2008 年上海市初中数学竞赛（新知杯）

一、填空题答案

1、$\sqrt{3}/3$　　从常识出发：△QPB 必为等腰直角三角形或为一内角 60°的直角三角形，否则怎么可能求得出具体的值呢？一次三角形全等就可以搞定。

2、答案：$a_{max}=5$。

应该用函数图像来解。

即：$|2x-6|\geqslant a-x^2$ 一作图可知：$6-2x\geqslant a-x^2$ 有唯一交点，则 $\Delta=0$，完毕。

事实上：类似的方程或不等式均可以改为两个函数图像的方法来解决，希望学生好好体会。

3、6632　　这题是周期问题，没有难度，找一下规律就可以知道答案。

4、$\sqrt{7}/3$

此题等同于：一三角形两边长分别为 1、1/3，两边所夹的角为 60°，求第三条边的长度。但此题有两次转折：即考查两点之间直线段最短与如何转换的问题。连接 PD，由对称性可知：PD＝PB，D、P、E 在一直线时有最小值；下一步的难点是：解三角形，快一点的言辞是用“余弦定理”，如果不会也没有关系，作高也能求出正确答案。

5、x1=a+1　　x2=(a+1)/a

答案：当 $a=0$ 时无解，当 $a\neq0$ 时，$x=a+1$，$x=1+1/a$。

考虑到填空题的特殊性，这一题学生可能不得分。虽说是一道简单的含字母的方程，但填空题的难度在于：你的答案与标准答案有丝毫的差别——均不得分。

6、$11\sqrt{3}$　　本题知识点是：（1）正三角形内一点到三边的距离等于三角形的高，（2）面积比等于对应边之比的平方。

7、672

分解质因数而已。仅有一个的不考虑，则 $n!=2^{30}\times3^{13}\times5^{5}\times7^{3}$，一个乘法原理即可。

8、48°

延长 BA 至 F，则△ADE≌△AFE，AE 平分∠FED，且∠BFE＝∠ABE，代换一下即可。

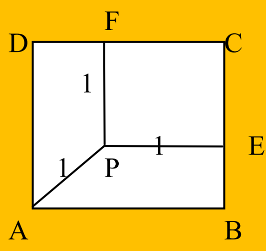
9、$(3-\sqrt{3})/4$

看图:阴影矩形为正方形（从正三角形出发）。

10、30360

基本功题：首先是：x^2-x-k 的因式分解，其次是求和问题。

二、如图，在矩形 ABCD 内部（不包括边界）有一点 p,它到顶点 A 及边 BC、CD 的距离都等于 1，求矩形 ABCD 面积的取值范围。



答案：$2<S\leq 3/2+2^{1/2}$。

本题是考察基本不等式的运用技巧。我估计我的学生可以得一半分。

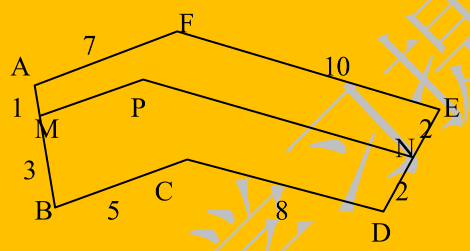
看提示图：$x+y>1$，$x^2+y^2=1$，

$S=(1+x)(1+y)=1+x+y+xy$，以下即用基本不等式进行放大与缩小。

三、已知实数 x，y 满足如下条件：$\begin{cases} x+2y>0 \\ x-2y>0 \\ (x+2y)(x-2y)=4 \end{cases}$ 求|x|-|y|的最小值

答案：$4\times 3^{1/2}/3$。换元法技巧而已。只要令 $x=(a+b)/2$，$y=(a-b)/2$，利用对称性，设 $y>0$ 即可。

四、如图，在凹六边形 ABCDEF 中，∠A、∠B、∠D、∠E 均为直角，P 是凹六边形 ABCDEF 内的一点，PM、PN 分别垂直于 AB、DE，垂足分别为 M、N，图中的每条线段的长度如图所示（单位是米），求折线 MPN 的长度（精确到 0.01 米）。



答案：15.50。

看图： 纯粹的解三角形的死做题。

只要边 CF，则与 NP 的交点即为中点，并取 AB 中点，慢慢解了。

希学生注意：可以使用计算器，一定要掌握。

五、求满足不等式 $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]<n$ 的最大正整数 n，其中[x]表示不超过实数 x 的最大整数。

答案：1715。

高斯函数题，再加上放大与缩小的应用。

∵ $[n/2]+[n/3]+[n/11]+[n/13]<n$，其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。

∴ $[n/2]+[n/3]+[n/11]+[n/13]\leq n-1$

即 $n-1\geq (n-1)/2+(n-1)/3+(n-1)/11+(n-1)/13$

后面就没有什么了。

第四题的三种解法

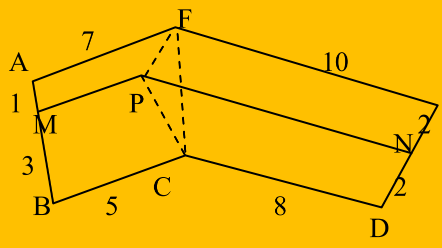


图 1

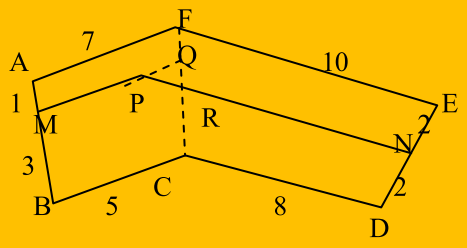


图 2

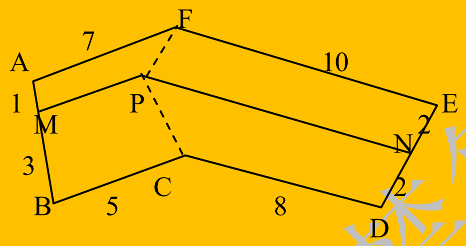


图 3

解法一、如图 1，设 PM=x，PN=y

由于梯形 AMPF、MBCP、PCDN、FPNE 的面积之和等于梯形 ABCF、FCDE 的面积之和，因而可列得方程

$$\frac{1}{2}\cdot(7+x)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(x+5)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(y+8)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(10+y)\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot(7+5)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(10+8)\cdot 4$$

整理得　x+y=15.50

解法二、如图 2，容易求得

$MQ=\dfrac{3\times 7+1\times 5}{3+1}=6.5$　，$RN=\dfrac{10+8}{2}=9$

又易知∠PQR=∠PRQ,则 PQ=PR,从而

MP+PN=MQ+RN=15.50

解法三：如图 3，设 PM=x，PN=y

在直角梯形 AMPF、MBCP、PCDN、FPNE 中，由勾股定理可列得方程组

$$\begin{cases} FP^2=(7-x)^2+1^2=(y-10)^2+2^2 \\ PC^2=(x-5)^2+3^2=(y-8)^2+2^2 \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=5.25 \\ y=10.25 \end{cases}$，所以 x+y=15.50

====================

翔文学习　数学频道