高三数学专题（六）

解析几何题怎么解

高考解析几何试题一般共有 4 题(2 个选择题, 1 个填空题, 1 个解答题), 共计 30 分左右, 考查的知识点约为 20 个左右. 其命题一般紧扣课本, 突出重点, 全面考查. 选择题和填空题考查直线, 圆, 圆锥曲线, 参数方程和极坐标系中的基础知识. 解答题重点考查圆锥曲线中的重要知识点, 通过知识的重组与链接, 使知识形成网络, 着重考查直线与圆锥曲线的位置关系, 求解有时还要用到平几的基本知识, 这点值得考生在复课时强化.

例 1　已知点 T 是半圆 O 的直径 AB 上一点，AB=2、OT=t　(0<t<1)，以 AB 为直腰作直角梯形 $AA'B'B$，使 AA' 垂直且等于 AT，使 BB' 垂直且等于 BT，$A'B'$ 交半圆于 P、Q 两点，建立如图所示的直角坐标系.

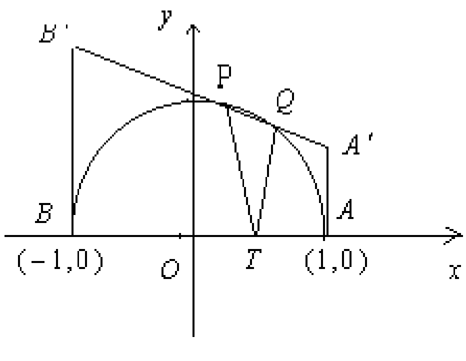
(1)写出直线 $A'B'$ 的方程；

（2）计算出点 P、Q 的坐标；

（3）证明：由点 P 发出的光线，经 AB 反射后，反射光线通过点 Q.

讲解:　通过读图, 看出 $A^{'},B^{'}$ 点的坐标.

(1) 显然 $A^{'}\left(1,1-t\right)$, $B^{'}\left(-1,1+t\right)$, 于是 直线 $A'B'$ 的方程为 $y=-tx+1$；



（2）由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=-tx+1, \end{cases}$

解出　$P(0,1)$、$Q(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})$；

（3）$k_{PT}=\frac{1-0}{0-t}=-\frac{1}{t}$，

$$k_{QT}=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-0}{\frac{2t}{1+t^2}-t}=\frac{1-t^2}{t(1-t^2)}=\frac{1}{t}.$$

由直线 PT 的斜率和直线 QT 的斜率互为相反数知，由点 P 发出的光线经点 T 反射，反射光线通过点 Q.

需要注意的是, Q 点的坐标本质上是三角中的万能公式, 有趣吗?

例 2　已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有且仅有一个交点 Q，且与 x 轴、y 轴分别交于 R、S，求以线段 SR 为对角线的矩形 ORPS 的一个顶点 P 的轨迹方程.

讲解: 从直线 l 所处的位置, 设出直线 l 的方程,

由已知，直线 l 不过椭圆的四个顶点，所以设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$.

代入椭圆方程$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，得

$$b^2x^2+a^2(k^2x^2+2kmx+m^2)=a^2b^2.$$

化简后，得关于x的一元二次方程

$$(a^2k^2+b^2)x^2+2ka^2mx+a^2m^2-a^2b^2=0.$$

于是其判别式$\Delta=(2ka^2m)^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2).$

由已知，得△=0．即$a^2k^2+b^2=m^2$. ①

在直线方程$y=kx+m$中，分别令 y=0，x=0，求得$R(-\frac{m}{k},0),S(0,m)$.

令顶点 P 的坐标为（x，y）， 由已知，得$\begin{cases}x=-\frac{m}{k},\\ y=m.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{y}{x},\\ m=y.\end{cases}$

代入①式并整理，得 $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$， 即为所求顶点 P 的轨迹方程.

方程$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$形似椭圆的标准方程，你能画出它的图形吗？

例 3 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，过$A(a,0),B(0,-b)$的直线到原点的距离是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求双曲线的方程；

（2）已知直线$y=kx+5(k\neq 0)$交双曲线于不同的点 C，D 且C，D都在以B为圆心的圆上，求k的值.

