第十八届（2007年）“希望杯”全国数学邀请赛初二培训题

答案•解析

一、选择题

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
答案	B	D	D	C	B	B	A	C	C	C
题号	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
答案	C	B	A	C	C	B	B	C	B	B
题号	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
答案	B	B	C	C	A	D	D	D	A	C

1、①②③正确，④错误，如整式（x+2）除以整式（2x+1），得到$\frac{x+2}{2x+1}$，它不是整式，故选(B)

2、原分式即$\frac{1}{2-|x|}$，要使该式的值为正整数，只须2-|x|的值为1，$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\frac{1}{n}$（n是正整数）即可，所以x的值有无数个，故选（D）

3、将分式$\frac{2a}{a+b}$中的a扩大2倍，b扩大4倍，得到$\frac{4a}{2a+4b}$，由题意知$\frac{4a}{2a+4b}=\frac{2a}{a+b}$，所以a=0，或2a+2b=2a+4b，解得b=0，故选（D）。

4、由已知得x=$\frac{k}{y+2}$，因为x=1时，y=4，所以1=$\frac{k}{4+2}$，解得k=6，则当y=1时，x=$\frac{6}{1+2}$=2，故选（C）

5、$a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=(a^3+b^3)+a^2c-abc+b^2c=(a+6)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)=(a^2-ab+b^2)(a+b+c)=0$

因为 a2-ab+b2=a2-ab+b2+$\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$,

因为题设 $a^2+b^2\neq 0$，即a，b不同时为零，所以$a^2-ab+b^2>0$，从而只能是a+b+c=0.故选（B）

6、由已知，得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$，即$\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$，所以 a+b=0或ab=-c（a+b+c）。由ab=-c(a+b+c),得 $c^2+c(a+b)+ab=0$ ，即（c+a）（c+b）=0，所以c+a=0或 c+b=0.

因此，a+b=0或c+a=0或c+b=0，即三个式子中至少有一个成立。故选（B）

另解 验证法。

当 a+c=0且 b+c=0时，得 a=-c ,b=-c ,代入到原式左侧，的$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$

代入原式右侧得$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}$，所以a+b,b+c,c+a中有可能有2个式子同时为零，排除（A）、（C）、（D）。故选（B）

7、①②③正确。因式分解f，得 $f=2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$,f÷g=2x+1,即 f÷g是整式，④正确。故选（A）。

8、令 a=b=−1，则$\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|=\left|\sqrt[3]{a}\right|-\sqrt[3]{b}$成立，所以排除（A）和（B）。

令 a=−1，b=1，则$\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|=\left|\sqrt[3]{a}\right|-\sqrt[3]{b}$成立，所以排除（D）

当 a<0，b<0 时，$\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\left|\sqrt[3]{a}\right|-\sqrt[3]{b}$，a+b<0，当 a<0, b>0 时，

因为$\left|\sqrt[3]{a}\right|-\sqrt[3]{b}=\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|\geq 0$，所以 a+b≤0.

当 a>0，b>0 时，$\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\neq\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$

当 a>0,b<0 时，$\left|\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right|\neq\left|\sqrt[3]{a}\right|+\left|\sqrt[3]{b}\right|=\left|\sqrt[3]{a}\right|-\sqrt[3]{b}$

故选（C）

9、①、②、③、④正确，⑤错误，故选（C）。

10、先求直线 y=2x+a 与 y=2a-x 的图象的交点，

解方程组$\begin{cases}y=2x+a\\y=2a-x\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\dfrac{a}{3}\\y=\dfrac{5a}{3}\end{cases}$

因为　交点在长方形区域范围内 ，所以$\begin{cases}0\leq\dfrac{a}{3}\leq\dfrac{1}{2}\\2\leq\dfrac{5a}{3}\leq 3\end{cases}$

解得 $\dfrac{6}{5}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$　故选（C）

11、设开始时甲、乙速度分别为 v_1、v_2,它们相距 S，则 t=$\dfrac{s}{v_1-v_2}$，A 处到乙车出发点的距离为 S=v_2t.

若甲、乙各提速 a%，则甲车追上乙车的时间为 t′ =$\dfrac{s}{(1+a\%)v-(1+a\%)v_2}=\dfrac{t}{1+a\%}$

此时乙车行驶的距离为 S′ =(1+a%)v2t^1=v_2t=s.

