第八讲

数形结合解函数问题

模块一 含绝对值的函数

知识要点

一、三点作图法

三点作图法是画函数 $y=k|ax+b|+c(ak\neq 0)$ 的图像的一种简洁方法

（该函数图形形状似“V”，故称V型图）

步骤：

①先画出V型图顶点$\left(-\frac{b}{a},c\right)$；

②在顶点两侧各找出一点；

③以顶点为端点分别与另两个点画两条射线.

二、翻转作图法

1．形如 $y=f(|x|)$ 的函数

画函数 $y=f(|x|)$ 的图像的一般步骤：

①先作出 $y=f(x)(x>0)$ 的图像；

②将 $y=f(x)(x>0)$ 的图像沿 y 轴翻折到 y 轴左侧，就得到了函数 $y=f(|x|)$ 的图像.

2．形如 $y=|f(x)|$ 的函数

画函数 $y=|f(x)|$ 的图像的一般步骤：

①先作出 $y=f(x)$ 的图像；

②若 $y=f(x)$ 的图像不位于 x 轴下方，则函数 $y=f(x)$ 的图像就是函数 $y=|f(x)|$ 的图像；

③若 $y=f(x)$ 的图像有位于 x 轴下方的，则把 x 轴下方的图像沿 x 轴翻折到 x 轴上方，就得到了函数 $y=|f(x)|$ 的图像.

三、分段函数作图法

分段函数作图法是把原函数等价转化为分段函数后再作图，这种方法是画含有绝对值的函数图像的有效方法.

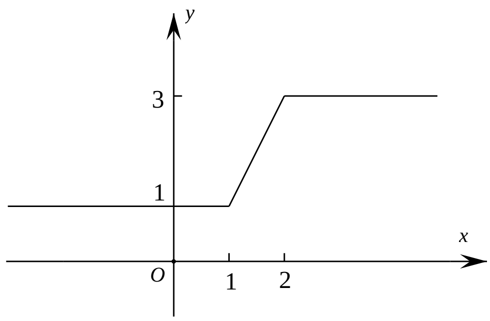
例题精讲

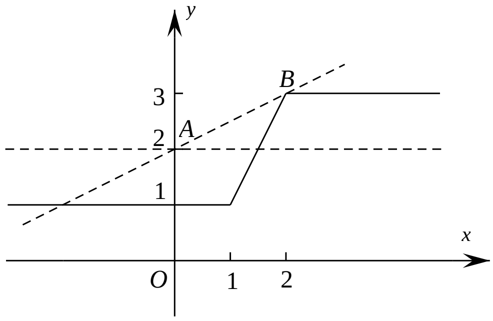
【例题1】

若直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=|x-1|-|x-2|+2$ 的图像交于三个不同点，求常数 a 的取值范围.

【分析】 $y=|x-1|-|x-2|+2=\begin{cases}1, x<1\\2x-1, 1\le x<2\\3, x\ge 2\end{cases}$

由上式作出图像，得到图中折线





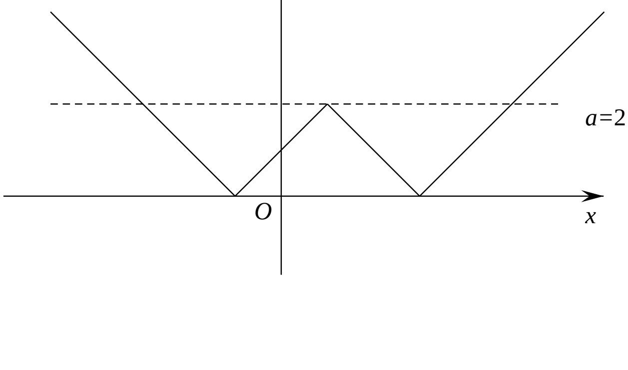
由图分析得出满足题意的两种极端情况如下：当直线过图中点 $B(2,3)$ 时，由 $3=2a+2$ 得 $a=\frac{1}{2}$；当直线平行于 x 轴时，由 $y=2$ 知 $a=0$

所以，$0<a<\frac{1}{2}$

【例题2】

已知关于 x 的方程 $||x-1|-2|=a$ 有四个解，求 a 的取值范围.

