关键词：数，分类，数轴，整数，整除，质数（素数），合数，奇数，偶数，应用

# 整除规则 Divisibility Rule

**【预备知识】**

**整数 Integer**

正整数（positive integer）、零(zero)、负整数(negative integer)，统称为整数。

零和正整数统成为自然数(natural number)。

**【整除定义】Definition**

（**带余除法**）对于任意整数*a*和非零整数*b*，必有唯一一对整数（*p*，*r*），使得*a*=*bp*+*r* (0≤*r*＜*b*),其中*p*为商，*r*为余数，特别地，当*r*=0时，即*a*=*bp*，则称*a*被*b*整除，或称*b*整除*a*，记为*b*|*a*. 若*r*≠0，则称*b*不整除*a*，记为。描述了两个自然数之间的一种特殊关系。

**表示方法：**

*b*|*a* 表示*b*整除*a*，即*a*是*b*的**倍数**，*b*是*a*的**约数（或因数**）。如3|15, 说明3是15的约数，或15是3的倍数，或3整除15，或15能被3整除。

**整除练习**

1、下列各组数中，第一个数能被第二个数整除的是： ( D )

A. 4和12 B. 24和5 C. 35和8 D. 91和7

2、除式9÷1.5=6表示 ( C )

A. 9能被1.5整除 B. 1.5能整除9 C. 9能被1.5除尽 D. 以上说法都不确切

3、28能被*a*整除，*a*一定是 ( D )

A. 4或7 B. 2、4或7 C.2、4、7、14或28 D. 1、2、4、7、14或28

4、18÷9=2，我们就说18能被9整除或9能整除18.

5、能整除14的数是1、2、7、14。

以上4题考察同学对整除的理解。

第1题需要分清“……能被……整除”和“…能整除…”的概念，若将题目改成“下列各组数中，第一个数能整除第二个数的是”，就得选A了。

第2题考的是“……能被……整除”、“…能整除…”、“除尽”的概念，整除必须满足“3个整”——被除数、除数和商都是整数，而除尽只要“余零”就可以了。

第3题必须不缺不漏地把能整除28的数找出来，方法有2种：除式和乘式。找一个数的因数时也可以用这两种方法。

**【因数与倍数】（都指正整数）**

如果数*a*能被数*b*整除，那么*a*就叫做*b*的倍数，*b*叫做*a*的因数(也称为约数)。

因数、倍数是互相依存的。不能说*a*是倍数、*b*是因数！

一个整数的因数的个数是有限的，其中最小的因数是1，最大的因数是它本身。

一个整数的倍数的个数是无限的，没有最大的倍数，其中最小的倍数是它本身。

1只有一个因数1，除1以外的整数，至少有2个因数。

**求法：**

因数的求法有2种，列乘法算式和列除法算式。

**性质：**

一个非零整数既是它本身的约数又是它本身的倍数。

1是任何一个整数的因数，任何整数都是1的倍数。

0是任何一个不为0的整数的倍数，任何一个不等于0的整数都是0的因数。

**因数和倍数练习**

6、 6的因数有 ( C )

A.8个 B. 6个 C. 4个 D. 2个

7、6的倍数有 ( D )

A.1个 B. 2个 C. 3个 D. 无数个

8、已知14能整除*a*，那么*a*是 ( D )

A.1和14 B. 2和14 C. 14的因数 D. 14的倍数

9、下列说法错误的是 ( C )

A. 一个整数的因数的个数是有限的，最小的是1，最大的是它本身

B. 一个正整数的倍数的个数是无限的，最小的是它本身

C. 12在100以内的倍数共有10个

D. 一个数既是16的因数，又是16的倍数，这个数就是16

以上4题考察因数和倍数的掌握程度

第6题考察学生是否能正确找出6的所有因数：1、2、3和6，共4个。

第7题考倍数的性质，一个整数的倍数有无数个。

第8题考点有二：1. 是“能整除”，2. 是“倍数”“因数”的概念。

第9题，根据求倍数的方法，可以发现100以内12的倍数应有8个，因为12×8=96.