讲解：∵（1）$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，原点到直线$AB$：$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$的距离

$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore b=1,a=\sqrt{3}.$$

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1.$

（2）把$y=kx+5$代入$x^2-3y^2=3$中消去y，整理得 $(1-3k^2)x^2-30kx-78=0$.

设$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),CD$的中点是$E(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{15k}{1-3k^2}\cdot y_0=kx_0+5=\frac{5}{1-3k^2},$$

$$k_{BE}=\frac{y_0+1}{x_0}=-\frac{1}{k}.$$

$\therefore x_0 + ky_0 + k = 0,$

即 $\dfrac{15k}{1-3k^2} + \dfrac{5k}{1-3k^2} + k = 0$, 又 $k \neq 0, \therefore k^2 = 7$

故所求 $k=\pm\sqrt{7}$.

为了求出 k 的值，需要通过消元，想法设法建构 k 的方程.

例 4 已知椭圆 C 的中心在原点，焦点 F_1、F_2 在 x 轴上，点 P 为椭圆上的一个动点，且 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 90°，直线 l 过左焦点 F_1 与椭圆交于 A、B 两点，$\triangle ABF_2$ 的面积最大值为 12.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）求椭圆 C 的方程.

讲解：（1）设 $|PF_1| = r_1, |PF_2| = r_2, |F_1F_2| = 2c$，对 ΔPF_1F_2，由余弦定理，得

$$\cos\angle F_1PF_2 = \frac{r_1^1 + r_2^2 - 4c^2}{2r_1r_2} = \frac{(r_1+r_2)^2 - 2r_1r_2 - 4c^2}{2r_1r_2} = \frac{4a^2-4c^2}{2r_1r_2} - 1 \geq \frac{4a^2-4c^2}{2(\frac{r_1+r_2}{2})^2} - 1$$

$$= 1 - 2e^2 = 0,$$

解出 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）考虑直线 l 的斜率的存在性，可分两种情况：

i) 当 k 存在时，设 l 的方程为 $y = k(x+c)$ ………………①

椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

由 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 得 $a^2 = 2c^2, b^2 = c^2$.

于是椭圆方程可转化为 $x^2 + 2y^2 - 2c^2 = 0$ ………………②

将①代入②，消去 y 得 $x^2 + 2k^2(x+c)^2 - 2c^2 = 0$，

整理为 x 的一元二次方程，得 $(1+2k^2)x^2 + 4ck^2x + 2c^2(k^2-1) = 0$.

则 x_1、x_2 是上述方程的两根．且

$$|x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{2}c\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2},$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\,|x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{2}c(1+k^2)}{1+2k^2},$$

AB 边上的高 $h = |F_1F_2|\sin\angle BF_1F_2 = 2c \times \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$,

$$S = \frac{1}{2}2\sqrt{2}c\left(\frac{1+k^2}{1+2k^2}\right)\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}2c$$

也可这样求解：

$$S = \frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1 - y_2|$$

$$= c\cdot|k|\cdot|x_1 - x_2|$$

$$=2\sqrt{2}c^2\frac{\sqrt{1+k^2}\,|k|}{1+2k^2}=2\sqrt{2}c^2\sqrt{\frac{k^2+k^4}{1+4k^2+4k^4}}$$

$$=2\sqrt{2}c^2\sqrt{\frac{1}{4+\frac{1}{k^4+k^2}}}<\sqrt{2}c^2.$$

ii) 当 k 不存在时，把直线 $x=-c$ 代入椭圆方程得

$$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}c,|AB|=\sqrt{2}c,S=\frac{1}{2}\sqrt{2}c\times\sqrt{2}c^2$$

由①②知 S 的最大值为 $\sqrt{2}c^2$　由题意得 $\sqrt{2}c^2=12$　所以 $c^2=6\sqrt{2}=b^2$　　$a^2=12\sqrt{2}$

