关键词：因数，公因数，最大公因数，倍数，公倍数，最小公倍数，辗转相减法，辗转相除法，欧几里得算法，分解素因数

**最大公因数和最小公倍数**

* **最大公约数：指某几个正整数共有约数中最大的一个, 公约数有有限个。**

GCD（*Greatest* *Common* *Divisor*）或HCF（*Highest* *Common* *Factor*）

* **最小公倍数：几个正整数共有的倍数就是公倍数，其中最小的一个就是最小公倍数, 公倍数有无数个。** LCM(*Least* *Common* *Multiple*)

**方法一、“吃数”游戏求最大公约数（又叫辗转相减法）**

有一种游戏，两个数像是在决斗，较小数胆识过人，它可以从对方身上“吃掉”相当于自己同样大的数。当大块头变较小的数的时候，厄运就降临到吃数的一方，轮到它被新的较小的数吃掉的境地了。显然，两个数最后会变得相等。我们把最后这个相等的数看成最大公约数。

**例1**、写出2520与819相遇决斗的过程，由此得出这两个数的最大公约数。

第一回合：819从2520身上吃掉第一个数819，2520变成了1701。

（第一次减法 2520-819=1701）；

第二回合：819继续从1701中咬去819，还剩882。

（第二次减法 1701-819=882）；

第三回合：819从882中咬去819，还剩63。

（第三次减法：882-819=63）；

第四回合：乾坤逆转了，轮63从819中吃掉63得756。

（第4次减法：819-63=756）；

第五回合：63从756中吃掉63得，693。

（第5次减法：756-63=693）；

第六回合：63从693中吃掉63得，630。

（第6次减法：693-63=630）；

第七回合：63从630中吃掉63得，567。

（第7次减法： 630-63=567）；

……

第十五回合：63从126中吃掉63得，63。

（第15次减法：126-63=63）；

第十六回合：决斗结束了。双方战平，都变成了63。

所以2520与819的最大公约数是63，或（2520，819）=63。

**思考1**：两个数的最大公约数一定可以同时整除这两个数，并且是最大的符合这一要求的正整数。想一想，这是为何呢？

**思考2:** 从上面第四回合直到第十五回合，你发现什么规律？

对756、693、630、567……这一串数构成一个等差数列。

如果我们算一下819÷63＝13……. 你有什么进一步发现呢？

对，从第四到第十六的十三个回合其实就是从819中拿掉了12个63，剩下一个63的过程。这个12与除法算式的商有关。这就是我们下面要介绍的方法。

**方法二、辗转相除法求最大公约数（也称欧几里德除法）**

**例2**、用辗转相除法求2520与819的最大公约数。

819 2520 (3商, 小数作除数)

-2457

（第一次余数作） 63 819 ( 13🡨商, 交换位置，余数作除数)

（除数） - 819

0 （除尽后，最后余数为0）

则 （2520，819）=63

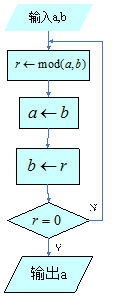
**练习1：用辗转相减法求48和64的最大公约数。**

**练习2：用辗转相除法求14850和2520的最大公约数。**

**欧几里德算法求最大公约数，又称为辗转相除法。**

**原理是**GCD**(*a*,*b*)=**GCD**(*b*, *a*** mod ***b*) 其中*a*>*b***

可以用*Pascal*，*C*++，*C*，*VB*编写递归程序或非递归程序实现。流程图如下：

**最大公约数的性质**

**交换律**  GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a*);

**特殊情况** GCD(-*a*, *b*)=GCD(*a*, *b*)；GCD(*a*, *a*)=|*a*|；GCD(*a*,0)=|*a*|；GCD(*a*,1)=1；

**辗转相除原理**GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a* mod *b*) *where* *a*>*b>0*

**辗转相减原理** GCD(*a*, *b*)=GCD(*b*, *a*-*b*)

**分配率** GCD(*ma*, *mb*)=*m*×GCD(*a*, *b*);

GCD(*a*/*m*, *b*/*m*)=GCD(*a*, *b*)/*m*, *m*是非零整数。

例题：求 （36,54）=（18×2,18×3）=18（2,3）=18；

GCD(*an*,*bn*)= [GCD(*a*,*b*)]*n*

例题：（64, 216）=（43, 63）=（4, 6）3=23=8

GCD(*a*+*mb*, *b*)=GCD(*b*, (*a*+*mb*) mod *b*)=GCD(*b*,*a*)=GCD(*a*, *b*)