**【整除规律】(针对整数而言)**

掌握 被2，3，5整除规律；被4，6，8，9，10，25，100，125整除规律；被7，11，12，13，17，19整除规律。

**被2整除规律**： 最后一位数是0,2,4,6,8。

能被2整除的数，是偶数（2n），不能被2整除的数是奇数（2n+1，或2n-1）；

**被5整除规律**： 最后一位数是5或0．

**被10整除规律**： 最后一位数为0（同时被2和5整除）．

**被4整除规律**： 最后两位数是4的倍数。如312,200,532,616,908,724

**被25整除规律**： 最后两位数是25的倍数，即是00,25,50,75

**被100整除规律**： 最后两位数是00．

**被8整除规律**： 最后三位数是8的倍数．

**被125整除规律**： 最后三位数是125的倍数。

**被3整除规律**：一个整数所有数位相加之和（即数字和）是3的倍数。

**被9整除规律**：一个整数所有数位相加之和（即数字和）是9的倍数。

**被6整除规律**：一个整数能同时被2和3整除。

**被12整除规律**：同时被3和4整除。

**被7整除规律**：

一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，**减去**个位数的**2**倍，如果差是7的倍数。如果差太大或心算不易看出是否7的倍数，就需要继续上述「**截尾、倍大、相减、验差**」的过程，直到能清楚判断为止。

例如，判断133是否7的倍数的过程如下：13－3×2＝7，因为7|7，所以133是7 的倍数；

又例如判断6139是否7的倍数的过程如下：613－9×2＝595 ， 59－5×2＝49，因为7|49，所以6139是7的倍数，余类推。

**余数分类：**

整数被2除，余数只有两类，0（偶数2*n*）和1（奇数2*n*+1）；

整数被3除，余数只有3类：0（3*n*），1（3*n*+1）和-1（3*n*-1）【有时候说2（3*n*+2）】

整数被*k*除，余数分*k*类：0,1,2，……，*k*-1

**【例】请证明 “被11整除规律”**

1. 若一个整数的奇位数字之和与偶位数字之和的差的绝对值能被11整除（0或11的倍数），则这个数能被11整除。
2. 11的倍数检验法也可用上述检查7的“割尾法”处理！过程唯一不同的是：**倍数不是2而是1**。

**【证明】设*N*=*a*0 + 10*a*1 + 100*a*2 + 1000*a*3 + …… = *a*0+10(*a*1+10*a*2+1000*a*3+……)**

**从*N*中减去11的倍数：11（*a*1+10*a*2+……），得到**

***M*0=*a*0-*a*1-10(*a*2+10*a*3+……)**

**显然 *M*0除以11所得的余数=*N*除以11所得余数。**

**从*M*0加上11的倍数：11（*a*2+10*a*3+……）得到**

***M*1=*a*0-*a*1+*a*2+10(*a*3+……)**

**再从*M*1减去11的倍数：11（*a*3+……） 得到**

***M*2=*a*0-*a*1+*a*2-*a*3+……**

**依次类推，得到：**

***M*=*a*0-*a*1+*a*2-*a*3+……=(*a*0+*a*2+*a*4+…)-(*a*1+*a*3+*a*5+…)**

**这个数*M*除以11所得余数=*N*除以11所得余数。证毕。**

**【举例】87635064能被11整除吗？**

奇数位数字之和=4+0+3+7=14，偶数位数字之和=6+5+6+8=25，因为两者之差=25-14=11，所以能被11整除。

**(\*\*)被19整除规律**：若一个整数的个位数字截去，再**从余下的数中，加上个位数的2倍，**如果差是19的倍数，则原数能被19整除。如果差太大或心算不易看出是否19的倍数，就需要继续上述「**截尾、倍大、相加、验差**」的过程，直到能清楚判断为止。

**【证明】**任何数*N*都可以用十进制表示为 *N* = 10*x*+*y* （*x*, *y*是整数， 0≤*y*<10）

**我们要证明的是：19 | *N*(=10*x*+*y*) 充要条件 19|*N*’（=*x*+2*y*）**

10*N*’-*N* =10(*x*+2*y*)-(10*x*+*y*)=19*y*

所以 *N*=10*N*’-19*y*

所以 19|*N* 等价于 19|（10*N*’-19*y*）等价于19|10*N*’等价于19|*N*’

**【举例】判断47045881是否可以被19整除？**

4 7 0 4 5 8 8|1

2

4 7 0 4 5|9 0

1 8

4 7 0 6|3

6

4 7 1|2

4

4 7|5

1 0

5|7

1 4

1 9

显然19|19，还可以依次推出57,475,4712,47063,470459,4704590，47045881也都是19的倍数。

**整除基本性质**（以下*a*, *b*, *c*都是整数）

**性质1**．如果*c*|*a*, *c*|*b*，那么*c*|（*a*±*b*）；推广至一般:若*a*|*bi*, 则*a*|，其中*ci*∈*Z*,*i*=1,2,…,*n* {推广到**同余定理**：如果*a*、*b*除以*c*，余数相同，则*c*|(*a*-*b*)}

**性质2**．如果*n*是非零整数，（1）若*b*|*a*，则*nb*|*na*；（2）若*nb*|*na*，则*b*|*a*；

统一起来就是 *b*|*a* *nb*|*na* (这里*n*∈*Z*, *n*≠0)

**性质3**．【传递性】如果*c*|*b*，*b*|*a*那么*c*|*a*；

**性质4**．如果*a*能被*b*、*c*整除，那么*a*也能被*b*和*c*的最小公倍数整除；

**性质5**．如果 *a*|*bc*, 且*a*与*c*互质，则*a*|*b*；

特别地，若质数*p*|*bc*, 则必有*p*|*b*或*p*|*c*, 若*p*|*bn*,则*p*|*b*。

**性质6**.如果*a*有一个小于的约数*c*，则必有一个大于的约数*d*.

**证明** 因为*c*是*a*的约数，因此，就有*a*＝*cd*，

又*c*＜，则 *a*＝*cd*＜*d*，即 *d*＞.

