**5、用十字相乘法把二次三项式分解因式**

**【知识精读】**

对于首项系数是1的二次三项式的十字相乘法，重点是运用公式

***x2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)***进行因式分解。掌握这种方法的关键是确定适合条件的两个数，即把常数项分解成两个数的积，且其和等于一次项系数。

对于二次三项*ax2+bx+c*（*a*、*b*、*c*都是整数，且*a*≠0）来说，如果存在四个整数满足，并且，那么二次三项式*ax2+bx+c*即 可以分解为。这里要确定四个常数，分析和尝试都要比首项系数是1的类型复杂，因此一般要借助画十字交叉线的办法来确定。

下面我们一起来学习用十字相乘法因式分解。

**【分类解析】**

**1. 在方程、不等式中的应用**

**例1**. 已知：*x*2－11*x*+24>0，求*x*的取值范围。

**分析：**本题为二次不等式，可以应用因式分解化二次为一次，即可求解。

**解： ∵***x*2－11*x*+24>0 ∴(*x*－3)(*x*－8)>0 分解为



∴ *x*>8 或 *x*<3

**例2**. 如果*x*4－*x*3+*mx*2－2*mx*－2能分解成两个整数系数的二次因式的积，试求*m*的值，并把这个多项式分解因式。

**分析：**应当把*x*4分成*x*2·*x*2，而对于常数项－2，可能分解成(－1)×2，或者分解成(－2)×1，由此分为两种情况进行讨论。

**解：**（1）待定系数法，设原式分解为(*x*2+*ax*－1)(*x*2+*bx*+2)，其中*a*、*b*为整数，去括号，得： *x*4+(*a*+*b*)*x*3+*x*2+(2*a*－*b*)*x*－2

将它与原式的各项系数进行对比，得：

*a*+*b*=－1, *m*=1, 2*a*－*b*=－2*m*

解得：*a*=－1，*b*=0，*m*=1

此时，原式=(*x*2+2)(*x*2－*x*－1)

（2）设原式分解为(*x*2+*cx*－2)(*x*2+*dx*+1)，其中*c*、*d*为整数，去括号，得：

*x*4+(*c*+*d*)*x*3－*x*2+(*c*－2*d*)*x*－2

将它与原式的各项系数进行对比，得：

*c*+*d*=－1, *m*=－1, *c*－2*d*=－2*m*

解得：*c*=0, *d*=－1, *m*=－1

此时，原式=(*x*2－2)(*x*2－*x*+1)

**2. 在几何学中的应用**

**例**. 已知：长方形的长、宽为*x*、*y*，周长为16*cm*，且满足*x*－*y*－*x*2+2*xy*－*y*2+2=0，求长方形的面积。

**分析：**要求长方形的面积，需借助题目中的条件求出长方形的长和宽。

**解：∵***x*－*y*－*x*2+2*xy*－*y*2+2=0

∴ (*x*2－2*xy*+*y*2)－(*x*－*y*)－2=0,

(*x*－*y*)2－(*x*－*y*)－2=0,

(*x*－*y*－2)(*x*－*y*+1)=0,

∴ *x*－*y*－2=0 或者 *x*－*y*+1=0

又 ∵*x*+*y*=8

∴ 

解得：或

∴长方形的面积为15*cm*2或 *cm*2

**3、在代数证明题中的应用**

**例**. 证明：若4*x*－*y*是7的倍数，其中*x*，*y*都是整数，则8*x*2+10*xy*－3*y*2是49的倍数。

**分析：**要证明原式是49的倍数，必将原式分解成49与一个整数的乘积的形式。

**证明一：**8*x*2+10*xy*－3*y*2 = (2*x*+3*y*)(4*x*－*y*) , 2(2*x*+3*y*)=4*x*+6*y*=4*x*－*y*+7*y*

∵4*x*－*y*是7的倍数，7*y*也是7的倍数（*y*是整数）

∴2(2*x*+3*y*)是7的倍数

而2与7互质，因此，2*x*+3*y*是7的倍数，所以8*x*2+10*xy*－3*y*2是49的倍数。

**证明二：**∵4*x*－*y*是7的倍数，设4*x*－*y*=7*m*（*m*是整数）, 则*y*=4*x*－7*m*

又∵8*x*2+10*xy*－3*y*2 = (2*x*+3*y*)(4*x*－*y*)

∴(2*x*+12*x*－21*m*)(4*x*－4*x*+7*m*)=7*m*(14*x*－21*m*)=49*m*(2*x*－3*m*)