故选（C）

12、以 1000 元购货，售出后获利 10%，即获利 100 元；第二次以上次售出的价格的 90%购进一批同样的货物，即花费 1100 元的 90%，即 990 元购货，这次售出是按 990 元的九折出售，亏损 990 元的 10%，即亏损 99 元。两次交易合计盈利 1 元，故选（B）

13、设 A 队胜 x 场，平 y 场，负 z 场，则$\begin{cases}x+y+z=12,①\\3\mathrm{x}+\mathrm{y}=19,②\end{cases}$

由 y=19-3x 代入①，得 x+19-3x+z=12, 7=2x-z，所以 z 是奇数。

当 z=1，x=4，y=7 时，收益为 12×500+4×1000+7×500=13500（元）；

当 z=3，x=5，y=4 时，收益为 12×500+5×1000+4×500=13000（元）；
当 z=5，x=6，y=1 时，收益为 12×500+6×1000+1×500=12500（元）。
所以当 A 队胜 4 场，负 1 场时，队员收益最高位 13500 元/人，故选（A）

14、两枚骰子确定的点 p(x,y)共有 36 种，能落在直线 y=-2x+6 上的有 2 种，即 x=1，y=4；x=2，y=2。所以 P 能落在直线 y=2x+6 上的概率为 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$，故选（C）

15、太阳光是平行光，如图 25 所示，假设小鸟从 A→B 和 B→C 的时间相同，则 AB=BC，由平行线截线段成比例知 A′B′=B′C′,所以小鸟在斜坡上的影子移动的速度不变,若 A′B′=AB，则影子移动的速度将等于小鸟飞行的速度，但这与太阳光照射角度有关。故选（C）

16、设这 5 个整数从小到大排列依次是 a，b，c，d，e,已知中位数是 4，则 c=4，又这 5 个数的惟一众数是 6，则 d=e=6，a≠b，所以 a<b<4，要使 5 个整数的和最大，则应取 a=2，b=3. 所以这 5 个整数可能的最大和事 2+3+4+6+6=21.故选（B）

17、由题意知　28-12=m（[n]+1-3）,所以 m=$\frac{16}{[n]-2}$，故选（B）

18、设 A 买了 x 件，B 买了 y 件，C 买了 z 件，D 买了 w 件，依题意有

$$\begin{cases}x+y+z+w=10,①\\13x+17y+22z+35w=200.②\end{cases}$$

由②得 13（x+y+z+w）+4y+9z+22w=200.将①代入上式，得 4+9+22w≤4y+9z+22w=70,所以 22w≤57，于是 w≤2，当 w=1 时，4y+9z=48.

显然 y 是 3 的倍数，z 是 4 的倍数，令 y=3y′，z=4y′，则 12y′+36z′=48，所以 y′+3z′=4，y′=z′=1，y=3，z=4，于是得到一组答案：x=2，y=3，z=4，w=1，当 w=2 时，4y+9z=26. 显然，z 是偶数。

令 z=2z′，则 4y+18z′=26，即 2y+9z′=13，显然 z′是整数，所以 z′=1，y=2，于是得到另一组答案：x=4，y=2，z=2，w=2，故选（C）

19、如图 26，由 AE∥BF、角平分线性质及三角形外角的性质知道∠1+∠2=∠1+∠3=∠1+（α+β）=（∠1+β）+α=α+α=2α。故选（B）

20、不妨设 a<b<c,则由 a+b+c=30，知 a+b=30-c，又由三角形边的性质知 a+b>c，于是 30-c>c，得 c<15.又 $c>\frac{a+b+c}{3}=\frac{30}{3}$=10，所以 10<c<15，又因为 c 为整数，所以 c=11,12,13,14. 当 c=11 时，b=10，a=9.当 c=12 时，b=11，a=7；b=10，a=8.当 c=13 时，B=12，a=5,；b=11，a=6；B=10，a=7；b=9，a=8.当 c=14 时，b=13，a=3；b=12，a=4；b=11，a=5；b=10，a=6；b=9，a=7.

满足条件的三角形共有 12 个，故选（B）。

21、已知点 G 在△ABC 内部，所以△ABC 不是直角三角形。由于 G 点是△ABC 的垂心，所以 AB⊥BC，又 G 点在 BC 的中线 AD 上，所以 AD⊥BC，即 BC 边的中线与高重合，△ABC 是等腰三角形。故选（B）

22、从 C 作 CH⊥AB,H 为垂足，Rt△ACH 中，∠A=60°，∠1=30°，AC=16，所以 AH=$\frac{1}{2}$AC=8 所以 CH=$\sqrt{AC^2-AH^2}=8\sqrt{3}$.又△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=220\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}$·AB·CH=$220\sqrt{3}$，解得 AB=55　故选（B）.

23、①和③是正确的，②和④是错误的。故选（C）.