故当△ABF_2 面积最大时椭圆的方程为： $\frac{x^2}{12\sqrt{2}}+\frac{y^2}{6\sqrt{2}}=1.$

下面给出本题的另一解法,请读者比较二者的优劣:

设过左焦点的直线方程为：$x=my-c$…………①

（这样设直线方程的好处是什么？还请读者进一步反思反思.）

椭圆的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.得：$a^2=2c^2,b^2=c^2$,于是椭圆方程可化为：$x^2+2y^2-2c^2=0$……②

把①代入②并整理得：$(m^2-2)y^2-2mcy-c^2=0$

于是 y_1,y_2 是上述方程的两根.

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\,|y_2-y_1|=\sqrt{1+m^2}\frac{\sqrt{4m^2c^2+4c^2(m^2+2)}}{m^2+2}=\frac{2\sqrt{2}c(1+m^2)}{m^2+2},$$

AB 边上的高 $h=\frac{2c}{\sqrt{1+m^2}}$,

从而 $S=\frac{1}{2}|AB|h=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}c(1+m^2)}{m^2+2}\times\frac{2c}{\sqrt{1+m^2}}=2\sqrt{2}c^2\sqrt{\frac{1+m^2}{(m+2)^2}}$

$$=2\sqrt{2}c^2\sqrt{\frac{1}{m^2+1+\frac{1}{m^2+1}+2}}\le\sqrt{2}c^2.$$

当且仅当 m=0 取等号，即 $S_{\max}=\sqrt{2}c^2$.

由题意知 $\sqrt{2}c^2=12$，于是　$b^2=c^2=6\sqrt{2},a^2=12\sqrt{2}$.

故当△ABF_2 面积最大时椭圆的方程为： $\frac{x^2}{12\sqrt{2}}+\frac{y^2}{6\sqrt{2}}=1.$

例 5　已知直线 $y=-x+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A、B 两点，且线段 AB 的中点在直线 $l:x-2y=0$ 上.

（1）求此椭圆的离心率；

（2）若椭圆的右焦点关于直线 l 的对称点的在圆 $x^2+y^2=4$ 上，求此椭圆的方程.

讲解:（1）设 A、B 两点的坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.则由 $\begin{cases} y=-x+1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0,$$

根据韦达定理，得

$$x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2},y_1+y_2=-(x_1+x_2)+2=\frac{2b^2}{a^2+b^2},$$

∴线段 AB 的中点坐标为（$\dfrac{a^2}{a^2+b^2},\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$）.

由已知得 $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}=0,\therefore a^2=2b^2=2(a^2-c^2)\therefore a^2=2c^2$

故椭圆的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）知 $b=c,$ 从而椭圆的右焦点坐标为 $F(b,0),$ 设 $F(b,0)$ 关于直线 $l:x-2y=0$ 的对称点为 (x_0,y_0),则 $\dfrac{y_0-0}{x_0-b}\cdot\dfrac{1}{2}=-1$且$\dfrac{x_0+b}{2}-2\times\dfrac{y_0}{2}=0,$

解得 $x_0=\dfrac{3}{5}b$且$y_0=\dfrac{4}{5}b$

由已知得 $x_0^2+y_0^2=4,\therefore(\dfrac{3}{5}b)^2+(\dfrac{4}{5}b)^2=4,\therefore b^2=4$

故所求的椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

例 6 已知⊙M：$x^2+(y-2)^2=1,Q$是x轴上的动点，QA，QB 分别切⊙M 于 A，B 两点，

（1）如果$|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，求直线 MQ 的方程；

（2）求动弦 AB 的中点 P 的轨迹方程.