【分析】 先作出 $|x-1|$ 的图像，然后向下平移2个单位，得到 $|x-1|-2$ 的图像，再把 x 轴下方的图像关于 x 轴翻折上去，便得到 $y=||x-1|-2|$ 的图像，要使方程有四个不同的解，由图象易知 $0<a<2$



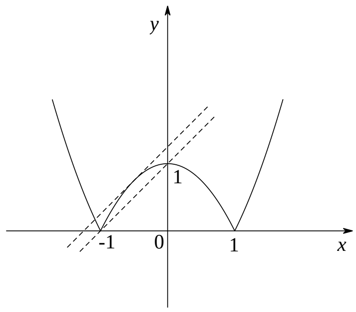
【例题3】

当 k 为何值时，关于 x 的方程 $|x^2-1|-x-k=0$ 有三个或三个以上的实数根？

【分析】 讨论函数 $y=|x^2-1|$ 与动直线 $y=x+k$ 的相关位置

八升九衔接班

先画出 $y=x^2-1$ 的函数，然后把 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方，即得到 $y=\left|x^2-1\right|$ 的图象.



考虑临界情况.

由图可知，当 $y=x+k$ 过 $(-1,0)$ 时，此时只有三个交点，易知 $k=1$

当 $y=x+k$ 与 $y=-x^2+1$ 的图象相切时，此时也是三个交点.

联立方程，得 $-x^2+1=x+k$，化简得 $x^2+x+k-1=0$

$\Delta=1-4(k-1)=0$，解得 $k=\dfrac{5}{4}$

综上分析，当 $1\le k\le\dfrac{5}{4}$ 时，方程有三个或三个以上的实根.

【例题4】

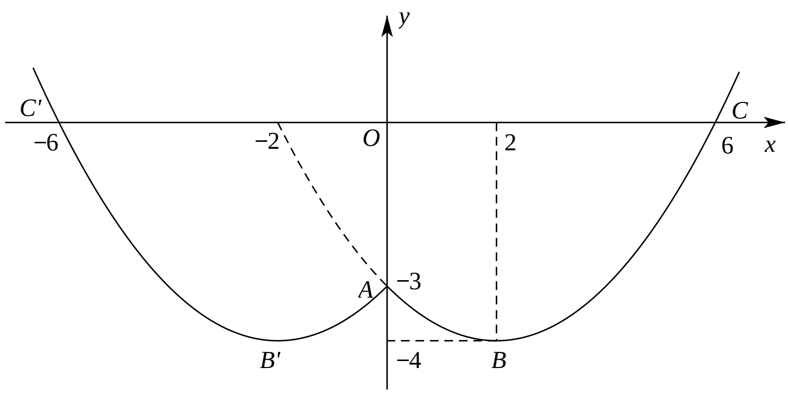
讨论方程 $\frac{1}{4}x^2-|x|-3=m$ 的解的个数与 m 的关系.

【分析】 $\because y=\frac{1}{4}x^2-|x|-3=\frac{1}{4}|x|^2-|x|-3$，$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-|x|-3$ 是 $y=f(|x|)$ 类型的函数

①作出当 $x\ge 0$ 时，$y=\frac{1}{4}x^2-x-3$ 的图像，顶点坐标为 $(2,-4)$，抛物线与 x 轴的交点为 $(-2,0)$ 和 $(6,0)$，与 y 轴的交点为 $(0,-3)$，如图，曲线 ABC 就是 $x\ge 0$ 时，$y=\frac{1}{4}x^2-|x|-3$ 的图像；

②以 y 轴为对称轴，作曲线 ABC 的对称图形 $AB'C'$

③图中的曲线 $C'B'ABC$ 即为 $y=\frac{1}{4}x^2-|x|-3$ 的图像



现讨论 $y=\frac{1}{4}x^2-|x|-3$ 与 $y=m$ 的图像交点个数问题

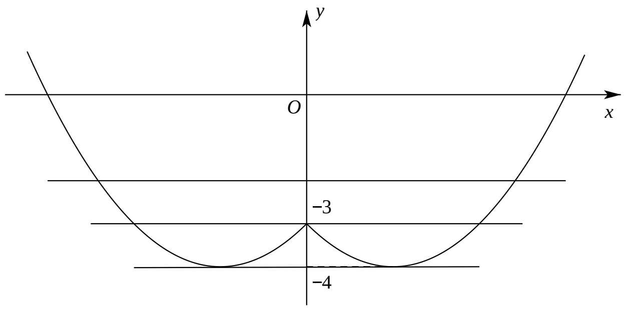
八升九衔接班

如图，当 $m>-3$ 或 $m=-4$ 时，原方程有两个实数解

当 $m=-3$ 时，原方程有三个实数解

当 $-4<m<-3$ 时，原方程有四个实数解

当 $m<-4$ 时，原方程无实数解



模块二 一元二次函数根的分布

知识要点

所谓一元二次方程的根，实质就是其相应二次函数的零点（图像与 x 轴的交点问题），因此，二次方程的实根分布问题，即二次方程的实根在什么区间内的问题，借助于二次函数及其图像利用数形结合的方法来研究是非常有益的.

