第十届小学“希望杯”全国数学邀请赛模拟考试（一）

六年级　　　　第 2 试

2012 年 3 月 13 日　　晚上 7:30 至 9：00　　得分_____

一、　填空题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 在 1 和 2 之间.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}$.

因为 $\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}<\frac{15}{26}+\frac{14}{26}+\frac{12}{26}=\frac{41}{26}<2$,

又因为 $\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}>\frac{15}{35}+\frac{14}{35}+\frac{12}{35}>1$,

所以六个分数 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{11},\frac{1}{13}$ 的和在 1 和 2 之间.

2. 如果最小的比 85 只小 1 岁,那么由于这时其他人的年龄均不小于 85 岁,而最大的比 85 大 $6-1=5$ 岁,这样平均年龄必超过 85 岁；如果最小的比 85 小 2 岁,那么可能还有一人比 85 小 1 岁,但最大的比 85 大 $6-2=4$ 岁,而 $4>1+2$,从而平均年龄仍超过 85 岁； 如果最小的比 85 小 3 岁,那么最大的比 85 大 $6-3=3$ 岁,两人的平均年龄正好是 85 岁,其他三人如果年龄是 84、85、86(或 83、85、87),那么五人平均年龄正好是 85 岁；如果最小的比 85 小 4 岁或小 5 岁,类似前面的分析可知,这时平均年龄必小于 85 岁. 因此 ,最大的年龄一定是 $85+3=88$ 岁.

3. 由于每个队的女队员的人数是该队的男队员的 $\frac{7}{18}$,所以原来全体女队员的人数是全体男队员的 $\frac{7}{18}$,即原来女队员的人数占所有队员人数的 $\frac{7}{25}$,调走第一突击队的一半队员后,女队员的人数占剩下的队员总数的 $\frac{8}{25}$,由于调走的全是男队员,女队员的人数没有变化,所以调走后的队员总数与调走前的队员总数之比为 $\frac{25}{8}:\frac{25}{7}=7:8$,即调走的队员人数占原来队员总人数的 $\frac{1}{8}$,而调走的队员为第一突击队的一半,且每个突击队人数相同,$\frac{1}{2}\div\frac{1}{8}=4$,故开始共有 4 支突击队参加会战.

4. 甲种商品的实际售价为成本的 $(1+20\%)\times90\%=108\%$,所以甲种商品的利润率为 8%；乙种商品的实际售价为成本的 $(1+15\%)\times90\%=103.5\%$,所以乙种商品的利润率为 3.5%. 根据“鸡兔同笼”的思想,甲种商品的成本为：$(131-2200\times3.5\%)\div(8\%-3.5\%)=1200$(元).

5. $18=2\times3^2$,根据求一个数约数个数公式知,不同的质因数可能有一至三个.但是如果个位是3的约数尽可能多,可以构造出:$N=\overline{a3}^1\times\overline{b1}^8$,即一个质因数的个位是3,这个质因数只有1次方,另一个质因数的个位是1,这个质因数有8次方.这样得到的不同的个位是3的约数有$\overline{a3}^1\times\overline{b1}^0$、$\overline{a3}^1\times\overline{b1}^1$、$\overline{a3}^1\times\overline{b1}^2$、$\overline{a3}^1\times\overline{b1}^3$、…、$\overline{a3}^1\times\overline{b1}^8$共有9个.

6. $1234567654321=1111111^2$,$1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1=7^2$,

原式$=(1111111\times7)^2=7777777^2$.

7. 设第二小的等边三角形边长为 a,则第三大的等边三角形边长为 $a+1$,次大的等边三角形边长为 $a+2$,最大的等边三角形边长为 $a+3$,它也就是 $2a$,因此 $a=3$,

从而六边形的周长是 2×3+2×(3+1)+2×(3+2)+(3+3)=30.