这表明*a*的约数（除外），可以成对出现。

性质6给出了判别一个数是否为素数的方法（通常称为**筛法**）：

判别*n*是否为素数，仅需判别≤的素数是否为*n*的约数. 如果这些素数（≤）均不是*n*的约数，就说明*n*是素数。

**正整数的素因数分解**

**性质7 算术基本定理（也叫唯一分解定理）**

任一整数*n*>1,可以分解成： *n* =  ， *k* ≥1

其中 *p*1, *p*2, …, *pk*是互不相同的质数，*a*1, *a*2,…, *ak*是正整数，而且在不考虑*p*1, *p*2,…, *pk*的顺序时，这样的分解只有一种，是唯一的。

这个定理在数论中有着广泛的应用，其实在小学阶段学的分解质因数，就是采用的这一算术基本定理。

**推论1：【求正约数的个数】**求大于1的正整数*n*的正约数个数的一般方法如下：

先将*n*分解成 *n* = ，（*p*1<*p*2<…<*pk*为质数，*a*1, *a*2, …, *ak*是正整数），则*n*的正约数个数为：*d*（*n*）=（*a*1+1）(*a*2+1)…（*ak*+1）=

正约数包括了1和它本身。

【*n*的约数形式只可能是 ,这里的，与有关的约数有个，由计数的乘法原理，得到】

**推论2：【所有约数的和】记为*S*（*n*）**

=

=

**推论3：【欧拉函数**】在数论中，对正整数*n*，欧拉函数是少于或等于*n*的数中与*n*互质的数的数目。记为*φ*函数的值。其通式：*φ*(*n*)=*n*(1-1/*p*1)(1-1/*p*2)(1-1/*p*3)(1-1/*p*4)…(1-1/*pk*), 其中*p*1, *p*2…*pk*为*n*的所有质因数，*n*是不为0的正整数。*φ*(1)=1（唯一和1互质的数就是1本身）。 (注意：每种质因数只取一个。比如12=22\*3，那么*φ*（12）=12\*（1-1/2）\*(1-1/3)=4)

 **（欧拉公式）**

特别的，当*n*为质数*p*时，，即不大于质数*p*的正整数中，与*p*互素的数有*p*-1个，它们是1,2，…，*p*-1。

**性质8** 任一整数*n*可以写为，*j*为奇数.

**最大公约数与最小公倍数**

如果*d*|*a*，*d*|*b*，那么称*d*是*a*、*b*的公约数，公约数中最大的数叫做**最大公约数**greatest common divisor(GCD)，记为（*a*，*b*），如（3，5）＝1，（8，108）＝4.

如果*a*|*c*，*b*|*c*，那么称*c*是*a*与*b*的公倍数。公倍数中最小的数叫做Least Common Multiple，缩写*L*.*C*.*M*，记作[*a*，*b*]。如 [3，5]＝15，[8，108]＝216。

**重要性质**：

GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*,*a*), GCD(-*a*, *b*)=GCD(*a*, *b*), GCD(*a*, *a*)=|*a*|, GCD(*a*,0)=|*a*|,

GCD(*a*,1)=1, GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a* *mod* *b*), GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a*-*b*)

GCD(*ma*, *mb*)=*m*\*GCD(*a*, *b*), GCD(*a*+*mb*, *b*)=GCD(*a*, *b*), *m*是自然数

GCD(*a*/*m*, *b*/*m*)=GCD(*a*, *b*)/*m*, 此处*m*=GCD(*a*, *b*)

GCD(*ab*, *m*)=GCD(*a*, *m*)\*GCD(*b*, *m*)

GCD(*a*, *b*)\*LCM(*a*, *b*)=*ab*

GCD(*a*, LCM(*b*, *c*))=LCM(GCD(*a*, *b*), GCD(*a*, *c*))

LCM(*a*, GCD(*b*, *c*))=GCD(LCM(*a*, *b*), LCM(*a*, *c*))

**在坐标系里，将点（0,0）和(*a*,*b*)连起来，通过整数坐标的点的数目（除了（0,0）点外）就是**GCD**（*a*，*b*）**

**性质9** *a*与*b*两个数的最小公倍数能整除这两个数的任一公倍数。

**证明** 设，则（否则与*d*的最大性矛盾）。于是，

令*c*为*a*的任一公倍数，则*a*|*c*，*b*|*c*，所以，，即 [*a*，*b*]|*c*.

