$

注：当联结BD和CE时，可得$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

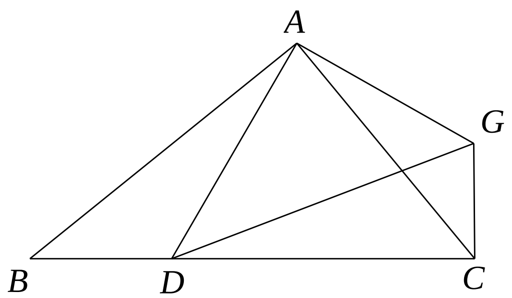
例题精讲

【例题8】

已知：如图，在$\triangle ABC$中，点D在边BC上，且$\angle BAC=\angle DAG$，$\angle CDG=\angle BAD$.

⑴ 求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AG}{AC}$；

⑵ 当$GC\perp BC$时，求证：$\angle BAC=90^\circ$.



【分析】 (1) $\because\angle CDG=\angle BAD$，$\angle ADG+\angle GDC=\angle B+\angle BAD$，$\therefore\angle B=\angle ADG$

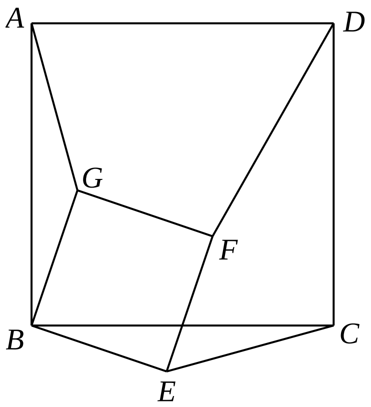
$\because\angle BAC=\angle DAG$，$\therefore\triangle ADG\backsim\triangle ABC$ $\therefore\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AG}{AC}$

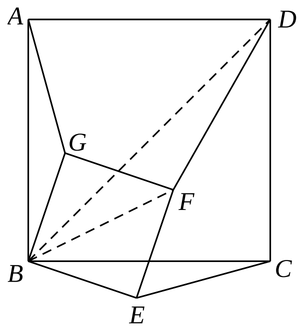
(2) $\because\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AG}{AC}$，$\angle BAD=\angle CAG$，$\therefore\triangle BAD\backsim\triangle CAG$ $\therefore\angle B=\angle ACG$

又$\because\angle ACG+\angle ACB=90^\circ$ $\therefore\angle ACB+\angle B=90$ $\therefore\angle BAC=90^\circ$

【例题9】

如图，四边形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 均为正方形，求 $AG:DF:CE=$________.





【分析】 联结 BD，BF． $\because AB\perp BC$， $BG\perp BE\Rightarrow\angle ABG=\angle CBE$，

$AB=BC$， $BG=BE$， $\therefore\triangle ABG\cong\triangle CBE$ $\therefore AG=CE$

$\because EF\perp BE$， $EF=BE$ $\therefore\angle EBF=45^\circ$， $BF=\sqrt{2}BE$

$\because BC\perp CD$， $BC=CD$ $\therefore\angle CBD=45^\circ$， $BD=\sqrt{2}BC$

$\therefore\angle FBD=\angle CBE$， $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BF}{BE}=\sqrt{2}$ $\therefore\triangle FBD\backsim\triangle EBC$

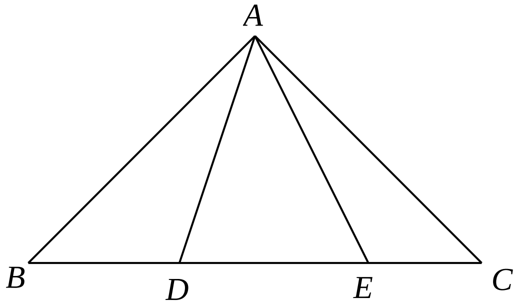
$\therefore\dfrac{DF}{EC}=\dfrac{BD}{BF}=\sqrt{2}$ $\therefore AG:DF:CE=1:\sqrt{2}:1$

本讲巩固

【巩固1】

已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ **中，** $AB=AC$ **，** $\angle DAE=45°$ **.**

求证：⑴ $\triangle ABE\backsim\triangle DCA$ **；⑵** $BC^2=2BE\cdot CD$ **.**



【分析】 ⑴ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C=45°$.

又$\because \angle BAE=\angle BAD+\angle DAE$，$\angle DAE=45°$，$\therefore \angle BAE=\angle BAD+45°$.

而$\angle ADC=\angle BAD+\angle B=\angle BAD+45°$ $\therefore \angle BAE=\angle ADC$.

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCA$

⑵ 由$\triangle ABE\backsim\triangle DCA$，得$\dfrac{BE}{AC}=\dfrac{AB}{CD}$，$\therefore BE\cdot CD=AB\cdot AC$

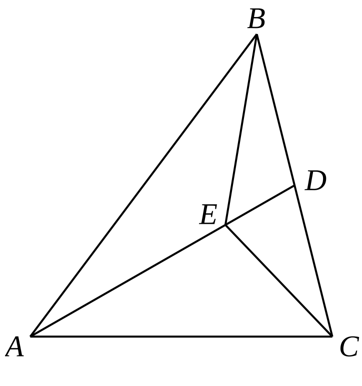
而$AB=AC$，$BC^2=AB^2+AC^2$，$\therefore BC^2=2AB^2$.