8. 设 $S_{\triangle ADE}=1$份,根据面积比等于相似比的平方,所以$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}=AD^2:AF^2=1:4$,$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=AD^2:AB^2=1:9$,因此$S_{\triangle AFG}=4$份,$S_{\triangle ABC}=9$份,进而有$S_{四边形DEGF}=3$份,$S_{四边形FGCB}=5$份,所以$S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=1:3:5$

9. (法 1)不妨设甲、乙两种酒精各取4千克,则混合后的浓度为61%,含纯酒精$4\times2\times61\%=4.88$千克;又知,4千克甲酒精与6千克乙酒精,混合后的浓度为62%,含纯酒精$(4+6)\times62\%=6.2$千克.相差$6.2-4.88=1.32$千克,说明$6-4=2$千克乙酒精中含纯酒精1.32千克,则乙酒精中纯酒精的百分比为$1.32\div2\times100\%=66\%$,那么甲酒精中纯酒精百分比为$61\%\times2-66\%=56\%$.

(法2)甲、乙两种酒精各取4千克,则混合后的浓度为61%,而这种混合溶液,再混上2千克的乙酒精就能获得62%的混合溶液,由于混合的质量比是$8:2=4:1$,由十字交叉法,乙溶液的浓度为$62\%+(62\%-61\%)\div1\times4=66\%$,又因为同样多的甲种酒精溶液和乙种溶液能配成$61\%$的溶液,所以甲溶液浓度为

$61\%-(66\%-61\%)\div1\times1=56\%$.

10. 由已知条件可以得出,8年前父子年龄之和是$60-8\times2=44$(岁),又知道8年前父亲的年龄正好是儿子的3倍,由此可得:

儿子:$(60-8\times2)\div(3+1)+8=19$(岁);父亲:$60-19=41$(岁)

11. 由于甲、乙、丙三种卡车运送土方的路程之比为$15:14:14$,速度之比为$6:8:9$,所以它们运送1次所需的时间之比为$\frac{15}{6}:\frac{14}{8}:\frac{14}{9}=\frac{5}{2}:\frac{7}{4}:\frac{14}{9}$,相同时间内它们运送的次数比为:$\frac{2}{5}:\frac{4}{7}:\frac{9}{14}$.在前10天,甲车只有一半投入使用,因此甲、乙、丙的数量之比为$5:5:7$.由于三种卡车载重量之比为$10:7:6$,所以三种卡车的总载重量之比为$50:35:42$.那么三种卡车在前10天内的工作量之比为:$\left(50\times\frac{2}{5}\right):\left(35\times\frac{4}{7}\right):\left(42\times\frac{9}{14}\right)=20:20:27$.在后15天,由于甲车全部投入使用,所以在后15天里的工作量之比为$40:20:27$.所以在这25天内,甲的工作量与总工作量之比为:$\frac{20\times10+40\times15}{(20+20+27)\times10+(40+20+27)\times15}=\frac{32}{79}$.

12. 8个面,体积是$\frac{1}{2}\times\left[6\times6\times6-2\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6\right)\right]=72$($cm^3$).

二、 解答题(每小题15分,共60分)每题都要写出推算过程.

13. 题中是3块面积不同的草地,要解决这个问题,可以将3块草地的面积统一起来.

$[10,30,40]=120$,设1头牛1天的吃草量为"1",原条件可转化为:120公顷牧场48

头牛 28 天吃完；120 公顷牧场 28 头牛 63 天吃完．那么 120 公顷牧场每天新生长的草量为$\left(28\times63-48\times28\right)\div\left(63-28\right)=12$；120 公顷牧场原有草量为$\left(48-12\right)\times28=1008$．则 40 公顷牧场每天新生长的草量为$12\div3=4$，40 公顷牧场原有草量为$1008\div3=336$．

在 60 头牛里先分出 4 头牛来吃新生长的草，剩余的 56 头牛来吃原有的草，可以吃：$336\div56=6$(天)．

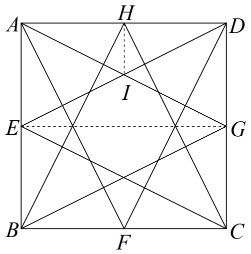
14. 因为第一、三步到的点一定是以 A 为中心的六边形的六个顶点，根据一定的规则进行计数：

（1）第一步与第三步是同一个点的情况有：6×5=30（种）

（2）第一步与第三步不是同一个点的情况有：4×6=24（种）

所以共有 30+24=54（种）

15. A，先求原题左图中的阴影部分的面积，连接EG,HI，（见下图）．

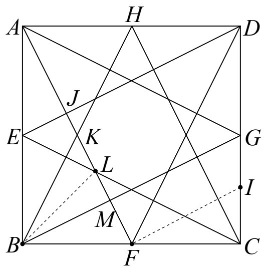


I是矩形$AEGD$对角线的交点，所以$HI=\frac{1}{2}AE$，$S_{\Delta AID}=\frac{1}{2}AD\times HI$

$=\frac{1}{2}AD\times\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}AD\times\frac{1}{4}AB=\frac{1}{8}S_{\square ABCD}=\frac{1}{8}$．

