整除问题进阶篇

整除的一些基本性质

关于整数的整除，有如下一些基本性质：

- 性质1 整除传递性: 若 $b \mid a$，$c \mid b$，则 $c \mid a$.
- 性质2 和差整除性: 若 $c \mid a$，$c \mid b$，则 $c \mid (a \pm b)$.
- 性质3 若 $c \mid a$，$c \nmid b$，则 $c \nmid (a \pm b)$.
- 性质4 若 $b \mid a$，$d \mid c$，则 $bd \mid ac$.
- 性质5 若 $a = b + c$，且 $m \mid a$，$m \mid b$，则 $m \mid c$.
- 性质6 若 $b \mid a$，$c \mid a$，则 $[b,c] \mid a$, 此处$[b,c]$为 b，c 的最小公倍数. 特别地，当 $(b,c) = 1$ 时，$bc \mid a$, 此处 (b,c) 为 b，c 的最大公约数.
- 性质7 若 $c \mid ab$，且 $(c,a) = 1$，则 $c \mid b$. 特别地，若 p 是素数，且 $p \mid ab$，则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.
- 性质8 若 $a \neq b$，n 是自然数，则 $(a - b) \mid (a^n - b^n)$.
- 性质9 若 $a \neq -b$，n 是正偶数，则 $(a + b) \mid (a^n - b^n)$.
- 性质10 若 $a \neq -b$，n 是正奇数，则 $(a + b) \mid (a^n + b^n)$.

模的理解

“模”是指一个计量系统的计数范围；如时钟，12个整点为计算范围，则模为12；计算机也是一个计量机器，模为32位或者64位；

32位计算机正常理解: 在模范围内能表达的有 $[0, 2^{32} - 1]$；那么负数该怎么表达呢，所以出现了 **补码**；也就是 **正数 + 负数** 正好达到模的溢出阀值 2^{32}；所以在计算机中负数是用补码方式表达的原因；

关于补码的例子：在12模的时钟中, 假设当前时针指向10点,而准确时间是6点,调整时间可有以下两种拨法:

倒拨4小时,即：10-4=6，(10-4) mod 12 = 6
顺拨8小时：10+8=12+6=6，(10+8) mod 12 = 6
在以12模的系统中，加8和减4效果是一样的；因此凡是减4运算，都可以用加8来代替。对“模”而言，8和4互为补数。实际上以12模的系统中11和1、10和2、9和3、7和5、6和6都有这个特性；共同的特点是两者相加等于模。

“取模”实质上是计量器产生“溢出”的量，它的值在计量器上表示不出来，计量器上只能表示出模的余数(取模)；任何有模的计量器，均可化为加减法运算。

5 mod 3 = 2 例子中；模为3；2为取模的值。

计算机中取模的应用思想

取模的本质是：取模的值，必定在模的范围内；所以，计算机领域引用该特性，使元素路由算法不超出边界，并有规则存放。

首先确定模(范围)；元素取模，使元素有规则的落入模的范围内的容器中。

如：hashMap、数据库分表、分布式节点路由算法等。

取模和取余的区别

- 取余运算: 在计算商值时, 商值向0方向舍入(remainder()函数)；靠近原则

  Python语言中的 `math.remainder(x,y)` 就是返回取余结果 $x-n\times y$，这里的 $n\times y$ 是最接近 x 的数(在Python中，没有限制 x和y 是整数), 不难发现此处 n 为偶数。

  举例

```
>>> import math
>>> math.remainder(-7,-4)  # 1.0=-7-(-4)*2
1.0
>>> math.remainder(-7,4)  # 1.0=-7-(4)*(-2)
1.0
>>> math.remainder(7,-4)  # -1.0=7-(-4)*(-2)
-1.0
>>> math.remainder(7,4)  # -1.0=7-(4)*2
-1.0

>>> math.remainder(-7,-3)  # -1.0=-7-(-3)*2
-1.0
>>> math.remainder(-7,3)  # -1.0=-7-(3)*(-2)
-1.0
>>> math.remainder(7,-3)  # 1.0=7-(-3)*(-2)
1.0
>>> math.remainder(7,3)  # 1.0=7-(3)*2
1.0
```