GCD(*ab*, *m*)=GCD(*a*, *m*)\*GCD(*b*, *m*)

如果(*a*,*b*)=1, 则 (*ac*,*b*)=(*c*,*b*)

例题：（46,253）=（46,11×23）=（46,23）=23

（245,315,560）=5（49,63,112）=5（49,63,28×4）=5（49,63,28）=5×7（7,9,4）=35

**方法三、最大公约数与最小公倍数的关系**

GCD**(*a*, *b*) ×**LCM**(*a*, *b*)=*ab* 或 (*a*,*b*)[*a*,*b*]=*ab***

**方法四、分解素因数方法也可以用来求最大公因数**

举例：（462,21）=（2×3×7×11,3×7）=3×7(2×11,1)=21;

**方法五、短除法也可以求最大公因数和最小公倍数**

**例3**、把一个2002×847的长方形裁成同样大小的正方形，不许浪费一丁点儿纸，你能够切出多少个尽可能大的正方形呢？

解：这其实是一个求最大公约数的问题。我们先求出2002与847的最大公约数如下：

847 2002 （2商）

-1694

308 847 （2商）

-616

231 308 （1商）

-231

77 231 (3商)

-231

0

可见，这张长方形的纸可以切成77为边长的正方形若干块，因为77可以整除它的长与宽。具体切成了几块呢？

2002÷77=26，847÷77=11，所以这张长方形的纸最终可以切出26×11=286块边长是77的正方形。

**练习3：**最简分数是把分数的分子与分母同时除以它们的最大公约数以后所得的分数。请用最大公约数给以下分数约分。



（1） （2）

**例4**、有一个分辨率为121824×83613的巨型电子显示屏，最小的显示区域是一个单位正方形，也叫一个象素点。请问：要显示长方形的一条对角线，最少需要点亮它的多少个象素点呢？（注：一个方格点亮不点亮只要看它有没有被对角线穿越。）

分析：先画几个简单的图。

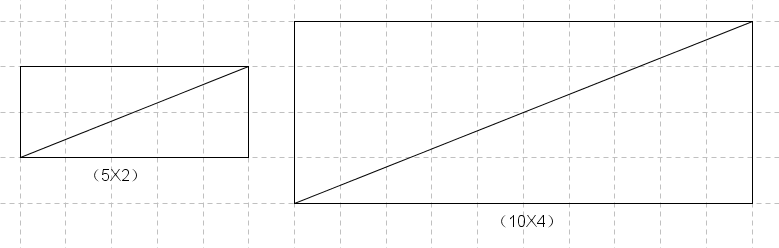
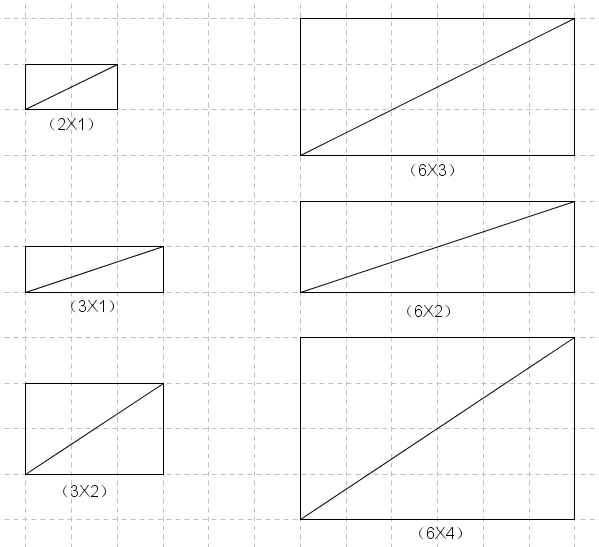