24、从 4 个条件中任选 2 个条件，共有 6 中选法，其中①②，①③，①④，②④这 4 种组合都可以推出四边形 ABCD 是平行四边形，而选②③，③④，四边形 ABCD 不一定是平行四边形，所以概率 P=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$　故选（C）

25、连结 EC、AF，如图 28 所示，由于△ABE、△BCF 是等边三角形，并且∠ABC=90°，易证△EFB≌△ECB≌△AFB,于是 CE=AF=EF,所以△CEF 和△FAE 是等腰三角形，且 EB 平分∠FEC，FB 平分∠AFE，所以 FB⊥AE,EB⊥CF,所以 B 是 △EMF 的垂心，故选（A）

26、译文：如图 7 所示，四边形 ABCD 是正方形，点 E 在 BC 上，且 CE=AC，连结 A、E 交 CD 于点 F，则∠AFC 的度数是（）

A、150°　　　B、125°　　　C、135°　　　D、112.5°

因为 ABCD 为正方形，AC 是对角线，则∠1=45°∠2=135°，因为 CE=EA，所以△ACE 是等腰三角形，∠E=22.5°，所以∠3=∠FCE+∠E=112.5°.故选(D)

27、连结 FB，如图 29，因为 EF 垂直平分 AB，ABCD 是菱形，所以 AF=FB=FD,在菱形 ABCD 中，∠1=∠2=∠3=$\frac{1}{2}$∠BAD=40°，又因为 AB∥CD，所以∠CDA=180°-80°=100°，所以∠CDF=100°-40°=60°.故选（D）

28、连结 AC、BD,如图 30 所示,由 E、F、G、H 是所在边的中点,得 EH∥FG∥BD,且 EH=FG=$\frac{1}{2}$BD,及 EF∥HG∥AC，且 EF=HG=$\frac{1}{2}$AC,可知四边形 EFGH 是平行四边形，要使四边形 EFGH 是正方形，则必须：①EF=EH,即 AC=BD；②EF⊥EH,即 AC⊥BD.

29、扇形面积 S 随圆心角的增大而增大，且扇形面积是圆的一部分，设扇形的圆心角为 x′，则扇形面积 S=$\frac{x}{360}\bullet\frac{R^2}{260x}$,Q 其中，变量 x 前面的$\frac{\pi R^2}{360}$是常数，故选（A）

30、因为白色瓷砖和灰色瓷砖面积相同，所以宝物藏在两种瓷砖下的可能性一样大。故选（C）

二、填空题

题号	31	32	33	34	35	36	37	38
答案	3	1	答案不唯一	9	14	>	>	0
题号	39	40	41	42	43	44	45	46
答案	x<-3	20	$\frac{1}{2007}$	-3	±3	-2	±$\sqrt{5}$	±1
题号	47	48	49	50	51	52	53	54
答案	10000	5	32+12$\sqrt{7}$	±2$\sqrt{2}$	2$\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(4$\sqrt{2}$,0)	3	①④⑤
题号	55	56	57	58	59	60	61	62

答案	5	5：8：$\sqrt{10}$：4	6	$5\sqrt{3}$	35	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$：1:1	b
题号	63	64	65	66	67	68	69	70
答案	2	17	4	34	1	8.5 折	18 或 15	1260,84
题号	71	72					73	74
答案	0.85a；0.92a	n+（n+1）+⋯+（3n−2）=（2n−1）^{2}（n 是正整数）					110	25；0.64
题号	75	76	77	78	79			
答案	216.5	6.5	-	10 或 26	-2005			

31、令 a=2008，b=2007，c=2006，则原式=a2+b2+c2-ab-bc-ca=$\frac{1}{2}$[$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$]=3

32、根据：当 n 是正整数时，（$x^n+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1$）（x-1）=$x^{n-1}$-1,知原式=$x^{2005}$-1=1

33、a+b,b+c,c+a 中有一个或两个是 0 即可，如：a=-b；或 a=c=1，b=-1.

34、译文：如果 m，n 是正整数，满足 $m^3+27mn+n^2=729$,m+n>mn，则 m+n 的值是________
因为　m+n>mn，所以　m+n-mn-1>-1，即　(m-1)（n-1）<1，而 m，n 是正整数，所以（m-1）（n-1）=0，m=1 或 n=1，若 m=n=1，不符合题意，舍去。所以，m，n 中有且只有一个是 1，不妨设 n=1，则 $m^3+27m+1=729$，得 $m^3+27m-728=0$，即（m^3-512）+（27m-216）=0，（m-8）（m2+8m+64）+27(m-8)=0,(m-8)(m^2+8m+91)=0.，所以 m=8 或 m^2+8m+91=0，而 m^2+8m+91=0 无实根，故只能 m=8,于是 m+n=9.

