

一元一次不等式与不等式组（2）

姓名：_____ 日期：_____

【知识点】

1. 不等式相关概念：

- (1) 不等式：_____ 叫做不等式；
 (2) 一元一次不等式：_____ 叫做一元一次不等式；
 (3) 一元一次不等式组：_____ 叫做一元一次不等式组。

2. 不等式的基本性质：

- (1) 若 $a > b$ 则： $a \pm c > b \pm c$
 (2) 若 $a > b$, $c > 0$ 则： $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
 (3) 若 $a > b, c < 0$ 则： $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
 (4) 若 $a > b$ 则： $b < a$ ；若 $a \leq b$, 则 $b \geq a$ ；..... (对称性)
 (5) 若 $a > b, b > c$ 则： $a > c$ ；若 $a \leq b, b \leq c$, 则 $a \leq c$ ；... (同向传递性)

3. 一元一次不等式的解法

当一元一次不等式化为标准形式 $ax > b$ 后

- (1) 当 $a > 0$ 时： $x > \frac{b}{a}$ (2) 当 $a < 0$ 时： $x < \frac{b}{a}$

(3) 当 $a = 0$ 时：若 $b \geq 0$, 无解；若 $b < 0$, 解为任意实数

4. 一元一次不等式组的解法

可先借助数轴直观地将公共部分表示出来，再用数学式子写出解集，即先求出“组”内每个不等式的解集，然后再从“组”角度去求“不等式组”的解集，可自行总结下表：

不等式组 ($a < b$)	数轴表示	解集	口诀
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$		$x > b$	大大取大
$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$		$x < a$	小小取小
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$		$a < x < b$	大小、小大中间找
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$		无解	大大、小小找不着

【基础训练】

1. 写出下列不等式组的解集

① $\begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow$

② $\begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow$

③ $\begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow$

④ $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow$

2. 解不等式组

$$\begin{cases} x+3 < 5 \\ 3x-1 < 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2 < x+1 \\ x+5 > 4x+1 \end{cases}$$

3. 做一做

① $\begin{cases} x > 1 \\ x > a \end{cases}$ 的解集是 $x > 1$, 则 a 的取值范围是_____

② $\begin{cases} x < 1 \\ x < a \end{cases}$ 的解集是 $x < 1$, 则 a 的取值范围是_____

③ $\begin{cases} x < 1 \\ x > a \end{cases}$ 的解集是 $a < x < 1$, 则 a 的取值范围是_____

④ $\begin{cases} x > 1 \\ x < a \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____

4. 议一议:

①是否存在实数 x , 使得 $x+3 < 5$, 且 $x-2 > 4$?

②若不等式 $\begin{cases} x > 2 \\ x < b \end{cases}$ 的解集是 $2 < x < 4$, 那么 $b =$ _____

【应用提高】

一、感受不等关系，体会最优化思想

生活中的不等关系往往是由相等关系得到的，相等关系的解决往往是不等关系解决的突破口，但真正的应用价值往往存在于不等关系中。

例 1. 用两根长度均为 $l\text{ cm}$ 的绳子，分别围成一个正方形和一个圆，猜想正方形和圆的面积哪个大？

分析：显然，所围成的两图形的周长相等【等周问题】，如何利用周长的计算公式分别求出边长和半径，再利用面积公式进行计算比较。

(答案)

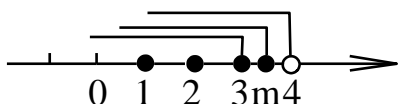
二、体会类比思想，轻松求解不等式

例 2. 某自来水公司按如下标准收取水费：若每户每月用水不超过 5 m^3 ，每立方米收费 1.5 元，超出部分则每立方米收费 2 元。为了节约用水节省开支，小颖家在计划用水费用支出时，规定水费不得超过 15 元，那么，她家这个月的用水量最多是多少？

(答案)

例 3. 已知不等式 $3x - a \leq 0$ 的正整数解是 1, 2, 3。求 a 的取值范围。

分析：首先对题意要正确理解，“关于 x 的不等式 $3x - a \leq 0$ 的正整数解是 1, 2, 3”的意思是： $3x - a \leq 0$ 的解集包含了正整数 1, 2, 3，且仅有 1, 2, 3，换句话说，用数轴表示则其解集必如图所示。