**性质10** 若*a*、*b*是正整数，则（*a*，*b*）[*a*，*b*]＝*ab* ，或GCD(*a*,*b*)·LCM(*a*,*b*)=*ab*

由性质7易得性质10.

**性质11** 设*a*＞*b*＞0，且*a*＝*bq*＋*r*，0＜*r*＜*b*，其中*q*，*r*是正整数，那么

（*a*，*b*）＝（*b*，*r*）.

**证明** 设（*a*，*b*）＝*d*，则*d*|*a*，*d*|*b*，于是由性质3得*d*|(*a*－*bq*)，即 *d*|*r*.

从而 （*b*，*r*）≥*d*，即（*b*，*r*）≥（*a*，*b*）.

另一方面设（*b*，*r*）＝*c*，则*c*|*b*，*c*|*r*,于是也由性质3得 *c*|(*bq*＋*r*)，即 *c*|*a*.

从而 （*a*，*b*）≥*c*，即（*a*，*b*）≥（*b*，*r*）.

因此，（*a*，*b*）＝（*b*，*r*）.

性质11给出了求最大公约数的一种方法，即**辗转相除法**。

【求最大公约数的方法，欧拉发现的，利用了性质GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a* *mod* *b*)，这里*a*>*b*】

**辗转相除法**：设0＜*b*＜*a*，如果

， 0≤＜，

， 0≤＜，

， 0≤＜，

……

，0≤＜.

如此下去，必有，使得 ，

且 （*a*，*b*）＝.

**性质12** 若*a*、*b*是整数，*b*＞0，则有且仅有一对整数*q*，*r*，使得

*a*＝*bq*＋*r*， 0≤*r*＜*b*.

**证明** 因为*b*＞0，则*b*的倍数可以是

…，－3*b*，－2*b*，－*b*，0，*b*，2*b*，3*b*，….

当*a*是*b*的倍数时，*r*＝0，即存在一对整数*q*，*r*，使得*a*＝*bq*＋0.

当*a*不是*b*的倍数时，则必存在整数*q*，使得 *qb*＜*a*＜(*q*＋1)*b*.

即有一对整数*q*，*r*，使得 *a*＝*qb*＋*r*. 0＜*r*＜*b*.

故存在一对整数*q*，*r*，使得*a*＝*qb*＋*r*，0≤*r*＜*b* ①

再证明只有唯一的一对*q*，*r*满足*a*＝*qb*＋*r*.

假设还有一对，，使得*a*＝，0≤＜*b* ②

那么 ，于是 ，而

由此推得 ，即 ，从而 

**性质13**

（1）如果*c*|*ab*，且(*c*，*a*)＝1，那么*c*|*b*；

（2）如果*a*|*c*，*b*|*c*，(*a*，*b*)＝1，那么*ab*|*c*；

（3）如果*a*|*c*，*b*|*c*，那么[*a*，*b*]|*c*.

（4）若*a*|*b*, 则|*a*|≤|*b*|，因此，若*a*|*b*, 有*b*|*a*，则*a*=±*b*

（5） *p*为质数，若*p*|*a*1*a*2……*an*, 则*p*必能整除*a*1, *a*2, …，*an*中的某一个。特别地，若*p*为质数，*p*|*an*, 则*p*|*a*。

（6）*n*个连续整数中有且只有一个是*n*的倍数。

（7）任何*n*个连续整数之积一定是*n*的倍数。

**进位制**

**性质14** 任何一个正整数都可以写为如下形式

，

*n*≥0，0≤＜*g*，*g*＞1.

利用性质14，我们可以得到一个数能被3、9、4、25、11等整除的判别法.

# 例题

1、若*a*、*b*都是正整数，且*a*除以5余2，*b*除以5余3，则*a*2+4*b*除以5，得到的余数是（ ）

A、1 B、2 C、3 D、4

【解1】特殊取*a*=7，*b*=8，则*a*2+4*b*=49+32=81，除以5余1. 选择*A*。

【解2】设*a*=5*k*+2,*b*=5*m*+3, 则*a*2+4*b*=25*k*2+20*k*+4+20*m*+12=25*k*2+20(*k*+*m*)+15+1, 除以5余1.

