**奥数平面几何部分**

**——面积法之三(教师)**

**教学目标**

1﹒ 熟练掌握五大面积模型（等积模型，蝴蝶模型，鸟头模型，燕尾模型，相似模型）

特殊的梯形蝴蝶模型，金字塔模型 ，沙漏模型，三角形中位线定理

2﹒ 掌握五大面积模型的各种变形

3﹒ 塞瓦定理

**知识点拨**

**例1.** 如图，设*BD：DC=p，CE：EA=q，AF：FB=r*，试用*p, q, r*表示*S∆PQR：S∆ABC*

****

**例1.** 解：连接*BQ*，由燕尾定理的面积法得到

*, *

即 *△ABC*被*Q*点分成了三个△，且

*S△ABQ：S△AQC：S△BQC=pr:r:1*

总份数为*pr+r+1,*

由等积变形得到

**,△*ABC*被分成两个△，总份数为*p*+1，故有

*S△ABD=S△ABC*, *S△ADC=S△ABC*

**

*=*

*=*

*∴ *

同理可以计算： **

由此计算出围绕△PQR周边的三个三角形面积。

*S△AQC=S△ABC* ，*S△ABR=S△ABC* ， *S△BPC=S△ABC*

∴ **

*=*

**例2**. 如图，以正方形的边*AB*为斜边在正方形内作直角三角形*ABE*， ∠*AEB*=90°，*AC、BD*交于*O*， 已知*AE、BE*的长分别为3 cm、5 cm，求三角形*OBE*的面积．



例2 解：如图，连接DE，以A点为中心，将∆ADE顺时针旋转到∆ABF的位置．

那么∠EAF=∠EAB+∠BAF=∠EAB+∠DAE=90°，而∠AEB也是90°，所以四边形AFBE是直角梯形，且AF=AE=3，所以梯形的面积为：(3+5)×3×=12 (cm2)．

又因为∆ABE是直角三角形，根据勾股定理，*AB*2=*AE*2+*BE*2=32+52=34，

所以*SABCD=AB*2=34，*S∆ABD=0.5SABCD*=17 (cm2)．

那么*S∆BDE* = *S∆ABD* -（*S∆ABE* + *S∆ADE* ）= *S∆ABD* －*S∆AFBE*=17-12=5 (cm2)，

所以*S∆OBE* =0.5 *S∆BDE* =2.5 (cm2)．

**例3.** 如下图，六边形*ABCDEF*中，*AB=ED，AF=CD，BC=EF*，且有*AB*平行于*ED*，*AF*平行于*CD*，*BC*平行于*EF*，对角线*FD*垂直于*BD*，已知*FD*=24厘米，*BD*=18厘米，请问六边形*ABCDEF*的面积是多少平方厘米？

** **

例3 解：如图，我们将∆*BCD*平移使得*CD*与*AF*重合，将∆*DEF*平移使得*ED*与*AB*重合，这样*EF、BC*都重合到图中的*AG*，得到一个长方形*BGFD*，它的面积与原六边形的面积相等，显然长方形*BGFD*的面积为24×18=432平方厘米，所以六边形*ABCDEF*的面积为432平方厘米．

**例4.** 如图，正方形*ABCD*面积为3平方厘米，*M*是*AD*边上的中点，对角线*AC*与*BM*交于点*G*．求图中阴影部分的面积．

例4. 解 因为*M*是*AD*边上的中点，所以*AM：BC*=1:2，

根据梯形蝴蝶定理可以知道

*S∆AMG*：*S∆ABG* ：*S∆MCG* ：*S∆BGC* =12：（1×2）：（1×2）：22=1:2:2:4，

设*S∆AMG* =1份，则*S∆MCD* =1+2=3 份，

所以正方形的面积为1+2+2+4+3=12份，

*S阴影* =2+2=4份，

所以*S阴影* ：*S正方形* =4:12=1:3，

所以*S阴影*=1平方厘米．

**例5.** 如图，∆*ABC*是等腰直角三角形，∠*BAC*=90°，正方形*DEFG*的EF边在BC上，线段*AB*与*CD*相交于*K*点．已知正方形*DEFG*的面积48，*AK：KB*=1:3，则∆*BKD*的面积是多少？

** **

例5 解 由于*DEFG*是正方形，所以*DA*与*BC*平行，那么四边形*ADBC*是梯形．

在梯形*ADBC*中，∆*BKD*和∆*ACK*的面积是相等的．

而*AK：KB*=1:3，所以∆*ACK*的面积是∆*ABC*面积的，那么∆*BKD*的面积也是∆*ABC*面积的．

由于∆*ABC*是等腰直角三角形，如果过*A*作*BC*的垂线，*M*为垂足，那么*M*是*BC*的中点，而且*AM=DE*，可见∆*AB*M和∆*ACM*的面积都等于正方形*DEFG*面积的一半，所以∆*ABC*的面积与正方形*DEFG*的面积相等，为48．

