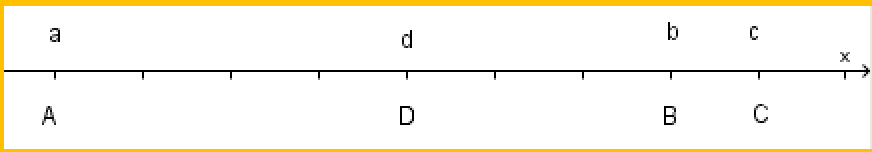
第二十二届（2011 年）“希望杯”全国数学邀请赛培训题

初中二年级

一、 选择题（以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母填在每题后面的圆括号内）

1. 【注】$\sqrt{c}-\sqrt{-a}=0$，c>0, a<0, 所以 a,c 关于圆点对称。它们的中心点就是 D，所以 d=0，选 B



（图 1）

2. 【注】

$$\frac{1}{a}=\frac{2009\times 2011}{2010}=\frac{(2010-1)\times(2010+1)}{2010}=1-\frac{1}{2010^2}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{2010\times 2012}{2011}=1-\frac{1}{2011^2}$$

$$\frac{1}{c}=2011$$

显然 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$， ∴ a>b>c, 选 B

3. 下列各数中，最大的是（　　）

（A） $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ （B） $2+\sqrt{6}$ （C） $\sqrt{20}$ （D） $\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt{5\frac{1}{2}}$

每个数平方后得到：A：$10+2\sqrt{21}$ B：$10+2\sqrt{24}$ C: $10+2\sqrt{25}$ D: $10+2\sqrt{\frac{99}{4}}$

很显然，（C）最大。

【注】**更一般的结论是：如果两个正实数 a，b 之和为常数，则当且仅当 a=b 时，ab 取最大值 a^2， $\sqrt{ab}$ 取最大值|a|， $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 也取最大值 $2\sqrt{a}$**

证明：从（$\sqrt{a}-\sqrt{b}$）$^2\geqslant$ 0 开始证明。都是属于最值问题。

如$(a-b)^2\geqslant 0$，当且仅当 a=b 时取等号，这时可以说 a^2+b^2 有最小值 $2a^2$，或者说 ab 有最大值$(a^2+b^2)/2$。

4. 已知 a 是实数，并且 $a^2-2010a+4=0$ 则代数式 $a^2-2009a+\frac{8040}{a^2+4}+5$ 的值是（　　）

（A）2009 (B) 2010 （C）2011 （D）2012

【注】：由已知条件知道：$a^2-2010a=-4$, $a^2+4=2010a$,

原代数式=a^2-2010a+a+5+$\frac{8040}{2010a}$=a +1+$\frac{4}{a}=\frac{a^2+a+4}{a}=\frac{2010a+a}{a}=2011$

看似复杂，其实就是不断代换。

5. Given two non-zero real numbers a and b, satisfy

$|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$, then the value of $a+b$ is ( )

（A）-1 (B) 0 （C）1 （D）2

【注】考察几个非负数之和为零，则必须每个都为零。分析式子中包含了 2a-4 这个整式，一个带绝对值，一个不带绝对值，故要分情况讨论：

（1） if a≥2, then 原等式可以化为 $|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}=0$，左边是两个非负数之和，要等于零，必须每个都等于零。所以 b=-2, a=3≥2, 满足前提条件。故 a+b=1 选 C

（2） if a<2, then $|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}=2(2a-4)$，显然左边不为负数，右边为负数，等式不成立。无解。

6. If the linear function $y=ax+b$ passes through the point (-2, 0), but not the first Quadrant,（一象限） then the solution set for $ax>b$ is ( )

（A）$x>-2$ (B) $x<-2$ （C） $x>2$ （D）$x<2$

【解】将点（-2,0）代入直线方程，得 -2a+b = 0， 所以 b=2a，
原直线方程为 y=ax+2a=a(x+2)， 因为不在第一象限，所以 a < 0.
要求 ax > b ，即 ax > 2a, 必须满足 x < 2, 故选择 D
考察直线方程，象限，斜率特点和不等式判定等。

7. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $\left(\frac{1}{a},-b\right)$，那么它可能不经过点（ ）

（A）$\left(-\frac{1}{a},b\right)$ (B) $\left(\frac{1}{b},-a\right)$ （C）$\left(-b,\frac{1}{a}\right)$ （D）$\left(b,-\frac{1}{a}\right)$

【解】将点代入得到：-b=ka, k=-b/a, 反比例函数就是 y=-b/(ax)
只有 B 不满足这个函数。选 B

8. 已知 a 是实数，关于 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-3y=5a\\x+2y=1-2a\end{cases}$ 的解不可能出现的情况是（ ）

（A） x、y都是正数 (B) x、y都是负数

（C） x是正数、y是负数 （D） x是负数、y是正数

【注】题目是判定正负， 无需求解，采用消元法，消除 a， ①x2+②x5 化简得到：9x + 4y = 5， 所以 B 不可能。

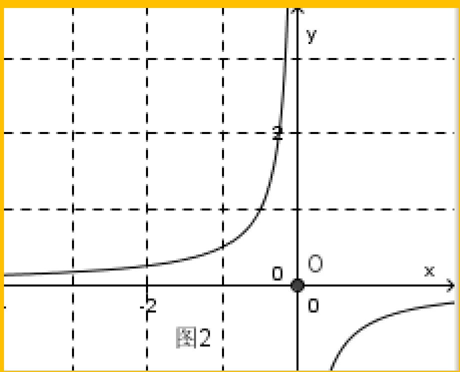
9. If a and b are non-zero real numbers and $(1-99a)(1+99b)=1$, then the value for $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+1$ is ( )

（A）1 (B)100 （C）-1 （D）-1

【解】原等式左右同除以 ab，得到 $(\frac{1}{a}-99)(\frac{1}{b}+99)=\frac{1}{ab}$，左边展开为 $\frac{1}{ab}+99(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})-99^2$，等式化简得到：$(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=99$， 故选 B

10. 如图 2 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第二象限的图像，则 k 的可能取值是（ ）

（A）2 (B)-2 （C）$\frac{1}{2}$ （D）$-\frac{1}{2}$



【解】图上看出经过（-1,0.5），代入后得到：k = -0.5 ，选 D

11. 在直角坐标系上，点 (x_1,y_1) 关于点 (x_2,y_2) 的对称点坐标是（ ）

（A）(x_2-2x_1,y_2-2y_1) (B) (x_1-2x_2,y_1-2y_2)