35、从后一个括号内的各数提出因子 $\sqrt{6}$，

则　原式$=\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})+2$

$$=\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2+2$$

$$=\sqrt{6}(5+2\sqrt{6}-5)+2=14$$

36、可以构造商式比较大小。由于 A>0，B>0，所以

$$\frac{A}{B}\ \frac{2007^{2007}\times 2008^{2008}\times 2009^{2009}}{(2007\times 2008\times 2009)^{2008}}=\frac{2009}{2007}>1$$

所以　A>B

37、A=$\sqrt{2008}-\sqrt{2006}$

$$=\frac{\sqrt{2008}-\sqrt{2006}}{1}\bullet\frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2006}}{\sqrt{2008}+\sqrt{2006}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2008}+\sqrt{2006}}$$

而 $\sqrt{2008}+\sqrt{2006}-2\sqrt{2007}$

$$=(\sqrt{2008}-\sqrt{2007})-(\sqrt{2007}-\sqrt{2006})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2007}}-\frac{1}{\sqrt{2007}-\sqrt{2006}}<0$$

$$\frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2006}}{2}<\sqrt{2007}$$

即 $\frac{1}{A}<\frac{1}{B}$

又 A>0，B>0

所以 A>B

38、原式= $\sqrt{x^2-8+\frac{16}{x^2}+8}-\sqrt{x^2+8+\frac{16}{x^2}-8}=0$

39、译文：如果 a，b 为常数，且不等式 ax+b>0 的解集是 x< $\frac{1}{3}$,则不等式 bx-a<0 的解集为

不等式 ax+b>0，即 ax>-b

题设它的解是：x< $\frac{1}{3}$,所以 a<0，且 $-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$

即 a=-3b，所以 b>0

则不等式 bx-a<0 的解集为 x< $\frac{a}{b}$ =-3，即 x<-3

40、考虑极端情况，假设小明答题只有答对和答错两种情况，且他答对 z 道题，由题设条件可得 4x-4（25-x）≥60，

解得 x≥20

所以他至少要答对 20 道题。

41、由题设的

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{xy}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

两式相减，得 $\frac{x^2-y^2}{a^2}+\frac{y^2-x^2}{c^2}=0$

所以$(x^2-y^2)(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2})=0$

因为 a≠c，且 a，c 为正数，

所以 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\neq 0$，

所以 $x^2-y^2=0$.

由 x，y 均为正数，且 $x+y=6\sqrt{223}$，得 $x=y=3\sqrt{223}=\sqrt{2007}$，

将 $x=y=\sqrt{2007}$ 代入已知式中，得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{2007}$。

42、若方程$\frac{4-ax}{x+2}=3$ 有解，则应有 x≠-2，

于是有 4-ax=3x+6，

$x=-\frac{2}{3+a}$

显然，必须 a≠-3.

因此，当 a=-3 时，方程无解。

43、题设，$\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m-n}=-\frac{1}{4}$，

即$\frac{2m^2}{m^2-n^2}=-\frac{1}{4}$，

也即$\frac{m^2-n^2}{m^2}=-8$，

即 $1-(\frac{n}{m})^2=-8$

$(\frac{n}{m})^2=9$，$\frac{n}{m}=\pm 3$

44、当 x=2 时，$\frac{a}{x^7}+\frac{b}{x^5}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x}+\frac{1}{2}=\frac{a}{2^7}+\frac{b}{2^5}+\frac{c}{2^3}+\frac{d}{2}+\frac{1}{2}=3$

所以$\frac{a}{2^7}+\frac{b}{2^5}+\frac{c}{2^3}+\frac{d}{2}=\frac{5}{2}$

当 x=-2 时，$\frac{a}{x^7}+\frac{b}{x^5}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x}+\frac{1}{2}$

$=\frac{a}{(-2)^7}+\frac{b}{(-2)^5}+\frac{c}{(-2)^3}+\frac{d}{(-2)}+\frac{1}{2}$

$=(\frac{a}{2^7}+\frac{b}{2^5}+\frac{c}{2^3}+\frac{d}{2})+\frac{1}{2}$

=-2

45、在$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$的两边同乘以（a+b），得$\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}=1$，

即$(1+\frac{b}{a})-(\frac{a}{b}+1)=1$，也即$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$，

又$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\pm\sqrt{(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})^2+4\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\pm\sqrt{5}$，从而$\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}=(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})=\pm\sqrt{5}$

46、由 ax+y=1 得 y=1-ax，代入 x+ay=2，得 x+a（1-ax）=2，（$1-a^2$）x=2-a，

因为方程组有解，所以此方程有解，所以 $1-a^2\neq0$，这时，方程组有解 x=$\frac{2-a}{1-a^2}$，y=$\frac{1-2a}{1-a^2}$，

又，若 $a^2=1$ 时，如果方程组有解，则在 ax+y=1 两边同乘以 a，得到 $a^2x+ay=a$，即 x+ay=a，所以 a=2，与 $a^2=1$ 矛盾，综上，知：仅当 a≠±1 时，原方程组有解。

47、由（n-2）a_n-（n-1）$a_{n-1}+1=0$，（2≤n≤100）得

$a_1=1, a_3=2a_2=1, 2a_4-a_3=-1, 3a_5-4a_4=-1, \cdots\cdots 98a_{100}-99a_{99}=-1$.

