完全平方数 2012-10-6

（1） 任意平方数 x^2 的末位数字只可能是 0,1,4,5,6,9 这样六种情况，反之不成立。当一个数的末位数是 2,3,7,8 时，这个数肯定不是完全平方数；

（2） 任意平方数 x^2 被 3 除的余数是 0 或 1。当被 3 除余 2 的数（形如 3n+2）肯定不是完全平方数；

（3） 任意平方数 x^2 除以 4，非负最小余数只可能为 0（x 为偶数）或 1（x 为奇数）。当被 4 除余 2 或 3 的数（形如 4n+2，4n+3）一定不是完全平方数；

（4） 任意平方数 x^2 除以 8，所得非负最小余数只可能为 0，4（当 x 为偶数），或 1（当 x 为奇数）。当被 8 除余 2,3,5,6,7 的数一定不是完全平方数；

（5） 完全平方数除以 9 的余数只可能是 0,1,4,7。当被 9 除余 2,3,5,6,8 的数不是完全平方数；

（6） 完全平方数的素因数的指数都是偶数，即一个完全平方数的因子必然是**奇数个（奇数个约数）**，如 6^2 的因子有 6、1 和 36，2 和 18，3 和 12，4 和 9，其中 6 称为**自补因子**，后面的 2 和 18 等都称为**互补因子，反之成立，即约数个数为奇数的自然数是完全平方数**；

（7） 奇数的平方数的十位数字必定是偶数；

（8） 若一个数的平方数的十位数字是奇数，那么这个数一定是偶数，且它的个位数字一定是 6；反之成立；（个位数是 6，十位数是偶数的整数一定不是完全平方数）

（9） 在两个连续（或相邻）整数的平方数之间不存在完全平方数（若 $n^2<k^2<(n+1)^2$，则 k 一定不是整数）；

（10） 若素数 p 整除完全平方数 a^2，则 p 能被 a 整除（若 $p\,|\,a, p^2 \nmid a$，则 a 不是完全平方数）；

（11） 几个平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【例 1】 设 n 是一个正整数，且 1×2×3×…×n+3 是一个完全平方数，求 n 的值。

【解析】 从完全平方数的个位数来分析，我们知道，**当一个数的末位是 2，3，7，8 时，这个数肯定不是完全平方数，可以达到否定平方数的目的**。反之，当一个数的末位是 0，1，4，5，6，9 时，这个数也不一定是平方数。

【例 2】 正整数 n，使得 n^2+5n+13 是一个完全平方数，求 n 的值。

【解析】 完全平方数，除了用上述末位数来否定外，还可以用“夹逼法”来求解．即两个连续自然数的平方之间没有其它平方数。

【例 3】 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+123456789^2$ 的个位数字是多少？

【解析】 完全平方数的个位数字有什么特点吗？我们知道 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 的平方数的个位分别为 1,4,9,6，5,6,9,4,1,0，

【例 4】 求证：三边长都是正整数的直角三角形必有一直角边能被 4 整除。

【解析】直接证明有点难度，一个数能被 4 整除，一定能被 2 整除，故我们从简单到复杂，先证明存在一条直角边，是偶数边。然后利用勾股定理，从分析平方数的特点入手，证明该偶数边也能被 4 整除。

【例 5】 求证：当 n 为非负整数时，$3^n+2\times17^n$ 不是完全平方数。

【解析】证否定完全平方数，有很多种方法（1）正约数个数是偶数（2）十位数是奇数（3）个位数不是 0,1,4,5,6,9，而是 2,3,7,8；（4）被 8 除的余数不是 1.

已知数比较复杂，故采用后两种方法相对简单些。

【例 6】 满足 $x^2-4y^2=2011$ 的整数对 (x,y) 的组数是（　　）

A　0.　　B　1.　　C　2.　　D　3

【解析】本题初看似乎可以化成(x-2y)(x+2y)=1x2011=(-1)x(-2011)，构成 4 对方程组，解这些方程组，就可以得到结果。这是 2011 年北京市初二数学竞赛题。

但是如果仔细分析等式两边的特点，可以发现，右边是一个素数 2011，左边是两个完全平方数的差，利用完全平方数的余数来判断，应该可以达到事半功倍的效果。

【例 7】 从 1 到 2008 的所有自然数中，乘以 72 后是完全平方数的数共有多少个？

【解析】完全平方数，其所有质因数必定成对出现．

【例 8】 一个整数减去 100 是一个平方数，减去 63 也是一个平方数，问这个数是多少？

【巩固】能否找到这么一个整数，它加上 24，和减去 30 所得的两个数都是完全平方数？

【解析】假设能找到，设这两个完全平方数分别为 A^2、B^2，那么这两个完全平方数的差为 $54=(A+B)(A-B)$，

【例 9】 有 5 个连续自然数，它们的和为一个平方数，中间三数的和为立方数，则这五个数中最小数的最小值为___________.

【解析】考查平方数和立方数的知识点，同时涉及到数量较少的连续自然数问题，设未知数的时候有技巧：一般是设中间的数，这样前后的数关于中间的数是对称的．

【例 10】如果一个完全平方数的 8 进制的表达式是 $(\overline{ab3c})_8$，其中 a≠0,那么 c=?