（C）$(2x_1-x_2,2y_1-y_2)$ （D）$(2x_2-x_1,2y_2-y_1)$

【解】设对称点坐标为（x，y）， 则有 $x_2=\frac{x_1+x}{2},y_2=\frac{y_1+y}{2}$

从而得到 $x=2x_2-x_1,y=2y_2-y_1$，选择 D

12. 一个长方体盒子的最短边长 50cm，最长边长 90cm.则盒子的体积可能是（ ）

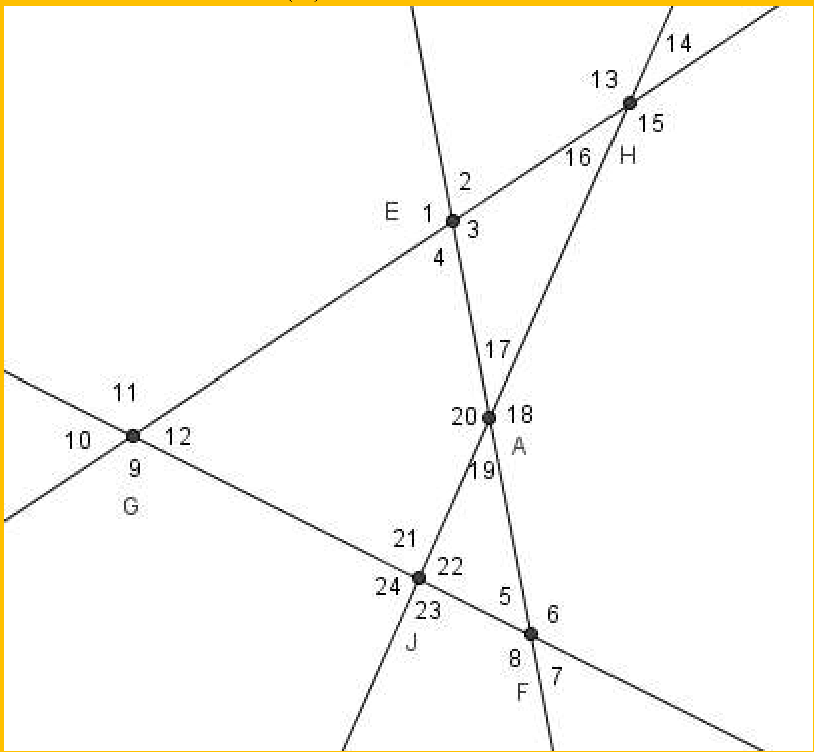
（A）4500 cm^3 (B) 180000 cm^3 （C）90000 cm^3 （D）360000 cm^3

【解】设另外一边长 x， 则 x 在 50 到 90 之间，即 50<x<90。体积 V=4500x，4500x50<V<4500x90，即 V 在（225000,405000）之间，仅有 D 满足。

13. 若两个角可以构成内错角，则称为“一对内错角”.四条直线两两相交，且任意三

条直线不交于同一点.那么，在这个几何图形中，可以构成的内错角的两个角的对数是（　　）

（A）12　　(B) 24　　（C）36　　（D）48



【解】如上图所示，每两个共线的点之间可以构成 2 对内错角。共有多少对这样的点呢？（EG，EH，EA，EF）（HE，HE，HA，HJ）（AE，AH，AJ，AF）（FA，FE，FJ，FG）（JF，JA，JH，JG）（GJ，GF，GE，GH），扣除重复项，剩下 12 对。（EG，EH，EA，EF）（HG，HA，HJ）（AJ，AF）（FJ，FG）（JG） 共 12 对点，每对有 2 对内错角，故共有 24 对内错角。选 B

14． 如图 3，已知△ 中，$AB=AC$，$\angle BAC$和$\angle AC$的角平分线相交于 D 点，$\angle ADC=130°$，那么$\angle CAB$的大小是（　　）

（A）80°　　(B) 50°　　（C）40°　　（D）20°

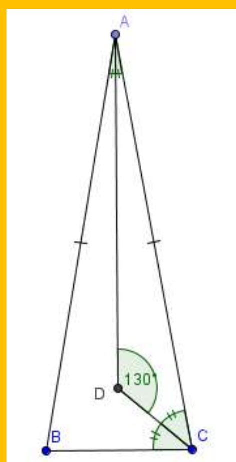


图3

【解】设顶角为 a，底角为 b， 则在三角形 CAD 中，

（a+b）/2=180-130=50， 故 a+b=100

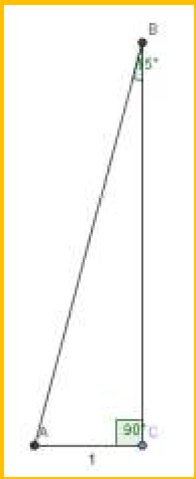
另外在等腰三角形 ABC 中，a+2b=180

故 b=80,a=20

选 D

15． Given △ABC with $\angle ACB=90°$，$\angle ABC=15°$，$AC=1$,then the length of BC is (　)

（A）$2+\sqrt{3}$　　(B) $3+\sqrt{2}$　　（C）$3-\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{2}+\sqrt{3}$



【解】 h = AC x tan(75) =tan（30+45）=（tan30+tan45）/(1-tan30tan45)

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$$ 选择 A

16. 已知三角形三边的长分别为 a,b,c，且 a,b,c 均为整数，若 $b=7,a<b$，则满足条件的三角形的个数是（　　）

（A）30　　(B)36　　（C）40　　（D）45

【解】由三角形三边之间存在的不等式关系可知：

$7-a<c<7+a$，　$|a-c|<7<a+c$，　$|7-c|<a<7+c$

∵ $a<b=7$，∴ a 可取 1,2,3,4,5,6

序号	a	b	c	$7-a<c<7+a$	$\lvert a-c\rvert < 7 < a+c$	$\lvert 7-c\rvert < a < 7+c$
1	1	7	7	$1<7<8$	$6<7<8$	$0<1<14$
2	2	7	6,7,8			
3	3	7	5,6,7,8,9			
4	4	7	4,5,6,7,8,9,10			
5	5	7	3,4,5,6,7,8,9,10,11			
6	6	7	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12			

满足条件共有 1+3+5+7+9+11=36，选择 B

17. 三角形三边的长分别为 a,b,c，且 $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b+c}{b+c-a}$，则三角形是（　　）

（A）等边三角形　　(B) 直角三角形

（C）以 a 为腰的等腰三角形　　（D）以 a 为底的等腰三角形

【解】化简等式为： a(b+c-a)=bc，(a-b)(c-a)=0，所以 a=b，或 c=a，或 a=b=c，

选择 C 和 A（特例）

18. 有 4 个命题：

一组对边相等，一组对角相等的四边形是平行四边形；【不成立】

一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形；【平行线性质可以推出两组对角相等，成立】

O 是四边形 ABCD 内一点，若 AO=BO=CO=DO，则四边形 ABCD 是矩形；【反例：

圆上任意四点，到圆心距离相等，但是不一定是矩形】

若四边形的两条对角线互相垂直，则这个四边形是菱形。【必须是平行四边形】

其中正确的命题个数是（B　　）

（A）0　　　(B)1　　　（C）2　　　（D）3

【注】考察平行四边形的性质定理：

1）一组对边平行且相等
2）两组对边分别平行
3）两组对边分别相等
4）两条对角线互相平分
5）两组对角分别相等
6）中心对称的四边形

菱形定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

菱形性质：

①菱形的四条边都相等；

②菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角 .

