第十二届“中环杯”中学生思维能力训练活动

初一年级选拔赛 参考答案

题型	一、填空题	二、动手动脑题	共计
得分			

一. 填空题：（每题 7 分，共 56 分。）

1. 已知 $|x-1|=2|x-2|$，求 x=(3 或 5/3)。

[解]显然 1 和 2 是两个要考虑的特殊点,请结合数轴来解题.两个点将数轴分成 3 段,分析如下:
(1)当 x<=1 时，已知条件可以化为：1-x=2（2-x），解得 x=3 不满足
(2)当 1<x<=2 时，已知条件可以化为：x-1=2（2-x），解得 x=5/3,
(3)当 x>2 时，已知条件可以化为：x-1=2（x-2），解得 x=3

2. 将下列代数式因式分解：$(a+b+c)^2-4c(a+b)$=($(c-a-b)^2$)。

[解]展开 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-4ca-4bc=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
$=(c-a-b)^2$

3. 已知 $x^2+3x+1=0$，则 $2x^4+5x^3+2x+5$=(4)。

[解]可以降次，由已知得 $x^2=-(3x+1)$，故 $x^4=9x^2+6x+1$，$x^3=-3x^2-x$
故 $2x^4+5x^3+2x+5=(18x^2+12x+2)-(15x^2+5x)+2x+5$
$=3(x^2+3x)+7=-3+7=4$

4. 已知 $x^2-6x+1=0$，则 $\frac{x^4+1}{x^3+x}$=($\frac{17}{3}$)。

[解]分子 $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(6x)^2-2x^2=34x^2$
分母 $x^3+x=x(x^2+1)=6x^2$
故原式 $=34x^2/6x^2=17/3$ （显然 x 不为 0）

5. 解分式方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{k}{x^2+3x+2}$ 时产生增根，则 k=(1, 2)。

[解]左边通分得到:

$$\frac{(x+1)(x+1)-(x+2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+3}{x^2+3x+2}$$

这里要明白增根的含义：
在方程变形时，有时可能产生不适合原方程的根，这种根叫做原方程的增根。如：一个分式方程的根能使此方程的公分母为零,那么这个根就是原方程的增根。详细参见百度： 增根是什么？

在这里，x=-1，x=-2 是使分母为 0 的数，这时 k=x+3，分别对应 2,1.

6. 对于一个 n 位小数 N，记号[N]表示用去尾法对 N 取近似值所得的(n-1)位小数；记号<N>表示用进一法对 N 取近似值所得到的(n-1)位小数；记号(N)表示用四舍五入法对 N 取近似值所得到的(n-1)位小数，则

[(<3.1415926>)]=(3.1415)。

[解]<3.1415926>=3.141593(进一法),(3.141593)=3.14159(四舍五入)，[3.14159]=3.1415(去尾法)

7. 等腰三角形的一个外角等于 130°，那么此三角形的各内角度数为(（50°，65°，65°），（80°，50°，50°）)。

[解]这个外角有两种情况，如果是顶角的外角，则该三角形的顶角=180°-130°=50°，另两个底角相等，为 130°/2=65°；

当是底角的外角时，则该三角形的两个底角=50°，顶角为 80°。

故有两个结果，分别是（50°，65°，65°），（80°，50°，50°）

8. 关于所定义的运算“*”，对于任意的正数 a，有(a*b)(a*c)=a*(b+c)≠0 且 a*1=a，那么(2011*0)*2011=(1)。

[解]取 b=0,c=1,得到 (a*0)(a*1)=a*(0+1)=a*1=a,

所以 a*0=1，有 a*1=a

设 b=c=1，则(a*1)(a*1)=a*(1+1),故 $a*2=a^2$

依次设 b=2，c=1，可以推出 $a*3=a^3$

当 n 为正整数时，$a*n=a^n$

故(2011*0)*2011=1*2011=1^{2011}=1

[注]这是中环杯必考的符号运算。其实我们学到的很多符号运算都是这样定义得来的。数学家常常自定义符号，并给定运算规则。

二. 动手动脑题：(每题 11 分，共 44 分。)

1. 解下列不等式：$x^2+ax+1<(x+b)^2$，其中 a，b 为常数，且 b>1。

【解】右边展开，两边同时减去 x^2，原不等式化为(a-2b)x < b^2-1,

(1)a>2b 时，x < $(b^2-1)/(a-2b)$;

(2)a<2b 时，x > $(b^2-1)/(a-2b)$

(3)a=2b 时，不等式恒成立，x 为任意实数（实数范围内）。

【注】一定要分类讨论。尤其不要遗漏(3).