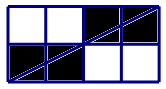
图 1 图 2 图 3

图1是4×7长方形，对角线穿越10个小方格，所以要点亮10个象素点。

图2是2×4长方形，对角线与4个小方格有关，所以要点亮4个象素点。

图3是3×6长方形，对角线与6个小方格有关，所以要点亮6个象素点。

……

**总结一下，当长宽数最大公约数是1，两数相加再减1 （*M*+*N*-1）。**

**当长宽数最大公约数是*k*，约去两数公约数后的两数相加再减1, 然后乘以*k*。**

**[ (*M*/(*M*,*N*)+*N*/(*M*,*N*)-1)·(*M*,*N*)=*M*+*N*-(*M*,*N*) ]**

现在我们会解这题了。请完成它。

**统一的公式就是*M* + *N*—（*M*,*N*）**

由对角线的一角开始画，进入一个新的格子，要么穿过横边，要么穿过竖边，要么过格点，而穿过横边*M*次，穿过竖边*N*，减去重复计算的，就是答案，重复的正好就是*M*,*N*的最大公约数。

或者：如果设*x*=（*M*，*N*），即*M*=*ax*，*N*=*bx*，那么对角线长是*a，b*小矩形的*x*倍，穿过的数量是*x*(*a+b*-1) = *ax+bx-x* = *M*+*N*-(*M*,*N*)

**例5**、一个奇怪的仪表盘，盘面被划分成400个小刻度。上面有三个指针都在均匀地顺时针方向运动，长针每分钟走120格，中针每分钟走80格，短针每分钟走70格。当校准仪表时三针位于同一位置，问几分钟后它们相会于盘面同一位置？

分析：三针重合时它们走的路程差是400的整数倍。经过*X*分钟，长、中针相差了40*x*格，长短针相差了50*x*格，所以400既要整除40*x*，又要整除50*x*。400要整除它们的最大公约数10*x*，可见*x*=40。

**例6、**三根铁丝，长度分别是120厘米、180厘米、300厘米，现在要把它们截成相等的小段，每段都不能有剩余，那么最少可截成多少段？

*A*.8　 *B*.9　 *C*.10　 *D*.11

[答案]*C*。解析：这道例题中隐含了最大公约数的关系。“截成相等的小段”，即为求三数的公约数，“最少可截成多少段”，即为求最大公约数。每小段的长度是120、180、300的约数，也是120、180和300的公约数。120、180和300的最大公约数是60，所以每小段的长度最大是60厘米，一共可截成120÷60+180÷60+300÷60=10段。

**例7、**一个小于200的数，除以24或36都有余数16，则这个数是（　）

*A*.52　 *B*.78　 *C*.88　 *D*.156

【答案】*C*。解析：这道例题中隐含了最小公倍数的关系。“除以24或36都有余数16”，说明此数减去16，即为24和36的公倍数。24和36的最小公倍数为72，所以可能的通解为72*k*+16，则只有*k*=1，此数为72+16=88满足所给的条件。

**例8、**用75元可以买一级绿茶150克，或二级绿茶180克，或三级绿茶225克，现在将这三种绿茶分别按整克数装袋出售，要求每袋的价格都相等，那么每袋绿茶最低多少元?

【答案】要求整克数袋装，也就是将三种级别的茶至多分成几部分，保证每部分的克数都是整数，即求150,180,225的最大公约数，（150,180,225）=15，且150/15=10,180/15=12,225/15=15,即可以将每种级别的茶分成15袋，每袋价格就是75/15=5元。只不过一级绿茶每袋重10克，二级绿茶每袋重12克，三级绿茶每袋重15克。

**例9、**在一条长600米的小路的一边，每隔15米种一棵树，两端各植一棵，后来发现树苗不够，要改成每隔25米栽一棵树。这样有几个挖好的坑要填掉?还要再挖几个坑?

【分析】600米长，每隔15米一个坑，而600/15=40,两端各挖了一个坑，故共有40+1=41个坑；改成25米一个坑，而600/25=24，为24+1=25个坑，减少了41-25=16个坑，需要填埋。又[15,25]=75,既是15又是25的倍数有[600/75]=8,故有8+1=9个坑不需要动，需要填埋的坑有16个，还要再挖25-9=16个坑。