∵*x*，*m*是整数，∴*m*(2*x*－3*m*)也是整数,

所以，8*x*2+10*xy*－3*y*2是49的倍数。

**4、中考点拨**

**例1**.把4*x*4*y*2－5*x*2*y*2－9*y*2分解因式的结果是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

**解：**原式= *y*2(4*x*4－5*x*2－9)= *y*2(4*x*2－9) (*x*2+1)= *y*2(2*x*－3)(2*x*+3) (*x*2+1)

说明：多项式有公因式，提取后又符合十字相乘法和公式法，继续分解彻底。

**例2.** 因式分解：6*x*2－7*x*－5=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**解：**原式=(2*x*+1)(3*x*－5)

说明：分解系数时一定要注意符号，否则由于不慎将造成错误。

**5、题型展示**

**例1**. 若*x*2－*y*2+*mx*+5*y*－6能分解为两个一次因式的积，则*m*的值为（ ）

*A*. 1 *B*. －1 *C*.  *D*. 2

**解：***x*2－*y*2+*mx*+5*y*－6=(*x*+*y*)(*x*－*y*)+*mx*+5*y*－6,

－6可分解成(－2)×3或(－3)×2，且考虑到*y*的系数为5，因此，存在两种情况：



由（1）可得：*m*=1，由（1）可得：*m*=－1

故选择*C*。

说明：对二元二次多项式分解因式时，要先观察其二次项能否分解成两个一次式乘积，再通过待定系数法确定其系数，这是一种常用的方法。

**例2**. 已知：*a*、*b*、*c*为互不相等的数，且满足(*a*－*c*)2=4(*b*－*a*)(*c*－*b*)。求证：*a*－*b*=*b*－*c*

**证明： ∵** (*a*－*c*)2=4(*b*－*a*)(*c*－*b*)

∴ (*a*－*c*)2－4(*b*－*a*)(*c*－*b*)=0,

*a*2－2*ac*+*c*2－4*bc*+4*ac*－4*ab*+4*b*2=0,

∴ (*a*+*c*)2－4*b*(*a*+*c*)+4*b*2=0

(*a*+*c*－2*b*)2=0, *a*+*c*－2*b*=0

∴ *a*－*b*=*b*－*c*

说明：抓住已知条件，应用因式分解使命题得证。

**例3**. 若*x*3+5*x*2+7*x*+*a*有一因式*x*+1。求*a*，并将原式因式分解。

**解：∵***x*3+5*x*2+7*x*+*a*有一因式*x*+1,

∴当*x*+1=0，即*x*=－1时，*x*3+5*x*2+7*x*+*a*=0,

∴*a*=3,

*x*3+5*x*2+7*x*+3=*x*3+*x*2+4*x*2+4*x*+3*x*+3=*x*2(*x*+1)+4*x*(*x*+1)+3(*x*+1)

=(*x*+1)(*x*2+4*x*+3)=(*x*+1)(*x*+1)(*x*+3)=(*x*+1)2(*x*+3)

说明：由条件知，*x*=－1时多项式的值为零，代入求得*a*，再利用原式有一个因式是*x*+1，分解时尽量出现*x*+1，从而分解彻底。

**【实战模拟】**

1. 分解因式：

（1）*a*2*b*2+16*ab*+39 （2）15*x*2*n*+7*xnyn*+1－4*y*2*n*+2 （3）(*x*2+3*x*)2－22(*x*2+3*x*)+72

2. 在多项式*x*+1, *x*+2, *x*+3, *x*2+2*x*－3, *x*2+2*x*－1, *x*2+2*x*+3，哪些是多项式(*x*2+2*x*)4－10(*x*2+2*x*)2+9的因式？

3. 已知多项式2*x*3－*x*2－13*x*+*k*有一个因式，求*k*的值，并把原式分解因式。

4. 分解因式：3*x*2+5*xy*－2*y*2+*x*+9*y*－4

5. 已知：*x*+*y*=0.5, *x*+3*y*=1.2，求3*x*2+12*xy*+9*y*2的值。

**【试题答案】**

1. （1）**解：**原式

（2）**解：**原式

（3）**解：**原式

2. **解：**



∴其中是多项式

的因式。

说明：先正确分解，再判断。

3. **解：**设

则



解得：

且

说明：待定系数法是处理多项式问题的一个重要办法，所给多项式是三次式，已知有一个一次因式，则另一个因式为二次式，由多项式乘法法则可知其二次项系数为1。

4. **解：**简析：由于项数多，直接分解的难度较大，可利用待定系数法。

设



比较同类项系数，得：

解得：



5. **解：**





说明：用因式分解可简化计算。