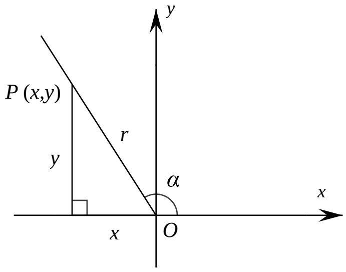
第二讲

正余弦定理

模块一 任意角的三角比

一、任意角的三角比

随着角的概念推广到任意角，需要定义任意角的三角比．我们在直角坐标系中角的终边上任意一点的坐标来定义任意角的三角比．设 $P(x,y)$ 是角 α 终边上任意一点（不重合于角的顶点），则 P 到坐标原点 O 的距离为 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$ ．



定义：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}(x\neq0)$

特殊角的三角比：

三角比	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot A$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在

补充：

两角和的正切公式：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

两角差的正切公式：$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

特别的，当 $\alpha=\beta$ 时，$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ （正切的两倍角公式）．

注意：

① $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha\pm\beta)$ 只要有一个不存在就不能使用这个公式．

②注意公式的结构，尤其是符号．

例题精讲

【例题1】

(1) 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}$，则 $\tan(2\alpha-\beta)=$________．(2) $\frac{1+\tan15°}{1-\tan15°}=$________．

【分析】 (1) $\frac{1}{12}$；(2) 原式 $=\tan60°=\sqrt{3}$．

模块二 正余弦定理

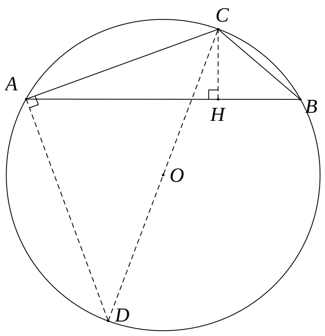
正弦定理与余弦定理是揭示三角形中边角之间的数量关系的两个重要定理，而三角形是最基本、最重要的几何图形，所以它们是联系三角与几何的纽带．因此，正弦定理和余弦定理有着极广泛的应用，它们在代数方面主要用于解斜三角形、判定三角形形状等等；在几何方面主要用于计算、证明以及求解几何定值与几何最值等等．

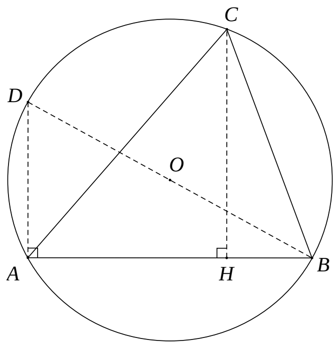
一、正弦定理：

在三角形中，各边和它所对的角的正弦的比相等，该比值等于该三角形外接圆的直径长度．这个表述等价于：在三角形中，各边之比等于它所对的角的正弦之比．

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，三角形外接圆半径为R，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$





定理证明：作高CH，$a\sin B=CH=b\sin A$，同理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．

定理变形：

⑴ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

⑵ $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

⑶ $a\sin B=b\sin A$，$b\sin C=c\sin B$，$a\sin C=c\sin A$

⑷ $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

⑸ 三角形面积的公式：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

三类正弦定理解三角形的问题：

⑴ 已知三角形的两角与一边，求其他两边及一角；

⑵ 已知三角形的两边和其中一边所对的角，求其他边角；

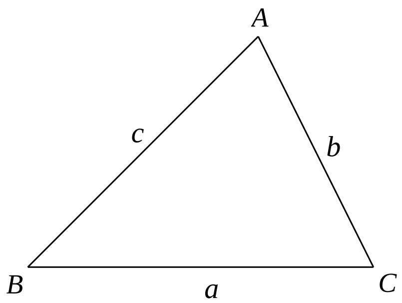
⑶ 运用$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$解决角之间的转换关系．

二、余弦定理

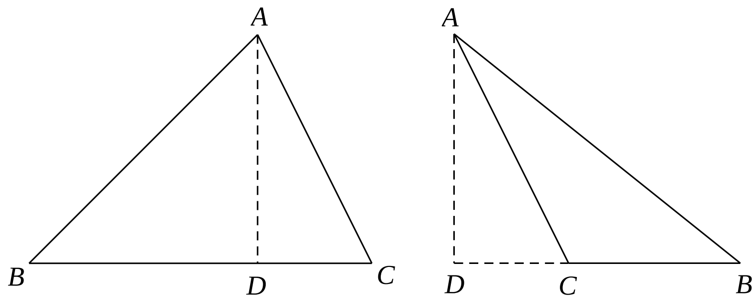
定理内容：

在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边长分别为a、b、c，

则有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．



定理证明：



【分析】　作高AD，$AD=c\sin B$，$BD=c\cos B$．

当$\angle C<90^\circ$时，$CD=a-c\cos B$；当$\angle C>90^\circ$，$CD=c\cos B-a$．

总有$b^2=(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2=a^2+c^2(\sin^2 B+\cos^2 B)-2ac\cos B$，