那么∆*BKD*的面积为．

**例6.** 下图中，两个四边形都是边长为1 的正方形*ABCD，E、F、G、H*分别是*AB、BC、CD、DA*的中点，如果左图中阴影部分与右图中阴影部分的面积之比是最简分数，那么，（*m+n*）的值等于 ．

 

例6 解 左、右两个图中的阴影部分都是不规则图形，不方便直接求面积，观察发现两个图中的空白部分面积都比较好求，所以可以先求出空白部分的面积，再求阴影部分的面积．

如下图所示，在左图中连接*EG*．设*AG*与*DE*的交点为*M*．

左图中*AEGD*为长方形，可知∆*AMD*的面积为长方形*AEGD*面积的，所以∆*AMD*的面积为．又左图中四个空白三角形的面积是相等的，所以左图中阴影部分的面积为1-×4=．



如上图所示，在右图中连接*AC、EF*．设*AF、EC*的交点为*N*．

可知*EF∥AC*且*AC=2EF*．那么∆*BEF*的面积为∆*ABC*面积的，所以∆*BEF* 的面积为，梯形*AEFC*的面积为．

在梯形*AEFC*中，由于*EF:AC*=1:2，根据梯形蝴蝶定理，其四部分的面积比为：，所以三角形EFN的面积为，那么四边形BENF的面积为．而右图中四个空白四边形的面积是相等的，所以右图中阴影部分的面积为．

那么左图中阴影部分面积与右图中阴影部分面积之比为=3:2，即，

那么 *m+n*=3+2=5．

**例7.** 如图，∆*ABC*中，*DE//FG//BC，AD=DF=FB*，则*S*∆*ADE*: *SDEGF*: *SFGCB*=  **．**

 

例7 解1 设*S∆ADE*=1份，根据**相似三角形面积比等于相似比的平方**，

所以*S∆ADE*：*S∆AFG*=*AD*2：*AF*2=1:4，*S∆ADE*：*S∆ABC*=*AD*2：*AB*2=1:9，

因此 *S∆AFG*= 4份，*S∆ABC* =9份，故有*SDEFG*=4-1=3份，*SFGCB*=9-4=5份，

所以 *S∆ADE*：*SDEFG*：*SFGCB* =1:3:5

解2 如图将∆*ABC*剖分成全等的小三角形，根据三角形个数也可以判断。

**例8.** 如图，已知正方形*ABCD*的边长为4，*F*是*BC*边的中点，*E*是*DC*边上的点，且*DE：EC*=1:3，*AF*与*BE*相交于点*G*，求 *S∆ABG*



例8 解 方法一：连接*AE*，延长*AF*和*DC*，两条延长线交于点*M*，构造出两个沙漏，所以有*AB：CM=BF*：*FC*=1:1，因此*CM*=4，根据题意有*CE*=3，

再根据另一个沙漏有*GB：GE=AB：EM*=4:7，所以 *S∆ABG* = *S∆ABE*=×(4×4÷2)=．

方法二：连接*AE、EF*，分别求得 *S∆ABF* =4×2÷2=4，*S∆AEF* =4×4-4×1÷2-3×2÷2-4=7，

根据蝴蝶定理*S∆ABF* ：*S∆AEF* =4:7=*BG：GE*，

所以*S∆ABG* = *S∆ABE* =×(4×4÷2)=．

**例9.** 如图所示，已知平行四边形*ABCD*的面积是1，*E、F*是*AB、AD*的中点，*BF*交*EC*于点*M*，求∆*BMG*的面积．

 

例9 解法一：由题意可得，*E、F*是*AB、AD*的中点，得*EF//BD，*而*FD：BC=FH：HC*=1:2，

*EB：CD=BG：GD*=1:2所以*CH：CF=GH：EF*=2:3，并得*G、H*是*BD*的三等分点，

所以*BG=GH=HD*，

所以*BG：EF=BM：MF*=2:3，所以*BM=BF*，*S∆BDF*=* S∆BDF*=**×* SABCD=* ；

又因为*BG*=*BD*，所以 *S∆BMG*=× *S∆BDF*= ×× *SABCD* =．

解法二：延长*CE*交*DA*于*I*，如右图，

可得，*AI：BC=AE：EB*=1:1，从而可以确定*M*点的位置，沙漏模型

*BM：MF=BC：IF*=2:3，*BG：GD=BC：DI*=1:2

∴*BM*=*BF*，*BG=BD* （两个沙漏模型）

由共角鸟头定理得到

*S∆BMG*=× *S∆BDF*= ×× *SABCD* =

1. 如图，为正方形，且，请问四边形的面积为多少？

 