【解3】因为 *a*≡2(mod 5),*b*≡3(mod 5),由余数的乘法与加法原理，得到

*a*2+4*b*≡22+4×3≡1(mod 5)

**2、“物不知其数”：今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物至少有几何？ [韩信点兵,兵不知其数]**

此题出自《孙子算经》，是著名的“孙子问题”，也称“鬼谷算”，“剪管术”等，这个题目的答案是\_\_\_\_\_

【解1】中国剩余定理：这个数减去2，能被3和7整除，且被5除余1，

1. 被3、7整除的最小正整数就是3*x*7=21，而21的倍数中，能被5除正好余1的最小数是21.
2. 加上2就是23,23被5除，正好余3，

所以23为所求数。

【解2】将所求数拆成3部分，表示成*a*+*b*+*c*,其中：

*a*满足：被3除余1，能被5和7整除；

*b*满足：被5除余1，能被3和7整除；

*c*满足：被7除余1，能被3和5整除；

不难得到：*a*=35×2=70，*b*=21，*c*=15 满足上述各条件。

由余数的加法和乘法原理：

*a*×2+*b*×3+*c*×2=140+63+30=233 就是满足所有条件的一个解。

而通解就是 233+[3,5,7]*t*=233+105*t*, *t*为整数，

如果调整*t*，可以得到最小正整数解为 233-105×2=23，所以通解也可以写成 23+105*m*，*m*为自然数。

明朝数学家**程大位**把这一解法编成四句歌诀：

**三人同行七十（70）稀，五树梅花廿一（21）枝，**

**七子团圆正月半（15），除百零五（105）便得知。**

歌诀中每一句话都是一步解法：第一句指除以3的余数用70去乘；第二句指除以5的余数用21去乘；第三句指除以7的余数用15去乘；第四句指上面乘得的三个积相加的和若超过105，就减去105的倍数，就得到答案了。即：

70×2＋21×3＋15×2－105×2=23

**如果没有“至少”，则最终结果应该为 [3,5,7]\**n*+23, *n*为自然数,*n*用来调整结果所在区域范围。 (233+105*t*, 128+105*n*, 23+105*m*)**

**【解3】还是**将所求数拆成3部分，表示成*a*+*b*+*c*,其中：

*a*满足第一个条件：被3除余2，能被5和7整除；

*b*满足第二个条件：被5除余3，能被3和7整除；

*c*满足第三个条件：被7除余2，能被3和5整除；

不难得到：*a*=35，*b*=21×3=63，*c*=15×2=30 满足上述各条件。

由余数的加法原理：*a*+*b*+*c*=35+63+30=128 就是满足所有条件的一个解。

而通解就是 128+[3,5,7]*t*=128+105*t*, *t*为整数，

如果调整*t*，可以得到最小正整数解为 128-105=23，所以通解也可以写成 23+105*m*，*m*为自然数。

**注：更多例子参见《**[中国剩余定理通解举例](#中国剩余定理通解举例)**》**

3、如果四个互不相同的整数*m*，*n*，*p*，*q*满足（9+*m*）（9+*n*）（9+*p*）（9+*q*）=9，那么*m*+*n*+*p*+*q*=

【解】9只能写成1\*（-1）\*（-3）\*3这样的4个不同的整数的乘积。

故可以假定9+*m*=1, 9+*n*=-1, 9+*p*=3, 9+*q*=-3, 求和为36+（*m*+*n*+*p*+*q*）=0

*m*+*n*+*p*+*q*=-36

4、在100以内同时被2,3,5整除的正整数有多少个？1000以内同时被3,4,5,6整除的正整数个数？

【解】同时被2,3,5整除，因为（2,3,5）=1，[2,3,5]=30所以就是求被30整除的数，100/30=3…10, 或[]=3 （高斯函数） 所以有3个，分别是30,60,90.

同理，因为（3,4,5,6）=1,[3,4,5,6]=60, 所以即求能被60整除的数个数。1000/60=16…40。 所以有16个数。

5、证明：形如的六位数一定被7,11,13整除。

【解】因为 

其中**1001 = 7×11×13**, 故这个六位数能被7,11,13整除.

6、设五位数 被72整除，求数字*x*和*y*。

【解】72=8×9，故能被8和9整除。

**能被8整除，说明末尾3位能被8整除，**试除一下，得到*y*=2才能满足。

又能被9整除，说明各位数字之和能是9的倍数，即*x*+6+7+9+2=*x*+24能被9整除，即 *x*+24≡*x*+6(*mod* 9), 这里0<*x*≤9,所以 *x*=3.

7、令*N*= 19991999……1999, （1999个1999连写）求*N*被11除，所得的余数

【解】首先了解到被11整除的规则是：奇数位数字和与偶数位数字和之差能被11整除，则这个数能被11整除。

该题中，*N*的奇数位数字和显然为（9+9）·1999，偶数位数字和为（1+9）·1999，

它们的差=1999×8，除以11，所得的余数为9，故*N*除以11，所得余数也为9.