- 取模运算: 在计算商值时, 商值向负无穷方向舍入(地板函数 floor$(x)\leq x$；尽可能让商值小的原则(不超过商值的最大值)

  举例:
  -7 mod 4= 1(商=-2, 向负无穷大方向舍入)
  7 mod -4=-1(商=-2, 向负无穷大方向舍入)
  -7 mod -4=-3(商=1, 靠近0原则)
  7 mod 4= 3(商=1, 靠近0原则)

  可以用Python语言中的 `math.floor(-7/-4)` 来验证商，用 `-7%-4` 来验证取模运算(Python中用百分号 `%` 表示取模运算 mod)。

```
>>> import math
>>> math.floor(-7/-4)  # 1<-7/-4=1.25
1
>>> math.floor(-7/4)  # -2<-7/4=-1.25
-2
>>> math.floor(7/-4)  # -2<7/-4=-1.25
-2
>>> math.floor(7/4)  # 1<7/4=1.25
1
>>> -7 % -4  # -7=-4*1-3
-3
>>> -7 % 4  # -7=4*(-2)+1
1
>>> 7 % -4  # 7=-4*(-2)-1
-1
>>> 7 % 4  # 7=4*1+3
3
```

取模和取余的计算步骤

假设有整数 a 和 b，那么取模和取余运算可以分为两步运算：

(1) 求整数商：$c = a \div b$;
(2) 计算余数：$r = a - (c \times b)$;
(3) 计算模：$a \bmod b = a - b \times [a \div b]$ （$[a \div b]$表示整数商）

求商、取模和取余案例

a	b	求商 floor(a/b)	求余 remainder(a,b)	取模 a%b
-3	-5	0	2	-3
-3	5	-1	2	2
3	-5	-1	-2	-2
3	5	0	-2	3
-3	-4	0	1	-3
-3	4	-1	1	1
3	-4	-1	-1	-1
3	4	0	-1	3
-3	-2	1	1	-1
-3	2	-2	1	1
3	-2	-2	-1	-1
3	2	1	-1	1
-4	-3	1	-1	-1
-4	3	-2	-1	2
4	-3	-2	1	-2
4	3	1	1	1
-7	-4	1	1	-3
-7	4	-2	1	1
7	-4	-2	-1	-1
7	4	1	-1	3
-7	-3	2	-1	-1
-7	3	-3	-1	2
7	-3	-3	1	-2
7	3	2	1	1

上述表格使用Python程序实现的，代码如下：

```python
from math import remainder, floor

myList=[[-3,-5],[-3,5],[3,-5],[3,5],
        [-3,-4],[-3,4],[3,-4],[3,4],
        [-3,-2],[-3,2],[3,-2],[3,2],
        [-4,-3],[-4,3],[4,-3],[4,3],
        [-7,-4],[-7,4],[7,-4],[7,4],
        [-7,-3],[-7,3],[7,-3],[7,3]]


if __name__ == "__main__":
    print("|a \t|b \t|求商 floor(a/b)|求余 remainder(a,b)|取模 a%b|")
    print("|--- \t|--- \t|--- \t|--- \t|--- \t|")
    for grp in myList:
        a, b = grp
        print("|{a}\t|{b}\t|{f}\t|{r}\t|{m}\t|".format(a=a,b=b,
               f=floor(a/b),r=round(remainder(a,b)),m=a%b))
```

基本性质

1. 若$p|(a-b)$，则 $a \equiv b (\mathrm{mod}\ p)$。例如 $11 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7)$，$18 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7)$
2. 若(a % p)=(b % p) $\iff$ $a \equiv b$ (% p)
3. 对称性：$a \equiv b$ (% p) 等价于 $b \equiv a$ (% p)
4. 传递性：若 $a \equiv b$ (% p) 且 $b \equiv c$ (% p)，则 $a \equiv c$ (% p)