原题左图中有 4 块面积相同的空白部分，所以阴影部分的面积等于$1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，

再求右图中阴影部分的面积．过F作BG的平行线交CD于I，连接BL（见下图）．



$\because AE=EB,ED\parallel BG$，$\therefore AJ=JM$．$\because BF=FC,BG\parallel FI$，$\therefore GI=IC=\frac{1}{2}DG$．

$\because GI=\frac{1}{2}DG,FI\parallel BG\parallel ED$，$\therefore MF=\frac{1}{2}JM$．至此，求出了$AJ=JM=2MF$．

$\because S_{\Delta ABF}=\frac{1}{4},MF=\frac{1}{5}AF$，$\therefore S_{\Delta BMF}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$．由对称性知，$ML=LK=KJ$，

$\therefore ML=\frac{1}{3}JM=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}AF=\frac{2}{15}AF$，$S_{\Delta BLM}=\frac{2}{15}S_{\Delta ABF}=\frac{2}{15}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{30}$．

$S_{四边形BFLE}=2S_{\Delta BLF}=2\left(S_{\Delta BLM}+S_{\Delta BMF}\right)=2\times\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}$．

原题右图中有 4 块面积相同的空白部分，所以阴影部分的面积等于$1-4\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$．

$$\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3},\quad m+n=3+2=5.$$

16. $0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{\overline{abc}}{999}$,显然只要$\overline{abc}$与999互质,就构成了最简分数,所以最简分数的分子可以是所有小于999且与999互质的数,这样的数一共有$999-\left(\frac{999}{3}+\frac{999}{37}-\frac{999}{3\times 37}\right)=648$(个).如果$\overline{abc}$与999不互质,那么$\overline{abc}$的质因数当中,如果质因数3不多于3个,质因数37不多于1个,那么$\frac{\overline{abc}}{999}$约分后是分子还是与999互质的数(已被统计过);如果$\overline{abc}$的质因数当中,如果质因数3多于3个,质因数37多于1个(这种情况肯定没有因为37的平方大于999),质因数3多于3个,那么约分过程当中,分子分母至少约掉27,所剩下的分子不会大于$\frac{999}{27}=37$,所以凡是不大于37的分子都可能有它的27倍约分而来,其中的3、6、9、…、36这12个数都是可能的分子.所以一共有$648+12=660$(个).

第十届小学“希望杯”全国数学邀请赛模拟考试（二）

六年级　　第 2 试

一、　填空题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 设 $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{26}{3^9}+\frac{29}{3^{10}}=A$,则 $\frac{A}{3}=\frac{2}{9}+\frac{5}{27}+\frac{8}{81}+\cdots+\frac{26}{3^{10}}+\frac{29}{3^{11}}$

$$A-\frac{A}{3}=\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{3}{3^9}+\frac{3}{3^{10}}-\frac{29}{3^{11}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{3^9}-\frac{27+9-7}{3^{11}}$$

$$=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^7}+\frac{7}{3^{11}}=1+\frac{1}{3^2}\times\frac{1-\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{7}{3^{11}}=1+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^6}\right)+\frac{7}{3^{11}}$$

$$A=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^6}+\frac{3}{2}\times\frac{7}{3^{11}}\approx 1.750$$

2. 由题意知,共吃了香蕉 $400\sim500$ 根,且个位数是 8.设有猴子 n 只,则有狒狒 $(n-6)$ 只.因为猩猩的数量介于猴子与狒狒之间,所以 $17\le n\le 21$.再设每只猴子吃了 a 根香蕉,则每只猩猩吃了 $(a\text{-}1)$ 根,每只狒狒吃了 $(a\text{-}2)$ 根.共吃香蕉

$an+(a-1)\times16+(a-2)(n-6)$

$=an+16a-16+an-2n-6a+12$

$=2an+10a-2n-4$

$=2a(n+5)-2n-4$

$=X$. X 的个位数是 8,且 $17\le n\le 21$

若 $n=17$,则 $X=44a-38$. a 的个位只能是 4 或 9 ,不满足 $400<X<500$;

若 $n=18$,则 $X=46a-40$. a 的个位只能是 3 或 8 ,不满足 $400<X<500$;

若 $n=19$,则 $X=48a-42$. a 的个位只能是 0 或 5 ,当 $a=10$ 时, $X=438$,符合题意;

同理, $n=20$ 或 21 都不符合题意.所以有猴子 19 只.