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的两实根为 x_1、 x_2，且 $m,n(m<n)$ 是预先给定的两个实数.

区间：某个范围的数的集合，可分为开区间，闭区间，半开半闭区间.

举个“栗子”：开区间 (m,n) 表示所有在 m 和 n 之间的实数，但不包括 m 和 n；闭区间 $[m,n]$ 表示所有在 m 和 n 之间的实数，包括 m 和 n

一、　二次方程根的分布情况表格：（讨论的是 $x_1\leq x_2$ 的情况）

1．两根与 0 的大小比较（根的正负情况）

2．两根与 k 的大小比较

3．根在区间上的分布

⑴两根都在 (m,n) 内

⑵两根有且仅有一根在 (m,n) 内

⑶一根在 (m,n) 内，另一根在 (p,q) 内， $m<n<p<q$

⑷当两根都不在区间 $[\alpha\ ,\beta]$ 内

①当两根分别在区间 $[\alpha\ ,\beta]$ 的两旁

②当两根分别在区间 $[\alpha\ ,\beta]$ 之外的同侧

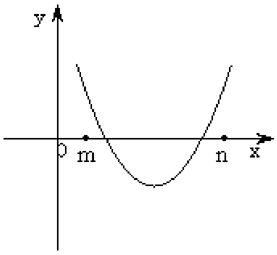
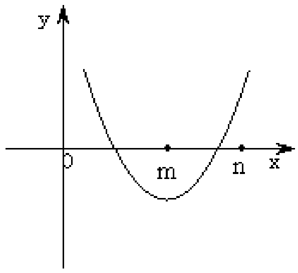
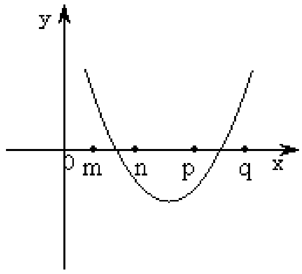
1．两根与 0 的大小比较即根的正负情况

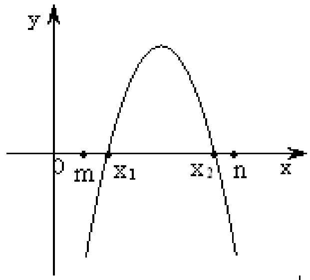
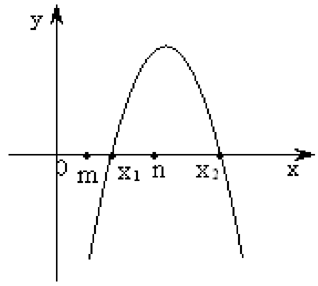
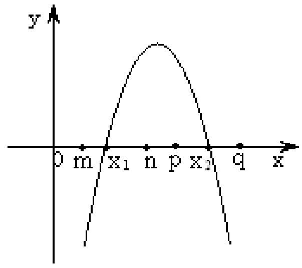
分布情况	两个负根即两根都小于**0** $(x_1<0, x_2<0)$	两个正根即两根都大于**0** $(x_1>0, x_2>0)$	一正根一负根即一个根小于 0，一个大于 0 $(x_1<0<x_2)$
综合结论	$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\frac{b}{2a}<0\\ a\cdot f(0)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\frac{b}{2a}>0\\ a\cdot f(0)>0\end{cases}$	$a\cdot f(0)<0$

2．两根与 k 的大小比较

分布情况	两根都小于 k 即 $x_1<k, x_2<k$	两根都大于 k 即 $x_1>k, x_2>k$	一个根小于 k，一个大于 k 即 $x_1<k<x_2$
综合结论	$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\frac{b}{2a}<k\\ a\cdot f(k)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\frac{b}{2a}>k\\ a\cdot f(k)>0\end{cases}$	$a\cdot f(k)<0$

3．根在区间上的分布表格

分布情况	两根都在 (m,n) 内	两根有且仅有一根在 (m,n) 内（图像有四种情况，只画了一种）	一根在 (m,n) 内，另一根在 (p,q) 内， $m<n<p<q$
大致图像（$a>0$）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ m<-\frac{b}{2a}<n\\ f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$ 或 $f(m)=0, f(n)>0, -\frac{b}{2a}>m$ 或 $f(n)=0, f(m)>0, -\frac{b}{2a}<n$	$\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)<0\\ f(p)<0\\ f(q)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$