   注：百分号 % 表示 取模运算 mod，以下雷同

运算规则

模运算与基本四则运算有些相似，但是除法例外。其规则如下：

1. ($a+b$) % p = (a % p $+b$ % p) % p
2. ($a-b$) % p = (a % p $-b$ % p) % p
3. ($a \times b$) % p = (a % p $\times b$ % p) % p
4. a^b % p = ((a % p)^b) % p

   结合律：

5. (($a+b$) % p $+c$) % p = ($a+(b+c)$ % p) % p
6. (($a \times b$) % p $\times c$)% p = ($a \times (b \times c)$ % p) % p

   交换律：

7. ($a+b$) % p = ($b+a$) % p
8. ($a \times b$) % p = ($b \times a$) % p

   分配律：

9. ($a+b$) % p = (a % p + b % p)
10. (($a+b$) % p $\times c$) % p = (($a \times c$) % p + ($b \times c$) % p) % p

重要定理

11. 若 $a \equiv b$ (% p)，则对于任意的 c，都有 $(a+c) \equiv (b+c)$ (% p)
12. 若 $a \equiv b$ (% p)，则对于任意的 c，都有 $(a \times c) \equiv (b \times c)$ (% p)
13. 若 $a \equiv b$ (% p)，$c \equiv d$ (% p)，则 $(a+c) \equiv (b+d)$ (% p)，$(a-c) \equiv (b-d)$ (% p)， $(a \times c) \equiv (b \times d)$ (% p)

举例说明

例1

求证：形如 $\overline{abcabc}$ 的六位数一定能被7、11、13同时整除

证明：$\because \overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \times 1001, 1001 = 7 \times 11 \times 13 \therefore$ $7, 11, 13$同时整除$\overline{abcabc}$

特殊情况下，如果 $\overline{abc} = 111$, 则 $7, 11, 13$同时整除111111。

例2

已知 51位数 $\overline{\underbrace{55\cdots5}_{25个5}\square\underbrace{99\cdots9}_{25个9}}$ 能被13整除，中间方格内的数字是多少?

解： $\because 555555 = 5 \times 111111, 999999 = 9 \times 111111$
$\therefore 13|555555, 13|999999$

$\overline{\underbrace{55\cdots5}_{25个5}\square\underbrace{99\cdots9}_{25个9}}$

$= \overline{\underbrace{55\cdots5}_{24个5}5\square9\underbrace{99\cdots9}_{24个9}}$

$= \underbrace{55\cdots5}_{24个5} \times 10^{27} + \overline{5\square9} + \underbrace{99\cdots9}_{24个9}$

只要 $13 \mid \overline{5\square9}$, 原来的51位数就必能被13整除。 利用被13整除的数的截尾法，得到 $5\square + 9 \times 4$ 能被13整除。 所以只有 $13 \mid 559$,方格内填数字5.

拓展：能被11整除，方格内填数字 3；能被7整除，方格内也需填3.

例3

已知多位数 $\overline{81\square\underbrace{258258\cdots258}_{2020个258}}$ 能同时被7和13整除，方格内的数字是多少?

解：采用例1的结论，以及整除的性质：和的整除性，可知，只要首3位能够倍$7 \times 13 = 91$整除，通过计算，只有 $91 \mid 819$,故方格内填9.

例4

用数字6、7、8各两个，可以组成能被6、7、8同时整除的六位数，请写出一个满足要求的六位数。

解：采用例1方式，由6、7、8组成的三位数连写两遍，一定能被7整除，且3|(6+7+8), 只要保证末尾是偶数6或8，则这样组成的六位数必定整除6，故只要考虑能被8整除的情形。
末三位能够被8整除，经验证，8|768，故满足条件的六位数是 768768.

例5

对于一个自然数N, 如果具有以下性质就被称为“破坏数”：把它添加到任何一个自然数的右端，形成的新数都不能被N+1整除。问：一共有多少个不大于10的破坏数?