3. (法 1)录取的学生中男生有 $91\times\frac{8}{5+8}=56$ 人,女生有 $91-56=35$ (人),先将未录取的人数之比 $3:4$ 变成 $4:4\times\frac{4}{3}$,又有 $56\times\frac{3}{4}=42$ (人),所以每份人数是

$(42-35)\div\left(4\times\frac{4}{3}-3\right)=3$ (人),那么未录取的男生有 $4\times3=12$ (人),未录取的女生有 $4\times\frac{4}{3}\times3=16$ (人). 所以报考总人数是 $(56+12)+(35+16)=119$ (人).

(法 2)设未被录取的男生人数为 $3x$ 人,那么未被录取的女生人数为 $4x$ 人,由于录取的学生中男生有 $91\times\frac{8}{5+8}=56$ 人,女生有 $91-56=35$ (人), $(56+3x):(35+4x)=4:3$,解得 $x=4$. 所以未被录取的男生有 12 人,女生有 16 人. 报考总人数是 $(56+12)+(35+16)=119$ (人).

4. “该客户恰好收支平衡”,这表明该客户出售物品的销售额的 $1-3\%=97\%$,恰好用来支付了设备与代为购买设备的服务费,即等于所购置新设备费用的 $(1+2\%)=102\%$.从而求得

出售商品所得与新设备价格之比；再以新设备价格为“1”,可求出两次服务费相当于新设备的多少,从而可解得新设备价格.出售商品所得的 $1-3\%=97\%$ 等于新设备价格的 $1+2\%=102\%$.设新设备价格为“1”,则出售商品所得相当于 $102\%\div 97\%=\frac{102}{97}$.该公司的服务费为 $\frac{102}{97}\times 3\%+1\times 2\%=\frac{5}{97}$,故而新设备花费了 $264\div\frac{5}{97}=5121.6$ (元).

5. $1+2+\cdots+9=45$,是 9 的倍数,因而 9 是这些数的公约数．又 123456789 和 123456798 这两个数只差 9,这两个数的最大公约数是它们的差的约数,即是 9 的约数,所以 9 是这两个数的最大公约数．从而 9 是这 362880 个数的最大公约数.

6. （法 1）先将12！分解质因数：$12!=2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11$,由于 $12!$ 除以 n 得到一个完全平方数,那么这个完全平方数是 $12!$ 的约数,那么最大可以为 $2^{10}\times 3^4\times 5^2$,所以 n 最小为 $12!\div 2^{10}\times 3^4\times 5^2=3\times 7\times 11=231$.

（法 2）$12!$ 除以 n 得到一个完全平方数,$12!$ 的质因数分解式中 3、7、11 的幂次是奇数,所以 n 的最小值是 $3\times 7\times 11=231$.

7. 如右图,作等腰梯形的两个高 AH_1 和 DH_2 , $CH_2=\frac{BC-AD}{2}=\frac{35-23}{2}=6$ ．易知,将 $\triangle H_2DC$ 旋转 90° 到 $\triangle HDE$ 的位置．则 A , D , H 三点在一条直线上． $EH\perp AH$, $EH=H_2C=6$ 是 $\triangle ADE$ 的底边 AD 上的高．所以,三角形 ADE 的面积为 $\frac{6\times 23}{2}=69$.

8. 在沙漏模型中,因为 $S_{\triangle MPN}:S_{\triangle BCP}=4:9$,所以 $MN:BC=2:3$,在金字塔模型中有：

$AM:AB=MN:BC=2:3$,因为 $AM=4$ cm , $AB=4\div 2\times 3=6$ cm ,所以

$BM=6-4=2$ cm

9. 在 B 中加入 60 克水后, B 盐水浓度减少为原来的 $\frac{2}{5}$,但溶质质量不变,此时两杯盐水中的盐的质量比仍然为 $3:2$, B 中的盐占所有盐的质量的 $\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$,但最终状态下 B 中的盐占所有盐的质量的 $\frac{3}{7+3}=\frac{3}{10}$,也就是说 B 中的盐减少了 $1-\frac{3}{10}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$,所以从 B 中倒出了 $\frac{1}{4}$ 的盐水到 A,即 25 克.