由于$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，代入上式得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，同理可证$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

定理变形：

⑴ 求边变形 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$，$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}$，$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$

⑵ 求角变形 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

两类余弦定理解三角形的问题：

⑴ 已知两边及其夹角，求第三边和其他两角；

⑵ 已知三边求三角．

正弦定理和余弦定理的每一个等式中都包含三角形的四个元素，如果其中三个元素是已知的，那么这个三角形一定可解．

关于斜三角形的解法，根据所给的条件及适用的定理可以归纳为如下四种类型：

⑴ 已知两角及一条边．如已知 $\angle A$、$\angle B$、a 解 $\triangle ABC$．

解法：①根据 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，求出 $\angle C$；

②根据 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 及 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，求 b、c；

⑵ 已知两边和它们的夹角．如已知 a、b、$\angle C$，解 $\triangle ABC$．

解法：①根据 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，求出边 c；

②根据 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，求出 $\angle A$；

③由 $\angle B=180°-\left(\angle A+\angle C\right)$，求出 $\angle B$．

⑶ 已知三边 a、b、c，解 $\triangle ABC$．

解法：①根据 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，求出 $\angle A$；

②根据 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，求出 $\angle B$；

③由 $\angle C=180°-\left(\angle A+\angle B\right)$，求出 $\angle C$．

⑷ 已知两边及其中一条边所对的角，如已知 a、b、$\angle A$，解 $\triangle ABC$．

解法：①根据 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，经过讨论求出 $\angle B$；

②由 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，求出 $\angle C$；

③由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，求出边 c．

或　①根据 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，求出边 c；

②由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，求出 $\angle B$；

③由 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，求出 $\angle C$．

例题精讲

【例题2】

⑴ 在$\triangle ABC$中，已知$c=10$，$\angle A=45°$，$\angle C=30°$，求a、b、$\angle B$.

【分析】 $\angle B=105°$；$a=10\sqrt{2}$；$b=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

⑵ 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$\angle A=45°$，求c、$\angle B$、$\angle C$.

【分析】 $\angle B=60°$，$\angle C=75°$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$；或$\angle B=120°$，$\angle C=15°$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

⑶ 在$\triangle ABC$中，且$\dfrac{b+c}{10}=\dfrac{c+a}{15}=\dfrac{a+b}{11}$，求$\sin A:\sin B:\sin C$.

【分析】 边化角，$\sin A:\sin B:\sin C$=8:3:7

【例题3】

⑴在$\triangle ABC$中，若$a=9$，$b=10$，$c=12$，则$\triangle ABC$的形状是________.

【分析】 锐角三角形. 使用余弦定理计算最大边所对的角的余弦值

⑵在$\triangle ABC$中，已知$a\cos B=b\cos A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【分析】 由余弦定理，$a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow a^2=b^2$，有$a=b$所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

⑶在$\triangle ABC$中，若$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判断此三角形的形状.

【分析】 由余弦定理得$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

整理得$\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2-c^2\right)=0$，所以三角形为直角三角形.

【例题4】

⑴在$\triangle ABC$中，若$\angle C=60^\circ$，则$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}=$________.

【分析】 由余弦定理：$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C\Rightarrow a^2+b^2=c^2+ab$

故$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{a^2+ac+b^2+bc}{(b+c)(a+c)}=\dfrac{c^2+ac+ab+bc}{c^2+ac+ab+bc}=1$

⑵在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$，且$c^2=b^2+\sqrt{2}bc$，求$\angle ABC$的度数.

【分析】 $a:b=\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$，$a=\sqrt{2}b$.

根据余弦定理，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-2b^2}{2bc}=\dfrac{c^2-b^2}{2bc}$，

由已知得$c^2-b^2=\sqrt{2}bc$，则$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle A=45°$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin B=\dfrac{\sin A}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 又$\angle A+\angle B<180°$，则$\angle ABC=30°$

【例题5】

⑴在$\triangle ABC$中，a比b长2，b比c长2，且最大角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$S_{\triangle ABC}=$________.

