有关高斯(取整)函数 [x] 和 {x}的计算与方程

一、高斯函数定义

用[x]表示不大于 x 的最大整数，定义 x 的小数部分 {x}=x−[x]，故有

[x]≤x＜[x]+1，或者 x-1＜[x]≤x

我们称 y=[x]为高斯函数（或 $f(x)$=[x]取整函数，计算机里也称为地板函数 *floor*(x),对应的有天花板函数 *ceil*(x)）

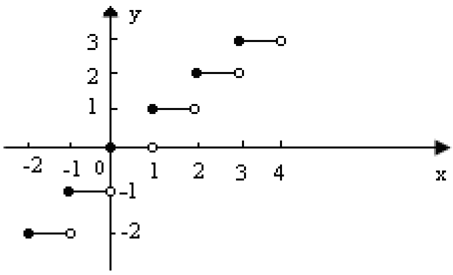


图 1 $f(x)=[x]$

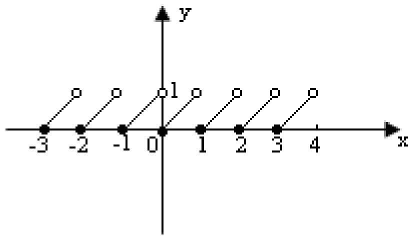


图 2 $f(x)=\{x\}$

二、高斯函数性质

1. 高斯函数 $f(x)$=[x]是一个分段、不减（非单调）、无界函数，

   满足 **if $x_1 \leqslant x_2$ then $[x_1] \leqslant [x_2]$ ；**

   $f(x)=\{x\}$是一个分段、不减（非单调）、有界、周期为 1 的函数

2. $[n+x]=n+[x]$, 其中 $n \in Z$;

3. $x-1 < [x] \leqslant x < [x]+1$

4. $[x]+[y] \leqslant [x+y]$，对所有 $x \in R$，$y \in R$

   证明：因为 {x},{y}都在[0, 1)之间，所以 {x}+{y}在[0,2)，

   [x]+[y]=x-{x}+y-{y}=x+y-({x}+{y}) 为整数，

   (1)当 0≤{x}+{y}<1 时，{x+y}={x}+{y}，所以 [x]+[y]=(x+y)-{x+y}=[x+y]

   (2)当 1≤{x}+{y}<2 时，{x+y}={x}+{y}-1，所以[x]+[y]=(x+y)-{x+y}-1=[x+y]-1

   所以 更精确的描述是 $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & (\{x\}+\{y\}<1)\\ [x]+[y]+1 & (\{x\}+\{y\}\geq 1)\end{cases}$

5. $[x][y] \leqslant [xy]$, 其中 x，y 都是非负数

   证明：[x]=x-{x}, [y]=y-{y}, [x][y]=xy-x{y}-{x}y+{x}{y}

   因为 x，y 都是非负数，故 x≥[x]>{x}≥0,

6. $[-x]=\begin{cases}-[x] & (x \in Z)\\ -[x]-1 & (x \notin Z)\end{cases}$

7. x 是正实数，n 是正整数，则在不超过 x 的正整数中，n 的倍数共有$\left[\dfrac{x}{n}\right]$个；

8. 设 p 为任一素数，在 n！中含 p 的最高乘方次数记为 $p(n!)$，则有：

$$p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right]\left(p^m \leq n < p^{m+1}\right)。$$

证明：由于 p 是素数，所有 n！中所含 p 的方次数等于 n！的各个因数 1,2，…，n 所含 p 的方次数之总和。由性质 7 可知，在 1,2，…，n 中，有 $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ 个 p 的倍数，有 $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$ 个 p^2 的倍数，有 $\left[\dfrac{n}{p^3}\right]$ 个 p^3 的倍数，…，当 $p^m \leqslant n < p^{m+1}$ 时，$\left[\dfrac{n}{p^{m+1}}\right]=\left[\dfrac{n}{p^{m+2}}\right]=\cdots=0$，所以命题成立。

高斯函数是非常重要的数学概念。它的定义域是连续的，值域却是离散的，高斯函数关联着连续和离散两个方面，因而有其独特的性质和广泛的应用。

解决有关高斯函数的问题需要用到多种数学思想方法，其中较为常见的有分类讨论（例如对区间进行划分）、命题转换、数形结合、凑整、估值等等。

三、例题

1. 计算 [6]=____, [3.5]=____, [$\sqrt{3}$]=______, [-5]=_____, [-0.1]=______ , [-3.6]=_____ ,

2. 计算 $\left[\dfrac{23\times1}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times2}{101}\right]+\cdots+\left[\dfrac{23\times100}{101}\right]$ **的值.**

（答案）

3. 已知 $0<a<1$，且满足 $[a+\dfrac{1}{30}]+[a+\dfrac{2}{30}]+\ldots+[a+\dfrac{29}{30}]=18$，试求 $[10a]$的值.

