约数和倍数，最大公约数和最小公倍数

约数和倍数是不同的。约数又叫因数 factor，倍数 multiple。两者相互依存。

如果 $p \mid n$（即 n 能被 p 整除），那么 n 就是 p 的倍数，p 就是 n 的约数。

注意：每个数（1除外）至少有两个约数，1和它本身。1也是这个数最小的约数，它本身是这个数最大的约数。

知识要点

1. 一个数的约数的个数是有限个(finite)，但是它的倍数的个数有无限个(infinite)。
2. 约数不大于原数，倍数不小于原数
3. 约数是除法得到的，倍数是乘以一个正整数得到的
4. 约数和倍数都是一系列的数组成的
5. 公因数和最大公因数
6. 公倍数和最小公倍数
7. 分解素因数
8. 辗转相除法
9. 约数个数定理
10. 只在自然数（零除外）范围内研究倍数和因数

约数的个数及个数定理

为了得到一个数的约数个数，首先需要将这个数进行素因数分解，并将结果写成 **指数形式**，即将相同素因数的乘积写成指数形式，如 p^k表示k个p相乘。

指数形式：n个a相乘，记成a^n,它是乘法的简写形式。

一个合数的约数个数，等于它的素因数分解式中每个素因数的个数（即指数）加1的连乘。

对于一个大于 1 正整数 N 可以分解质因数：

$N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{ai} = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdots p_k^{ak}$

则 N 的正约数的个数就是 $f(N) = \prod_{i=1}^{k}(a_i + 1) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ 。

其中 a_1、a_2、a_3、 $\cdots$、 a_k 是 p_1、 p_2、 p_3、 $\cdots$、 p_k的指数

分解素因数是关键

Python语言中有一个模块 sympy, 其中有一个函数 factorint(n) 就可以分解素因数。

```
>>> import sympy
>>> sympy.factorint(32)
{2: 5}
>>> sympy.factorint(132)
{2: 2, 3: 1, 11: 1}
>>> sympy.factorint(35)
{5: 1, 7: 1}
>>> sympy.factorint(360)
{2: 3, 3: 2, 5: 1}
>>> sympy.factorint(240)
{2: 4, 3: 1, 5: 1}
```

GeoGebra 中，也有函数 `Factors(Number)` 进行分解素因数，如 $Factors(32) \to (2\ 5)$;

同时还可以进行 **因式分解** `Factors(Polynomial)` 可以分解因式，如 $Factors(x^3-1) \to \{\{x-1,1\},\{x^2+x+1,1\}\}$。

约数和平方数的关系

为了使得一个数的约数有奇数个，它的所有素因数的指数加 1 就得是奇数，即每一个素因数的指数都是偶数。
如 $49=7^2$，$400=2^4\times5^2$，$90000=2^4\times3^2\times5^4$，
上述这些数都是完全平方数，它们所含的每个素因数，其指数都是偶数。

$\boxed{\text{含有奇数个约数的数是完全平方数，含有偶数个约数的数不是完全平方数。}}$

公约数和公倍数

顾名思义，公约数就是几个数公共的约数，如 2是6、8、10的公约数，其中最大的那个公约数就是**最大公约数**(greatest common divisor)；公倍数就是几个数公共的倍数，如12是3、4、6的公倍数，其中最小的那个公倍数称为 **最小公倍数**(least common multiple)。

特别情况：1是所有数的公约数。

记号：(a,b)或 $\gcd(a,b)$ 表示 a、b 的最大公约数；$[a,b]$或$\operatorname{lcm}(a,b)$ 表示 a、b 的最小公倍数。多个数一样表示，如 $(a,b,c),[a,b,c,d]$。

最大公约数和最小公倍数求法

常用方法有：**短除法、分解素因数和辗转相除法**

分解素因数

1. 先分解素因数，求最大公约数就是求出每一个素因数在所有数中出现的最低次，然后将这些素因数连乘即可。
2. 先分解素因数，求最小公倍数就是求出每一个素因数在所有数中出现的最高次，然后将这些素因数连乘即可。

辗转相除法

又称为欧几里得算法(Euclidean algorithm), 属于带余除法特例

用较大数除以较小数，再用出现的余数（第一余数）去除除数，再用出现的余数（第二余数）去除第一余数，如此反复，直到最后余数是0为止。如果是求两个数的最大公约数，那么最后的除数就是这两个数的最大公约数。

用辗转相除法确定两个正整数 a和$b(a\geq b)$ 的最大公因数 $gcd(a,b)$:

当 $a \mod b=0$ 时, $gcd(a,b)=b$, 否则
$gcd(a,b)=gcd(b,a \mod b)$

递归或循环运算得出结果。

举例说明：

```
gcd(12,32)=gcd(12, 32 mod 12)=gcd(12,8)=gcd(8,12 mod 8)=gcd(8,4)=4
```

Python语言求最大公约数

在Python语言中，有两个库中都包含了gcd函数：`math.gcd(x,y)`， `sympy.gcd(f,g)`，后者还可以计算 **多项式的最大公因式。**

```
>>> import math, sympy
>>> math.gcd(1547,1573)
13
>>> sympy.gcd(1547,1573)
13
>>> from sympy.abc import x
>>> sympy.gcd(x**2 - 1, x**2 - 3*x + 2)
x - 1
```

例题

例题1 求32的约数个数和各个约数

解：

$$\because 32 = 2^5$$
$$\therefore 32\text{有}(5+1) = 6\text{个约数。}$$

它们分别是 $1 \times 32,\ 2 \times 16,\ 4 \times 8$

例题2 求35的约数个数和各个约数

解：

$$\because 35 = 5 \times 7$$
$$\therefore 35\text{有}(1+1) \times (1+1) = 4\text{个约数。}$$

它们分别是 $1 \times 35,\ 5 \times 7$

例题3 求360的约数个数，其中奇数有多少个？

解：

$$\because 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$\therefore 360\text{有}(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24\text{个约数。}$$

奇数约数不能是2的倍数，故只能是3和5的倍数，共有$(2+1) \times (1+1) = 6$个奇数约数。

例题4 求240的约数个数，它所有约数的乘积有多少个约数？

解：

$$\because 240 = 2^4 \times 3 \times 5,$$
$$\therefore 240\text{有}(4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20\text{个约数}$$

20个约数正好可以配成10对，故所有约数乘积为 $240^{10} = (2^4 \times 3 \times 5)^{10} = 2^{40} \times 3^{10} \times 5^{10}$，共有 $(40+1) \times (10+1) \times (10+1) = 4961$ 个约数。

例题5 两数乘积为2800，已知其中一个数的约数个数比另一个数的约数个数多1，这两个数分别是多少？

解：一个数的约数个数比另一个数的约数个数多1，则必定有一个数的约数个数是奇数。

$\because 2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7$, 约数个数为 $(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 30 = 5 \times 6$, 可以拆成 $2^4 \times (5^2 \times 7)$

所以这两个数分别是 $16\text{和}175$。

例题6 计算题

(1) $(391, 357)$，$[391, 357]$；　　(2) $(18, 24, 36)$，$[18, 24, 36]$

解：(1) $\because 391=17\times 23,\ 357=3\times 7\times 17$
$\therefore (391,357)=17,[391,357]=3\times 7\times 17\times 23=8211$

(2) $\because 18=2\times 3^2,\ 24=2^3\times 3,\ 36=2^2\times 3^2$
$\therefore (18,24,26)=2\times 3=6,\ [18,24,36]=2^3\times 3^2=72$

例题7 求 1547、1573、1859 这三个数的最大公约数和最小公倍数。

解析：表面看，这三个数不容易分解素因数，我们采用辗转相除法。

$\because 1573 \mod 1547=26,\ 1547 \mod 26=13,$
$\therefore 13$是它们的公约数

现在可以分解素因数了。

$\because 1573=11^2\times 13,\ 1547=7\times 13\times 17,\ 1859=11\times 13^2,$
$\therefore 13$是它们的最大公约数,
$7\times 11^2\times 13^2=1001\times 11\times 13=143143$是它们的最小公倍数

练习题

1. 72共有多少个约数？其中有多少个约数是3的倍数？

2. 5400共有多少个约数？求出所有约数乘积的素因数分解。

3. 两数乘积为2100，已知其中一个数的约数个数比另一个数的约数个数的2倍还多1，这两个数分别是多少？

4. 计算 (25,105), [25,105], (24,28,42), [24,28,42]

5. （1）求1085和1178的最大公约数和最小公倍数；（2）求3553、3910和1411的最大公约数。

6. 自然数 n 是 1,2,3,...,10的倍数，且它恰好有72个约数，那么 n 的最小值是多少？

作业

1. 1350的约数有多少个？其中有多少个是奇数？

2. 在1~600中，恰好有3个约数的数有几个？

3. 将1080分解成两个数的乘积，其中一个数的约数比另一个多1，那么这两个数分别是多少？

4. 计算：（1）gcd(28,72), [28,72]; (2) gcd(28,44,260), [28,44,260]

5. 利用辗转相除法计算：(1) gcd(7191,38211), (2) [693,546,378]