【分析】 根据题意：$a=b+2$，$c=b-2$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle A$必大于$60°$（反证可得）故：

$$\cos A=-\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+(b-2)^2-(b+2)^2}{2b(b-2)}=\frac{b^2-8b}{2b(b-2)}=\frac{b-8}{2(b-2)}$$，解得：

$$b=5\Rightarrow S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b(b-2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

⑵在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，且面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$，则$\angle A=$________.

【分析】 由余弦定理：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2}bc\cos A=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow\sin A=\cos A$，

$\therefore\sin^2A+\cos^2A=1=2\sin^2A\Rightarrow\sin A=\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\angle A=45°$

【例题6】

若钝角三角形的三边长分别为$\sqrt{3}$、2、x，试求x的取值范围.

【分析】 若x为最大边，设钝角为α，$\cos\alpha=\frac{2^2+3-x^2}{2\times2\sqrt{3}}<0$，又$x>0$，解得$x>\sqrt{7}$.

又$\because 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，$\therefore\sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$.

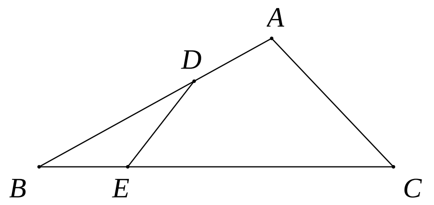
若2为最大边，$\cos\alpha=\frac{3+x^2-2^2}{2\sqrt{3}x}<0$，又$x>0$，解得$0<x<1$.

又$\because 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，$\therefore 2-\sqrt{3}<x<1$.

综上，$\sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}<x<1$.

【例题7】

如图，$AB=6$，$BC=8$，$BD=4$，$\sin B:\sin C=2:3$，$S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ABC}=1:6$，求$DE$.



【分析】 由正弦定理$\sin B:\sin C=AC:AB=2:3$，即$AC=4$

由余弦定理$AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cos B$，解得$\cos B=\frac{6^2+8^2-4^2}{2\times6\times8}=\frac{7}{8}$

又 $\dfrac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin B}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B}=\dfrac{BD\cdot BE}{AB\cdot BC}=\dfrac{1}{6}$，解得 $BE=2$

在 $\triangle BDE$ 中，由余弦定理 $DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos B=4^2+2^2-2\times4\times2\times\dfrac{7}{8}=6$

所以 $DE=\sqrt{6}$.

本讲巩固

【巩固1】

已知 $\tan\alpha=2$，**求下面各式的值：**(1) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$；　(2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

【分析】　(1)1；(2)$\dfrac{2}{3}$

【巩固2】

(1) $\tan105^\circ=$________；(2) $\dfrac{\tan23^\circ+\tan22^\circ}{1-\tan22^\circ\cdot\tan23^\circ}=$________；

(3) **已知** $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$， $\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{4}{5}$，**则** $\tan2\alpha=$________. ；

(4) **已知** $\tan\alpha=-2$， $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7}$，**则** $\tan\beta$ **的值为**________.

【分析】　(1)$-2-\sqrt{3}$；(2)原式$=\tan45^\circ=1$(3)0；(4)3 .

【巩固3】

在 $\triangle ABC$ **中，已知** $a=2\sqrt{6}$， $b=6+2\sqrt{3}$， $c=4\sqrt{3}$，**求** $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

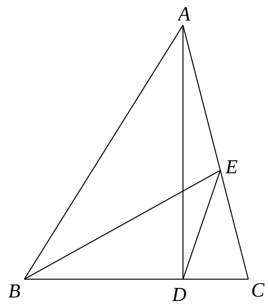
【分析】　由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(48+24\sqrt{3})+48-24}{2\times4\sqrt{3}\times(6+2\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\angle A=30^\circ$，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{24+(48+24\sqrt{3})-48}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore\angle C=45^\circ$

于是 $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=105^\circ$. $\therefore\angle A=30^\circ$， $\angle B=105^\circ$， $\angle C=45^\circ$

【巩固4】

在 $\triangle ABC$ **中，设** AD **是高，** BE **是角平分线，若** $BC=6$， $CA=7$， $AB=8$，**则** $DE=$________.



【分析】 由角平分线定理，$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{CE}$，解得 $AE=4$，$CE=3$，设 $CD=x$，则 $7^2-x^2=8^2-(6-x)^2$，

解得 $x=\frac{7}{4}$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，$\cos C=\frac{7^2+6^2-8^2}{2\times7\times6}=\frac{1}{4}$

$$DE^2=CE^2+DC^2-2CE\cdot DC\cdot\cos C=3^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2-2\times3\times\frac{7}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{151}{16}$$