9、分式与分式方程小结

【知识精读】

- 分式
  - 定义：$\dfrac{A}{B}$（A、B为整式，B中含有字母，B不为零）
  - 性质
    - 通分：$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times M}{B\times M}(M\neq 0)$
    - 约分：$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div M}{B\div M}(M\neq 0)$
  - 分式方程
    - 定义：分母含有未知数的方程。如$\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{1}{x+3}$
    - 解法
      - 思想：把分式方程转化为整式方程
      - 方法：两边同乘以最简公分母
      - 依据：等式的基本性质
      - 注意：必须验根
    - 应用：列分式方程解应用题及在其它学科中的应用

【分类解析】

1. 分式有意义的应用

例 1. 若$ab+a-b-1=0$，试判断$\dfrac{1}{a-1}$，$\dfrac{1}{b+1}$是否有意义。

分析：要判断$\dfrac{1}{a-1}$，$\dfrac{1}{b+1}$是否有意义，须看其分母是否为零，由条件中等式左边因式分解，即可判断$a-1$，$b+1$与零的关系。

解：$\because ab+a-b-1=0,\qquad \therefore a(b+1)-(b+1)=0$

即$(b+1)(a-1)=0$

$\therefore b+1=0$或$a-1=0$

$\therefore \dfrac{1}{a-1}$，$\dfrac{1}{b+1}$中至少有一个无意义。

2. 结合换元法、配方法、拆项法、因式分解等方法简化分式运算。

例 2. 计算：$\dfrac{a^2+a-1}{a+1}-\dfrac{a^2-3a+1}{a-3}$

分析：如果先通分，分子运算量较大，观察分子中含分母的项与分母的关系，可采取“分离分式法”简化计算。

解：原式$=\dfrac{a(a+1)-1}{a+1}-\dfrac{a(a-3)+1}{a-3}$

$$=a-\frac{1}{a+1}-(a+\frac{1}{a-3})$$

$$=-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-3}$$

$$=-\frac{(a-3)+(a+1)}{(a+1)(a-3)}$$

$$=-\frac{2a-2}{(a+1)(a-3)}$$

例 3. 解方程：$1-\frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{x^2-5x+5}{x^2-5x+6}$

分析：因为$x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，所以最简公分母为：$(x+1)(x+6)(x-2)(x-3)$，若采用去分母的通常方法，运算量较大。由于

$\frac{x^2-5x+5}{x^2-5x+6}=\frac{x^2-5x+6-1}{x^2-5x+6}=1-\frac{1}{x^2-5x+6}$故可得如下解法。

解：$\because \frac{x^2-5x+6-1}{x^2-5x+6}=1-\frac{1}{x^2-5x+6}$

原方程变为$1-\frac{1}{x^2+7x+6}=1-\frac{1}{x^2-5x+6}$

$\therefore \frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{1}{x^2-5x+6}$

$\therefore x^2+7x+6=x^2-5x+6$

$\therefore x=0$

经检验，$x=0$是原方程的根。

3. 在代数求值中的应用

例 4. 已知a^2-6a+9与$|b-1|$互为相反数，求代数式

$(\frac{4}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{ab^2-a^2b})\div\frac{a^2+ab-2b^2}{a^2b+2ab^2}+\frac{b}{a}$的值。

分析：要求代数式的值，则需通过已知条件求出 a、b 的值，又因为$a^2-6a+9=(a-3)^2\geq 0$，$|b-1|\geq 0$，利用非负数及相反数的性质可求出a、b的值。

解：由已知得$a-3=0$，$b-1=0$，解得$a=3$，$b=1$

原式$=[\frac{4}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{ab(b-a)}]\div\frac{a^2+ab-2b^2}{ab(a+2b)}+\frac{b}{a}$

$$=[\frac{-(a-b)^2}{ab(a-b)(a+b)}]\div\frac{a^2-b^2+ab-b^2}{ab(a+2b)}+\frac{b}{a}$$

$$=\frac{-(a-b)^2}{ab(a-b)(a+b)}\cdot\frac{ab(a+2b)}{(a-b)(a+2b)}+\frac{b}{a}$$

$$=-\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b}$$

把 $a=3$，$b=1$代入得：原式$=\frac{1}{12}$

4. 用方程解决实际问题

例 5. 一列火车从车站开出，预计行程 450 千米，当它开出 3 小时后，因特殊任务多停一站，耽误 30 分钟，后来把速度提高了 0.2 倍，结果准时到达目的地，求这列火车的速度。