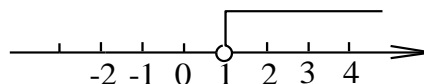
(答案)

三、提高认识，纠正错误

初学“解一元一次不等式”，对不等式的概念、基本性质和同解变形如果掌握不好，会出现一些错误，列举几例，以帮助同学们提高认识，辨清疑点。

<p>甲生：解不等式 $2 - 5x \geq 8 - 2x$</p> <p>解：移项，得 $-5x + 2x \geq 8 - 2$</p> <p>合并同类项，得 $-3x \geq 6$</p> <p>系数化为 1，得 $x \geq -2$</p>	<p>甲生：不等式两边除以同一个不等于零的数时，应考虑数的符号和不等式的方向，甲生就没有注意到这一点，本题中不等式的解集应为 $x \leq -2$</p>
<p>乙生：解不等式 $\frac{x+5}{2} - 1 < \frac{3x+2}{2}$</p> <p>解：去分母，得 $x+5-1 < 3x+2$</p> <p>移项，合并同类项，得 $-2x < -2$</p> <p>系数化为 1，得 $x > 1$。</p>	<p>乙生：在去分母时，不等式两边各项都应乘以公分母，而他漏乘了“-1”，因此导致结果错误；</p>
<p>丙生：解不等式 $1 + \frac{x}{3} \geq 5 - \frac{x-2}{6}$</p> <p>解：去分母，得 $6+2x \geq 30-x-2$</p> <p>移项，合并同类项，得 $3x \geq 22$</p> <p>系数化为 1，得： $x \geq 22/3$ 。</p>	<p>丙生：分数线不仅有“除号”的作用，而且也起着括号的作用，因此，去分母时，分子上的多项式要用括号括起来，丙生正好忽视了这一点；</p>
<p>丁生：解不等式 $1 - x \leq \frac{x}{3} - \frac{1}{6}(x+1)$</p> <p>并把解集在数轴上表示出来。</p>	<p>丁生：丁生解不等式的过程是正确的，在数轴上表示解集是错误的，在数轴上表示不等式解集时，解集含有等号应画实心圆点，不含等号时应画成空心圆圈。</p>

解：去分母，得 $6-6x \leq 2x-(x+1)$
 所以 $x \geq 1$ ，解集表示为右图所示：



四、联系实际，体会成功

不等式的解与不等式的解集是两个不同的概念，在不等式的应用问题中，只有真正明确了解了它们的实际意义后，才能从解题中找出符合条件的解。

例 4. 有人问一位老师，他所教的班有多少学生，老师说：“一半的学生在学数学，四分之一的学生在学音乐，七分之一的学生念外语，还剩下不足 6 位同学在操场踢足球。”试问这个班共有多少位学生？

例 4 解 甲生：解：设这个班共有 x 位同学，则有：

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7}\right) < 6 \quad \text{所以} \quad \frac{3}{28}x < 6, \quad x < 56.$$

又因为 x 是正整数，故这个班的同学人数不确定，只要是小于或等于 55 的正整数都符合条件。

乙生：解：设该班共有 x 位同学，则：
$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7}\right) < 6, \quad \text{所以} \quad \frac{3}{28}x < 6, \quad x < 56.$$

又因为 $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{7}$ 都是正整数，则 x 是 2, 4, 7 的最小公倍数。所以 $x=28$ 。

故该班学生共有 28 人。

注意：在解集中寻找符号条件的解时，一定要思考周全，捕捉到的条件信息要处理准确，乙生的解答是正确的。

五、他山之石，可以攻玉

解不等式组和解方程组的方法类似吗？

例 5. 解不等式组：

$$\begin{cases} 4x-4 > 3x+1 & \text{①} \\ 3x+1 > 2x-1 & \text{②} \end{cases}$$

(答案)

注意：解不等式组和方程组的方法截然不同，解不等式组，既不能用代入法，也不能用加减法，而应分别解不等式组中的每一个不等式，然后利用数轴找出他们的公共部分，在这里，老师同意乙生的评价，丙生的解答完全正确。