以上各式相加，得 $98a_{100}-2(a_2+a_3+\cdots+a_{99})=98$，以 $a_{100}=199$ 代入，得 $a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{99}=9800$，

于是 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{99}+a_{100}=1+9800+199=10000$

48、由题可知 xy=1，x= $\frac{1}{y}$，代入到题设的等式，得

$19x^2+145+\frac{19}{x^2}=2007$,

$19(x^2+\frac{1}{x^2})=1862$,

$x^2+\frac{1}{x^2}=98$,

$x^2+\frac{1}{x^2}+2=100$,

$(x+\frac{1}{x})^2=100$,

所以$x+\frac{1}{x}=\pm10$,

即$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\pm10$，也即 $\frac{2(a-b)}{a-b}=\pm10$，±5（a−b）=a+b,

取正数 5a−5b=a+b，则 2a=3b，最小 a=3，b=2，a+b=5；

取负数 −5a+5b=a+b，则 3a=2b，最小 a=2，b=3，a+b=5

49、由 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 得

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$,

$(x+y)^3+z^3-3x^2y-3xy^2=0$,

$[(x+y)+z]^3-3(x+y)^2-3(x+y)z^2-3x^2y-3xyz=0$

$(x+y+z)^2-3(x+y)z(x+y+z)-3xy(x+y+z)=0$

$(x+y+z)^2-(x+y+z)(3x+3xz+3yz)=0$

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=0$

$(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)=0$

$(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=0$

因为 x、y、z 互不相等，

所以 $x+y+z=0$ ①

又因为 $x-y=3+\sqrt{7}$ ②

①+②得 $2x+z=3+\sqrt{7}$，

①+②得 $2y+z=-3-\sqrt{7}$，

所以（2x+z）^{2}（2y+z）^{2}=（$3+\sqrt{7}$）^{2}+（$-3-\sqrt{7}$）^{2}=$32+12\sqrt{7}$

50、由条件得 ab=2，则（a+b）^{2}=$a^2+2ab+b^2=8$，所以 $a+b=\pm2\sqrt{2}$

51、若比例式为 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{x}$，则 $x=2\sqrt{2}$；

若比例式 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{x}$，则 $x=\sqrt{2}$；

若比例式为 $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

52、依题意，设 $P_1(m,\frac{4}{m})$,P_2（n，$\frac{4}{n}$），则 $m=\frac{4}{m}$，$m^2=4$，

所以 m=2（m>0），

所以 $OA_1=4$，

所以 $4+\frac{4}{n}=n$，$n^2-4n=4$，

（n-2）^{2}=8，

所以 $n-2=2\sqrt{2}$（取正值）

所以 $n=2\sqrt{2}+2$，

所以 $OA_2=n+\frac{4}{n}=2\sqrt{2}+2+\frac{4}{2\sqrt{2}+2}=4\sqrt{2}$

所以 点 A_2 的坐标是（$4\sqrt{2}$，0）

53、译文：在下列交通标志中，是轴对称图形的标志有____________个

只有第三个不是轴对称图形，所以轴对称图形有 3 个。

54、如图 31，可得矩形、平行四边形和等腰三角形，填①④⑤

55、因为 ABCD 是平行四边形，O 是 BD 的中点，

则△AEM≌△CFN,△DBO≌△BFO，△BMO≌△DNO,△ABD≌△CDB,△EDN≌△FBM,共有 5 对全等三角形。

56、设小正方形的边长为 1，则正方形 ABCD 的面积为 16，周长为 16，阴影部分的面积是

16-4×$\dfrac{1}{2}$×3×1=10，

周长是$4\sqrt{3^2+1^2}=4\sqrt{10}$，

所以　面积比=5:8，

周长的比$\sqrt{10}$：4。

57、由条件得（a+2）^{2}+6^2=10^2，所以（a+2）^{2}=46,a+2=8,a=6

58、如图 32 所示，已知 AC=2AB=10 米，∠ABC=90°，所以地面上的工人行走的距离是 BC=$\sqrt{AC^2-AB^2}=5\sqrt{3}$(米)

59、连杆的长度为$\sqrt{20^2+10^2}=25$（厘米）

当滑块 B 滑到 O 点时，滑块 A 距 O 点 25 厘米，故滑块 A 向上滑动了 10 厘米。

当滑块 B 由 O 点滑到 C 点时，滑块 A 由最高点滑到 O 点，即向下滑动了 25 厘米，所以滑块 A 共滑动了 35 厘米。

60、设 AC=b，BC=a,AB=c,

由 AB=2，CD=1，

知∠ACB=90°，

于是 $a^2+b^2=c^2$

所以（a+b）^{2}−2ab=c^2

而 a+b=$\sqrt{3}$+1，c=2

所以（$\sqrt{3}$+1）^{2}-2ab=2^2　得 ab=$\sqrt{3}$

因此 $S_{\triangle DBC}$=$\dfrac{1}{2}$ab=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

