关键词：素数（质数），合数，素因数，公因数，公倍数，分解素因数，短除法，树枝分解法，算术基本定理，应用

# 素数、合数与分解素因数

**【定义】*Definition***

**1）素数*prime* *number***：一个正整数，如果只有1和它本身两个因数，这样的数叫做素数，也叫质数(仅有2个因数)．素数有无穷多个。

**【最复杂的宇宙空间离不开最简单的自然数表达，最简单的自然数又被最难以理解的素数控制着。】**

**【高斯说：数学是科学的女皇，数论是女皇头上的皇冠。哥德巴赫猜想就是皇冠上的宝石。】**

**2）合数*composite* *number***：一个正整数，如果除了1和它本身以外还有别的因数，这样的数叫合数(有2个以上的因数)．

**3）素因数**(*prime* *factor*)**：**如果一个素数是某个数的因数，那么就说这个素数是这个数的素因数

**4）1既不是素数，也不是合数（只有1个因数）。**这样，正整数又可以分为素数、合数和1这样三大类.

**5）分解素因数***Prime Factorization*：把一个合数用素因数相乘的形式表示出来，叫做分解素因数。分解素因数常用的方法有：树枝分解法、短除法、口算法等。

**6）注意事项：**

(1) 正整数按照因数的个数分类可以分为素数、合数、1；

(2) 素数(质数)只有1和它本身两个因数；合数至少要有3个因数；

(3) 最小的素数是**2**；最小的合数是**4**；既不是素数也不是合数的正整数是**1**；

(4) 唯一偶素数是**2**；大于2的素数一定是奇数，如果两个素数的和或差是奇数，则其中必有一个是2；如果两个素数的积是偶数，则其中必有一个是2；

(5) 若正整数*a、b*的积是素数*p*，则必有*a=p* 或 *b=p*。

**7）常用的100以内的素数共有25个：**

2，3，5，7；11，13，17，19；23，29；31，37；41，43，47；53，59；61，67；71，73，79；83，89；97

其中2是唯一的偶数，5是唯一一个个位上数字是5的素数，其余的素数个位只可能为1，3，7，9。采用筛选法可以剔除合数，保留素数。

8）**部分特殊数的分解：**

111=3×37，1001=7×11×13，11111=41×271，10001=73×137，1995=3×5×7×19，1998=2×3×3×3×37，

2007=3×3×223，2008=2×2×2×251，2007+2008=4015=5×11×73，10101=3×7×13×37

**9）算术基本定理（也叫唯一分解定理）**

任一正整数*n*>1，可以分解成： *n*=，*k* ≥1，其中 *p*1， *p*2，…， *pk*是互不相同的质数，*a*1， *a*2，…， *ak*是正整数，而且在不考虑*p*1， *p*2，…， *pk*的顺序时，这样的分解只有一种(唯一性)。

这个定理在数论中有着广泛的应用，分解素因数就是采用了这一算术基本定理。

**推论1：【正约数个数】**求大于1的正整数*n*的正约数个数的一般方法如下：

先将*n*分解成 *n* = ，（*p*1<*p*2<…<*pk*为质数，*a*1， *a*2，…， *ak*是正整数），则*n*的正约数个数为：*d*（*n*）=（*a*1+1）(*a*2+1)…（*ak*+1）=

正约数包括了1和它本身。

简要解答：*n*的约数形式只可能是 ，这里的*xi*=0，1，2，3，…， *ai*；*i*=1，2，…，*k*，与*pi*有关的约数有*ai*+1个，由计数的乘法原理，得到上述推论1。

**推论2：【所有正约数的和】记为*S*（*n*）**

==

**推论3：【欧拉函数*Euler*’*s* *Totient*(*phi*) *Function***】在数论中，对正整数*n*，欧拉函数是指小于或等于*n*的数中与*n*互素的数的数目。记为*φ*函数，其值的通式：*φ*(*n*)=*n*(1-1/*p*1)(1-1/*p*2)(1-1/*p*3)(1-1/*p*4)…..(1-1/*pk*)，其中*p*1， *p*2，……， *pk*为*n*的所有素因数，*n*是不为0的整数。定义*φ*(1)=1（唯一和1互素的数就是1本身）。 (注意：每种素因数只取一个。比如12=22×3，那么*φ*(12)=12×(1-1/2)×(1-1/3)=4)

