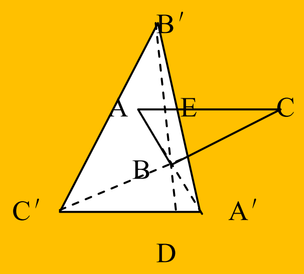
2006 年“新知杯”上海市初中数学竞赛

答案详解

一、 填空题

1、【答案】 3

【解析】 如图，



连结 B′B，并延长交 C′A′ 于点 D，交 AC 于点 E。由题设 C′B=BC，A′B=BA，AC⊥A′C′，且 BB′⊥AC，B′E=BE，得 B′D=3BE，故 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}B'D\cdot A'C'=3\times\frac{1}{2}BE\cdot AC=3S_{\triangle ABC}=3$

2、【答案】420

【解析】⑥-⑤+④-③+②-①，得 f-e+d-c+b-a=610-320+160-80+40-20=420

3、【答案】 $\frac{125}{24}$

【解析】连接 AC 与 EF 交于点 G，易证 EF⊥AC，EG=GF，在 Rt△AEG 中，因为 AE=5，EG=$\frac{1}{2}$EF=3，所以，AG=4，在 Rt△AEC 中，因为 $AE^2=AG\cdot AC$，∠ACE=∠AEF，所以，AC=$\frac{25}{4}$，且△BAC∽△AEF，故 $\frac{BA}{AE}=\frac{AC}{EF}$，即 AB=$\frac{5\times\frac{25}{4}}{6}=\frac{125}{24}$

4、【答案】-6≤a<$\frac{1}{4}$

【解析】由题设知，二次方程 $x^2-x+a=0$ 有两个不相等的实根 x_1、x_2，则△=1-4a>0，即 a<$\frac{1}{4}$，$|x_1|+|x_2|\leq 5$，故 $(|x_1|+|x_2|)^2=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=(x_1+x_2)^2+2|x_1x_2|-2x_1x_2=1+2|a|-2a\leq 25$

而 $\begin{cases} a<\frac{1}{4} \\ 1+2|a|-2a\leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq a<\frac{1}{4} \\ 1\leq 25 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0 \\ -4a\leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq a<\frac{1}{4}$ 或 $-6\leq a<0 \Leftrightarrow -6\leq a<\frac{1}{4}$

5、【答案】5

【解析】由题设有 $n^{2006}+2006=(-1)^{2006}+2006=2007\equiv 0[\mathrm{mod}(n+1)]$.而 2007=3×3×223，则 n+1=3, 9, 223, 669, 2007，故 n=2, 8, 222, 668, 2006.

6、【答案】 $\frac{13}{16}$, $\frac{17}{16}$

【解析】由 2x-1<[2x]≤2x，3x-1<[3x]≤3x 及已知方程得

$$5x-2<8x-\frac{7}{2}\leqslant 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\leq\frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<8x-\frac{7}{2}\leq\frac{35}{6}$$

因为 $8x-\frac{7}{2}$=[2x]+[3x]为整数，所以，$8x-\frac{7}{2}$=1,2,3,4,5，解得 x=$\frac{9}{16},\frac{11}{16},\frac{13}{16},\frac{15}{16},\frac{17}{16}$

经检验，只有 x=$\frac{13}{16},\frac{17}{16}$ 是已知方程的解。

7、【答案】$\sqrt{3}$-1

【解析】设 AB=BC=a，AM=MD=DA=x，CD=y，则

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a........(1)\\(a-y)^2+a^2=x^2..................(2)\end{cases}$$

由式（2）知 $x^2-a^2=(a-y)^2$，则 $x^2-y^2=2a^2-2ay$，由图可见 x>y>0，故 $2a^2-2ay>0$，a>y>0，于是，

代入方程（1）得 a-y+$\sqrt{2a^2-2ay}=a \Leftrightarrow \sqrt{2a^2-2ay}=y \Leftrightarrow y^2+2ay-2a^2=0$

取正根，y=（$\sqrt{3}-1$）a，即 $\frac{CD}{AB}=\sqrt{3}-1$

8、【答案】（$1+\frac{ph}{2S}$）p，（$1+\frac{ph}{2S}$）^{2}S

【解析】易见直线 AA′ 同时平分∠A′ 和∠BAC，故△A′B′C′与△ABC 的内心是相同的。

设△A′B′C′、△ABC 的内切圆半径分别为 r′、r，则 r′=r+h，且 r=$\frac{2S}{p}$

由于△A′B′C′∽△ABC，且相似比为 $\frac{r'}{r}=\frac{r+h}{r}=1+\frac{ph}{2S}$，因此，△A′B′C′的周长为（$1+\frac{ph}{2S}$）p，而面积为（$1+\frac{ph}{2S}$）^{2}S。