六、挑战自我，学以致用

设计生产方案，追求利润目标是企业决策人的一项常规技能，要想追求高额利润，找出最佳方案是基础，假若你是一家服装厂的厂长，你能设计出下面问题的最佳方案吗？

例 6. 某服装厂现有 A 种布料 70m，B 种布料 52m，现计划用这两种布料生产 M、N 两种型号的时装共 80 套，已知做一套 M 型号是时装需 A 种布料 0.6m，B 种布料 0.9m，可获利润 45 元；做一套 N 型号时装需要 A 种布料 1.1m、B 种布料 0.4m，可获利润 50 元。请你设计最佳生产方案。

分析：从题目所提供的信息知道，最佳生产方案是指：如何安排生产 M、N 两种型号的时装，使得所获利润最大，并且所需 A 种布料不多于 70m，B 种布料不多于 52m，因此我们可将问题转化为一元一次不等式组等数学问题来解。

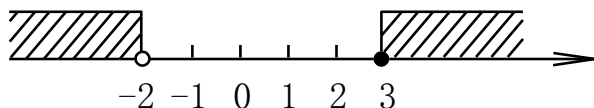
(答案)

运用数学知识解决实际问题的难点是“**数学建模**”，其方法是：从实际问题中获取必需的信息→分析、处理有关信息→将实际问题转化为数学问题（建立数学模型）→解答这个数学问题→从而解答原实际问题。

【练习题】

一、填空题

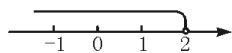
1. 若 $x-1 < y-1$, 则 x $\underline{\hspace{1cm}}$ y ; 若 $-x < -y$, 则 x $\underline{\hspace{1cm}}$ y ; 2006 $\underline{\hspace{1cm}}$ 2006 (用不等号填空);
2. 不等式 $x-10 \leq 0$ 的解有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个, 其中正整数解有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个, 它们是 $\underline{\hspace{2cm}}$;
3. 根据下列数轴, 写出 x 的范围 $\underline{\hspace{2cm}}$, 并由 x 的范围化简 $\sqrt{(x+2)^2} - |3-x| = \underline{\hspace{2cm}}$;



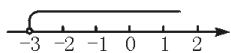
4. 如果关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a+2 \\ x < 3a-2 \end{cases}$ 无解, 则常数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 如果三角形的三边长分别是 3 cm、7 cm、 x cm, 那么 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 3, $1-a$, $1-2a$, 在数轴上从左到右依次排列, 那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 (填“<”或“>”)

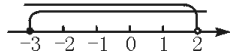
1. 若由 $x < y$ 得到 $a^2x < a^2y$, 则一定有 ()
 A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a \neq 0$ D. a 为任意实数
2. 若 a 为有理数, 则下列各式一定正确的是 ()
 A. $a > -a$ B. $|a| \geq 0$ C. $a^2 > 0$ D. $\frac{1}{a} < a$
3. 已知 $(a-2)^2 + |2a-3b-n| = 0$ 中, b 为正数, 则 n 的取值范围是 ()
 A. $n < 2$ B. $n < 3$ C. $n < 4$ D. $n < 5$
4. 下列不等式组中, 解集是 $2 < x < 3$ 的不等式组是 ()
 A. $\begin{cases} x > 3 \\ x > 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x < 3 \\ x < 2 \end{cases}$
5. 不等式组 $\begin{cases} 2x < x+2 \\ x-7 \leq 4x+2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



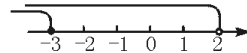
A



B



C



D

三、解不等式组

$$(1) \begin{cases} x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \geq -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x+5 \leq 3(x+2) \\ \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x-1 > 2x \\ \frac{x}{2} + 3 < -2 \end{cases}$$

四、综合题

1. 某学校学生外出春游，每小时走 $4km$ ，出发后 2 小时，校方又紧急通知，必须在 40 分钟内送到，通讯员骑自行车至少以怎样的速度才能在 40 分钟内将通知送到？
2. 水是人类最宝贵的资源之一，我国水资源人均占有量远远低于世界平均水平。为了节约用水，保护环境，学校于本学期初便制定了详细的用水计划。如果实际每天比计划多用一吨水，那么本学期的用水总量将会超过 2300 吨；如果实际每天比计划节约一吨水，那么本学期用水总量将会不足 2100 吨，如果本学期的在校时间按 110 天（22 周）计算，那么学校计划每天用水应控制在什么范围（结果保留四个有效数字）？

五、思考题

已知不等式组 $\begin{cases} 2x - a < 1 \\ x - 2b > 3 \end{cases}$ 的解集为 $-1 < x < 1$ ，则 $(a+1)(b-1) =$

