八升九数学 第二讲

Lesson 2 正余弦定理

1. 三角形三边之间的关系

   能够构成三角形的三条边，必须满足**三角不等式。**

   三角不等式：在三角形中两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。用符号表示就是：
   $|a-b|<c<|a+b|$
   $|a-c|<b<|a+c|$
   $|b-c|<a<|b+c|$，
   等价于
   $d(a,b)\le d(a,c)+d(b,c)$
   $d(a,b)\ge |d(a,c)-d(b,c)|$

   类似的有：**绝对值不等式、向量不等式和复数不等式**：等价的形式有
   $||a|-|b||\le |a\pm b|\le |a|+|b|$
   此处的 a,b,c 可以是任意实数，向量或复数。

2. 任意角的三角比($0^\circ\cdots 180^\circ$)

   单位圆解释正弦、余弦、正切和余切函数的曲线
   分析不同三角比的变化趋势

3. 两角和差公式及其几何证明

   - $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
   - $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
   - $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

   令 $\alpha=\beta$, 则有同角的二倍角关系和万能公式如下：

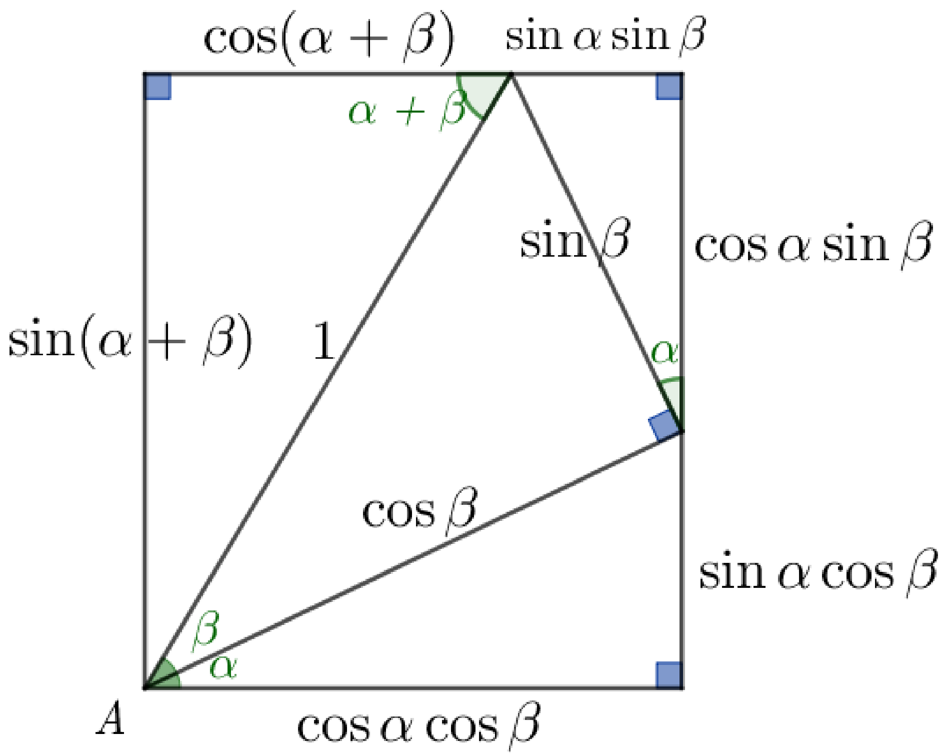
   - $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\overset{\div\cos^2\alpha}{=\!=\!=\!=}\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
   - $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\overset{\div\cos^2\alpha}{=\!=\!=\!=}\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
   - $\cos 2\alpha\overset{\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}2\cos^2\alpha-1\overset{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}1-2\sin^2\alpha$
   - $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

   令 $t=\tan\alpha\in R,\alpha\in(-\infty,+\infty)$或$\alpha\in R$, 则有万能公式：

   - $\sin 2\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$
   - $\cos 2\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