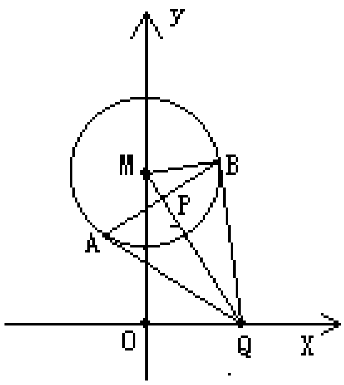
讲解:（1）由$|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，可得$|MP|=\sqrt{|MA|^2-(\dfrac{|AB|}{2})^2}=\sqrt{1^2-(\dfrac{2\sqrt{2}}{3})^2}=\dfrac{1}{3},$由射影定理，得 $|MB|^2=|MP|\cdot|MQ|,$得$|MQ|=3,$ 在 Rt△MOQ 中，

$|OQ|=\sqrt{|MQ|^2-|MO|^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

故 $a=\sqrt{5}$ 或 $a=-\sqrt{5}$，

所以直线 AB 方程是

$2x+\sqrt{5}y-2\sqrt{5}=0$ 或 $2x-\sqrt{5}y+2\sqrt{5}=0$;



（2）连接 MB，MQ，设 $P(x,y),Q(a,0)$，由点 M，P，Q 在一直线上，得

$\frac{2}{-a}=\frac{y-2}{x}$，(*) 由射影定理得 $|MB|^2=|MP|\cdot|MQ|$，

即 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}\cdot\sqrt{a^2+4}=1$，(**) 把（*）及（**）消去 a，并注意到 $y<2$，可得

$x^2+(y-\frac{7}{4})^2=\frac{1}{16}(y\neq 2)$.

适时应用平面几何知识，这是快速解答本题的要害所在，还请读者反思其中的奥妙.

例 7 如图，在 Rt△ABC 中，∠CBA=90°，AB=2，AC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$。DO⊥AB 于 O 点，OA=OB，DO=2，曲线 E 过 C 点，动点 P 在 E 上运动，且保持 $|PA|+|PB|$ 的值不变.

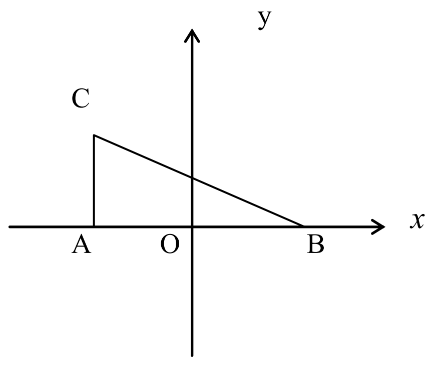
（1）建立适当的坐标系，求曲线 E 的方程；

（2）过 D 点的直线 L 与曲线 E 相交于不同的两点 M、N 且 M 在 D、N 之间，设 $\frac{DM}{DN}=\lambda$，试确定实数 λ 的取值范围.

讲解：（1）建立平面直角坐标系，如图所示．

$\because |PA|+|PB|=|CA|+|CB|$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=2\sqrt{2}$



∴动点 P 的轨迹是椭圆．

$\because a=\sqrt{2},\quad b=1,\quad c=1.$

∴曲线 E 的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）设直线 L 的方程为 $y=kx+2$，代入曲线 E 的方程 $x^2+2y^2=2$，得

$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$

设 $M_1(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases} \Delta = (8k)^2 - 4(2k+1)\times 6 > 0, & ① \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{8k}{2k^2+1}, & ② \\ x_1 x_2 = \dfrac{6}{2k^2+1}. & ③ \end{cases}$$

i) L 与 y 轴重合时，$\lambda = \dfrac{|DM|}{|DN|} = \dfrac{1}{3}$

ii) L 与 y 轴不重合时，

由①得 $k^2 > \dfrac{3}{2}.$

又∵ $\lambda = \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{x_D - x_M}{x_D - x_N} = \dfrac{x_1}{x_2}$，

∵ $x_2 < x_1 < 0$, 或 $x_2 > x_1 > 0$,

∴ $0 < \lambda < 1$,

∴ $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + 2 = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} + 2$.