61、由题设条件可知 $ac^2+bc^2-b^3-abc$

$=b^2$（c-b）+ac(c-b)

$=(c-b)(b^2+ac)$

=0

所以　c=b

即此三角形为等腰三角形，又一个内角是 120°，所以其底角是 30°，则 a：b：c=2$\sqrt{3}$：2：2=$\sqrt{3}$：1:1

62、因为 a，b，c 是三角形的三条边，所以 a，b，c 及 a+b-c，b+c-a，c+a-b 均为正数。

所以$\dfrac{a+b+c}{c}>\dfrac{b+c-a}{a}>\dfrac{c+a-b}{b}$

$$\frac{a+b}{c}-1>\frac{b+c}{a}-1>\frac{c+a}{b}-1$$

$$\frac{a+b}{c}>\frac{b+c}{a}>\frac{c+a}{b}$$

$$\frac{a+b+c}{c} > \frac{a+b+c}{a} > \frac{c+a+b}{b}$$

即三边中最长的边是 b。

63、可转化为面积求解。

设△AA_2B、△BOA_1、△BC_1O、△B_1CO、△OA_1C、△AA_1C 的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6，△ABC 的面积为 S，如图 33 所示，并利用以下三个结论：

(1) 等高三角形面积的比等于对应底边的比（如图 34）

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{DB}, \frac{S_1}{S_1+S_2} = \frac{AD}{AB}$$

(2) 合比定理，若 $\frac{\mathrm{a}}{b} = \frac{c}{d}$，则 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) 分比定理

若 $\frac{\mathrm{a}}{b} = \frac{c}{d}$ 则

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

则 $\frac{AO}{AA_1} = \frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{S_5+S_6}{S_6}$

$$\frac{S_1+S_2+S_5+S_6}{S_1+S_6}$$ (合比定理)

$$\frac{BO}{BB_1} = \frac{S_1+S_2}{S_1+S_2+S_4+S_5+S_6}$$

$$= \frac{S_2+S_5}{S_2+S_4+S_5} = \frac{S_1+S}{S_1+S}$$ (分比定理)

$$\frac{CO}{CC_1} = \frac{S_6+S_5}{S_1+S_2+S_3+S_5+S_6}$$

$$= = \frac{S_2+S_5}{S_2+S_3+S_5} = \frac{S_6-S_2}{S_1+S_6}$$ (分比定理)

而 $S_1+S_6=S$

将上面三式相加，得

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = \frac{2S}{S} = 2$$

64、延长 BE 交 AD 的延长线于 F，如图 35 所示，因为 AD∥BC，E 为 CD 的中点，所以△DFE≌△CBE，于是 BC=DF, BE=EF,

$S_{\triangle EFD}=S_{\triangle BCE}$

因为 $BE=\frac{13}{2}$，

所以 BF=13.

在 Rt△ABF 中，

$AB^2+AF^2=BF^2=13$

$\frac{1}{2}AB\cdot AF=S=30$

于是（AB+AF）$^2=AB^2+AF^2+2AB\cdot AF$

$=13^2+120=289=17^2$

所以 AB+BC+DA=AB+AF=17

65、如图 36，延长 CB 到 M，使 BM=DQ，连 AM，

因为 AD=AB，∠D=∠ABM=90°，

所以△ADQ≌△ABM，AM=AQ，∠MAB=∠DAQ.

因为∠BAP+∠DAQ=45°，

所以∠MAB+∠BAP=45°，

所以∠MAP=∠PAQ

又因为 AP=AP

所以△MAP≌△QAP，MP=PQ，

所以△PCQ 周长=PC+CQ+PQ=PC+BP+CQ+DQ=4

66、设重叠部分的面积是 xm^2，则 120+（74-x）=160，

所以 x=34

67、由 n 是正整数，知道凸 4n+2 边形的边数至少是 6，因为$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$都是 90°，所以此多边形的外角和是 270°，因此，除了$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$外，若存在某一角$\angle A_1\leqslant 90°$（i=4，5，…，4n+2），则此多边形外角和大于 360°，与"凸多边形外角和等于 360°"矛盾，又题设该多边形的内角都是 30°的整数倍，所以除了$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$外，其余角只能是 120°或 150°.