10. 把小明的年龄看成是一份,那么爸爸的年龄是四份少 2,根据和倍关系：

小明的年龄是：（53＋2）÷（4＋1）＝11（岁）,

爸爸的年龄是：53－11＝42（岁）,

小明与爸爸的年龄差是：42－11＝31（岁）.

11. 丙村出的 360 元钱是不是应该按照甲乙两村派出的人数比即 $45:35=9:7$ 来进行分配呢?我们仔细思考一下,发现丙村所出的钱应该是其他两个村帮他完成的工作量,换句话说,我们应该考虑的是甲乙两村各帮丙村出了多少人,然后再计算如何分配.

甲、乙两村共派出了 $45+35=80$ 人,而这 80 人,按照原计划应是甲村派出 $80\times\frac{9}{9+8+3}=36$ 人,乙村派出 32 人,丙村派出 12 人,所以,实际上甲村帮丙村派出了 $45-36=9$ 人,乙村帮丙村派出了 $35-32=3$ 人,所以丙村拿出的 360 元钱,也应该按 $9:3=3:1$ 来分配给甲、乙两村,所以,甲村应分得： $360\div(3+1)\times 3=270$ 元,乙村应分得： $360-270=90$ 元.

12. 四个角各截去一个边长为 $4cm$ 的正方形,再折成一个无盖的长方形容器,则长方形容器的底面的长和宽分别比铁片的长和宽短 $8cm$,即 $20cm$ 和 $10cm$,高为 $4cm$.所以,容积为 $20\times 10\times 4=800(cm^3)$.

二、 **解答题（每小题 15 分，共 60 分）每题都要写出推算过程.**

13. 开工前运进的砖相当于“原有草量”,开工后每天运进相同的砖相当于“新生长的草”,工人砌砖相当于“牛在吃草”．所以设 1 名工人 1 天砌砖数量为“1”,那么每天运来的砖为 $(160\times10-250\times6)\div(10-6)=25$,原有砖的数量为：$(250-25)\times6=1350$．

如果 120 名工人砌 10 天,将会砌掉 10 天新运来的砖以及 950 原有的砖,还剩 $1350-950=400$ 的原有的砖未用,变成 $120+5=125$ 人来砌砖,还需要：

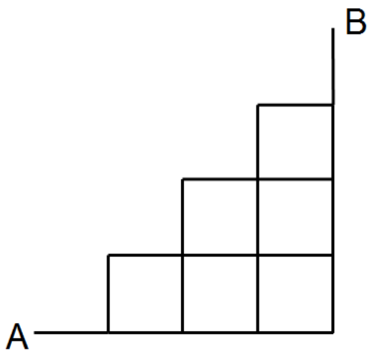
$400\div(125-25)=4$（天）.

14. 首先,将 8 人的身高从低到高依次编号为1、2、3、4、5、6、7、8,现在就相当于要将这 8 个数填到一个 4×2 的方格中,要求每一行的数依次增大,每一列上面的要比下面的大．

下面我们将1、2、3、4、5、6、7、8 依次往方格中填,按照题目规则,很容易就发现：第二行填的的数字的个数永远都小于或等于第一行数字填的个数．也就是说,不能出现下图这样的情况．