【定理：一个数除以9所得余数等于这个数的各位数字和除以9所得余数】

证明：令*N*-9 = 19991999……1990，显然*N*-9的奇数位数字之和减去偶数位数字之和等于1999×8-9=15992-9=15983=1453×11，能被11整除，故*N*-9也能被11整除。所以 *N*除以11所得余数就是9.

【重点】**一个整数，被3或9除，所得的余数等于这个数的数字和除以3或9所得的余数。**

**8、有200多本书，如果7本7本的搬，则余5本，如果9本9本的搬，则少2本，问有多少本书？**

【解】如果我们增加2本书，则7本7本搬，刚好能够搬完，同样9本9本搬也刚好能搬完。说明书本数+2能够被7和9整除。 而7和9互质，故书本数+2是63（=7\*9）的倍数，所以书本数=63*k*-2（*k*为整数），已知是200多本，所以*k*可取4，书本数为250.

**9、给你0，4，5，6，7可以组成几个没有重复数字且能被4整除的三位数？**

【解】4的倍数特征是后两位数是4的倍数，因此后两位需要是：40，60，04，64，56，76。（6类）

后两位是40，这样的三位数是540，640，740；

后两位是60，这样的三位数是460，560，760；

后两位是04，这样的三位数是504，604，704；

后两位是64，这样的三位数是564，764；

后两位是56，这样的三位数是456，756；

后两位是76，这样的三位数是476，576。

这样的三位数共有15个。 （=6×3-3）

**10、能同时被2、3、5整除的最大四位数是( ), 把它分解质因数是( )**

【解】 10000/30=333…10, 所以最大四位数为333×30=9990=2×3×5×3×3×37

**11、整数2012能被多少个不同的自然数整除？**

【解】先熟悉几个与我们所处年代接近的质数年：1993，1997，1999，2003，2011，2017，2027，2029是质数。

本题就是求2012有多少个约数。2012 分解质因数得到：2×2×503=22×5031

所以2012的不同约数个数为（2+1）*·*（1+1）=6.

12、\*\*有多少个自然数除200，余数为8？

【解】设*n*为满足题意的自然数，则存在一个数*p*，使得200=*np*+8 （*n*>8）

所以 *np*=192, 因此*n*应该是192的约数，原问题转化为求192的大于8的约数的个数。

因为 192 = 26×3，所以192的约数个数为（6+1）·（1+1）=14个。

另外*n*>8, 故不大于8的约数：1,2,3,4,6，8不符合要求，故符合题意的自然数共有14-6=8个。

**注：此类题通解方法，先将200-8进行素数分解，得正约数个数m，再找出正约数中不大于8的个数n，结果就是 正约数个数m-不大于8的正约数个数n。**

**证明题**

13、已知，，求证

证明：由已知：使，

 





**14、**设2不整除，求证

证明：因为2不整除，所以存在唯一一对，使，其中

，（*a*是奇数）

 

**15、**设，求证是奇数的平方 （四个连续整数的乘积加1）

证明：





肯定一奇一偶肯定为偶数

肯定为奇数

也可以设 (*n*-1)(*n*)(*n*+1)(*n*+2)+1=[(*n*-1)(*n*+2)][*n*(*n*+1)]+1=(*n*2+*n*-2)(*n*2+*n*)+1

=( *n*2+*n*)2-2(*n*2+*n*)+1= (*n*2+*n*-1)2 =[*n*(*n*+1)-1]2

其中 *n*(*n*+1)为偶数

**整除练习题 姓名： 得分：**

1. **一个六位数被88整除，求*a*与*b*的值。**

解：88=8\*11, 23*b*试除以8，得*b*=2，*b*+2+*a*=4+*a*，3+1+3=7，|*a*-3|是11的倍数，*a*=3

1. **当*x*，*y*是什么数字是，四位数同时被2、3、4、5、6、9整除。**

解：2\*5=10，故*y*=0, 再判断大一点的数，被9整除，即7+2+*x*+*y*=9+*x*能被9整除，*x*=0或9，再判断能被4整除，末2位 只有00可以，故*x*=*y*=0

1. **求360的所有正约数的个数。**

解：360=23325, (3+1)(2+1)(1+1)=24个正约数。

1. **\*\*\*有多少个自然数除732，余数为12？**

解：732-12=720=24325，（4+1）（2+1）（1+1）=30个正约数。其中

不大于12的约数有: 1,2,3, 4, 5,6,8,9,10,12, 共10不大于12的约数，余数为12，说明除数大于12，故有30-12=18个自然数除732，余数为12。

1. **有个三位数，减去7后能被7整除，减去8后能被8整除，减去9后，能被9整除，求这个三位数。**

解：这个三位数能被7,8,9整除，[7,8,9]=504,504的倍数中是三位数的只有504.