设∠A、∠A、…$\angle A_{3N+2}$中有 k 个 120°，t 个 150°（k，t 为非负整数），那么

k+t=（4n+2）-3=4n-1

t=4n-4-1

因为 [(4n+2)-2]·180°

=3×90°+k·120°+（4n-k-1）·150°，

整理得 4n=4-k，

由于 n 是正整数，k 非负，

所以只能是 k=0，n=1

68、设该时装的进价是 a，则原售价是（1+30%）a。设后来打 x 折销售，根据题意有

$$\frac{(1+30\%)a\times\frac{x}{10}-a}{a}\times 100\%\geq 10\%$$

解得 $x\geq\frac{110}{13}\approx 8.5$

所以打折的幅度不能低于 8.5 折。

69、设今年安排考场 x 个，则 $\frac{120}{x-3}+2=\frac{120(1+50\%)}{x}$

解得 x=18 或 x=15

经检验 ，x=18 和 x=15 都是原方程的根。所以，今年安排的考场有 18 个或 15 个。

70、设另一直角边和斜边长分别为 y，z，则 $35^2+y^2=z^2$

即 （x+y）（z-y）$=5^2\cdot7^3$

设周长为 1，则

1=35+z+y，

又 z+y>35，

所以 z+y 最大为 $5^2\cdot7^3$，最小为 7^3，

所以 $15^2\cdot7^3+35=1260$，

1=49+35=84

71、由题意，得 （1-15%）a<b<（1-8%）a，

即 0.85a<b<0.92a

72、由于 $1=1^2$，

$2+3+4=3^2$，

$3+4+5+6+7=5^2$，

……

所以第 n 个式子从 n 开始，且有 2n-1 个连续自然数相加，即第 n 个式子为

n+(n+1)+…+(n+2n-2)

$=\dfrac{(n+3n-2)(2n-1)}{2}$

$=(2n-1)^2$(n 是正整数)，

即一般规律为

n+(n+1)+…+(3n-2)

=（2n-1）^{2}（n 是正整数）

73、设商品共有 a 件，售出一半后，收入为 $\frac{1}{2}$am 元，其余的一半按 m 元的 8 折出售，即售价为 0.8m 元，收入为 0.4am 元，总收入为 0.9am 元，依题意有

0.9am=1.1a×90

所以 m=110

74、总人数是 4+6+10+5=25（人）

在 70.5~90.5 这一分数段的人数是 16 人，占 25 人的 64%，所以频率为 0.64.

75、设 $a=(a,b)a_1$, $b=(a,b)b_1$, $(a_1,b_1)=1$,

则 $[a,b]=(a,b)a_1b_1$,

即 （a，b）a_1b_1=1085-(a,b),

1085=5×7×31 是（a，b）的倍数，所以（a，b）的可能值是 1,5,7,31,35,155,217,1085

（1） 当（a，b）=1 时，

$a_1=a$ ，$b_1=b$,

$a_1b_1=1084=271\times4$,

a- b=267

(2) 当（a，b）=5 时，

$5a_1b_1=1085-5$,

$a_1b_1=216=2^3\times3^3$,

所以 $a_1=3^3$, $b_1=2^3$,

a- $b=5(3^3-2^3)=95$.

(3) 当（a，b）=7 时，

$a_1b_1=154=11\times7\times2$.

当 $a_1=14$, $b_1=11$ 时，

a_1-b_1 最小，$a-b=21$

由于 $a-b=(a,b)(a_1-b_1)\geqslant(a,b)$，

所以当 $(a,b)\geqslant31$ 时，$a-b$ 的值一定大于 21，

所以 $a-b$ 的最小值为 21

76、设 $BC=x$，$CD=y$，则有 $AC=3x$，$BC=3y$。

在 Rt△ACD 中，有 $(3x)^2+y^2=6^2$，①

在 Rt△BCE 中，有 $(3y)^2+x^2=8^2$，②

①+②得 $10(x^2+y^2)=100$，

$x^2+y^2=10$，

又 $x+y=6$，

所以 $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}$

$=\dfrac{36-10}{2}=13$

所以 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}xy=6.5$

77、连 AC，如图 37 所示，在梯形 ABCE 中，S

在梯形 ACFD 中，$S_{\triangle ACF}=S_{\triangle DCF}$

而 $S_{\triangle}-S_{\triangle CEF}=S_{\triangle DCF}-S_{\triangle CEF}$

即 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DEF}$

所以 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle DEF}$

78、因为 $4x^2+1+kx=(2x)^2+kx+1$ 是关于 x 的完全平方式，

所以 $\pm2\cdot2x\cdot1=kx$，

解得 $k=\pm4$.