- $\tan 2\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$

几何证明如下：

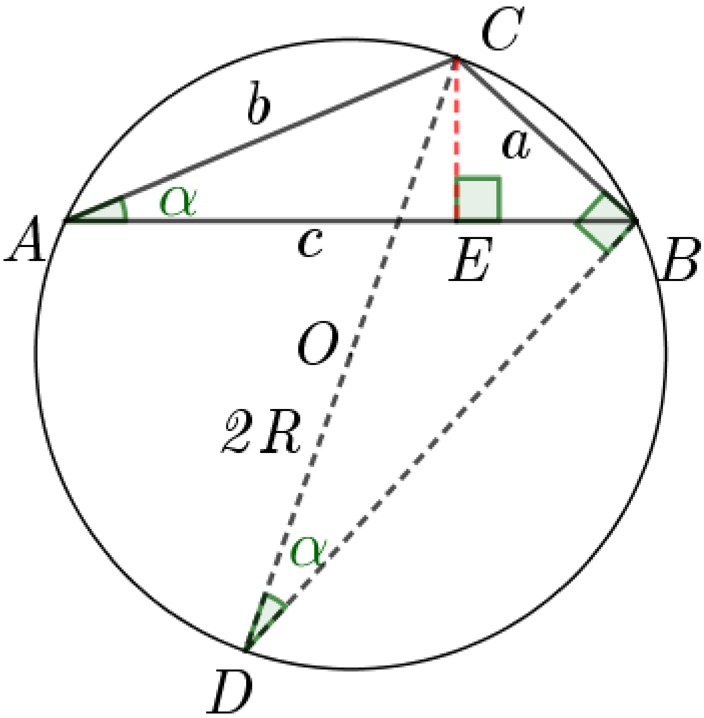


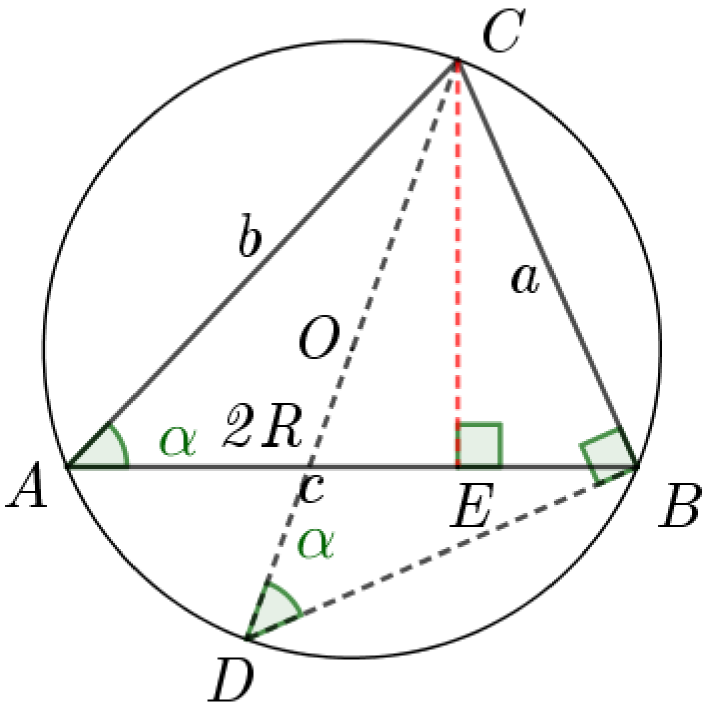
令两角和公式中的 β 为 $-\beta$, 就可以得到两角差公式

4. 正弦定理 The Law of Sines

$\triangle ABC, R$ 为三角形外接圆的半径，则有：
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

5. 正弦定理的几何证明





证明一 在锐角或钝角三角形ABC中,
过点C作AB边上的高CE，交AB于点E
连接CE，有
$CE = b\sin A = a\sin B$
$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$
同理，可以得到
$a\sin C = c\sin A$
$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

证明二 面积法
同上作辅助线，利用三角形面积公式有：
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

上述等式同时除以 $\frac{1}{2}abc$,然后颠倒一下就是正弦定理。

证明三 外接圆方法,在锐角或钝角三角形ABC中
作$\triangle ABC$的外接圆，过点C作直径CD，
交外接圆于点D，连接CD和BD。
$\because$ 同弧所对的圆周角相等，
$\therefore \angle A=\angle D$
在$Rt\triangle DBC$中，$\sin D=\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{a}{2R}$

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{2R}, \implies \dfrac{a}{\sin A}=2R$

同理可得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

6. 正弦定理变形

   主要利用比例性质来进行变形。

   - $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$
   - $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$
   - $a\sin B=b\sin A, b\sin C=c\sin B, a\sin C=c\sin A$
   - $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
   - $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

7. 三类正弦定理解三角形的问题

   - 已知三角形的两角与一边，求其他两边和一角
   - 已知三角形的两边和其中一边所对应的角，求其他边角（**要讨论钝角问题**）
   - 运用 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 解决角之间的转换关系
   - 求三角形面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