解：设这列火车的速度为 x 千米/时

根据题意，得 $\frac{450}{x}=3\frac{1}{2}+\frac{450-3x}{1.2x}$

方程两边都乘以 12x，得 $5400=42x+4500-30x$

解得 $x=75$

经检验，$x=75$是原方程的根

答：这列火车原来的速度为 75 千米/时。

5. 在数学、物理、化学等学科的学习中，都会遇到有关公式的推导，公式的变形等问题。而公式的变形实质上就是解含有字母系数的方程。

例 6. 已知 $x=\frac{2y+3}{3y-2}$，试用含 x 的代数式表示 y，并证明 $(3x-2)(3y-2)=13$。

解：由 $x=\frac{2y+3}{3y-2}$，得 $3xy-2x=2y+3$

$\therefore 3xy-2y=2x+3$

$\therefore (3x-2)y=2x+3$

$\therefore y=\frac{2x+3}{3x-2}$

$\because (3x-2)=\frac{3(2y+3)}{3y-2}-2=\frac{6y+9-6y+4}{3y-2}=\frac{13}{3y-2}$

$\therefore (3x-2)(3y-2)=13$

6、中考原题：

例 7. 已知 $x^2-3x-2=0$，那么代数式 $\frac{(x-1)^3-x^2+1}{x-1}$ 的值是________。

分析：先化简所求分式，发现把 x^2-3x 看成整体代入即可求的结果。

解：原式$=(x-1)^2-(x+1)=x^2-2x+1-x-1=x^2-3x$

$\because x^2-3x-2=0 \qquad \therefore x^2-3x=2$

$\therefore$ 原式 $=x^2-3x=2$

7、题型展示：

例 8. 当 x 取何值时，式子 $\dfrac{|x|-2}{x^2+3x+2}$ 有意义？当 x 取什么数时，该式子值为零？

解：由 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=0$

得 $x=-1$ 或 -2
所以，当 $x\neq-1$ 和 $x\neq-2$ 时，原分式有意义

由分子 $|x|-2=0$ 得 $x=\pm2$

当 $x=2$ 时，分母 $x^2+3x+2\neq0$

当 $x=-2$ 时，分母 $x^2+3x+2=0$，原分式无意义。

所以当 $x=2$ 时，式子 $\dfrac{|x|-2}{x^2+3x+2}$ 的值为零

例 9. 求 $\dfrac{x^2-(m-n)x-mn}{x^2+(m-n)x-mn}\cdot\dfrac{x^2-m^2}{x^2-n^2}$ 的值，其中 $x=2m=3n=-\dfrac{1}{2}$。

分析：先化简，再求值。

解：原式 $=\dfrac{(x-m)(x+n)}{(x+m)(x-n)}\cdot\dfrac{(x+m)(x-m)}{(x+n)(x-n)}$

$$=\frac{(x-m)^2}{(x-n)^2}$$

$\because x=2m=3n=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=2m$，$x=3n$，$m=-\dfrac{1}{4}$，$n=-\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{(x-m)^2}{(x-n)^2}=\dfrac{(2m-m)^2}{(3n-n)^2}$

$$=\frac{m^2}{4n^2}=\frac{(-\frac{1}{4})^2}{4\times(-\frac{1}{6})^2}=\frac{9}{16}$$

【实战模拟】

1. 当 x 取何值时，分式 $\dfrac{2x+1}{1-\dfrac{1}{x}}$ 有意义？

2. 有一根烧红的铁钉，质量是 m，温度是 t_0，它放出热量 Q 后，温度降为多少？（铁的比热为 c）

3. 计算：$x+2y+\dfrac{4y^2}{x-2y}+\dfrac{4x^2y}{4y^2-x^2}$

4. 解方程：$\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+4}{x+3}=\dfrac{x+6}{x+5}-\dfrac{x+8}{x+7}$

5. 要在规定的日期内加工一批机器零件，如果甲单独做，刚好在规定日期内完成，乙单独做则要超过 3 天。现在甲、乙两人合作 2 天后，再由乙单独做，正好按期完成。问规定日期是多少天？

6. 已知 $4x-3y-6z=0$，$x+2y-7z=0$，$xyz\neq 0$，求 $\dfrac{x+y-z}{x-y+2z}$ 的值。

【试题答案】

1. **解**：由题意得$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-\dfrac{1}{x} \neq 0 \end{cases}$

解得 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$

$\therefore$ 当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时，原式有意义

2. **解**：设温度降为 t，由已知得：

$Q = mc(t_0 - t)$　　　　$t_0 - t = \dfrac{Q}{mc}$

$t = t_0 - \dfrac{Q}{mc}$

答：温度降为 $(t_0 - \dfrac{Q}{mc})$ 。

3. **分析**：此题的解法要比将和后两个分式直接通分计算简便，它采用了逐步通分的方法。因此灵活运用法则会给解题带来方便。同时注意结果要化为最简分式。

解：原式 $= \dfrac{(x+2y)(x-2y)+4y^2}{x-2y} + \dfrac{4x^2y}{(2y+x)(2y-x)}$

$$= \frac{x^2}{x-2y} - \frac{4x^2y}{(x+2y)(x-2y)}$$
$$= \frac{x^3+2x^2y-4x^2y}{(x+2y)(x-2y)}$$
$$= \frac{x^2(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}$$
$$= \frac{x^2}{x+2y}$$

4. **解**：原方程化为 $1+\dfrac{1}{x+1}-1-\dfrac{1}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+5}-1-\dfrac{1}{x+7}$

$\therefore \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+7}$

方程两边通分，得 $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{2}{(x+5)(x+7)}$

$\therefore (x+5)(x+7)=(x+1)(x+3)$

化简得 $8x=-32$

解得 $x=-4$

经检验：$x=-4$ 是原方程的根。

说明：解分式方程时，在掌握一般方法的基础上，要注意根据题目的特点，选用简便的方法，减少繁琐计算。

5. **分析**：设规定日期是 x 天，则甲的工作效率为 $\dfrac{1}{x}$，乙的工作效率为 $\dfrac{1}{x+3}$，工作总量为 1

解：设规定日期为 x 天

根据题意，得 $2(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3})+\frac{x-2}{x+3}=1$

解得 $x=6$

经检验 $x=6$ 是原方程的根

答：规定日期是 6 天。

6. **解：**$\because 4x-3y-6z=0$　　(1)，$x+2y+7z=0$　(2)

由(1)(2)解得 $\begin{cases} x=3z \\ y=2z \end{cases}$

$\therefore \frac{x+y-z}{x-y+2z}=\frac{3z+2z-z}{3z-2z+2z}=\frac{4}{3}$