当 $k=4$ 时，$k^2-2k+2=10$；

当 $k=-4$ 时，$k^2-2k+2=26$；

79，原方程可化为

$$\frac{1}{x+2004}+\frac{1}{x+2006}=\frac{1}{x+2007}+\frac{1}{x+2003}$$

$$\frac{1}{x+2006}-\frac{1}{x+2007}=\frac{1}{x+2003}-\frac{1}{x+2004}$$

$$\frac{(x+2007)-(x+2006)}{(x+2007)(x+2006)}=\frac{(x+2004)-(x+2003)}{(x+2004)(x+2003)}$$

$$\frac{1}{(x+2007)(x+2006)}=\frac{1}{(x+2004)(x+2003)}$$

$(x+2006)(x+2007)$

$=(x+2003)(x+2004)$

$x^2+4013x+4026042$

$=x^2+4007x+4014012$

6x=-12030

x=-2005

经检验，x=-2005 是原方程的根。

三、 解答题

80、设全班共有 x 人，有 y 人既参加语文组又参加数学组，则有 $\frac{2}{3}$x 人参加语文组，有 $\frac{3}{2}$y 人参加数学组，依题意得

$$\begin{cases}(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y)-y+4=x\\ \frac{2}{3}x+4=\frac{3}{2}y\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=48\\ y=24\end{cases}$

即全班有 48 人，既参加语文组又参加数学组的人数是 24 人。

81、设 A 和 B 两种产品的月产量分别问哦 x，y 件，则最大利润 z=600x+800y，

且 x，y 满足条件 $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 3000x+2000y\leq 300000\\ 500x+1000y\leq 110000\end{cases}$

由 z=600x+800y

=a（3000x+2000y）+b（500x+1000y）

解得 a=$\frac{1}{10}$，b=$\frac{3}{5}$

所以 z=$\frac{1}{10}$(3000x+2000y)+$\frac{3}{5}$(500x+1000y)≤96000

此时 $\begin{cases}3000x+2000y=300000\\ 500x+1000y=110000\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40\\ y=90\end{cases}$

即 A 产品每月生产 40 件，

B 产品每月生产 90 件，

每月可获得的最大利润是 96000 元。

82、在射线 OE 上取一点 M，使 AO=AM,如图 38 所示，则△OAM 为等边三角形。

过 C 作 CN∥AM，则∠NCO=∠NCB+∠2=60°，

又因为∠1+∠NCB=60°，

所以∠1=∠2，

在△CAN 和△BCD 中，

因为∠1=∠2，∠ANC=∠BOC=120°，NC=CO,

所以△ACN≌△BCO

所以BC=AC,
所以△ABC是等边三角形。
当B、C点各在OG、OE射线上运动时，欲保证△ABC是等边三角形，只有AC或AB与AO重合时面积最大（△AOC中，∠ACO>∠AOC,AO>AC）.

所以△ABC面积的最大值是△AOM的面积，即$\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$

83、（1）当0≤x<1600时，y=0；
当1600≤x<2100时，y=（x-1600）×5%；
当2100≤x<3600时，y=（x-2100）×10%+500×5%；
当3600≤x<6600时，y=（x-3600）×15%+1500×10%+500×5%；
(2)如图39所示。
（3）当x=4000时，
y=（4000-3600）×15%+1500×10%+500×5%=235（元）。
84、（135,40）=5（最大公约数），
将木棍分成5个相等的截断，则每一截断上的红刻度线将它（截断）分成27等份，黑刻度将它分成8等份，且5个截断中的红、黑刻度线的分布完全相同，因此只需要考虑一个截断即可，不妨假定一个截断的长度为27×8，则相邻两红线的长度为8，相邻两黑线的长度为27，注意到
27=3×8+3，
2×27=6×8+6，
3×27=10×8+1，
4×27=13×8+4，
5×27=16×8+7，
6×27=20×8+2，
7×27=23×8+5，
8×27=27×8+0，
这8个等式表明，对于任意正整数k，0≤k≤7，我们可以找到两个正整数P,Q,使得1≤P≤8,1≤q≤27，p×27=q×8=k

上式说明，在一个截断中锯下来的短木棍的长度有1,2,3,4,5,6,7,8共8种，而不可能有比8更长的短木棍（两红线间距为8），其它四个截断也一样。
85、设取出一组线段，其中的任意三条都能够成一个三角形，记这组线段中最短的两条长为x，y，最长的一条长为z，则1≤x<y<z≤100，
由于x，y，z构成三角形，故x+y>z
对任意的整数i，j，k（y≤i<j<k≤z），均有 i+j>x+y>z≥k，
故长为i，j，k的线段可构成三角形，要使取出的线段最多，可设取出的这组线段的长度依次为x，y，y+1，y+2，…z
共有（x-y+1）+1=x-y+2（条）
又有x<y,x+y>z，
可知 $y>\frac{1}{2}z$
即 $z-y+2<z-\frac{1}{2}z+2=\frac{1}{2}z+2$，
但 z≤100，

故 $z-y+2<z+2\leqslant \frac{1}{2}z\times 100+2=52$,

即这组线段的数目不超过 51 条。

现取 x=50，y=51，z=100，即得长度为 50,51,52，,99,100 的 51 条线段，其中的任意三条都能构成一个三角形。

综上可知，依题意要求最多可以取出 51 条线段。