**（欧拉*phi*函数）**

特别的，当*n*为素数*p*时，=*p*-1，即不大于素数*p*的正整数中，与*p*互素的数有*p*-1个，它们是1，2，…，*p*-1。

在自然数列中，除了0、1以外，不是素数就是合数，每个素数与合数都有其固定的位置，而合数存在规律(任意数p后面的第m个p项仍被p整除，例p=5在5后面的m(1.2.3……m)个5项，即：5+1\*5、5+2\*5. 5+3\*5……5+m\*5仍被5整除)，并且所有的合数都能联系在一起，形成一个等差数列网，这个网，呈上小下大的金字塔状，也可以说像树根状，如果把这个网从自然数列中抽出来，剩下的素数就没有规律了。相当于把一个形如树根的多串相连的珠子放进广口瓶中，然后用黄豆填满(填充的特点是下面豆子少上面的豆子多)，豆子与珠子各有自己的位置，根据所处位置看其是否被线串上，就知道是珠子还是豆子，如果把连在一起的多串珠子抽出来，剩下的豆子就看不出规律了，也就是豆子的使命是填充珠子没有占完的位置。自然数列中的项数就是合数与素数的位置，某一项只要不是合数就一定是素数。因此，要判断素数就要根据某数的特点，看是否存在于合数的等差数列网上，在网上的就是合数，不在网上的就是素数。

下面是一个根据合数的网式规律而得到的最基本的合数公式(即：判断任意数)  
  
M=(q-N)/(2\*N+1) 其中q是常量，表示被判断数I被2除的整数商(例：I=31，I/2的整数商为15，即：q=15)，M、N是变量，通过自变量N(N小于I的平方根取整加1，例：被判断数I=31，I的平方根取整是5，则N的最大值是5+1=6)的非负整数取值，判断M是否为非负整数，若M出现非负整数，则I是合数，并且非负整数M、N能满足(2\*M+1)和(2\*N+1)是I的一个因数对，在适合条件的范围内有多少对M、N适合条件，就说明I有多少个因数对。在适合条件的范围内，没有一对M、N同时满足非负整数，就说明I是素数。

例1：I=27  
因为I=27除以2的整数商为13  
则：由合数公式M=(q-N)/(2\*N+1)得：  
M=(13-N)/(2\*N+1)   
N的最大值为：I=27的平方根取整加1，即：5+1=6  
当N=1时M=(13-1)/(2\*1+1)=4  
则：(2\*M+1)=(2\*4+1)=9  
(2\*N+1)=(2\*1+1)=3  
即：(2\*M+1)=9和(2\*N+1)=3是I=27的一个因数对。  
同理：当N=2、3、4、5、6时  
只有当N=4时，才能得到非负整数M=1  
即：(2\*M+1)=(2\*1+1)=3  
(2\*N+1)=(2\*4+1)=9  
与前面的(2\*M+1)=9和(2\*N+1)=3正好相反  
则：说明I=27只有一个因数对3\*9(因数为1除外)  
例2：I=31  
因为I=31除以2的整数商为15  
则：由合数公式M=(q-N)/(2\*N+1)得：  
M=(15-N)/(2\*N+1)   
N的最大值为：I=31的平方根取整加1，即：5+1=6  
当N=1、2、3、4、5、6时  
没有一个N能使M为非负整数  
所以I=31是素数。