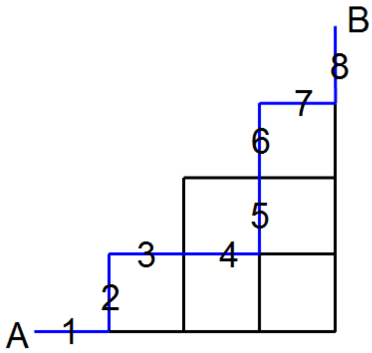
1	2		
3	4	5	

而这个正好是“阶梯型标数”题型的基本原则．于是,我们可以把原题转化成：

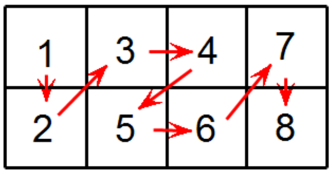


在这个阶梯型方格中,横格代表在第一行的四列,纵格代表第二行的四列,那么此题所有标数的方法就相当于从 A 走到 B 的最短路线有多少条．

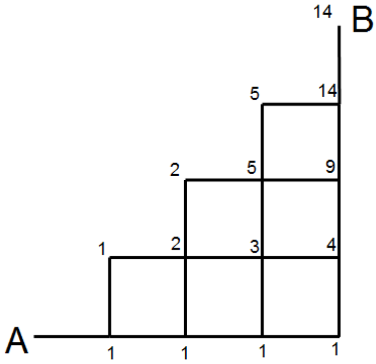
例如,我们选择一条路线：



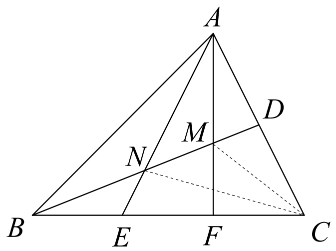
它对应的填法就是：



最后,用“标数法”得出从 A 到 B 的最短路径有 14 种,如下图:



15.



由于点 D 是边 AC 的中点,点 E、F 是边 BC 的三等分点,如果能求出 BN、NM、MD 三段的比,那么所分成的六小块的面积都可以求出来,其中当然也包括四边形 $CDMF$ 的面积.

连接 CM、CN. 根据燕尾定理,$S_{\Delta ABM}:S_{\Delta ACM}=BF:CF=2:1$,而 $S_{\Delta ACM}=2S_{\Delta ADM}$,

所以 $S_{\Delta ABM}=2S_{\Delta ACM}=4S_{\Delta ADM}$,那么 $BM=4DM$,即 $BM=\frac{4}{5}BD$.

那么 $S_{\Delta BMF}=\frac{BM}{BD}\times\frac{BF}{BC}\times S_{\Delta BCD}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$,$S_{四边形CDMF}=\frac{1}{2}-\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$.

另解:得出 $S_{\Delta ABM}=2S_{\Delta ACM}=4S_{\Delta ADM}$ 后,可得 $S_{\Delta ADM}=\frac{1}{5}S_{\Delta ABD}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$,

则 $S_{四边形CDMF}=S_{\Delta ACF}-S_{\Delta ADM}=\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{7}{30}$.

16. 假设该混循环小数是 $0.ab\dot{c}\dot{d}=\frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{9900}=\frac{99\overline{ab}+\overline{cd}}{9900}$,那么其中 $\overline{cd}\neq 0,11,22,33,44,55,66,77,88,99$,且 $b\neq d$,所以 $99\overline{ab}+\overline{cd}$ 不是 11 和 10 的倍数. 令 $\overline{ab}=x$,$\overline{cd}=y$,则 $\frac{1}{n}=0.ab\dot{c}\dot{d}=\frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{9900}=\frac{99x+y}{9900}$,那么 $(99x+y)\ n=9900$,而所以 $(99x+y)$ 是 9900 的约数,且不是 11 和 10 的倍数. 9900 的约数中 11 的倍数有 $9900=2^2\times3^2\times5^2\times11$,9900 的约数中 11 的倍数有 $3\times3\times3=27$(个),10 的倍数有 $2\times3\times2\times2=24$(个),即是 11 也是 10 的倍数有 12 个,显然对任意值,x 和 y 都有 99 以内的符合条件自然数解,所以符合条件的解有 $3\times3\times3\times2-(27+24-12)=15$(个),对应的 n 也有 15 个,即这样的分数有 15 个.

第十届小学“希望杯”全国数学邀请赛模拟考试(三)

六年级　　　　　　　　第 2 试

一、　填空题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 9

2. 1 月 1 日是星期日,全年就有 53 个星期日.每月至少有 4 个星期日,53-4×12=5,多出 5 个星期日,在 5 个月中．即最多有 5 个月有 5 个星期日．

3. 两人原有钱数之比为$6:5$,如果甲得到 180 元,乙得到 150 元,那么两人的钱数之比仍为$6:5$,现在甲得到 180 元,乙只得到 30 元,相当于少得到了 120 元,现在两人钱数之比为$18:11$,可以理解为：两人的钱数分别增加 180 元和 150 元之后,钱数之比为$18:15$,然后乙的钱数减少 120 元,两人的钱数之比变为$18:11$,所以 120 元相当于 4 份,1 份为 30 元,后来两人的钱数之和为$30\times(18+15)=990$元,所以原来两人的总钱数之和为$990-180-150=660$元.