∵ $\dfrac{(x\ \ + x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{64k^2}{6(2k^2+1)} = \dfrac{32}{3(2+\dfrac{1}{k^2})}$

而 $k^2 > \dfrac{3}{2}$, ∴ $6 < 3(2+\dfrac{1}{k^2}) < 8.$

∴ $4 < \dfrac{32}{3(2+\dfrac{1}{k^2})} < \dfrac{16}{3}$,

∴ $4 < \lambda + \dfrac{1}{\lambda} + 2 < \dfrac{16}{3}$, $2 < \lambda + \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{10}{3}$,

$$\begin{cases} 0 < \lambda < 1, \\ \lambda + \dfrac{1}{\lambda} > 2, \\ \lambda + \dfrac{1}{\lambda} < \dfrac{10}{3}, \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \lambda < 1.$$

$\therefore \lambda$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},1\right)$.

值得读者注意的是，直线 L 与 y 轴重合的情况易于遗漏，应当引起警惕.

例 8 直线 l 过抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$ 的焦点，且与抛物线相交于 A(x_1,y_1)和$B(x_2,y_2)$两点.

（1）求证：$4x_1x_2=p^2$；

（2）求证：对于抛物线的任意给定的一条弦 CD，直线 l 不是 CD 的垂直平分线.

讲解: （1）易求得抛物线的焦点 $F(\frac{P}{2},0)$.

若 $l\perp x$ 轴，则 l 的方程为 $x=\frac{P}{2}$,显然$x_1x_2=\frac{P^2}{4}$.

若 l 不垂直于 x 轴，可设 $y=k(x-\frac{P}{2})$，代入抛物线方程整理得 $x^2-P(1+\frac{2P}{k^2})x+\frac{P^2}{4}=0$,则$x_1x_2=\frac{P^2}{4}$.

综上可知 $4x_1x_2=p^2$.

（2）设 $C(\frac{c^2}{2p},c),D(\frac{d^2}{2p},d)$且$c\neq d$，则 CD 的垂直平分线 l' 的方程为 $y-\frac{c+d}{2}=-\frac{c+d}{2p}(x-\frac{c^2+d^2}{4p})$

假设l'过 F，则$0-\frac{c+d}{2}=-\frac{c+d}{2p}(\frac{p}{2}-\frac{c^2+d^2}{4p})$整理得

$(c+d)(2p^2+c^2+d^2)=0 \quad \because p\neq 0$

$\therefore 2p^2+c^2+d^2\neq 0$，$\therefore c+d=0$.

这时l'的方程为 y=0，从而l'与抛物线$y^2=2px$只相交于原点. 而 l 与抛物线有两个不同的交点，因此l'与 l 不重合，l 不是 CD 的垂直平分线.

此题是课本题的深化，你能够找到它的原形吗？知识在记忆中积累，能力在联想中提升. 课本是高考试题的生长点，复课切忌忘掉课本！

例 9 某工程要将直线公路 l 一侧的土石，通过公路上的两个道口 A 和 B，沿着道路 AP、BP 运往公路另一侧的 P 处，PA=100m，PB=150m，∠APB=60°，试说明怎样运土石最省工？

讲解: 以直线 l 为 x 轴，线段 AB 的中点为原点对立直角坐标系，则在 l 一侧必存在经 A 到 P 和经 B 到 P 路程相等的点，设这样的点为 M，则

|MA|+|AP|=|MB|+|BP|,

即　|MA|－|MB|=|BP|－|AP|=50,

∵ $|AB|=50\sqrt{7}$,

∴M 在双曲线 $\frac{x^2}{25^2}-\frac{y^2}{25^2\times 6}=1$ 的右支上.

故曲线右侧的土石层经道口 B 沿 BP 运往 P 处，曲线左侧的土石层经道口 A 沿 AP 运往 P 处，按这种方法运土石最省工.

相关解析几何的实际应用性试题在高考中似乎还未涉及，其实在课本中还可找到典型的范例，你知道吗?

解析几何解答题在历年的高考中常考常新, 体现在重视能力立意, 强调思维空间, 是用活题考死知识的典范. 考题求解时考查了等价转化, 数形结合, 分类讨论, 函数与方程等数学思想, 以及定义法, 配方法, 待定系数法, 参数法, 判别式法等数学通法.