2. 已知 a、b、c 为△ABC 的三边边长，且满足方程组 $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=9 \\ abc=3 \end{cases}$，试判断△ABC 的形状。

[解]看到这样的 3 个 3 次方之和，马上想到公式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

故 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=9-9=0$

即 a+b+c = 0，或 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$

但是 a,b,c 为边长，都是正数，故只有后一个成立。

条件反射另一个公式：两边乘以 2，得到 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
3 个非负数之和为 0，则这 3 个数都是 0，即 $a=b=c$
三角形为等边三角形。
[注]请大家注意一个经典不等式:

大家肯定知道 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ ，变形为 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ （a, b 为正数）当且仅当 $a=b$ 时取等号。证明很简单，请大家自证。

推而广之，三个数就是 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$（a, b, c 为正数）当且仅当 $a=b=c$ 时取等号。

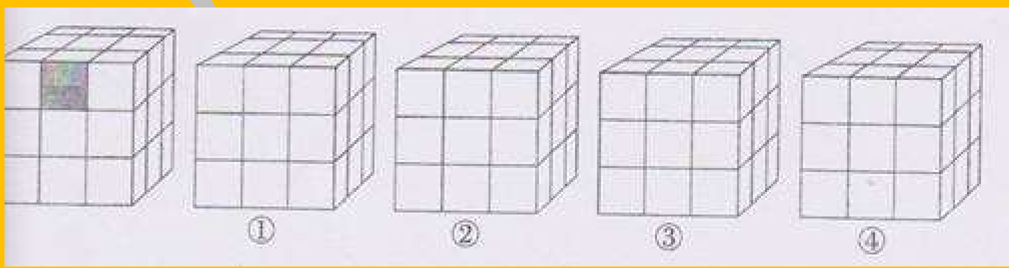
数学中，经常将 $A_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ 叫做算术平均值，$G_n=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ 叫做几何平均值，其中 x_1，x_2，…，x_n 为 n 个正实数，这两个平均值有如下不等式：
$A_n\geqslant G_n$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时 取等号（即等号成立）
“均值不等式”名称就是这样得来的。详细请见 http://zh.wikipedia.org/wiki/

3. 求证：$x^2+y^2=2016$ 无正整数解。
【解】正整数集合包括奇数（2k-1）和偶数（2k），k=1, 2，…

(1)若 x=y, 则 $2x^2=2016$，$x^2=1008=2^4*3^2*7$，显然 $x=2^2*3*\sqrt{7}$ 不是正整数；

(2)若 $x\neq y$, 不妨设 x>y, 则存在正整数 k，使得 x=y+k，故
$x^2+y^2=(y+k)^2+y^2=2y^2+2yk+k^2=2016$,
所以 k^2 是偶数，k 是偶数，设 k=2m，代入上式，得到
$y^2+2ym+2m^2=1008$，同样看出 y 必须是偶数，故 x 也是偶数。
如果设 x=2k，y=2m，则 $k^2+m^2=504$,
依次类推， $x=2^nk$，$y=2^nm$，当 n=2 时， 得 $k^2+m^2=2*3^2*7$
同理，要求 k 和 m 都是偶数才能使上式成立，即左边能被 4 整除，但是右边不能被 4 整除，故无解。

4. 如图是一个立方体魔方，我们可以从图中看到它的右侧。上侧和前侧。如果顺时针转动魔方右侧第一层 90 度，我们记作进行一次 R 操作；如果逆时针转动右侧第一层 90 度，则记作 R′ 。对于上侧和前侧分别进行相同的旋转操作，分别记为 U、U′ 、F、F′ 。现在对魔方进行 4 次转动：①F，②R，③U，④F，请你在图中依次画出每完成一次转动后，阴影面所在的位置。



这题是本届中环杯的送分题，每个年级的选拔赛都有本题。读懂题意都能解答。在此忽略。
翔文学习提供,

Email:xiangwenjy@gmail.com
QQ:2254237433