4. 我们知道从第二天起开始降价,先降价 20%然后又降价 24 元,最终是按原价的 56%出售的,所以一共降价 44%,因而第三天降价 24%.24÷24%=100 元.原价为 100 元.因为按原价的 56%出售后,还盈利 20 元,所以 100×56%-20=36 元.所以成本价为：36 元.

5. 设 M 为这 10 个非零不同自然数的最大公约数,那么这 10 个不同的自然数分别可以表示为：$Ma_1,Ma_2,...,Ma_{10}$,其中$(a_1,a_2,...,a_{10})=1$

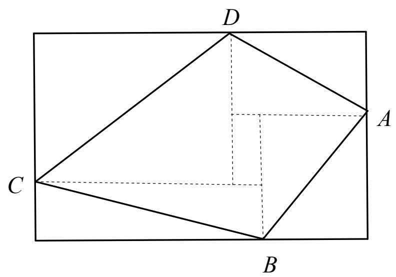
那么根据题意有：

$M(a_1+a_2+...+a_{10})=1001=7\times11\times13$

因为 10 个不同非零自然数的和最小为 55,所以 M 最大可以为 13

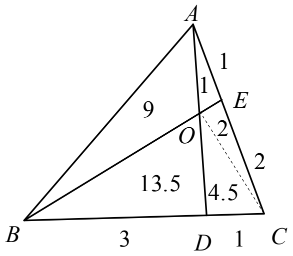
6. 平方数的末尾只能是0,1,4,5,6,9,因为111,444,555,666,999都不是完全平方数,所以所求的数最小是 4 位数．考察 1111,1444……可以知道$1444=38\times38$,所以满足条件的最小正整数是1444.

7.



如右图,四边形 $ABCD$ 的面积比外面的四个三角形的面积和大$2\times5=10$(平方米),所以四边形 $ABCD$ 的面积是$\frac{10\times8+10}{2}=45$(平方米).

8. 连接CO,设$S_{\triangle AEO}=1$份,则其他部分的面积如图所示,所以$S_{\triangle ABC}=1+2+9+18=30$份,所以四部分按从小到大各占$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{30},\frac{2+4.5}{30}=\frac{13}{60},\frac{9}{30}=\frac{3}{10},\frac{13.5}{30}=\frac{9}{20}$



9. 喝掉的牛奶 剩下的牛奶

第一次： $\frac{1}{3}$ $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

第二次： $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$（喝掉剩下$\frac{2}{3}$的$\frac{1}{3}$） $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$（剩下是第一次剩下$\frac{2}{3}$的$\frac{2}{3}$）

第三次： $\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$（喝掉剩下$\frac{4}{9}$的$\frac{1}{3}$） $\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$（剩下是第一次剩下$\frac{4}{9}$的$\frac{2}{3}$）

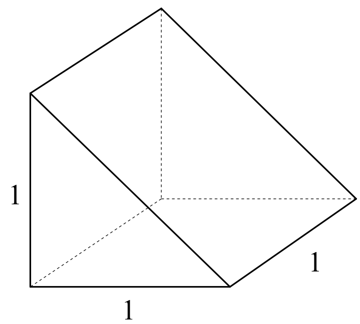
第四次： $\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$（喝掉剩下$\frac{8}{27}$的$\frac{1}{3}$）

所以最后喝掉的牛奶为：$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}=\frac{65}{81}$.

10. $1+2+3+4+5+6=21$,$1+2+3+4+5+6+7=28$,无法达到24.所以小明不是每年都能过生日,只有二月29日会使得他每四年过一次生日.$24\div4=6$,$6=1+2+3$,小明过得是4岁、8岁、12岁生日.所以小明今天过的是12岁生日.

11. 乙5小时完成总工作量的$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5+3}=\frac{1}{4}$；乙每小时完成总工作量的$\frac{1}{4}\div5=\frac{1}{20}$；乙需要完成的总工作量为$\frac{1}{2}$；乙要完成这个任务还需要的时间：$\frac{1}{2}\div\frac{1}{20}-5=5$（小时）

12.