注意：菱形也具有平行四边形的一切性质 .

菱形判定：

①有一组邻边相等的平行四边形是菱形；

②四条边都相等的四边形是菱形；

③对角线互相垂直的平行四边形是菱形;

④有一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形

19．如图 4，正方形 ABCD 的面积是 486，点 P_0 在 AD 上，点 P_1 在 P_0B 上，且 $P_0P_1=\frac{1}{2}P_1B$；点 P_2 在 P_1C 上，且 $P_1P_2=\frac{1}{2}P_2C$;点 P_3 在 P_2B 上，且 $P_2P_3=\frac{1}{2}P_3B$;⋯；点 P_6 在 P_5C 上，且 $P_5P_6=\frac{1}{2}P_6C$，则△　　的面积是（　　）

（A）81　　(B) $\frac{81}{2}$　　（C）$\frac{64}{3}$　　（D）$\frac{128}{3}$

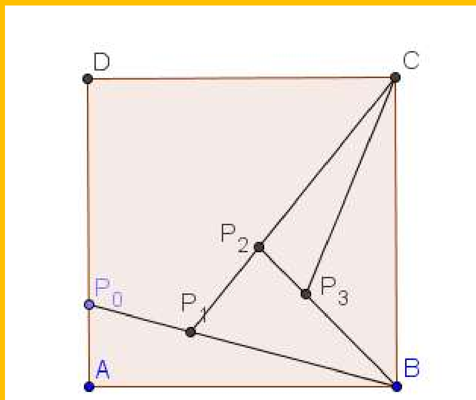


图4

【解】不难看出 $S_{\triangle P_0BC}$=正方形 ABCD 面积的一半=486/2;

在△P_0BC 中，不难看出底边 P_0B 被三等分，则可以得到：

$S_{\triangle P_1BC}=\frac{2}{3}S_{\triangle P_0BC}$（等高不等底的三角形面积之比等于底边之比）

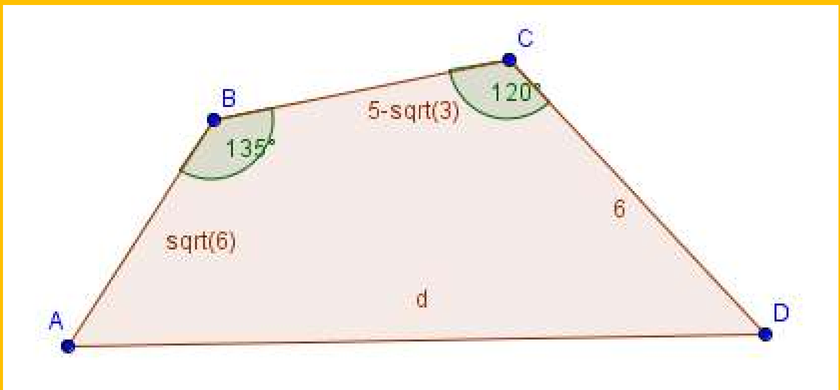
同理：$S_{\triangle P_2BC}=\frac{2}{3}S_{\triangle P_1BC}$　$S_{\triangle P_3BC}=\frac{2}{3}S_{\triangle P_2BC}$　……　$S_{\triangle P_6BC}=\frac{2}{3}S_{\triangle P_5BC}$
。。。

所以 $S_{\triangle P_6BC}=(\frac{2}{3})^6S_{\triangle P_0BC}=(\frac{2}{3})^6\times\frac{486}{2}=\frac{2^6}{3^6}\times\frac{2\times3^5}{2}=\frac{2^6}{3}=\frac{64}{3}$

选择 C

20． 如图 5，四边形 ABCD 中，$\angle ABC=135°, \angle BCD=120°, AB=\sqrt{6}, BC=5-\sqrt{3},$ $CD=6$,则 AD 的长是（ D ）

（A） $5+\sqrt{3}$ (B) 8 （C） $2\sqrt{13}$ （D） $2\sqrt{19}$



【解】连接 BD，应用**余弦定理**得到：$BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos 120°$

$BD^2=(5-\sqrt{3})^2+36-2\times6\times(5-\sqrt{3})\cos(180-60)=28-10\sqrt{3}+36+(30-6\sqrt{3})=94-16\sqrt{3}>64$

故 BD>8，在三角形 ABD 中，大边对大角，故 AD>BD>8, 四个选项中只有 D 是大于 8 的。故选 D。

21.已知函数 $y=(1-a)x+a+4$ 的图像不经过第四象限，则满足题意的整数 a 的个数是（ ）

（A） 4 (B)5 （C）6 （D）7

【解】四象限的特点是 x>0,y<0,已知的函数是一元一次函数，斜率为 1-a，不过第四象限，说明 1-a≥0,且 a+4≥0, 解不等式组得到 -4 ≤a ≤1 ，在此区间共有 6 个整数，分别是 -4, -3, -2, -1, 0, 1

考察 y=kx+b 一次函数图像所在象限：

（1）y=kx 时（即 b 等于 0，y 与 x 成正比例)：

当 k>0 时，直线必通过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大；

当 k<0 时，直线必通过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小。

（2）y=kx+b（b≠0）时：

当 k>0,b>0, 这时此函数的图象经过第一、二、三象限，不经过第四象限；

当 k>0,b<0, 这时此函数的图象经过第一、三、四象限，不经过第二象限；

当 k<0,b>0, 这时此函数的图象经过第一、二、四象限，不经过第三象限；

当 k<0,b<0, 这时此函数的图象经过第二、三、四象限，不经过第一象限；

当 b>0 时，直线必通过第一、二象限；

当 b<0 时，直线必通过第三、四象限。

特别地，当 b=0 时，直线通过原点 O（0，0）表示的是正比例函数的图像。

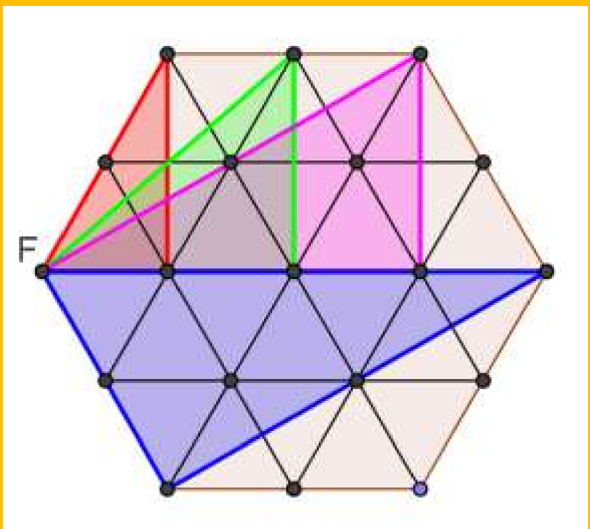
这时，当 k>0 时，直线只通过第一、三象限，不会通过第二、四象限。
当 k<0 时，直线只通过第二、四象限，不会通过第一、三象限。
注：x 轴和 y 轴是象限的分界线，不属于任何一个象限。