1. **有个二位数，被3除余1，被4除余1，被5除也余1，求这个二位数。**

解：这个两位数减去1后，能被3,4,5整除，即 是3\*4\*5=60的倍数，原数就是60+1=61是一解，通解为 61+[3,4,5]*n*=61+60*n*, *n*为整数。

只有当*n*=0时，是两位解61.

1. **求200以内既不能被3整除，也不能被4整除的正整数个数。**

解：先算出能同时整除3,4的正整数个数，[200/12]=16, 200-16=184个。

**如果改成不能被3或4整除，结果要用到交集概念（画*Vens*图）：**

200-[200/3]-[200/4]+[200/12]=200-66-50+16=100

1. **如果92、118、157被正整数*n*（*n*≠1）除，所得的余数都相同，那么*n*应为多少？**

解：同余定理，即*n*|(118-92),*n*|(157-92),*n*|(157-18),

计算得 *n*|2\*13, *n*|5\*13, *n*|3\*13, 显然*n*=13

1. **如果67、88、116被正整数*n*（*n*≠1）除，所得的余数都相等，那么这个余数是多少？**

解：同余定理，*n*|(88-67), *n*|(116-67), *n*|(116-88),

经计算得： *n*|21, *n*|49, *n*|28, 所以*n*=7。 67≡-3≡4（*mod*7）

1. **120的正约数共有多少个？这些正约数的和为多少？**

解：120=23×3×5，（3+1）（1+1）（1+1）=16

正约数的和=（1+2+22+23）（1+3）（1+5）=360

1. **从5、6、7、8、9这五个数中，选出四个数字组成一个四位数，它被3、5、7整除，在所有符合条件的四位数中，最大的一个是多少？**

解：能够组成的最大四位数为9876，能被3,5,7整除，因为（3,5,7）=1，即能被3\*5\*7=105整除。

9876 *mod* 105=6， 9870能被105整除，但是条件中只给了数字5，被5整除，末尾必定为5, 又9870-105=9765 为最大的一个。

魔鬼数字666

中国人喜欢66，六六大顺嘛。但是对于数字666，这是大家都看到的，酒店的编号类似666、999、888之类的最讨人喜欢。不过西方很多人对这个数字确实相当的厌恶，他们认为这是一个魔鬼数字。主要是受宗教的影响，“6”被视为大凶数。

“666这数字转换成罗马数字, 将会变成: *I* =1 ，*V* =5 ，*X* = 10 ，*L* = 50 ，*C* =100 ，*D* = 500 ，*M* = 1000 ，*VICARIUS* = 5+1+100+1+5( *the* *U* *in* *Roman*

*letter* *is* *V*) ，*FILII* = 50+3 ，*DEI* = 500+1 ，*total* =5+1+100+1+5+50+3+500+1 = 666 。在拉丁文中, ‘*VICARIUS* *FILII* *DEI*’这个字有写在教宗的帽子上, 源起于天主教. 法国人的说法是"‘*the* *one* *who* *in* *this* *world* *wants* *to* *play* *God*’， 也就是在这世界上却想扮演上帝角色的人, 就是指撒旦。在启示录13:18节中有这样的描述，指出反基督教的人具有一个特殊的数码，恶魔撒旦的代表符号就是666。”所以在基督教中6代表混沌不堪。

英语习语 *at* *sixes* *and* *sevens* 乱七八糟；糊涂的，迷茫的。

*Six* *penny* 不值钱，*six* *of* *one* *and* *half* *a* *dozen* *of* *the* *other* 半斤八两，差不多。

首先，

666=1+2+3+4+……+36。 36又刚好是62。

  666=1+2+3+4+567+89 （5个加号，升序）

     =123+456+78+9 （3个加号，升序）

     =9+87+6+543+21 （4个加号，顺序颠倒）

  666=22 + 32 + 52 + 72 + 112 + 132 + 172 （7个连续素数的平方和）

这不是一个简单的平方和，你应该可以看到，这是前7个素数的平方和。而7这个数字，又是一个很有名的数字。

  666=13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 + 53 + 43 + 33 + 23 + 13

上面的立方和足以让你惊奇，最大的那个数字刚好又是6。

10！=1×2×3×4×5×6×7×8×9×10=3628800，而这，刚好是六个星期的秒数。又是6。

**一个关于因子个数的有趣结论**

任意取一个数，比如14；

写出此数所有的因数：1，2，7，14；

写出每一个因数的因数个数：1，2，2，4；

那么必然有：(1+2+2+4)²=1³+2³+2³+4³。

再来举一例子：比如18.