（答案）

4. 求满足 $25\{x\}+[x]=125$ 的所有实数 x 的和.

（答案）

5. 已知 $2003<x<2004$，如果要求 $[x]\times\{x\}$是正整数，求满足条件的所有实数 x 的和

（答案）

6. 求 $\left\{\dfrac{5\times7\times1}{2011}\right\}+\left\{\dfrac{5\times7\times2}{2011}\right\}+\left\{\dfrac{5\times7\times3}{2011}\right\}+\cdots+\left\{\dfrac{5\times7\times2010}{2011}\right\}$ **的值.**

（答案）

7. 解方程 $\left[\dfrac{5+6x}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$

（答案）

8. 解方程$\left[\frac{x+1}{4}\right]=\left[\frac{x-1}{2}\right]$

（答案）

9. 某市电信局 130 手机与 137、138、139 手机有不同是收费方式。137、138、139 手机的收费方式为：月租费 50 元，基本通话费 0.40 元/分钟，不足一分钟按一分钟计算。130 手机的收费方式为：没有月租费，但是基本通话费为 0.54 元/分钟，不足一分钟也按一分钟计算。小明今购了一部手机，他每月通话的时间大约 20 小时，请帮他参考一下，选用哪种收费方式的手机网络合算？

（答案）

10. 判断是否为闰年的标准是：（1）年份能被 4 整除，不能被 100 整除;（2）年份若是 100 的整数倍的话，需被 400 整除，满足上述两个条件之一就是闰年，否则是平年. 你能根据这个要求写出判断闰年的计算公式吗？

练习　若实数 r 使得$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546$，求$[100r]$。

《高斯函数》参考答案

2. 解 ∵（23,101）=1，∴当 n=1,2,3，…，100 时，$\frac{23n}{101}$都不是整数，即{$\frac{23n}{101}$}都不是零.

且 101-n=100,99，…，2,1，

又∵ $\frac{23n}{101}+\frac{23(101-n)}{101}=\left[\frac{23n}{101}\right]+\left[\frac{23(101-n)}{101}\right]+\left\{\frac{23n}{101}\right\}+\left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\}=23$

其中 $0<\left\{\frac{23n}{101}\right\}+\left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\}<2$，且$\left\{\frac{23n}{101}\right\}+\left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\}$是整数，所以

$\left\{\frac{23n}{101}\right\}+\left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\}=1$

即 $\left[\frac{23n}{101}\right]+\left[\frac{23(101-n)}{101}\right]=23-1=22$

令 n=1,2,3，…，100，得到 $2\times\left(\left[\frac{23\times1}{101}\right]+\left[\frac{23\times2}{101}\right]+\cdots+\left[\frac{23\times100}{101}\right]\right)=22\times100$

$\left[\frac{23\times1}{101}\right]+\left[\frac{23\times2}{101}\right]+\cdots+\left[\frac{23\times100}{101}\right]=22\times50=1\,100$

(注：本题采用了分组凑整的思想) （返回）

3. 因为 $0<a+\frac{1}{30}<a+\frac{2}{30}<\ldots<a+\frac{29}{30}<2$，所以 $[a+\frac{1}{30}]$，$[a+\frac{2}{30}]$，…，$[a+\frac{29}{30}]$取值为 0 或 1，由题意知，其中有 18 个为 1，肯定是最大的 18 个数，即

$[a+\frac{1}{30}]=[a+\frac{2}{30}]=\ldots=[a+\frac{11}{30}]=0$

$[a+\frac{12}{30}]=[a+\frac{13}{30}]=\ldots=[a+\frac{29}{30}]=1$

所以 $0<a+\frac{11}{30}<1$ ==》 $-11<30a<19$

$1\leqslant a+\frac{12}{30}<2$ ==》 $18\leqslant30a<48$

故 $18\leqslant 30a<19$， $6\leqslant 10a<6\frac{1}{3}$， 所以 $[10a]=6$

（返回）

4. 解：有题意得到

$\{x\}=\frac{125-[x]}{25}$，而 $0\leqslant\{x\}<1$，可得 $0\leqslant\frac{125-[x]}{25}<1$