22. If the figure 6 is composed of 24 equilateral triangles, then how many non-congruent distinct right triangles with vertices on the intersecting points are possible in this figure?(　　)

（A）3　　(B)4　　（C）5　　（D）6

【分析】24 个等边三角形组成的图案，问可以构成多少个不全等的直角三角形？其直角顶点均在网格的格点上（即顶点均在格点上的直角三角形）。

由对称性，我们任取边界上一点 F，可以构成 4 个直角三角形，假定等边三角形的边长为 1 ，则 4 个直角三角形所对应边分别为（1，$\sqrt{3}$，2），（2，$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$），（3，$\sqrt{3}$，2$\sqrt{3}$），（2，2$\sqrt{3}$，4）



23. 若在 1,2,3,⋯,2010 前任意添加一个正号或者负号，则（　　）

（A）它们的和是奇数　　(B)它们的和是偶数
（C）若有奇数个负号，则它们的和是奇数；若有偶数个负号，则它们的和是偶数
（D）若有奇数个负号，则它们的和是偶数；若有偶数个负号，则它们的和是奇数

【分析】1+2+3+⋯⋯+2010 = 2011x1005 是奇数，如果任意数前加正号，和不变，如果某个数前加符号，假设 a 变成了-a，则和等于 2011x1005-2a 为奇数（奇数减去偶数，差还是奇数）。故选择 A。

24. 方程 $27x+81y=9999$ 的整数解有几组？（　　）

（A）0　　(B)1　　（C）2　　（D）多于 2

【分析】等式两边同时除以 9，原等式化为 3x+9y=1111，左边是 3 的倍数，1111 不是 3 的倍数，故无整数解。 选 A

25. 将 3,4,5,6,7,8 这六个数从左到右写成一排，使得每相邻的两个数的和都是质数，

则这样的写法的种数是（　　）

（A）6　　(B)12　　（C）18　　（D）24

【分析】3 只能和 4,8 构成质数，4 只能和 3,7 构成质数，5 与 6,8；6 与 5,7；7 与 4,6；8 与 3,5 构成质数。每个数只能和其他 2 个数构成质数。

385674，347658；438567,476583；567438，583476；658347, 674385；743856, 765834；834765, 856743；选择 B。

用组合思路，就是 $C_6^1 \times C_2^1=12$（先从 6 个数字中取 1 个，再从 2 个中取 1 个，采用乘法原理）。

26. 某农户养了鸡和兔各若干，如果平均每个动物有 2.5 只腿，那么鸡的数量与兔的数量的比值等于（　　）

（A）2　　(B)2.4　　（C）3　　（D）3.5

【分析】设鸡有 a 只，兔有 b 只，因为每只鸡有 2 条腿，每只兔有 4 条腿，则 2a+4b=2.5（a+b），0.5a=1.5b，所以 a:b=1.5:0.5=3:1　选 C。考察比例的试题。

27. 一个人步行从 A 地出发，匀速向 B 地走去.同时另一个人骑摩托车从 B 地出发，匀速向 A 地驶去.二人在途中相遇，骑车者立即把步行者以同样速度送到 B 地，再向 A 地驶去，这样他在途中所用的时间是他从 B 地直接驶往 A 地原计划所用时间的 2.5 倍，那么骑摩托车者的速度与步行者速度的比是（　　）

（A）2:1　　(B)3:1　　（C）4:1　　（D）5:1

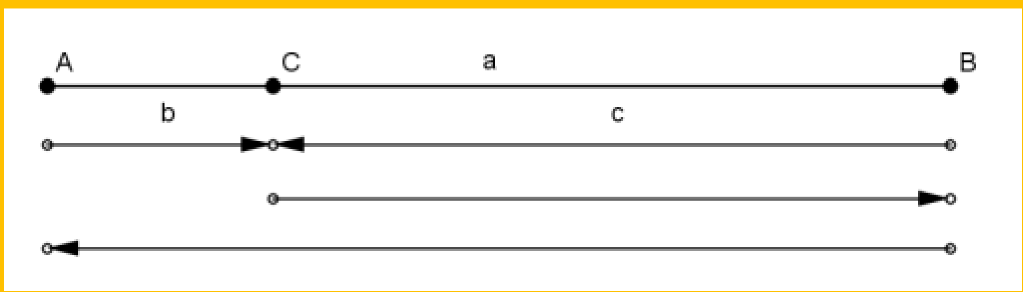
【分析】很经典的比例题目，也可以归入行程问题。

假设第一次相遇点为 C，记 AC=b，BC=c，AB=a，显然 a=b+c，（参见下图）

(1)第一次相遇时，人车耗时一样，故车速与人速之比就是路程之比，即 c:b，

(2)因为 s=vt，所以当速度固定时，路程之比等于时间之比，由题意知：摩托车所走路程为 3c+b，所耗时间是所走路程 c+b 的 2.5 倍，即(3c+b):(c+b)=2.5:1,

由分比定理得到：2c:(c+b)=1.5:1, c:(c+b)=0.75:1, c:b=0.75:0.25=3:1，选 B。



28.　12 页书的页码用 15 个数码：1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,0,1,1,1,2.

下面的数码的个数中，不能用来计算一本书的页数的是（　　）

（A）534　　(B)1998　　（C）1999　　（D）2010

【分析】1 位数码共 9 个，它们是 1~9，每个占 1 位数码；

2 位数码共 90 个，它们是 10~99，每个占 2 位数码，共占 180 个数码；

3 位数码共 900 个，它们是 100~999，每个占 3 位数码，共 2700 个数码；

已知总数码不超过 2010，

534-189=345，即页数超过了 99 页，还剩余 345 个页码，必定是 3 的倍数，3|345，故成立；

同理 1998-189=1809，能被 3 整除，成立；

1999-189=1810，不能被 3 整除（1810 的数码之和为 1+8+1+0=10,不能整除 3），不成立；选 C

2010-189=1821，能被 3 整除，成立。

再进一步，可以求出页数：

534 个页码对应的准确页数为：345/3=115, 100+114=214 页；

1998 个页码对应的准确页数为：1809/3=603, 100+603-1=702 页；

2010 个页码对应的准确页数为：1821/3=607, 100+607-1=706 页；

29. 方程 $2u+v+x+y+z=3$ 的非负整数解 (u,v,x,y,z) 有几组？

（A）10　　(B)20　　（C）24　　（D）30

【分析】右边是奇数 3，左边 2u 为不小于 0 的偶数，故 u 只有两个解：0 和 1；

(1)u=1 时，v+x+y+z=1，显然只有 4 种可能 (v,x,y,z)=(1,0,0,0)(0,1,0,0)(0,0,1,0)(0,0,0,1)

