关键词：素数（素数），合数，素因数，公因数，公倍数，分解素因数，短除法，树枝分解法，算术基本定理，应用

# 素数、合数与分解素因数

**【定义】*Definition***

**1）素数*prime* *number***：一个正整数，如果只有1和它本身两个因数，这样的数叫做素数，也叫素数(仅有2个因数)．素数有无穷多个。

**2）合数*composite* *number***：一个正整数，如果除了1和它本身以外还有别的因数，这样的数叫合数(有2个以上的因数)．

**3）素因数**(*prime* *factor*)**：**如果一个素数是某个数的因数，那么就说这个素数是这个数的素因数

**4）1既不是素数，也不是合数（只有一个因数）。**这样，正整数又可以分为素数、合数和1这样三大类.

**5）分解素因数***prime factorization*：把一个合数用素因数相乘的形式表示出来，叫做分解素因数。分解素因数常用的方法有：树枝分解法、短除法、口算法等。

**6）注意事项：**

(1) 正整数按照因数的个数分类可以分为素数、合数、1；

(2) 素数(素数)只有1和它本身两个因数；合数至少要有3个因数；

(3) 最小的素数是**2**；最小的合数是**4**；既不是素数也不是合数的正整数是**1**；

(4) 唯一偶素数是**2**；大于2的素数一定是奇数，如果两个素数的和或差是奇数，则其中必有一个是2；如果两个素数的积是偶数，则其中必有一个是2；

(5) 若正整数*a、b*的积是素数*p*，则必有*a=p* 或 *b=p*。

**7）常用的100以内的素数共有25个（筛选法求出）：**

2，3，5，7；11，13，17，19；23，29；31，37；41，43，47；53，59；61，67；71，73，79；83，89；97

其中2是唯一的偶数，5是唯一一个位上数字是5的数，其余的数字个位只为1，3，7，9

8）**部分特殊数的分解：**

111=3×37，1001=7×11×13，11111=41×271，10001=73×137，1995=3×5×7×19，1998=2×3×3×3×37，

2007=3×3×223，2008=2×2×2×251，2007+2008=4015=5×11×73，10101=3×7×13×37

**【知识点1】**

**算术基本定理（也叫唯一分解定理）**

任一正整数*n*>1，可以分解成： *n*=，*k* ≥1，其中 *p*1， *p*2，…， *pk*是互不相同的素数，*a*1， *a*2，…， *ak*是正整数，而且在不考虑*p*1， *p*2，…， *pk*的顺序时，这样的分解只有一种(唯一性)。

这个定理在数论中有着广泛的应用，分解素因数就是采用了这一算术基本定理。

**推论1：【正约数个数】**求大于1的正整数*n*的正约数个数的一般方法如下：

先将*n*分解成 *n* = ，（*p*1<*p*2<…<*pk*为素数，*a*1， *a*2，…， *ak*是正整数），则*n*的正约数个数为：*d*（*n*）=（*a*1+1）(*a*2+1)…（*ak*+1）=

正约数包括了1和它本身。

简要解答：*n*的约数形式只可能是 ，这里的*xi*=0，1，2，3，…， *ai*，*i*=1，2，…，*k*，与*pi*有关的约数有*ai*+1个，由计数的乘法原理，得到上述推论1。

**【典型例题1】**一个素数的3倍与另一个素数的2倍之和是100，求这两个素数(答案2，47)。

**【基本习题限时训练1】**

1、将20写成两个素数之和，这两个素数最大乘积是多少？

2 、在14＝2×7中，2和7都是14的（ ）。

（A）素数 （B）互素数 （C）素因数 （D）公因数

3 、将下列各数分解素因数，并用连乘的形式表示结果。（1）48； （2）120

4、 39，47，57，83中为素数的有（ ）

（A） 39，47 (B) 47，57 （C）57，97 （D）47，83

5、12的素因数是（ ）

（A）1，2，3，4 （B）2，3 （C）2，2，3 （D）1，2，3，4，6，12

6、下列分解素因数正确的是（ ）

（A）42＝2×21 （B）48＝1×2×2×2×2×3 （C）24＝4×6 （D）62＝2×31

7、下列说法中正确的是（ ）

（A）自然数包括素数和合数两类 (B）不存在最小的素数

（C）1既不是素数，也不是合数 （D）2是最小的合数

8、两个素数相乘的积一定是 （ ）

（A）奇数 （B）偶数 （C）素数 （D）合数

9、根据要求填空：在1，2，9，21，43，51，59，64这八个数中，

（1）是奇数又是素数的数是（ ）； （2）是奇数不是素数的数是（ ）；

（3）是素数而不是奇数的数是（ ）； （4）是合数而不是偶数的数是（ ）；

（5）是合数而不是奇数的数是（ ）．

10、把下列各数写成几个素因数乘积的形式．

（1）18 （2）35 （3）45

（4）189 （5）72 （6）238 （7）338

**【知识点2】**

**1、互素*coprime***：如果两个整数的公因数只有1，那么称这两个数是互素(最大公因数为1，常记为*gcd*(*a，b*)=(*a，b*)=1，就是指*a*，*b*互素)．

2、**公因数和最大公因数**：几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数，其中最大的一个，叫做这几个数的最大公因数．