所有的因数为1，2，3，6，9，18

因数的因数个数为，1，2，2，4，3，6

那么必然有：(1+2+2+4+3+6)²=1³+2³+2³+4³+3³+6³。

所以说，如果有人要你写出一个式子，**几个数的和的平方等于这几个数的立方和的话**，随便就可以写出来。这个规律也就告诉我们，**对于任意一个数，写出其每一个因数(也叫约数)的因数个数，那么这些数字的和的平方等于其立方和。**

这不由得让我们想起另外一个公式：

**(1+2+3+……+*n*)²=1³+2³+3³+……+*n*³，**

那么这两个公式之间有什么关系呢？有的，其实这两个实在就是一个东西。

**证明如下：(数学归纳法证明)**

当*n*为1的时候，显然成立.

现在设自然数*n*满足关系式，只要能够证明对于*n*的一个非约数*p*，*npm*仍然满足上述关系，那么这个结论就得到了证明。我们首先需要看下面的定理：

如果设*F*(*n*)为*n*的约数的约数个数，那么有下面的关系：

当*n*为素数时，*F*(*n*)=2；

当*n*和*m*互质时，*F*(*nm*)=*F*(*n*)*F*(*m*)。…………②

这个问题，咱们可以运用数论的最基本的方法就可以得到，在此忽略。

      如果说*n*的约数的约数的个数分别是*a*1，*a*2，...，*an*。并且满足

      (*a*1+*a*2+*a*3+...+*an*)²=*a*1³+*a*2³+*a*3³+...+*an*³=*x*²。这个*x*为赋予的一个数值。

      那么对于*npm*，利用式子②，*a*1对应着就变成了*a*1×1，*a*2就变成了*a*2×2……

      左边=(*x*+*x*\*2+*x*\*3+...+*x*\**m*)2

      右边=*x*2+*x*2\*13+*x*2\*23+...+*x*2\**m*3

      要证明左边=右边，即证明(1+2+3+...+*m*)2=13+23+...+*m*3，显然，这个式子刚好就是式子①，这是显然成立的，于是定理得证。

**剩余定理通用解法揭秘**

**例1：一个数被3除余1，被4除余2，被5除余4，这个数最小是几？**

题中3、4、5三个数两两互质。

则〔4，5〕=20；〔3，5〕=15；〔3，4〕=12；〔3，4，5〕=60。

为了使20被3除余1，用20×2=40；

使15被4除余1，用15×3=45；

使12被5除余1，用12×3=36。

然后，40×1＋45×2＋36×4=274，

因为，274>60，所以，274－60×4=34，就是所求的数。

**例2：一个数被3除余2，被7除余4，被8除余5，这个数最小是几？**

题中3、7、8三个数两两互质。

则〔7，8〕=56；〔3，8〕=24；〔3，7〕=21；〔3，7，8〕=168。

为了使56被3除余1，用56×2=112；

使24被7除余1，用24×5=120。

使21被8除余1，用21×5=105；

然后，112×2＋120×4＋105×5=1229，

因为，1229>168，所以，1229－168×7=53，就是所求的数。

**例3：一个数除以5余4，除以8余3，除以11余2，求满足条件的最小的自然数。**

题中5、8、11三个数两两互质。

则〔8，11〕=88；〔5，11〕=55；〔5，8〕=40；〔5，8，11〕=440。

为了使88被5除余1，用88×2=176；

使55被8除余1，用55×7=385；

使40被11除余1，用40×8=320。

然后，176×4＋385×3＋320×2=2499，

因为，2499>440，所以，2499－440×5=299，就是所求的数。

**例4：有一个年级的同学，每9人一排多5人，每7人一排多1人，每5人一排多2人，问这个年级至少有多少人？**

题中9、7、5三个数两两互质。

则〔7，5〕=35；〔9，5〕=45；〔9，7〕=63；〔9，7，5〕=315。

为了使35被9除余1，用35×8=280；

使45被7除余1，用45×5=225；

使63被5除余1，用63×2=126。

然后，280×5＋225×1＋126×2=1877，

因为，1877>315，所以，1877－315×5=302，就是所求的数。

**例5：有一个年级的同学，每9人一排多6人，每7人一排多2人，每5人一排多3人，问这个年级至少有多少人？**

题中9、7、5三个数两两互质。

则〔7，5〕=35；〔9，5〕=45；〔9，7〕=63；〔9，7，5〕=315。

为了使35被9除余1，用35×8=280；

使45被7除余1，用45×5=225；

使63被5除余1，用63×2=126。

然后，280×6＋225×2＋126×3=2508，

因为，2508>315，所以，2508－315×7=303，就是所求的数。

（例5与例4的除数相同，那么各个余数要乘的“数”也分别相同，所不同的就是最后两步。）

**例6**一个数被3除余2，被7除余4，被8除余5，这个数最小是几？在1000内符合这样条件的数有几个？

（答案：53， （1000-53）/[3,7,8]=947/168=5…107, 6个）