**【典型例题1】**一个素数的3倍与另一个素数的2倍之和是100，求这两个素数(答案3，17)。

**【基本习题限时训练1】**

1、将20写成两个质数之和，这两个质数最大乘积是多少？

2 、在14＝2×7中，2和7都是14的（ ）。

（A）素数 （B）互素数 （C）素因数 （D）公因数

3 、将下列各数分解素因数，并用连乘的形式表示结果。（1）48； （2）120

4、 39，47，57，83中为素数的有（ ）

（A） 39，47 (B) 47，57 （C）57，97 （D）47，83

5、12的素因数是（ ）

（A）1，2，3，4 （B）2，3 （C）2，2，3 （D）1，2，3，4，6，12

6、下列分解素因数正确的是（ ）

（A）42＝2×21 （B）48＝1×2×2×2×2×3 （C）24＝4×6 （D）62＝2×31

7、下列说法中正确的是（ ）

（A）自然数包括素数和合数两类 (B）不存在最小的素数

（C）1既不是素数，也不是合数 （D）2是最小的合数

8、两个素数相乘的积一定是 （ ）

（A）奇数 （B）偶数 （C）素数 （D）合数

9、根据要求填空：在1，2，9，21，43，51，59，64这八个数中，

（1）是奇数又是素数的数是（ ）； （2）是奇数不是素数的数是（ ）；

（3）是素数而不是奇数的数是（ ）； （4）是合数而不是偶数的数是（ ）；

（5）是合数而不是奇数的数是（ ）．

10、把下列各数写成几个素因数乘积的形式．

（1）18 （2）35 （3）45

（4）189 （5）72 （6）238 （7）338

**【知识点2】**

**1、互素*coprime***：如果两个整数的公因数只有1，那么称这两个数是互素(最大公因数为1，常记为*gcd*(*a，b*)=(*a，b*)=1，就是指*a*，*b*互素)．

2、**公因数和最大公因数**：几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数，其中最大的一个，叫做这几个数的最大公因数．

3、存在整数*x*，*y*，使得 *ax+by*=1;等价于 存在*y*，使得*by*≡1（mod *a*）同余理论（congruence relations）

4、*p*是素数，若*p*|*bc*，则*p*|*b* 或 *p*|*c*

5、若(*a*，*b*)=1， *a*|*bc*，则*a*|*c*

6、若（*a*，*b*）=1，则（*an*，*bm*）=1

7、若（*a*，*b*）=1，*br*≡*bs*（mod *a*），则*r*≡*s*（mod *a*）🡺*if* (*a*，*b*)=(*a*，*c*)=1， *then* (*a*，*bc*)=1

8、**互素在笛卡尔坐标系中的表现**：若（*a*，*b*）=1，则连接原点（0，0）到（*a*，*b*）的对角线，不通过任何其它整数点（除端点外）。或者说对角线穿过的整数点数目=（*a*，*b*）+1（仅仅包含两个端点）

9、**最大公约数的几何体现**：连接（0，0）到（*a*，*b*）的对角线，穿过的整数点数为（*a*，*b*）+1，穿过的小正方形数目就是*a*+*b*-(*a*，*b*).