9、【答案】 5

【解析】由 $a_1a_2\cdots a_n=2007$，知 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 都是奇数，又 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2007$ 为奇数，则 n 为奇数。若 n=3，即 $a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3=2007$，不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$，则

$$a_1\geq\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=669,\quad a_2a_3\leq\frac{2007}{a_1}\leq 3$$

若 $a_1>669$，只能 $a_1=2007$，$a_2a_3=1$，且 $a_2+a_3=0$，这也不可能

由此知 n≥5，又 2007+1+1+（−1）+（−1）=2007×1×1×（−1）×（−1）=2007，故 n 的最小值为 5.

10、【答案】6999

【解析】首先，易见偶数中不是 4 的倍数的整数不可能是两整数的平方差，易知 $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=7$. 当 k≥2 时，有

$4k=(k+1)^2-(k-1)^2$, $4k+1=(2k+1)^2-(2k)^2$, $4k+3=(2k+2)^2-(2k+1)^2$,

且 4k+（4k+1）+（4k+3）=12k+4.故

$a_4+a_5+a_6=12\times2+4$， $a_7+a_8+a_9=12\times3+4$

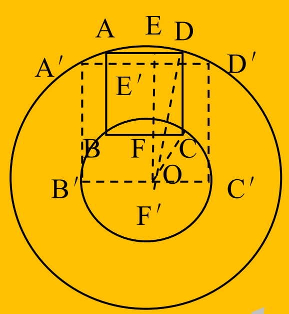
…,

$a_{97}+a_{98}+a_{99}=12\times33+4$，　　$a_{100}=4\times34$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=3+5+7+12(2+3+\cdots+33)+4\times32+4\times34=6999$.

二、【答案】$\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$

【解析】如图，



连接 OC、OD 作 OE⊥AD，垂足为 E，交 BC 于点 F，设正方形的边长为 2x，显然，E、F 分别是 AD、BC 的中点。由勾股定理有 OE=$\sqrt{4-x^2}$

因为 OF=|OE-EF|=|$\sqrt{4-x^2}$ -2x|，　$CF^2+OF^2=OC^2$，所以，$x^2+(\sqrt{4-x^2}-2x)^2=1$,即

$4x^2+3=4x\sqrt{4-x^2}$.两边平方并整理得 $32x^4-40x^2+9=0$，解得 $x^2=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ 。故正方形 ABCD 的面积为 $4x^2=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$

三、【答案】$\sqrt{23}$

【解析】由第一个方程得 3x+2y=a-z，由第二个方程得

$xy=6-z(3x+2y)=6-z(a-z)=z^2-az+6$

由 $(3x+2y)^2\geqslant4\times3x\times2y$，得 $(a-z)^2\geqslant24(z^2-az+6)$，即 $23z^2-22az+144-a^2\leqslant0$，可见开口向上的抛物线 $y=23x^2-22ax+144-a^2$ 经过不在 x 轴上方的点 $(z,\ 23z^2-22az+144-a^2)$，从而，该抛物线与 x 轴有公共点，故 $\triangle/4=(11a)^2-23(144-a^2)\geqslant0$，即 $a^2\geqslant23$，$a\geqslant\sqrt{23}$（因 a>0）.

当 $a=\sqrt{23}$ 时，取 $x=\dfrac{2}{\sqrt{23}}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt{23}}$，$z=\dfrac{11}{\sqrt{23}}$，所以 a 的最小值为 $\sqrt{23}$

四、【解答】（1）设 a，b，c 是某个直角三角形的三边长，a，b，c 都是有理数，且 $a^2+b^2=c^2$，$\dfrac{1}{2}ab=A$，若 a=b，则 $2a^2=c^2$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，这与 a，c 都是有理数的假定矛盾，故 a≠b。

不妨设 a<b，取 $x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{c}{2}$，$z=\frac{b-a}{2}$，则 x，y，z 都是正有理数，且

$$x^2-y^2=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=\frac{1}{2}ab=A$$

$$y^2-z^2=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\frac{1}{2}ab=A$$

(2)设三个正有理数 x，y，z 满足 $x^2-y^2=y^2-z^2=A$，则 x>y>z，取 a=x-z，b=x+z，c=2y，则 a，b，c 都是正有理数，且

$a^2+b^2=2(x^2+z^2)=4y^2=c^2$，$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(x^2-z^2)=\frac{1}{2}[(x^2-y^2)+(y^2-z^2)]=A$

即存在一个三边长 a、b、c 都是正有理数的直角三角形，它的面积等于 A。