(2)u=0 时，v+x+y+z=3，对称性，v 可取 0,1,2,3。

2-1）v=0, x+y+z=3　2 个同时为 0，有 3 个解（300）（030）（003），仅 1 个为 0，有（012）（021）（102）（201）（120）（210），有 6 解；都不为 0，有 1 解（111）；共 10 个解。

2-2）v=1, x+y+z=2　2 个同时为 0，有 3 种解（200）(020)(002),1 个为 0，有 3 种解，（011）(101)(110), 共 6 个解。

2-3）v=2, x+y+z=1　有 3 个解（100）(010)(001)

2-4）v=3, x+y+z=0　只有唯一解 （000）

故共有非负整数解 4+10+6+3+1=24 组。选 C

30. 老师问 5 个学生，昨天晚上你们有几个复习数学了？

张：没有人

李：一个人

王：两个人

赵：三个人

刘：四个人

老师知道昨天晚上他们有人复习数学了，也有人没有复习数学，复习了的人说的是真话，那么这 5 个学生中复习了数学的人数是(　　)

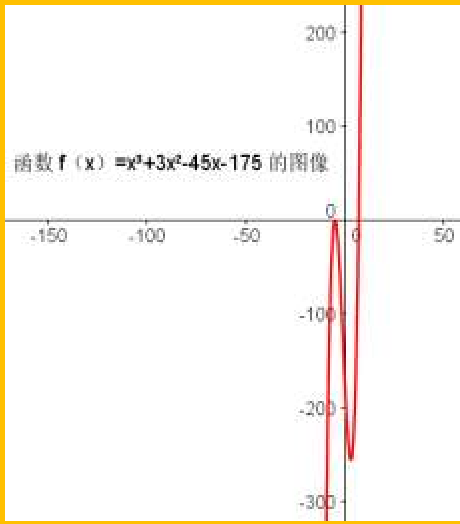
（A）0　　(B)1　　（C）2　　（D）3

【分析】这是一道**逻辑推理题**。可以列表法来求解。张肯定是假话。不难看出李说了真话，就这一个人说的是真话，故选 B。

二、填空题

31. 已知 x 为正整数，设 $A=x^3+3x^2-45x-175$，若 A 为完全平方数，则 A 的最小值是________

【解】A 可以分解因式为 $(x-7)(x^2+10x+25)=(x-7)(x+5)^2$
因为 x 为正整数，且 A 是**完全平方数**（非负，且是整数），则仅当 $x-7\geqslant 0$ 且也是完全平方数时，条件成立，如 x=7,8,11 等，故 x=7 时，A 有最小值 0.
注：考察完全平方数的概念。常规的完全平方整数表：0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400，…
（完全平方数可以扩展到有理数，如 $1/9=(1/3)^2$ ）



32. 若 5^8-1 能被 20 至 30 之间的两个整数整除，则这两个整数分别是_______和_______.

【分析】
$5^8-1=(5^4-1)(5^4+1)=(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)=(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)=4x6x26x(5^4+1)$
显然能被 4x6=24 和 26 整除。

33. 已知实数 x,y 满足 $\left(x+\sqrt{x^2-2010}\right)\left(y+\sqrt{y^2-2010}\right)-2010=0$，则 $x=$__________

$y=$__________

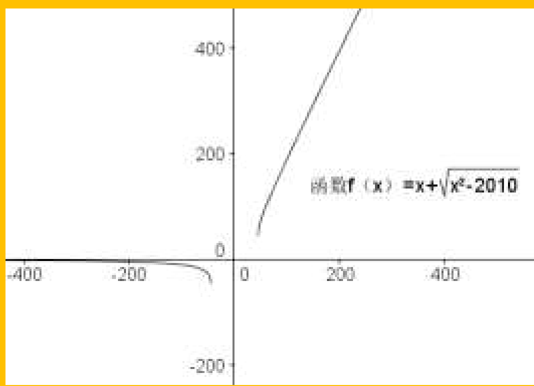
【分析】由于根号下的整式必须非负才有意义，所以 $x^2\geqslant 2010$ ，$y^2\geqslant 2010$，

设函数 $f(x)=x+\sqrt{x^2-2010}$，不难发现 f(x) 在 $x\geqslant\sqrt{2010}$ 时，有最小值 $\sqrt{2010}$，

当且仅当 $x=\sqrt{2010}$，f(x) 取最小值。

同理 f(y) 在 $y\geqslant\sqrt{2010}$ 时，当且仅当 $y=\sqrt{2010}$，f(y) 取最小值。

所以 f(x)f(y) 在 $x\geqslant\sqrt{2010}$，$y\geqslant\sqrt{2010}$ 时，当且仅当 $x=\sqrt{2010}$，$y=\sqrt{2010}$ 时，有最小值 2010.



而在 $x\leqslant-\sqrt{2010}$，$y\leqslant-\sqrt{2010}$ 时，当且仅当 $x=-\sqrt{2010}$，$y=-\sqrt{2010}$ 时，f(x)f(y) 有最大值 2010.
x 和 y 必须同号，

故有两组答案（1）$x=\sqrt{2010}$，$y=\sqrt{2010}$ （2）$x=-\sqrt{2010}$，$y=-\sqrt{2010}$（演算通过）

函数图像如下：

34. 计算 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}=$__________

【解】通项化简为：

An= $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}}{n(n+1)}=(n^2+n+1)(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

所以 $\sum_{n=1}^{2010}\text{An}=\sum_{n=1}^{2010}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2010+\sum_{n=1}^{2010}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=2010+1-\frac{1}{2011}=2011-\frac{1}{2011}=2010\frac{2010}{2011}$

35. 若点 P 的坐标(a,b)满足$a^2b^2+a^2+b^2+10ab+16=0$，则点 P 的坐标为_________

【解】因为（a，b）是方程$a^2b^2+a^2+b^2+10ab+16=0$的解，所以，如果我们将这个方程看成是关于 a 的一元二次方程，

$(b^2+1)a^2+10ba+(b^2+16)=0$

则该方程有解的充分条件是判别式不小于 0，

即：$(10b)^2-4(b^2+1)(b^2+16)\geqslant 0$，化简为 $(b^2-4)^2\leqslant 0$

显然只有 b=±2 才满足上述不等式。

由对称性知道 a=±2

代入方程演算，a、b 必须异号，即 P 的坐标为(2,-2)或（-2,2）。

36. 已知：

$2+\frac{2}{3}=2^2\times\frac{2}{3}$,

$3+\frac{3}{8}=3^2\times\frac{3}{8}$,

$4+\frac{4}{15}=4^2\times\frac{4}{15}$,

…

$10+\frac{b}{a}=10^2\times\frac{b}{a}$,(其中$a,b$是满足条件的最小正整数),

则$a=$_________，$b=$_________

【解】等式可以化成

$\frac{10a+b}{a}=\frac{100b}{a}$；所以 10a=99b，又 a，b 是正整数，

故最小正整数是 a=99，b=10.