这个展开图折成直三棱柱形状,如右图所示,可见这个三棱柱是单位正方体的一半,其体积为$\frac{1}{2}\times1^3=\frac{1}{2}$.

二、 **解答题（每小题 15 分，共 60 分）每题都要写出推算过程.**

13. 开工前运进的面粉相当于“原有草量”,开工后每天运进相同的面粉相当于“新生长的草”,工人加工食品相当于“牛在吃草”.

设 1 名工人 1 天用掉面粉的量为“1”,那么每天运来的面粉量为 $(4\times40-5\times30)\div(40-30)=1$,原有面粉量为：$(5-1)\times30=120$. 如果 4 名工人干 30 天,那么将会加工掉 30 天新运来的面粉量以及 90 原有的面粉量,原有还剩 $120-90=30$ 未加工,而后变成 6 名工人,还需要 $30\div(6-1)=6$ (天)可以加工完.

14. 标数法（1）7 张全是铮铮,1 种；

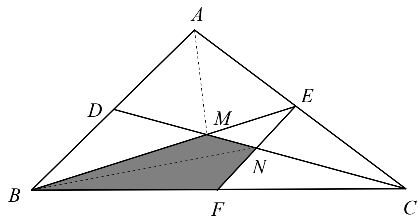
（2）6 张铮铮,1 张昊昊,6 种；

（3）5 张铮铮,2 张昊昊,14 种；

（4）4 张铮铮,3 张昊昊,14 种.

一共 35 种.

15.



令 BE 与 CD 的交点为 M,CD 与 EF 的交点为 N,连接 AM,BN.

在 $\triangle ABC$ 中，根据燕尾定理，$S_{\triangle ABM}:S_{\triangle BCM}=AE:CE=1:1$，$S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM}=AD:BD=1:1$,

所以 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}=S_{\triangle BCN}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$

由于 $S_{\triangle AEM}=\frac{1}{2}S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABM}$ S,所以 $BM:ME=2:1$

在 $\triangle EBC$ 中,根据燕尾定理,$S_{\triangle BEN}:S_{\triangle CEN}=BF:CF=1:1$

$S_{\triangle CEN}:S_{\triangle CBN}=ME:MB=1:2$

设 $S_{\triangle CEN}=1$ (份),则 $S_{\triangle BEN}=1$ (份),$S_{\triangle BCN}=2$ (份),$S_{\triangle BCE}=4$ (份),

所以 $S_{\triangle BCN}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle BNE}=\frac{1}{4}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$,因为 $BM:ME=2:1$,

F 为 BC 中点,所以 $S_{\triangle BMN}=\frac{2}{3}S_{\triangle BNE}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$,

$S_{\triangle BFN}=\frac{1}{2}S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$,

所以 $S_{阴影}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{5}{24}S_{\triangle ABC}=\frac{5}{24}\times15=3.125$ (平方厘米)

16. 设这个自然数是 a，$2004=2^2\times3\times167$，将 a 分解质因数，设 $a=2^x\times3^y\times167^z\times a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}$,其中 x,y,z 可以是 0 或正整数,其余的系数都是正整数,则这个数的约数的个数

$A=(x+1)(y+1)(z+1)(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)$.

因为这个自然数的 2004 倍恰有 2004 个约数,所以

$(x+3)(y+2)(z+2)(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)=2004=2^2\times3\times167$.

可得$\frac{2004}{A}=\frac{(x+3)(y+2)(z+2)}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{x+3}{x+1}\times\frac{y+2}{y+1}\times\frac{z+2}{z+1}$,

要想使A最小,需要使$\frac{x+3}{x+1}\times\frac{y+2}{y+1}\times\frac{z+2}{z+1}$最大,

而$\frac{x+3}{x+1}=3-\frac{2x}{x+1}\leq 3$,$\frac{y+2}{y+1}=2-\frac{y}{y+1}\leq 2$,$\frac{z+2}{z+1}=2-\frac{z}{z+1}\leq 2$,

所以$\frac{2004}{A}\leq 3\times 2\times 2=12$,得到$A\geq 167$.

要想使等号成立,必须$x=y=z=0$,$n=1$,$b_1=166$,即此数为一个不是2,3,167的质数的166次方,此时这个数的约数有167个.故这个自然数最少有167个约数.