3、若*p*是素数，若*p*|*bc*，则*p*|*b* 或 *p*|*c*

4、若(*a*，*b*)=1， *a*|*bc*，则*a*|*c*

5、若（*a*，*b*）=1，则（*an*，*bm*）=1

**【基本习题限时训练2】**

1、已知9的因数是1，3，9；12的因数是1，2，3，4，6，12，那么下列说法正确的是（ ）

（A）9和12有1个公因数 （B）9和12有3个公因数

（C）9和12最大公因数为3 （D）9和12的最大公因数是9

2、16和24的公因数有（ ）

(A) 2，4，6，8，12 （B）2，4，8，12 （C）1，2，4，6 （D）1，2，4，8

3、下面各组数中两个数为互素数的是（ ）

（A）12和65 （B）115和70 （C）119和17 （D）36和45

4、在15和8、10和42、25和26、45和55、13和65这5组数中，最大公因数不是1的有（ ）组。

（A）1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、三个连续自然数的最大公约数是（ ）。

（A）最小的数 （B）最大的数 （C）1 　（D）无法确定

6、正整数*a*既是甲的倍数，又是乙的因数。下列说法中，正确的是（ ）。

（A）甲乙两数大小相等 （B）甲小于乙 （C）甲是乙的因数 （D）乙是甲的因数

**【知识点3】**求两个数的最大公因数可以用**列举法**、**分解素因数法**和**短除法**。

**【典型例题3】**求下列各组数的最大公因数：

（1）30和42 （2）16和80 （3）12和18

**【基本习题限时训练3】**

求下列各组数的最大公因数

（1）51和68 （2）56和126 （3）78和65 （4）40和48

**【知识点4】公倍数和最小公倍数**：几个整数的公有的倍数叫做他们的公倍数，其中最小的一个叫做它们的最小公倍数，常记为[*a*，*b*]，显然有 *a*|[*a*，*b*]， *b*|[*a*，*b*]， 且[*a*，*b*](*a*，*b*)=*a*\**b*.

**【基本习题限时训练4】**

1、27是3和9的（ ）

（A）最小公倍数 （B）公倍数 （C）最大公因数 （D）公因数

2、已知*m*=2×3×5， *n*=2×5×7， 那么*m*、*n*的最小公倍数是（ ）

（A）10 （B）60 （C）70 （D）210

3、用一个数去除以12和18，正好都整除，则这个数最小是（ ）

（A）72 （B）36 （C）18 （D） 6

4、如果整数*P*是整数*Q*的2倍，那么下列说法正确的是（ ）

（A） *P*， *Q*的最小公倍数一定是*P* （B） *P*，*Q*的最小公倍数一定是*Q*

（C）*P*，*Q*的最小公倍数一定是*P*的2倍 （D）*P*，*Q*的最小公倍数一定是*P*、*Q* 之积

5、两个数互素，且它们的最小公倍数是72，那么这两个数可能是（ ）

（A）3，24 （B）8，9 （C）18，4 （D）36，8

**【典型例题4】**求下列各组数的最小公倍数

（1）48和30 （2）36和18 （3）11和12 （4）9、12和18

**【知识点5】**求两个数的最小公倍数可以用**列举法**、**分解素因数法**和**短除法**。

**【基本习题限时训练5】**

1、求下列各组数的最大公因数和最小公倍数．

（1）48和72 （2）30和15 （3）27和36

（4）12和40 （5）15和8 （6）12、18和24

2、求出下列每组分数中分母的最小公倍数

（1）和 （2）和 （3）和

**【拓展题5】**

1、大雪后的一天，大亮和爸爸共同步测一个圆形花圃的周长，他俩的起点和走的方向完全相同，大亮每步长54厘米，爸爸每步长72厘米，由于两人脚印有重合，所以各走完一圈后雪地上只留下60个脚印，求花圃的周长．

2、在一根100厘米的木棍上，自右至左每隔5厘米染上一个红点，同时自左至右每隔6厘米也染上一个红点，然后沿红点将木棍逐段锯开，问长度是1厘米的短木棍有多少根?

**3、如何对*n*！进行素因数分解？**

**解：先找出小于等于*n*的所有素数，记为*p1，p2，…，pk***

**则 ，其中 素因数的个数*ai*可由下列算法得到：**

例题：（2010新知杯） 若前2013个正整数的乘积能被2010的某个幂次整除，这个幂次最大为 。

**4、乘积1000×999×998×……×3×2×1 (通常记为阶乘的形式 1000！)中，末位连续有多少个0？**

**5、桌上有一堆石子共1001粒，第一步从中拿出1粒，并将剩下的石子分成2堆，以后的每一步，都从某个石子数目多余1的堆中拿出1粒，再把这堆分成2堆，（相等时，随便从相等的任一堆中拿），试问：能否在若干步以后，使桌上的每一堆中都刚好有3粒石子？**

**6、已知四个素数满足 *p*1<*p*2<*p*3<*p*4，且 =511，试求这四个素数。**

**7、三个素数的积等于它们的和的11倍，求这三个素数。**