10、 （*a*，*b*）=1 *iff*（当且仅当） （2*a*-1，2*b*-1）=1，可以由下面的欧拉算法轻易得到；

11、欧拉算法 *gcd*(*na*-1，*nb*-1)=*ngcd*(*a*，*b*)-1

**【基本习题限时训练2】**

1、已知9的因数是1，3，9；12的因数是1，2，3，4，6，12，那么下列说法正确的是（ ）

（A）9和12有1个公因数 （B）9和12有3个公因数

（C）9和12最大公因数为3 （D）9和12的最大公因数是9

2、16和24的公因数有（ ）

(A) 2，4，6，8，12 （B）2，4，8，12 （C）1，2，4，6 （D）1，2，4，8

3、下面各组数中两个数为互素数的是（ ）

（A）12和65 （B）115和70 （C）119和17 （D）36和45

4、在15和8、10和42、25和26、45和55、13和65这5组数中，最大公因数不是1的有（ ）组。

（A）1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、三个连续自然数的最大公约数是（ ）。

（A）最小的数 （B）最大的数 （C）1 　（D）无法确定

6、正整数*a*既是甲的倍数，又是乙的因数。下列说法中，正确的是（ ）。

（A）甲乙两数大小相等 （B）甲小于乙 （C）甲是乙的因数 （D）乙是甲的因数

**【知识点3】**求两个数的最大公因数可以用**列举法**、**分解素因数法**和**短除法**。

**【典型例题3】**求下列各组数的最大公因数：

（1）30和42 （2）16和80 （3）12和18

**【基本习题限时训练3】**

求下列各组数的最大公因数

（1）51和34 （2）56和126 （3）65和91 （4）40和48

**【知识点4】公倍数和最小公倍数**：几个整数的公有的倍数叫做他们的公倍数，其中最小的一个叫做它们的最小公倍数，常记为[*a*，*b*]， *a*|[*a*，*b*]， *b*|[*a*，*b*]， 且[*a*，*b*](*a*，*b*)=*a*\**b*.

**【基本习题限时训练4】**

1、27是3和9的（ ）

（A）最小公倍数 （B）公倍数 （C）最大公因数 （D）公因数

2、已知*m*=2×3×5， *n*=2×5×7， 那么*m*、*n*的最小公倍数是（ ）

（A）10 （B）60 （C）70 （D）210

3、用一个数去除以12和18，正好都整除，则这个数最小是（ ）

（A）72 （B）36 （C）18 （D） 6

4、如果整数*P*是整数*Q*的2倍，那么下列说法正确的是（ ）

（A） *P*， *Q*的最小公倍数一定是*P* （B） *P*，*Q*的最小公倍数一定是*Q*

（C）*P*，*Q*的最小公倍数一定是*P*的2倍 （D）*P*，*Q*的最小公倍数一定是*P*、*Q* 之积

5、两个数互素，且它们的最小公倍数是72，那么这两个数可能是（ ）

（A）3，24 （B）8，9 （C）18，4 （D）36，8

**【典型例题4】**求下列各组数的最小公倍数

（1）48和30 （2）36和18 （3）11和12 （4）9、12和18

**【知识点5】**求两个数的最小公倍数可以用**列举法**、**分解素因数法**和**短除法**。

**【基本习题限时训练5】**

1、求下列各组数的最大公因数和最小公倍数．

（1）48和72 （2）30和15 （3）27和36

（4）12和40 （5）15和8 （6）12、18和24

2、求出下列每组分数中分母的最小公倍数

（1）和 （2）和 （3）和

**【拓展题5】**

**例1**、\*\*大雪后的一天，大亮和爸爸共同步测一个圆形花圃的周长，他俩的起点和走的方向完全相同，大亮每步长54厘米，爸爸每步长72厘米，由于两人脚印有重合，所以各走完一圈后雪地上只留下60个脚印，求花圃的周长．

**解1：高斯取整函数** [*S*/54]+[*S*/72]-[*S*/[54，72]]=60， (54，72)=18， [54，72]=18\*12=216

[*S*/3]+[*S*/4]-[*S*/12]=60\*18， 解得*S*=180\*12=2160*cm*=21.6*m*

**解2：54和72的最小公倍数是216**，

小明每步长54厘米，每经过216厘米，小明会留下216÷54＝4个脚印

爸爸每步长72厘米，每经过216厘米，爸爸会留下216÷72＝3个脚印

且每经过216厘米，小明和爸爸会有一个脚印重合，则每经过216厘米，雪地上小明和爸爸共留下4+3-1＝6个脚印，那么 60÷6＝10个216厘米，60个脚印就需要小明和爸爸走10个216厘米

所以路长是216×10＝2160厘米=21.6米。

【分析过程：设每部a和b，则重叠脚印情形是 na=mb=c, 所以 a|c, b|c, 即c是a、b的公倍数，不妨设c=[a,b], 观察同一个c中，脚印个数，即可得知】