37．*若关于 x 的分式方程 $\dfrac{m(x+1)-5}{2x+1}=m-3$ 无解，则 $m=$________

【解】（1）当 $x\neq -\dfrac{1}{2}$ 时，分式方程可以化为：

（m-6）x+2=0

当 m=6 时，方程无解。代入演算正确。

（2）当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，m(x+1)-5=0, m=10 时，也无解。演算正确。

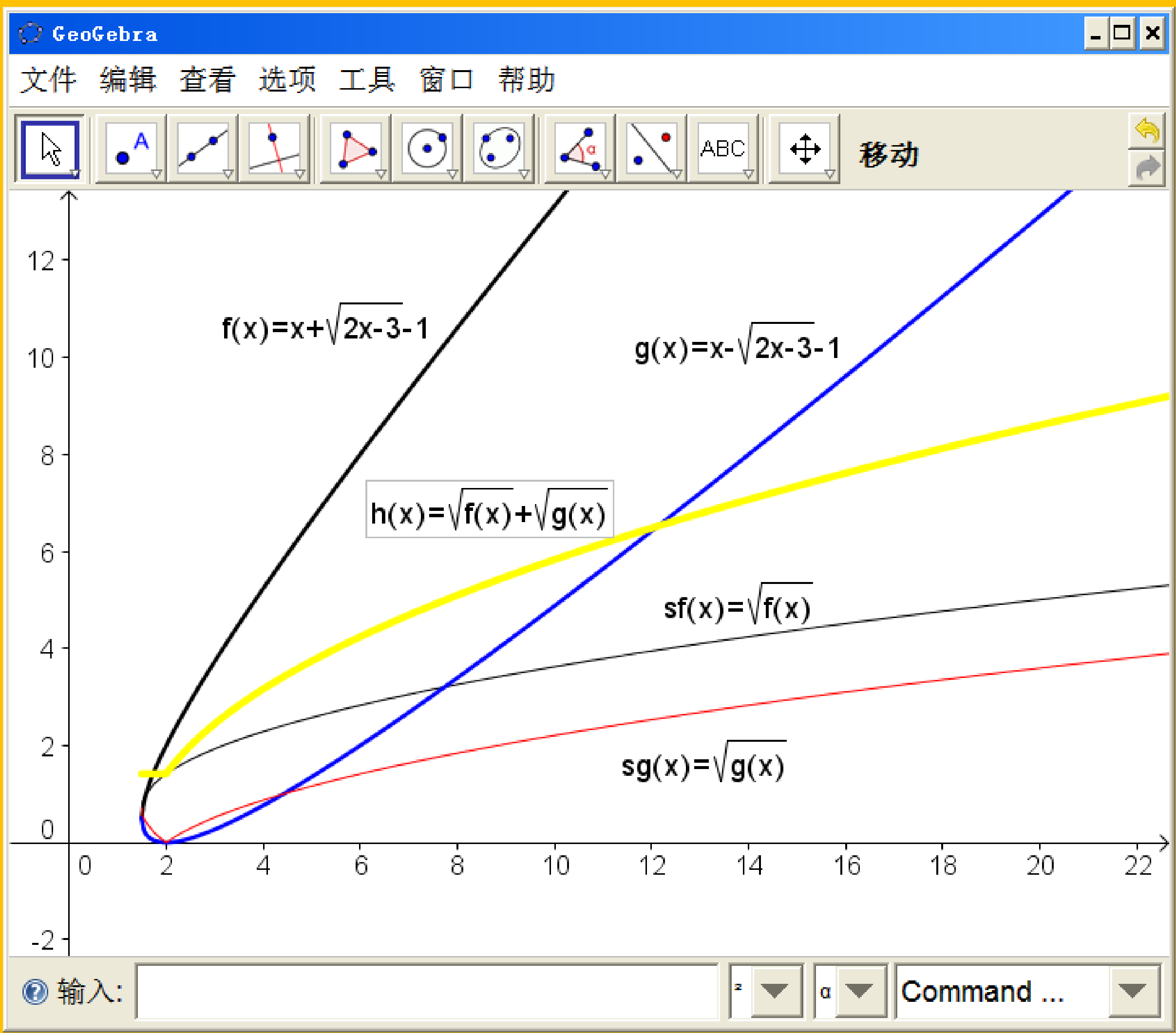
38．*当 $\dfrac{3}{2}\le x\le 2$ 时，化简 $\sqrt{x+\sqrt{2x-3}-1}+\sqrt{x-\sqrt{2x-3}-1}=$________

【解】显然由已知条件得到 3≤2x≤4, 0≤2x-3≤1

令 $a=\sqrt{2x-3}$，则 0≤a≤1, x=（a^2+3）/2, x-1=（a^2+1）/2, 原式可以化成

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}+a}+\sqrt{\frac{a^2+1}{2}-a}=\sqrt{\frac{(a+1)^2}{2}}-\sqrt{\frac{(a-1)^2}{2}}=\frac{a+1}{\sqrt{2}}-\frac{1-a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

注：变量代换是计算和化简常用的方法。



39. 若 $a<0<b,|a|<|b|$,且$a^2+b^2=-8ab$,则$\dfrac{a+b}{a-b}=$__________

【解】由已知条件知道：

（a+b）^{2}=－ 6ab （1）

（a－b）^{2}=－10ab （2）

由条件知道：a+b>0, b-a>0

所以 从（1）得到 a+b = $\sqrt{-6ab}$，从（2）得到 b-a= $\sqrt{-10ab}$

故 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sqrt{-6ab}}{-\sqrt{-10ab}}=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

40. 若 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=5,\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=7,xy+yz+zx=kxyz$，则实数 k=__________

【解】由已知可以得到：

5xyz=yz+2xz+3xy （1）

7xyz=3yz+2xz+xy （2）

（1）+（2） 得到：

12xyz=4（xy+yz+zx）即 3xyz=xy+yz+zx （3）

又已知：kxyz=xy+yz+zx （4）

对比（3）和（4） 得到 k=3

41. 已知 6 个数：$3,3\times2,3\times2^2,3\times2^3,3\times2^4,3\times2^5$，其中最多能选出__________个数，使得被选出的数中任意两个数的比都不是 2或者$\dfrac{1}{2}$.