8. 余弦定理 The Law of Cosines

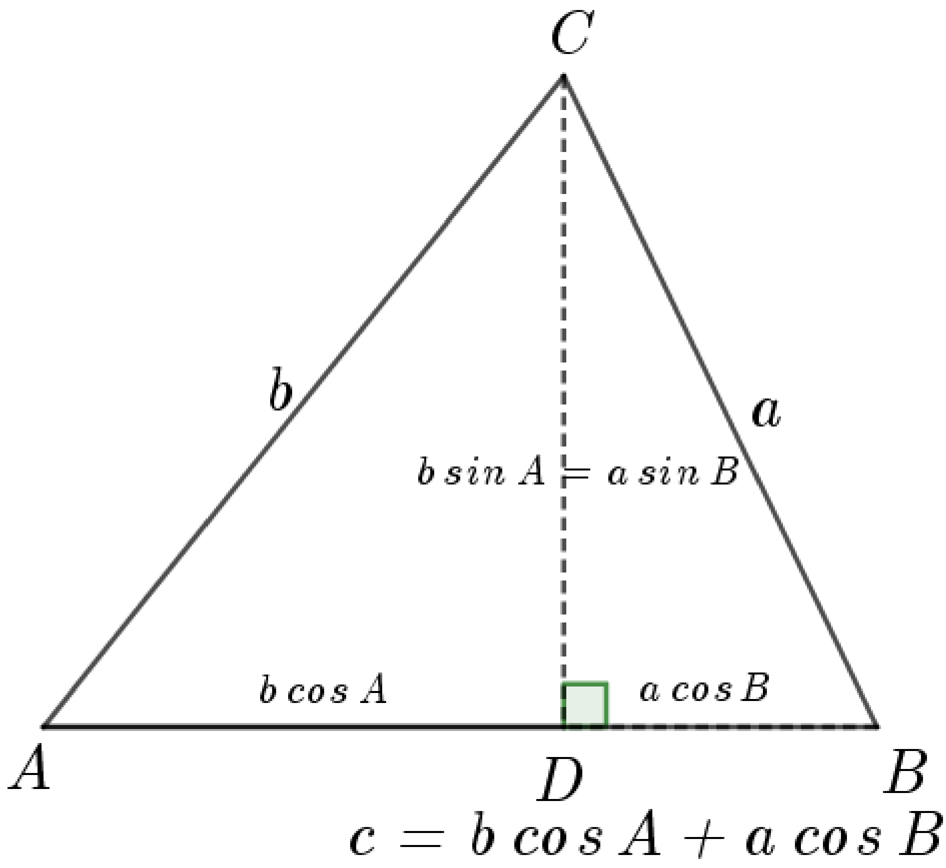
   - 余弦定理，是欧几里得平面几何学基本定理。
   - 余弦定理，是描述三角形中三边长度与一个角的余弦值关系的数学定理，是勾股定理在一般三角形情形下的推广，勾股定理是余弦定理的特例。

   $\triangle ABC$中, 则有：
   $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
   $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
   $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

   另外一种表现形式如下：
   $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\cos B$$
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C$$

9. 余弦定理几何证明



$c=b\cos A+b\cos B$ 平方得到

$$\begin{aligned}c^2&=a^2\cos^2 B+b^2\cos^2 A+2ab\cos A\cos B\\&=a^2+b^2-(a^2\sin^2 B+b^2\sin^2 A)+2ab\cos A\cos B\\&=a^2+b^2-(a\sin B-b\sin A)^2+2ab(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\end{aligned}$$

$\because CD=a\sin B=b\sin A$

$\therefore c^2=a^2+b^2+2ab\cos(A+B)$

$\because A+B+C=\pi,\cos(\pi-C)=-\cos C$

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

同理可得其他两个

10. 余弦定理的作用

余弦定理，是揭示三角形边角关系的重要定理，直接运用它可解决下列问题：

- 已知三角形的三条边长，可求三角
- 已知三角形的两边及夹角，可求第三边
- 已知三角形的两边及其一边的对角，可求其他角和第三边

利用余弦定理，可以判断三角形形状：

   - 如果一个三角形两边的平方和**等于=**第三边的平方，那么第三边所对的角一定是直角
   - 如果一个三角形两边的平方和**小于<**第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角
   - 如果一个三角形两边的平方和**大于>**第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角

   还可以求三角形边长取值范围，若对余弦定理加以变形并适当移于其它知识，则使用起来更为方便、灵活。

11. 补充海伦公式 Helen

   已知三角形的三边长 a,b,c, 记 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, 则有三角形的面积公式为 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

12. 解斜三角形的题型归纳

   关于斜三角形的解法，根据所给的条件及适用的定理可以归纳为如下四种类型：

   (1) **两角及一边**．如已知 $\angle A$、$\angle B$、a, 解 $\triangle ABC$, 即求 $b,c,\angle C$.
   解法：① 根据 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$， 求出 $\angle C$；
   ② 根据 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, 求两边 b、c；

   (2) **两边及夹角**． 如已知 a、b、$\angle C$，解 $\triangle ABC$，即求 $c,\angle A,\angle B$.
   解法：① 根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 求出边 c；
   ② 这样就已知了三边了，根据余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，求出 $\angle A$；
   不建议用正弦定理，因为 $\sin A=m$ 会产生两个解。
   ③ 由$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$， 求出 $\angle B$.

   (3) **两边及对角**，如已知a、b、$\angle A$， 解$\triangle ABC$, 即求 $c,\angle B,\angle C$.
   解法：① 根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，必须经过讨论求出 $\angle B$, 因为 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$,所以要考虑钝角的情况；
   ② 由$\angle C+\angle A+\angle B=180^\circ$，求出$\angle C$；
   ③ 由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，求出边 c.

   或 ① 根据 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，求出边 c；
   ② 由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^c-b^2}{2ac}$，求出 $\angle B$；
   ③ 由$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，求出$\angle C$.

   (4) **三边**，如已知三边 a、b、c，解$\triangle ABC$, 即求三角.
   解法：① 根据余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,求出$\angle A$；
   ② 根据余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，求出 $\angle B$；
   ③ 由$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$， 求出$\angle C$.