$100<[x]\leqslant125$，即 $[x]$=101,102，…，125，满足条件的实数 x 为

$x=[x]+\{x\}=[x]+\frac{125-[x]}{25}=5+\frac{24[x]}{25}$

它们的和为 $25\times5+\dfrac{24}{25}$（101+102+…+125）=125+$\dfrac{24}{25}$×2 825=125+2 712=2 837

（返回）

5. 因为 2003<x<2004, 所以 $[x]=2003$， 2003 是质数，

因为 0<{x}<1, 所以 设 2003{x}=p，p 是正整数，则 1≤p<2003

$x=[x]+\{x\}=2003+\{x\}=2003+\dfrac{p}{2003}$, p=1,2,3,……, 2002

其和为 S=2003×2002+$\dfrac{1}{2003}$×（1+2+3+⋯+2002）=4 010 006+ 2005003÷2003

=4 010 006+1 001=4 011 007

（返回）

7. 解：令 $\dfrac{15x-7}{5}=n(n\in Z)$，则 $x=\dfrac{5n+7}{15}$，代入原方程整理得：$\left[\dfrac{10n+39}{40}\right]=n$，

由取整函数的定义有 $0\le\dfrac{10n+39}{40}-n<1$，解得：$-\dfrac{1}{30}<n\le\dfrac{13}{10}$，则 $n=0,n=1$。

若 $n=0$，则 $x=\dfrac{7}{15}$；若 $n=1$，则 $x=\dfrac{4}{5}$。

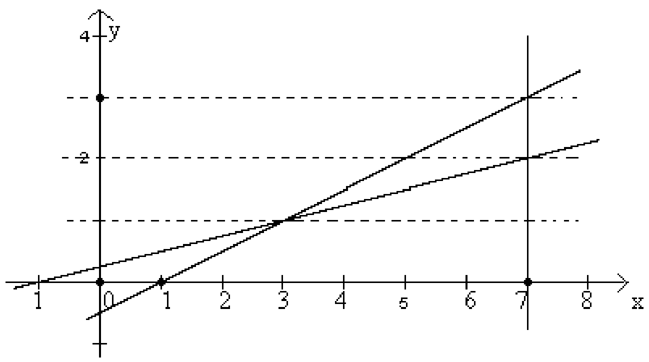
注：本例中方程为 $[u]=v$ 型的，通常运用取整函数的定义和性质并结合换元法求解。

（返回）

8. 解：由取整函数的性质，得：$-1<\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x-1}{2}<1$，即 $-1<x<7$，令

$y_1=\dfrac{x+1}{4},y_2=\dfrac{x-1}{2}$，在同一坐标系中画出二者的图象：

分析两者在区间 $(-1,7)$ 内的图象，



显然，当 $x\in(-1,1)$ 时，$\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=0$

而 $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=-1$，方程不成立；

当 $x\in[1,3)$ 时，$\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=0$ ；

当 $x\in[3,5)$ 时，$\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=1$ ；

当 $x\in[5,7)$ 时，$\left[\dfrac{x+1}{4}\right]=1$ 而 $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]=2$，方程不成立。

综上所述，原方程的解是：$\{x|1\le x<5\}$。

注：本例为$\left[u\right]=\left[v\right]$型方程。首先由$-1<u-v<1$，求出$x$的取值区间。但此条件为原方程成立的充分但不必要条件，故还须利用$u=f\left(x\right)$和$v=g\left(x\right)$的图象进行分析才能得到正确结果。

（返回）

9. 先需要分别建立两种手机网络通话费 y 与通话时间 x 之间的函数关系式，再根据每月的通话时间，比较两种函数值的大小来决定。

x=20(小时)=1200（分钟）

130 手机通话费用 y 与通话时间 x（分钟）之间的函数关系为：

$$y=0.54[x],(x\geq 0)$$

y=0.54×[1200]=648

137、138、139 手机通话费用 y 与通话时间 x（分钟）之间的函数关系为：

$$y=k[x]+b$$

Y=0.40×[1200]+50=530

所以小明应该选择 137、138、139 收费方式的网络更合算。

（返回）