【解】这是一个等比数列，共 6 个元素，且公比为 2，为了不至于两数之比为 2 或 1/2，则必须间隔取数，如取 3，就不能去与 3 相邻的数，同理依次下去，得到：最多能选出 3 个数。也可以想象 6 个抽屉。

42. 若 $x+y+z=6,xy+yz+zx=11,xyz=6$，则$\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=$__________

【解】显然可知（x+y+z）^{2}=36，左边展开就是 $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

故 $x^2+y^2+z^2=36-2*11=14$

原式化为

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

43. 如果$(x+3)(x+a)-2$可以因式分解为$(x+m)(x+n)$（其中 m,n 均为整数），则 a 的值是__________

【解】展开前者为 $x^2+(a+3)x+(3a-2)$，由题意知道：

方程 $x^2+(a+3)x+(3a-2)=0$ （1）

有两个整数解 –m 和-n，

由根与系数的关系（韦达定理）得知：

m+n=a+3 （2）

mn=3a-2 （3）

由（2）可以知道：a 也是整数。

关于 x 的一元二次方程的判别式为$\triangle_x$=（a+3）^{2} －4（3a－2）=（a-3）^{2}+8

是完全平方数，即存在整数 b，使得 （a-3）^{2}+8=b^2

不难算出只有当 $(a-3)^2=1$ 时，即 a=4 或 2 时，上式成立。

注：这里牵涉到整数解求法，即 $x^2+8=y^2$ 有多少组整数解。

解法提示： (x-y)(x+y)=-1*8=-2*4=-4*2=-8*1,列出四组方程组。只有两组成立。

即（x，y）=（1,3）或（-1,3）是满足条件的整数解。

44. 若 a,b 是实数，且 $a+b=2,a^2+b^2+2\sqrt{ab}=\frac{9}{2}$，则 $ab=$________

【解】a+b=2 两边平方得到：$a^2+2ab+b^2=4$

$2ab+4.5-2\sqrt{ab}=4$

$4ab-4\sqrt{ab}+1=0$

$(2\sqrt{ab}-1)^2=0$

故 $\sqrt{ab}=1/2$, ab=1/4=0.25

45. 方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)x}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x}+\cdots+\frac{1}{\left(\sqrt{2010}+\sqrt{2011}\right)x}=\frac{1}{\sqrt{2011}}$ 的解是 $x=$____

【解】提取公因子 $\frac{1}{x}$ ，另外 将通项分母有理化，即

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

原方程化为

$$\frac{1}{x}\left[1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots\ldots+(\sqrt{2011}-\sqrt{2010})\right]=\frac{1}{\sqrt{2011}}$$

所以交叉相减后，再十字相乘得到 x=2011 。

46. 设正整数 $x\neq y$,且满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{5}$，则 x^2+y^2 的值是________

【解】已知可知 2xy=5（x+y），因为 x，y 为不相等的正整数，

显然

47. 已知 $\frac{3x+5}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$，那么 $A^2+B^2=$________

48. 已知 5 个互不相同的正整数的平均数是 18，中位数 25，那么这 5 个正整数中最大数的最大值是________

49. 先阅读材料：

若整数 a 是整系数方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的解，则 $-r=a\left(a^2+pa+q\right)$，说明 a 是 r 因数。

根据以上材料，可求得 $x^3+4x^2-3x-2=0$ 的整数解为 $x=$________

50. 定义 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq1)$，那么 $\underbrace{f(f(f(\cdots f(2010))))}_{2010个}=$________

51. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}5-2x>0,\\3x+a\geq0\end{cases}$ 无实数解，则 a 的取值范围是________

52. 已知 a 是正整数，若关于 x 的方程 $2x-a\sqrt{1-x^2}-a+4=0$ 至少有一个整数根，则 a 的值是________

53. 如果三角形三边的长分别为 $1,k,4$，代数式 $|2k-5|-\sqrt{k^2-12k+36}$ 的值为 m，则 m 的取值范围是________

54. 若△ 三边的长 a,b,c 均为整数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{ab}=\dfrac{1}{4},a+b-c=8,$ 设△ 的面积为 S，则 S 的最大值是________，最小值是________.

55. 如图 7 所示，要从 80cm×160cm 的长方形布料上裁下 2 个半径相等的半圆，那么裁下的半圆最大直径是________ cm。

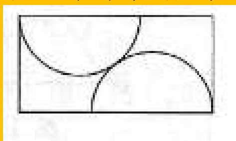


图 7

56. 如图 8 所示，点 P 在△ 的 BC 边上，且 $PC=2PB$，若 $\angle ABC=45°,\angle APC=60°$，则 $\angle ACB$ 的度数是________

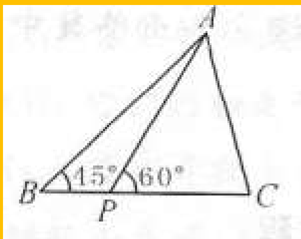


图 8

57. 如图 9 所示，在等腰△ 中，$AB=AC,\angle BAC=100°$，延长 AB 到 D，使 $AD=BC$，连接 DC，则 $\angle BCD$ 的度数是________

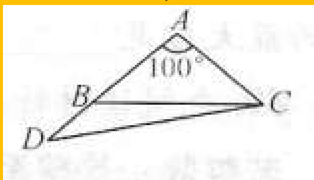


图 9

58． 如图 10 所示，△　是等边三角形，点 P 在△　内，$PE//AC$交AB于E, $PF//AB$交BC于F, $PD//BC$交AC于D，已知△　的周长是 12cm，则 $PD+PE+PF=$ cm

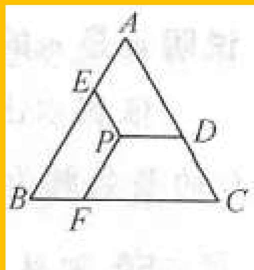


图 10

59． 如图 11 所示，在△　中，$AB=7$，$AC=11$ 点 M是BC 的中点，AD是$\angle BAC$的角平分线，$MF//AD$,则$FC=$_________

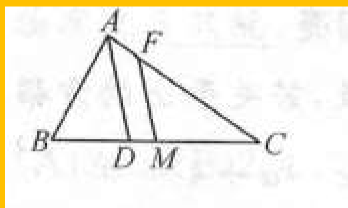


图 11

60． 如图 12 所示，在△　中，$AC=BC, \angle ACB=80°$,在△　内取一点M，使得$\angle MBA=30°, \angle MAB=10°$, 那么$\angle AMC$的度数是_________

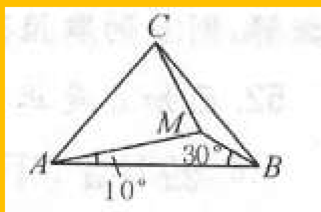


图 12

61． 如图 13 所示，P是长方形$ABCD$内一点，已知$PA=3, PB=4, PC=5$，则PD^2的值为_________

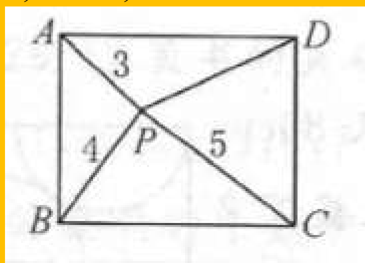


图 13

62．如图 14 所示，在梯形$ABCD$中，$AB//DC, AD=DB, AB=AC, \angle ACD=30°$，则$\angle BAD$的度数是_________