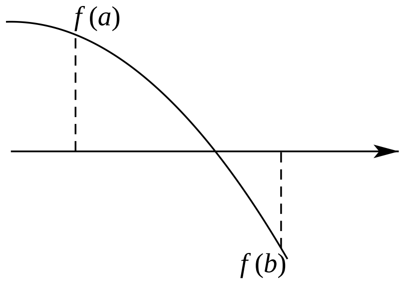
大致图像（$a<0$）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\\ f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$ 或 $f(m)=0, f(n)<0, -\dfrac{b}{2a}>m$ 或 $f(n)=0, f(m)<0, -\dfrac{b}{2a}<n$	$\begin{cases}f(m)<0\\ f(n)>0\\ f(p)>0\\ f(q)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$
综合结论	$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\\ af(m)>0\\ af(n)>0\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$ 或 $f(m)=0, af(n)>0, -\dfrac{b}{2a}>m$ 或 $f(n)=0, af(m)>0, -\dfrac{b}{2a}<n$	$\begin{cases}f(m)f(n)<0\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$

注：本讲并未讨论闭区间上的根的分布问题，通常会先讨论开区间上的分布，然后对端点处单独讨论．

二、 区间根定理

如果在区间(a,b)上有$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一个$x\in(a\ ,b)$（“$\in$”读作属于，表示$a<x<b$），使得$f(x)=0$．

此定理即为区间根定理，又称作勘根定理，它在判断根的位置的时候会发挥巨大的威力．



在讨论一元二次方程根的情形时，要充分利用数形结合的思想，即先根据条件“定”出图像位置，由所给条件画出满足条件的图像，再由图像列出不等式(组)，最后解不等式(组)求解．

例题精讲

【例题5】

已知方程 $x^2-(k-1)x+k=0$ 有两个大于 2 的实根，求 k 的取值范围.

【分析】 因为 $x^2-(k-1)x+k=0$ 有两个大于 2 的实数根，

若设 $y=x^2-(k-1)x+k$，则该二次函数与 x 轴的两个交点都位于 $x=2$ 的右边，开口向上，

所以有 $\begin{cases}(k-1)^2-4k\geq 0\\ \dfrac{k-1}{2}>2\\ 4-2(k-1)+k>0\end{cases}$，解得 $3+2\sqrt{2}\leq k<6$．（或韦达定理法）

【例题6】

实数 a 在什么范围内取值时，关于 x 的方程 $x^2-(2-a)x+5-a=0$ 的一个根大于 0 而小于 2，另一个根大于 4 而小于 6？

【分析】 设 $f(x)=x^2-(2-a)x+5-a$，由题意，得

$\begin{cases}f(0)=5-a>0\\ f(2)=a+5<0\\ f(4)=3a+13<0\\ f(6)=5a+29>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<5\\ a<-5\\ a<-\dfrac{13}{3}\\ a>-\dfrac{29}{5}\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{29}{5}<a<-5$.

∴满足条件的 a 的取值范围是 $-\dfrac{29}{5}<a<-5$.

【例题7】

已知 m、n 均为正整数，若关于 x 的方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的两个实数根都位于 $0<x<1$ 的范围中，求 m、n 的值.

【分析】 设 $f(x)=4x^2-2mx+n$，由题意，得

$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ 0<\dfrac{m}{4}<1\\ f(0)=n>0\\ f(1)=4-2m+n>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m^2\geqslant 4n & ①\\ 0<m<4 & ②\\ n>0 & ③\\ 4+n>2m & ④\end{cases}$

由②知符合条件的 m 值为 $1,2,3$.

把 m 各值代入①、④，得 $\begin{cases}n\leqslant\dfrac{1}{4}\\ n\geqslant -2\end{cases}$，$\begin{cases}n\leqslant 1\\ n>0\end{cases}$，$\begin{cases}n\leqslant\dfrac{9}{4}\\ n>2\end{cases}$.

符合条件的 m，n 的值是 $m=2$，$n=1$.