**例2**、\*\*在一根100厘米的木棍上，自右至左每隔5厘米染上一个红点，同时自左至右每隔6厘米也染上一个红点，然后沿红点将木棍逐段锯开，问长度是1厘米的短木棍有多少根?

解：1）因为5|100，所以从右往左 与 从左往右染上红点，结果一致；

2）题目要求 100以内 5的倍数 与6的倍数 相差为1的有多少组；

3）即求 |*6m-5n*|=1，且 *6m*≤100，*5n*≤100， 化简就是： 6*m*=5*n*±1，*m*≤16，*n*≤20，（奇偶性判断知道：因为6*m*是偶数，所以5*n*必须是奇数，*n*必须是奇数。可以忽略，找大数的模，如模5）

**由模5得到: *m*≡±1(*mod* 5)， 且*m*≤16，故*m*可取1，4，6，9，11，14，16，分别对应的*n*为1，5，7，11，13，17，19。组成（6，5）（24，25），（36，35），（54，55），（66，65），（84，85），（96，95） ，即长度为1*cm*的木棍有7根。**

**【画图求解：起点刻度标为0，从左往右标注，同例1，刻度重合的位置就是[5,6]=30cm处，同样一个周期中有2个长度为1cm的短木棍，最后90cm—100cm之间有一根1cm的短木棍，故共有3\*2+1=7根】**

**例3、如何对*n*！进行素因数分解？**

**解：先找出小于等于*n*的所有素数，记为*p1，p2，…，pk***

**则 ，其中 素因数的个数*ai*可由下列算法得到：**

**例题**：**（2010新知杯） 若前2013个正整数的乘积能被2010的某个幂次整除，这个幂次最大为 。**

解：考察2013！分解素因数中，67的幂次的最大数（因为2010=2×3×5×67）。

，故幂次最大为30。

**例4、乘积1000×999×998×……×3×2×1 (通常记为阶乘的形式 1000！)中，末位连续有多少个0？**

**解：乘积中2的个数比5的个数多，所以只要计算出1000！中5的因子个数，由例3，得到：**

**N(5)==200+40+8+1=249个，故末位连续有249个0.**

**例5、桌上有一堆石子共1001粒，第一步从中拿出1粒，并将剩下的石子分成2堆，以后的每一步，都从某个石子数目多余1的堆中拿出1粒，再把这堆分成2堆，（相等时，随便从相等的任一堆中拿），试问：能否在若干步以后，使桌上的每一堆中都刚好有3粒石子？**

**解：如果可能的话，假设剩下n堆，每堆3粒，则在此之前一共进行了(n-1)次操作（开始时只有一堆石子，每操作一次，多分出一堆，操作(n-1)次后分成n堆），而每次操作都拿掉了1粒，所以一共拿掉n-1粒，列方程为： 3n+（n-1）=1001， 化简 4n=1002，**

**上式，左边是4的倍数，右边不是4的倍数，产生矛盾，所以，不可能通过若干步后，使得桌上的每一堆石子数量都正好为3粒。**

**例6、已知四个素数满足 *p*1<*p*2<*p*3<*p*4，且 =511，试求这四个素数。**

**分析：511是一个奇数，所以这4个素数不都是奇数，其中必有偶素数2.**

**解：显然由奇偶分析可得*p*1=2, 代入得到 =507=3×132,**

**因为 *p*2<*p*3<*p*4，所以 ，从而*p*4>13 ，**

**又因为 507< 232=523, 所以 *p*4 ≤19；故 17≤*p*4 ≤19.**

**若*p*4=19, 则 =146，所以 7≤*p*3<13, 故*p*3=11，这时*p*2=5.**

**若*p*4=17, 则 =218，所以 11<*p*3<17, 故*p*3=13，这时*p*2=7.**

**所以这四个素数分别为2、5、11、19或2、7、13、17.**

**例7、三个素数的积等于它们的和的11倍，求这三个素数。**

**分析：设这三个素数为*p*、*q*、*r*，则 *pqr*=11（*p+q+r*），解方程即可。**

**解：又上述分析知道，必有一个素数为11，不妨设*r*=11，*p*≤*q*, 则方程化简为**

***pq=p+q*+11， （*p*-1）(*q*-1)=12；**

**所以 *p*-1=1，*q*-1=12，或 *p*-1=2，*q-*1=6， 故所求三个素数为2、11、13或3、7、11.**