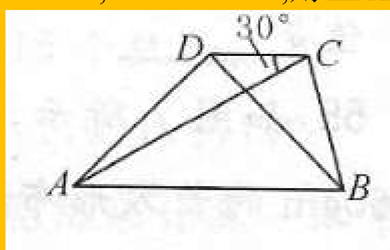


图 14

63． 如图 15 所示，点 E,F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB,BC 的中点，连接 AF,EC 交于点 G，则 $\dfrac{S_{\text{四边形}BFGE}}{S_{\text{四边形}AGCD}}=$________

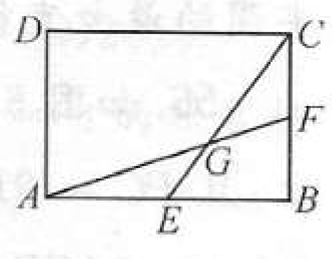


图 15

64． 如图 16 所示，在平面直角坐标系内放置一个直角梯形 $AOCD$，已知 $AD=3$，$AO=8$，$OC=$ 若点 P 在梯形内且 $S_{\triangle}$ $S_{\triangle}$ $S_{\triangle}$ $S_{\triangle}$ 那么点 P 的坐标是

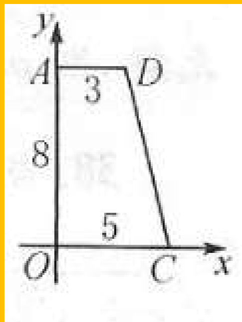


图 16

65． 直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$ 上的点 A 的横坐标为 2，线段 AB 在直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$ 上，且 $AB=5$，线段 AB 向右平移 2 个单位后，点 B 的坐标为________

66． 一次函数 $y=-2x+6$ 的图像与 x轴、y轴 分别相交于点 A、B,点P 在线段 AB 上，OP（O 是坐标原点）将△ 分成面积为 1:2 的两部分，则过点 P 的反比例函数解析式为

67． 已知 $y_1=3x, y_2=\dfrac{3}{y_1}, y_3=\dfrac{3}{y_2},\cdots, y_{2011}=\dfrac{3}{y_{2010}}$,则$y_2\cdot y_{2011}=$________

68． 已知整数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 使 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=9$，若 b 是关于 x 的方程

$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)=2009$ 的整数根，则 b 的值是_________

69． 已知 a,b,c 都是-3 到 3 之间的非零整数，且 $\left(b+\sqrt{2}\right)^2=\left(a+\sqrt{2}\right)\left(c+\sqrt{2}\right)$，则符合条件的 a,b,c 有_________组.

70． 若 $(x+2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2+a_4=$_________

71． 将一枚六个面的编号分别为 1,2,3,4,5,6 的质地均匀的正方体骰子先后投掷两次，记第一次掷出的点数为 a，第二次掷出的点数为 b，则使关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}ax+by=3\\x+2y=2\end{cases}$，有正整数的概率为_________

72． 先将 100 个杯子排成一列，杯口朝上。从左向右从 1 数到 100，数列 3 的倍数时把杯子翻过来；再从右向左从 1 数到 100，数到 7 的倍数时把杯子翻过来，那么最后有个杯子杯口朝上。

73． 已知 a,b,c,d 分别是一个四位数的千位，百位，十位，个位上的数字，且低位上的数字不小于高位上的数字，当 $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ 取得最大值时，这个四位数的最小值是_________

74． 若对于所有的实数 x，都有 $f\left(2^x\right)+xf\left(2^{-x}\right)=x^2$，则 $f(2)=$_________

75． 博览会的门票每张 50 元，每人限购 1 张，现有 10 个小朋友排队购票，其中 5 个小朋友只有 100 元的钞票 1 张，另外 5 个小朋友只有 50 元的钞票 1 张，售票员没有准备零钱,那么最多有
_________种排队方法，使售票员总能找得开钱。

三、解答题

76．某化工厂现有甲种原料 290kg，乙种原料 212kg，计划用这两种原料生产 A、B 两种产品共 80 件。生产一件 A 产品需要甲种原料 5kg,乙种原料 1.5kg，生产成本是 120 元；生产一件 B 产品需要甲原料 2.5kg，乙种原料 3.5kg，生产成本是 200 元.

1）该化工厂现有原料能否保证生产？若能保证生产，有几种生产方案？

2）设生产 A、B 两种产品的总成本为 y 元，其中一种产品的生产件数为 x，试写出 y 与 x 的函数关系式，并利用函数的性质说明（1）中哪种生产方案总成本最低，最低生产总成本是多少？

77. 若方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.求方程组 $\begin{cases} 4a_1x+3b_1y=7c_1 \\ 4a_2x+3b_2y=7c_2 \end{cases}$ 的解

78. 如图 17，在△中， $\angle ABC=3\angle C,\angle 1=\angle 2,BE\perp AE$,求证： $AC-AB=2BE$

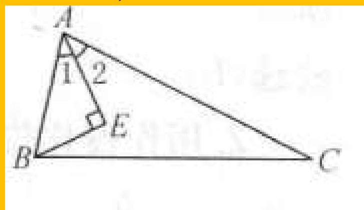


图 17

79. 将编号从 1 到 10 的 10 个白球排成一行，现按照如下要求涂色：

1）涂色的球有 2 个；
2）被涂色的 2 个球的编号之差大于 2.
那么不同的涂色方法有几种？

80. 直线 $y=kx+4$ 分别于 x轴、y轴 相交于点 A、B， O 是坐标原点， A 点的坐标为 $(4,0)$， P 是 OB 上（O、B 两点除外）的一点，过 P 作 $PC\perp y$轴交直线 AB 于 C，过点 C 作 $CD\perp x$轴，垂足为 D,设线段 PC 的长为 l， 点 P 的坐标为 $(0,m)$

1）求 k 的值；
2）如果点 P 在线段 OB （O、B 两点除外）上移动，求 l 于 m 的函数关系式，并写出自变量 m 的取值范围；
3）当点 P 运动到线段 OB 的中点时，四边形 $OPCD$ 为正方形，将正方形 $OPCD$ 沿着 x轴 的正方向移动，设平移的距离为 $a(0<a<4)$，正方形 $OPCD$ 于△重叠部分的面积为 S .试求 S 与 a 的函数关系式.

答案

选择题

1 B 2 B 3 C 4 C 5 C 6 D 7 B 8 B 9 B 10 D

11 D 12 D 13 B 14 D 15A 16 B 17 C 18B 19C 20D

21C 22C 23A 24A 25B 26 C 27B 28C 29C 30B

填空题

31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
169？ ？	26；24	$\pm\sqrt{2010}$	$2010\frac{2010}{2011}$	（2，-2）（-2，2）	99 ；10	6 ，10	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	3
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
3	7/3	2 或4	1/4	2011	234	61/8	36	1	2010
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
a ≤ -15/2	2 或 6	-2<m<4	180;96	100	75°	10°	4	9	70°
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
18	45°	1/4	(17/8,3)	(8,3/2) (0,15/2)	Y=4/x	3	40	4	90
71	**72**	**73**	**74**	**75**					
13/36	63	1119	0	604800					