**《整除问题》初步**

**【知识点】**

1. 整除的基本性质: 被2, 5；3, 9；4, 25；8, 125；7, 11, 13整除的性质；
2. **整数除以2所得的余数有两种情况：**余数为0或1，前一种叫偶数even（双数），后一种叫奇数odd（单数），分别用2n或2n+1（或2n-1）来区分，故整数分为偶数和奇数两大类。那么0是奇数还是偶数呢？；
3. **奇偶分析：**奇数的正整数次幂是奇数，偶数的正整数次幂是偶数，两个连续整数的和为奇数，乘积为偶数；奇数个奇数之和为奇数，偶数个奇数之和为偶数，任意有限个偶数之和为偶数；若干个奇数之积为奇数，偶数与整数的乘积是偶数；如果若干个整数之积是奇数，那么其中每一个整数都是奇数，如果若干个整数的乘积是偶数，那么其中至少有一个整数是偶数；两个整数的和与差同奇偶。
4. 零和正整数统称为**自然数**，用**N**表示，正整数、零和负整数，统称为**整数**，用**Z**表示。故最小的自然数为零，没有最大的整数；
5. **尾数**判定法:适用于2,5; 4, 25; 8, 125; …
6. **“数字和”判定法**: 适用于3, 9, 99等;
7. **“奇偶位”求差法**：适用于 11等；
8. **三位截断法**：适用于7， 11， 13.

“末三位数字组成的数”与“末三位以前的数字组成的数”之差能被7或11或13整除。 特点: 

1. 如果两个数都能被自然数*a*整除，则它们的和与差也能被*a*整除；即*if* *a* | *b, a* | *c* , *then* *a*| (*b*±*c*).
2. 同余定理： *a*≡*b*(**mod** *p*) 等价于 *p*|(*b-a*)

**【例题讲解】**

1. 判断下面11个数的整除性：

23487, 3568, 8875, 6765，5880, 7538, 198954, 6512, 93625, 864, 407

1. 这些数中，有哪些数能被4整除？哪些数能被8整除？
2. 哪些数能被25整除？哪些数能被125整除？
3. 哪些数能被3整除？哪些数能被9整除？
4. 哪些数能被11整除？

1【解】（1）末尾2位数能被4整除的数，能被4整除，有3568,5880,6512,864；

末尾3位数能被8整除的数，能被8整除，有3568,5880,6512,864

（2）末尾2位数能被25整除的数，能被25整除：8875，93625, 能被125整除, 看末尾3位数能否被125整除, 有8875,93625,

(3) 列表计算数字和，

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 数 | 23487 | 3568 | 8875 | 6765 | 5880 | 7538 | 198954 | 6512 | 93625 | 864 | 407 |
| 数字和 | 24 | 22 | 28 | 24 | 21 | 23 | 36 | 14 | 25 | 18 | 11 |

其中能被3整除的有：23487,6765,5880,198954,864

能被9整除的有：198954,864.

（4）被11整除的特点，要看奇数位和与偶数位和的差。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 数 | 23487 | 3568 | 8875 | 6765 | 5880 | 7538 | 198954 | 6512 | 93625 | 864 | 407 |
| 差 | 2 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 | 8 | 0 | 15 | 6 | 11 |

可见能被11整除的数有: 6765, 6512, 407

1. 是一个四位数，数学老师说：“我在其中的方框内先后填入3个数字，得到的3个四位数依次能被9、11、8整除。”问：数学老师先后填入的3个数字之和是什么？

2【解】1+7+3=11，要能被9整除，需填入7；奇数位与偶数位 数字之差为 *a*+3，要能被11整除，*a*取8；末三位73*a*能被8整除，显然*a*可取6；三个数字之和为7+8+6=21

答：老师先后填入的3个数字之和是21.

1. 刘经理给45名员工发完工资后，将总钱数记在一张纸上，不知为何，记账的这张纸破了两个洞，上面只剩下，其中方框是破的两个洞，刘经理记得每名员工的工资都一样，并且都是整数元，那么这45名员工的总工资可能是多少元呢？

3【解】45=5×9，说明工资总数能被5和9整除，末尾只能是0或5；

1. 当末尾为0时，各位数字之和为6+7+8+0+*a*=21+*a* 要能被9整除，*a*可取6；
2. 当末尾为5时，各位数字之和为6+7+8+5+*a*=26+*a*要能被9整除，*a*可取1；

故总工资可能是67680,67185.

答：这45名员工总工资可能是67680和67185.

1. 卡利亚写了一个两位数59，莫菲写了一个两位数89，他们让小高写一个一位数放在59与89之间拼成一个五位数，使得这个五位数能被7整除，那么小高写的数应该是几？

4【解】被7整除的判断，可以用*a*89-59=*a*30，要使*a*30能被7整除，则 *a*=6

答：小高写的数应该是59689

1. 小高写了一个五位数，用方格盖住了两个数字后变成：，并告诉莫菲说这个五位数既是7的倍数，又是125的倍数，那么小高写的五位数可能是多少？

5【解】是125的倍数，说明末3能被125整除，即末三位是625，又能被7整除，即625-3*a*能被7整除，由同余定理得到: 625 ≡3*a* (mod 7)

∵625 mod 7=2，故3*a* mod 7=2，可取0,7，这个五位数是30625，或37625

答：小高写的五位数是30625，或37625.

5-1 预初年级72名学生课间加餐共交了 □52.7□元，其中□处的数字被墨子污染了，辨认不出来，问每个学生交了多少元？

5-1解：72=8×9，即□52.7□能被8和9整除，即8|27□，故末位为2；

又 9|□5272，即首位为9-5-2=2，所以每人交了252.72/72=3.51(元)。

答：每人交了3.51元。

6.  If **rsuv = 1** and **rsum = 0**, which of the following must be true?

(A) r < 1   (B) s < 1   (C) u= 2   (D) r = 0    (E) m = 0

7.  The least integer of a set of consecutive integers (连续整数) is –126. if the sum of these integers is 127, how many integers are in this set?

(A) 126    (B) 127   (C) 252   (D) 253   (E) 254

8. 在24，36，90，100这四个数中,该数除以它的所有的质因子，最后的结果是质数的是哪一个？

【6. E；7. E；8. 90】

9. 在1,2,3，…，2008中的每个数前面任意添加+ 或 –号，最后运算结果是奇数还是偶数？请说明理由。

9解：因为 a+b,a-b同奇偶，所以将算式中每一个数前面的“-”逐一改成“+”号，其结果的奇偶性不变，故所求的结果与1+2+3+…+2008=1004×2009的奇偶性相同，因此所求算式结果为偶数。

10. 将1,2,3，…，99重新排列成*a*1，*a*2，…，*a*99，求证：(*a*1-1)(*a*2-2)(*a*3-3)…(*a*99-99)一定是偶数。

10证明：1,2,3，…，99中有50个奇数，49个偶数，所以*a*1，*a*2，…，*a*99中也同样有50个奇数和49个偶数，所以 *a*1，*a*3，*a*5,…，*a*99，这50个数中必有一个奇数，不妨设其中*a*k是奇数，则 *a*k-k是两个奇数的差，因而是偶数，所以

(*a*1-1)(*a*2-2)(*a*3-3)…(*a*99-99)一定是偶数。