《整除问题》进阶

1. 三位截断法：“末三位数字组成的数与末三位以前的数字组成的数”之差 能被7或11或13整除，这个数就能被7或11或13整除。
2. 形如的数可以被7、11、13同时整除，在多位数的判定中可以将这样的六位数“去掉”再判断。
3. 对于没有整除特性的数，可以利用**列竖式**的方式找到能被这个数整除的数。

**例题1 已知51位数能被13整除，中间方格内的数字是多少？**

**【分析】**我们知道，肯定能被7,11,13整除，所以999999肯定也能被13整除，利用被13整除的数的特征：末三位999与前面的数之差必须能被13整除。即原来的51位数减去999，差也能被13整除，于是 应该也能被13整除。观察这一过程，实际上是从原数去掉末尾6位数999999，依此类推，能被13整除。

同样考虑首位，555555能被13整除，所以555555×1021也能被13整除，将减去555555×1021相当于从首位去掉555555，所得到的也能被13整除，依此类推，最后得到的应该能被13整除，所以方格内应该填写数字5.

**例题2 已知多位数能够同时被7和13整除，方格内的数字是多少？**

**【分析】**同上，258258能被7和13整除，每次去掉末尾的2个258，剩下的数也同时整除7和13. 又2010÷2=1005 ， 故最后剩下的数是也能够被7和13整除， 即能被7x13=91整除，故方格内填写数字9.

**例题3 用数字6,7,8各两个，可以组成能被6,7,8整除的六位数，请写出一个满足要求的六位数。**

**【分析】**∵6+7+8=21 能被3整除，所以无论怎么排列，这个六位数肯定能被3整除，这时，只需个位为偶数，就必定能被6整除；另外能被8整除，满足末三位能被8整除，显然试下来，只有768能被8整除；再根据上述结论，知道768768这样排列的数能被7,11,13整除。768768就是所求。

[变化]如果增加条件，这个六位数能被6，7，8，11，13整除。

**例题4 对于一个自然数N，如果具有这样的性质就被称为“破坏数”：把它添加到任何一个自然数的右端，形成的新数都不能被N+1整除，请问：一共有多少个不大于10的破坏数？**

**【分析】**如果N是奇数，则N+1是偶数，而奇数放在任何自然数后面，都会得到奇数，而偶数不可能整除奇数， 所以所有的奇数都是破坏数；

然后考虑偶数的情形： 4是破坏数，因为末尾是4的自然数，不可能被5整除；2,6,8,10都不是破坏数，因为：3|12,7|56,9|18,11|110，所以不大于10的破坏数有6个，分别是1,3,4,5,7,9

**例题5 一个五位数，它的末三位为999，如果这个数能被23整除，那么这个五位数最小是多少？**

**【分析】**根据题意，可以列出竖式，问题转化为求竖式中的数：

首先确定：23必定乘以一个三位数才能得到五位数

9

1

3

**2**

**3**

9

3

7

6

2

8

**9**

**9**

**9**

0

2

2

1

X

逐步推出 为913x23=20999，这就是最小的。

**[刘思源提供的思路]**

将这个五位数写成：



其中，*m , n*都是小于10的自然数。

∵10000 mod 23=18，1000 mod 23=11，

999 mod 23=10

这个数能被23整除，说明18m+11n+10也

能被23整除，即18m+11n+10=23k (k>0的整数)

当k=1时，无解

当k=2时，有解m=2，n=0且是最小数字。

此时五位数为20000+999=20999

**例题6 一个六位数1082ab能被23整除，末两位数有多少种情况?**

解法1：用最小的数除以23, 得余数， 108200÷23=4704……8,

再将余数补全为23的倍数，即8+15=23，就整除了。

于是108215,就是所求数中最小的，然后不断加23，直到进位为止，得到：

108215+23=108238, 108238+23=108261,108284，都可以作为解。

解法2：也可以从最大的数除以23，得余数，108299÷23=4708……15，

再将余数减去，变成了整除，即108299-15=108284为所求数中最大的，

然后不断减去23，直到1082变成1081为止，我们得到108284-23=108261，108238,108215。

**例题7 “模糊的数字”**

**下面16个数字，只能看清楚2个，你能分析得出其它数吗？**

【分析】因为**8x125=1000**，所以被乘数小于125，

X

8

9

又因为 **9x111=999**，要是9乘以一个三位数得到一个四位数，

被乘数必须大于111，

因此被乘数可能是112,113,114，……，124.

但是113x89=10057，是一个五位数，不合题意。

所以 只能是112，直接代入竖式计算即可。

112x89=9968

**例题8 “奇怪的五位数”**

**有一个奇怪的五位数，在它的前面添写数字 1，得到一个六位数；在它的后面添写数字 1，也可得到一个六位数。不过，第二个六位数恰好是第一个六位数的 3 倍。你知道这个奇怪的五位数是什么样的数吗？**

【分析】设这个五位数是，依题意得到：。

乘数 3 与被乘数个位相乘，积的个位是 1，3×7＝21 得 e＝7；

积的十位数是 7，5×3＋2＝17，得 d＝5；

积的百位数是 5，8×3＋1＝25，得 c＝8；

积的千位数是 8，2×3＋2＝8， 得 b＝2；

积的万位数是 2，4×3＝12， 得 a＝4，

所以这个五位数是 42857 。（列竖式更简单明了）

答：这个五位数是 42857。

**例题9.  If K is divisible by 2, 3, and 15, which of the following is also divisible by these numbers?**

(A) K + 5   (B) K + 15   (C) K + 20   (D) K + 30   (E) K + 45

**例题10.** 2904*x*=*y*2（*y*的平方），*x*、*y*都是正整数，求*x*的最小值。

因为：*x*^2×*y*^2×*z*^2=(*x*×*y*×*z*)^2

所以把2904分解素因数＝2×2×2×3×11×11＝2^2×11^2×6再乘一个6就*OK*了

2^2×11^2×6×6＝（2×11×6）^2=132^2

*Key*：最小的*x*＝6