【例题8】

如果方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ **有且只有一根在区间** $(-3,0)$ **内，求** m **的取值范围.**

【分析】 ①由 $f(-3)\cdot f(0)<0$ 即 $(14m+15)(m+3)<0$ 得出 $-3<m<-\frac{15}{14}$；

②$\begin{cases} f(-3)=0 \\ f(0)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(-3)>0 \end{cases}$，得 $m=-\frac{15}{14}$

综上得 $-3<m\le -\frac{15}{14}$

【例题9】

已知点 A **、** B **的坐标分别为** $(1,0)$ **、** $(2,0)$ **．若二次函数** $y=x^2+(a-3)x+3$ **的图像与线段** AB **只有一个交点，求** a **的取值范围.**

【分析】 设 $f(x)=x^2+(a-3)x+3$

① $\Delta=(a-3)^2-12=0$，解得 $a=3\pm 2\sqrt{3}$，对称轴 $1\le -\frac{a-3}{2}\le 2$，解得 $-1\le x\le 1$，得 $a=3-2\sqrt{3}$

②交点为端点

Ⅰ. $f(1=0)$，此时 $1+a-3+3=0$，$a=-1$，代入检验，符合题意

Ⅱ. $f(2=0)$，此时 $4+2a-6+3=0$，$a=-\frac{1}{2}$，函数为 $y=x^2-\frac{7}{2}x+3$，另一根为 $x=\frac{3}{2}$，舍去.

③交点在 A 和 B 之间，此时 $f(1)\cdot f(2)<0$，解得 $-1<a<-\frac{1}{2}$.

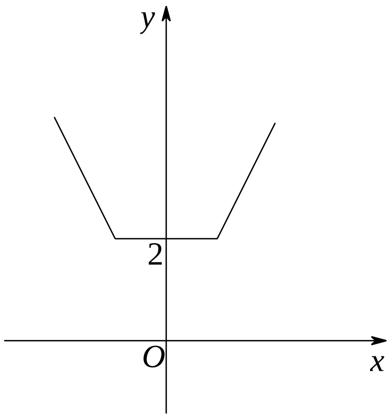
综上，a 的取值范围是 $-1\le a<-\frac{1}{2}$ 或 $a=3-2\sqrt{3}$

本讲巩固

【巩固1】

如果关于 x 的方程 $|x-1|+|x+1|=a$ 有实数根，求实数 a 的取值范围.

【分析】 设 $y=|x-1|+|x+1|$，得 $y=\begin{cases}2x, & x\geq 1\\ 2, & -1<x<1\\ -2x, & x\leq -1\end{cases}$



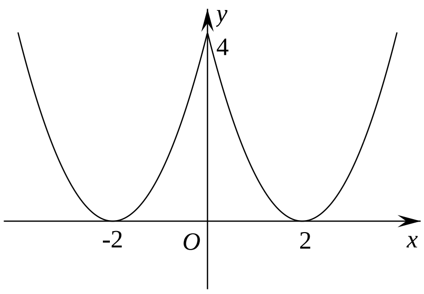
根据函数图像得当 $a\geq 2$ 时，该方程有解.

【巩固2】

m 是什么实数时，方程 $x^2-4|x|+5=m$ 有四个互不相等的实数根？

【分析】 将原方程变形为 $x^2-4|x|+4=m-1$

令 $y=x^2-4|x|-4=m-1$，则 $y=x^2-4|x|+4=\begin{cases}(x+2)^2 & (x<0)\\ (x-2)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$



由图像可知，当 $0<m-1<4$，即 $1<m<5$ 时，直线与曲线有四个不同的交点，所以，当 $1<m<5$ 时，方程 $x^2-4|x|+5=m$ 有四个互不相等的实数根.

【巩固3】

已知二次函数 $y=(m+2)x^2-(2m+4)x+(3m+3)$ 与 x 轴有两个交点，一个大于1，一个小于1，求实数 m 的取值范围.

【分析】 $(m+2)\cdot f(1)<0$，即 $(m+2)\cdot(2m+1)<0\Rightarrow -2<m<-\dfrac{1}{2}$.

【巩固4】

若关于 x 的二次方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 α 、 β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$ ，求实数 p 的取值范围.

【分析】　设 $f(x)=7x^2-(p+13)x+p^2-p-2$ ，根据题意得

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)>0 \end{cases}，即 \begin{cases} p^2-p-2>0 \\ p^2-2p-8<0 \\ p^2-3p>0 \end{cases}.$$

解得 $-2<p<-1$ 或 $3<p<4$.

【巩固5】

已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2-2mx+m^2+m-6=0$ 有两个实根 α、β ，且满足 $0<\alpha<1<\beta$ ，求实数 m 的取值范围.

【分析】　令 $f(x)=(m-1)x^2-2mx+m^2+m-6$ ，显然 $m\neq1$

根据题意得 $\begin{cases} m-1>0 \\ f(0)>0 \\ f(1)<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m-1<0 \\ f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$ ，解得 $2<m<\sqrt{7}$ 或 $-3<m<-\sqrt{7}$