《一元一次不等式组》例题详细解答

例 1 解： 不难求出所围成的正方形和圆的面积分别为： $\frac{l^2}{16}cm^2$ 和 $\frac{l^2}{4\pi}cm^2$ ，由于 $\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{16}$ ，所以无论 l 取何值时，圆的面积总大于正方形的面积。

([返回](#))

例 2 解： 设小颖家这个月的用水量是 xm^3 ，由于 $15 > 1.5 \times 5$ ，所以按她家规定，用水量可以超过 $5m^3$ ，
所以得： $1.5 \times 5 + 2(x - 5) \leq 15$ ，即 $2x - 2.5 \leq 15$

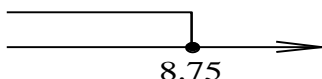
(1) 利用“等式”解“不等式”，用“数”来表示“解集”

$2x - 2.5 = 15$ 的解为 $x = 8.75$ ，与方程类比可得：当 $x > 8.75$ 时， $2x > 17.5$ ， $2x - 2.5 > 15$ ，所以 $x \leq 8.75$

(2) 利用“数轴”的形象直观，用“形”来表示“解集”，

(可分三步走：1 画数轴 2 定界点 3 走方向)

$2x - 2.5 \leq 15$ 的解集在数轴上表示为：



(3) 数形结合，则更胜一筹。

([返回](#))

例 3 解： 解不等式 $3x - a \leq 0$ ，因为： $x \leq \frac{a}{3}$ ，所以：正整数解为 1, 2, 3

所以： $3 \leq \frac{a}{3} < 4$ 即： $9 \leq a < 12$ ，故 a 的值应取 $9 \leq a < 12$ 。

([返回](#))

例 5 解 甲生：解：由①②可得： $4x - 4 > 2x - 1$ ，③

解不等式得 $x > \frac{3}{2}$

故：原不等式组的解集为 $x > \frac{3}{2}$ 。

乙生：解：取 $x = 2$ ，它满足 $x > \frac{3}{2}$ ，把 $x = 2$ 代入①会得到 $4 > 7$ ，这说明甲错了。错在什么地方呢？解不等式组不能套用解方程组的方法——由两个方程变形为一个方程求解，具体到本题，由①②完全可以推出③，但由③并不能推出①和②，也就是说，③的解集并不能保证是原不等式组的解集。

丙生：解：解不等式①，得 $x > 5$ ，解不等式②，得 $x > -2$ ，在数轴上表示①②的解集如下：

故这个不等式组的解集为 $x > 5$ 。

([返回](#))

例 6 解： 设生产 N 型号的时装套数为 x ，则生产 m 型号的时装有 $(80 - x)$ 套，用这批布料生产这两种型号的时装所获的总利润为 y 元，根据题意可得不等式组为：

因为 x 为整数，所以 x 的取值范围为 40, 41, 42, 43, 44。

又因为 $y = 45(80 - x) + 50x$ 即 $y = 5x + 3600$

经检验当 $x > 44$ 时, y 有最大值

当 $x = 44$ 时, $y_{\text{最大值}} = 5 \times 44 + 3600 = 3820$

即: 当 N 型号时装生产 44 套时, 所获利润最大, 最大利润是 3820 元。

([返回](#))

《一元一次不等式组》练习题参考答案

1. $<$, $>$, \leq 或 \geq 2. 无数, 10, $x=1, 2, 3, \dots, 10$;
3. $x < -2$ 或 $x \geq 3$, ± 5 ; 4. C ; 5. B ; 6. C ;
7. 解: 设通讯员至少以 $x \text{ km/h}$ 的速度行进才能在 40 min 内将通知送到, 由题意得

$$\frac{40}{60}x \geq (2 + \frac{40}{60}) \times 4$$

解得 $x \geq 16$

答: 通讯员至少以 16 km/h 的速度行进才能在 40 min 内将通知送到;

8. 解: 设学校计划每天用水 x 吨, 由题意, 得

$$\begin{cases} 110(x+1) > 2300 \\ 110(x-1) < 2100 \end{cases}$$

解这个不等式组, 得 $\frac{219}{11} < x < \frac{221}{11}$

所以 $19.91 < x < 20.09$

答: 学校计划每天用水量应控制在 $19.91 \sim 20.09$ 吨。