解：要注意“任意自然数”，只要有一个不满足，就不是破坏数。满足两个条件：

1. $N+1 \nmid \overline{aN}, a$为任意自然数
2. $N \leq 10, N$为0,1,2,...,10

数量不多，用枚举法即可以解决问题。

N	N+1	$N+1 \nmid aN$	反例或成立
0	1	$1 \nmid a0$	$1 \mid 10$
1	2	$2 \nmid a1$	成立
2	3	$3 \nmid a2$	$3 \mid 12$
3	4	$4 \nmid a3$	成立
4	5	$5 \nmid a4$	成立
5	6	$6 \nmid a5$	成立
6	7	$7 \nmid a6$	$7 \mid 56$
7	8	$8 \nmid a7$	成立
8	9	$9 \nmid a8$	$9 \mid 18$
9	10	$10 \nmid a9$	成立
10	11	$11 \nmid a10$	$11 \mid 110$

结论：不大于10的破坏数有1, 3, 4, 5, 7, 9 共6个。

答：一共有6个不大于10的破坏数。

例6

一个五位数，它的末三位数为 999， 如果这个数能被 23 整除，那么这个五位数最小是多少?

解： 设两位数为$\overline{ab}$，则 $\overline{ab999}$ 能被23整除，

$$\begin{aligned} &\because 1000 \times \overline{ab} + 999 \\ &= 43 \times 23 \times \overline{ab} + 11\overline{ab} + 43 \times 23 + 10 \\ &= (43 \times 23 \times \overline{ab} + 43 \times 23) + (11\overline{ab} + 10) \end{aligned}$$

$$\therefore 23 \mid (43 \times 23 \times \overline{ab} + 43 \times 23) + (11\overline{ab} + 10);$$

$$\begin{aligned} &\because 23 \mid 43 \times 23 \times \overline{ab} + 43 \times 23, \\ &\therefore 23 \mid (11\overline{ab} + 10); \end{aligned}$$

设 $11\overline{ab} + 10 = 23n,\ n \in \mathrm{N}^+$， 则 $\overline{ab} = (22n - 11) \div 11 + (n + 1) \div 11$，

故有 $11 \mid (n+1)$，n 最小为 10， 这时 m 最小为：$(23 \times 10 - 10) \div 11 = 20$，

综上所述，所求五位数最小为 20999。

答：这个五位数最小是20999。

练习题

练习1

已知数 $\underbrace{\overline{11\cdots1}}_{2010个1}\square\underbrace{\overline{33\cdots3}}_{2010个3}$ 能被13整除，那么中间方格内的数字是多少？

练习2

已知数 $\underbrace{\overline{182182\cdots182}}_{2009个182}\square\underbrace{\overline{189189\cdots189}}_{2009个189}$ 能被7和13整除，那么中间方格内的数字是多少？

练习3

写出由数字1和2组成的能被11整除的最小多位数。（1和2都要至少使用1次）

练习4

萝莉用{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}这10个数字组成两个多位数（10个数字都要用上，每个数字智能用一次），然后吉米将这两个数求和并把结果写在黑板上，迈克擦去了黑板上的一个数字，剩下的结果为14317，那么迈克擦去的数字是多少？（提示：考虑9的整除特性）

练习5

一个五位数 $\overline{32\square64}$ 能被37整除，那么这个五位数是几？

练习6

用两个0，两个1，两个2，两个3，两个4组成一个十位数，使得它能同时被2、5、8、11整除，那么这样的十位数最小是多少？最大是多少？

作业

1. 如果六位数 $\overline{1949\square\square}$ 能同时被3、5、7整除，那么这个六位数是多少？

2. 已知A是一个自然数，它由数字0和2组成，且能同时被3和5整除，那么A最小是多少？

3. 是否能在方框 $\square$ 中填入一个数字，使得 $13 \mid \overline{\underbrace{11\cdots1}_{13个1}\square\underbrace{66\cdots6}_{13个6}}$。

4. 由数字1、2、3各两个组成一个六位数，有些能同时被7和8整除，请写出一个这样的六位数。

5. 一个多位数的末三位数是888，并且能被19整除，那么这个多位数最小是多少？