$\therefore BC^2=2BE\cdot CD$.

【巩固2】

$\triangle ABC$ **中，点** E **在中线** AD **上，** $\angle DEB=\angle ABC$ **.**

求证：⑴ $DB^2=DA\cdot DE$ **；⑵** $\angle DCE=\angle DAC$ **.**



【分析】 ⑴ $\because \angle DEB=\angle ABC$，$\angle BDE=\angle ADB$，$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle ADB$

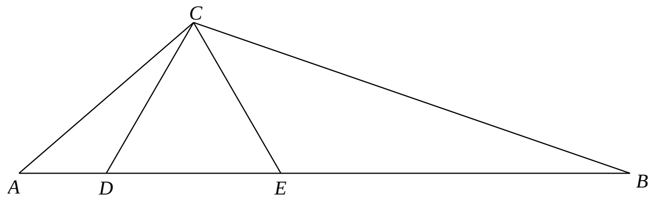
$\therefore \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DE}{DB}$，即$BD^2=AD\cdot DE$

⑵ $\because CD=BD$，$\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DE}{DB}$ $\therefore \dfrac{CD}{AD}=\dfrac{DE}{DC}$，又$\because \angle CDE=\angle ADC$

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle ADC$ $\therefore \angle DCE=\angle DAC$

【巩固3】

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=120^{\circ}$，$AC=\sqrt{7}$，$BC=2\sqrt{7}$，D、E是线段AB上两点且$\triangle CDE$为等边三角形，⑴ 求线段AD的长；⑵ 求$\triangle CDB$的面积．



【分析】 ⑴易证$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$，所以$\frac{AD}{CE}=\frac{CD}{BE}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$

设$AD=x$，则$CD=2x$，$CE=2x$，$DE=2x$，$BE=4x$

由共边相似，可得$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$

故$AC^2=AD\cdot AB$，代入可得$7x^2=7$，解得$x=1$

故$AD=1$．

⑵作$CF\perp AB$于F点．则$AF=\sqrt{3}$

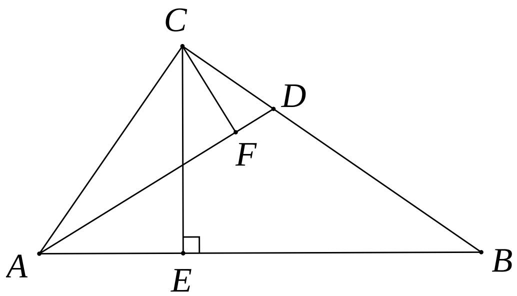
$S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

【巩固4】

如图，已知在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点D在边BC上，$CE\perp AB$，$CF\perp AD$，E、F分别是垂足；

⑴ 求证：$AC^2=AF\cdot AD$．

⑵ 联结EF，求证：$AE\cdot DB=AD\cdot EF$．



【分析】 ⑴ $\because\triangle AFC\backsim\triangle ACD$，$\therefore AC^2=AF\cdot AD$

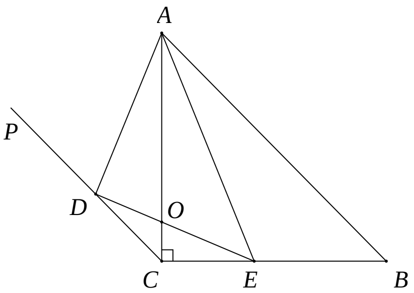
⑵ $\because\triangle ACE\backsim\triangle ABC$，$\therefore AC^2=AE\cdot AB$，$\therefore AF\cdot AD=AE\cdot AB$，即$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AD}$

又$\angle EAF=\angle DAB$，$\therefore\triangle EAF\backsim\triangle DAB$，$\therefore\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{DB}$，即$AE\cdot DB=AD\cdot EF$

【巩固5】

已知：在等腰直角$\triangle ABC$中，$AC=BC$，斜边AB的长为4，过点C作射线$CP/\!/AB$，D为射线CP上一点，E在边BC上（不与B、C重合），$\angle DAE=45^\circ$，AC与DE交于点O.

求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.



【分析】 $\because \angle ACD=\angle CAB=\angle B=45^\circ$，$\angle CAD=\angle BAE=45^\circ-\angle CAE$

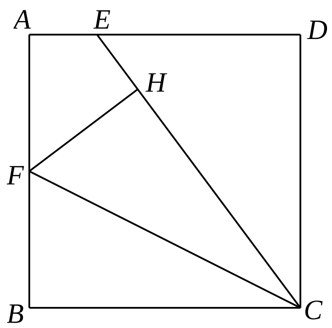
$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle AEB$，$\therefore \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$，即$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$

又$\because \angle DAE=\angle CAB=45^\circ$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$

试题拓展

【拓展1】

如图，点F、E分别在正方形$ABCD$的边AB、AD上，且$AF=BF$，$AE=\dfrac{1}{3}DE$，$FH\perp CE$于H.求证：$\dfrac{FC^2}{FH^2}=1+\dfrac{CH}{EH}$.



【分析】 联结EF，易得$\triangle AFE\backsim$ BCF，$CF\perp EF$

可得$FC^2=CH\cdot CE$，$FH^2=CH\cdot EH$

$\therefore \dfrac{FC^2}{FH^2}=\dfrac{CE}{EH}=\dfrac{EH+CH}{EH}=1+\dfrac{CH}{EH}$