1. (法)由，有，所以，又，所以

，所以，所以占的，

所以．

(法)如图，连结，则(，

而，所以，()．

而()，因为，

所以，则()，阴影部分面积等于

()．

1. **如图，三角形的面积是，，**，三角形被分成部分，请写出这部分的面积各是多少?**

** **

1. 设*BG*与*AD*交于点*P*，*BG*与*AE*交于点*Q*，*BF*与*AD*交于点*M*，*BF*与*AE*交于点*N*．连接*CP*，*CQ*，*CM*，*CN*．

根据燕尾定理，，，设(份)，则(份)，所以

同理可得，，，而，所以，．

同理，，所以，，，

**【巩固】如图，的面积为**1**，点、是边的三等分点，点、是边的三等分点，那么四边形的面积是多少？**

 

1. 连接、、．

根据燕尾定理，，，

所以，那么，．

类似分析可得．

又，，可得．

那么，．

根据对称性，可知四边形的面积也为，那么四边形周围的图形的面积之和为，所以四边形的面积为．

1. **右图，中，是的中点，、、是边上的四等分点，与交于，与交于，已知的面积比四边形的面积大平方厘米，则的面积是多少平方厘米？**

****

1. 连接、．

根据燕尾定理，，，所以；

再根据燕尾定理，，所以，所以，那么，所以．

根据题意，有，可得(平方厘米)

1. **如图，面积为l的三角形*ABC*中，*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*分别是*AB*、*BC*、*CA* 的三等分点，求阴影部分面积.**

****

1. 三角形在开会，那么就好好利用三角形中最好用的比例和燕尾定理吧！

令*BI*与*CD*的交点为*M*，*AF*与*CD*的交点为*N*，*BI*与*AF*的交点为*P*，*BI*与*CE*的交点为*Q*，连接*AM*、*BN*、*CP*

⑴求：在中，根据燕尾定理，

设(份)，则(份)，(份)，(份)，

所以，所以，，

所以，

同理可得另外两个顶点的四边形面积也分别是面积的

⑵求：在中，根据燕尾定理，

所以，同理

在中，根据燕尾定理，

所以，所以

同理另外两个五边形面积是面积的，所以

1. **如图，面积为l的三角形*ABC*中，*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*分别是*AB*、*BC*、*CA* 的三等分点，求中心六边形面积.**

****

1. 设深黑色六个三角形的顶点分别为*N*、*R*、*P*、*S*、*M*、*Q*，连接*CR*

在中根据燕尾定理，，



所以，同理，

所以，同理

根据容斥原理，和上题结果

**课后练习（面积法三）：**

**1.** 在下图的正方形ABCD中，E是BC边的中点，AE与BD相交于F点，三角形BEF的面积为1平方厘米，那么正方形ABCD面积是 平方厘米．



（第1题）

1. 解 连接*DE*，根据题意可知*BE：AD*=1:2，根据梯形的蝴蝶定理得*S*梯形=（1+2）2=9 (平方厘米)，*S∆ECD*=3 (平方厘米)，那么*S□ABCD*=12 (平方厘米)．

**2.** 如图，DE平行BC，且AD=2，AB=5，AE=4，求AC的长．



（第2题）

2. 解 由金字塔模型得AD：AB=AE：AC=DE：BC=2:5，所以AC=4÷2×5=10

3. 如图， ∆ABC中，DE，FG，MN，PQ，BC互相平行，

**AD=DF=FM=MP=PB，**则

*S∆ADE*：*S*四边形*DEGF*：*S*四边形FGNM=：*S*四边形MNQP ：*S*四边形PQCB= **．**

3. 解设*S∆ADE*=1份， *S∆ADE*：*S∆AFG*=AD2：AF2=1:4，因此*S∆AFG*=4份，进而有*S*四边形*DEGF*=3份，同理有*S*四边形FGNM=5份，*S*四边形NQPM=7份，*S*四边形PQCB=9份．

所以有

*S∆ADE*：*S*四边形*DEGF*：*S*四边形FGNM=：*S*四边形MNQP ：*S*四边形PQCB=1:3:5:7：9

4. 如图，已知AB=AE=4 cm，BC=DC，∠BAE=∠BCD=90°，AC=10 cm，则

*S∆ABC* + *S∆ACE* + *S∆CDE*=cm2**．**

 

4. 解 将三角形ABC绕A点和C点分别顺时针和逆时针旋转90°，构成三角形AEC’和A’DC，再连接A’C’，显然AC⊥AC’， AC⊥A’C，AC=A’C=AC’，所以ACA’C’是正方形．三角形AEC’和三角形A’DC关于正方形的中心O中心对称，在中心对称图形ACA’C’中有如下等量关系：

；；．

所以．

5. 如图，正方形ABCD的面积是120平方厘米，E是AB的中点，F是BC的中点，四边形BGHF 的面积是\_\_\_\_\_平方厘米．

 

5. 解 连接BH，根据沙漏模型得BG:GD=BE:CD=1:2，设*S∆BHC*=1份，

根据燕尾定理 *S∆BHD*= *S∆DHC*=2份，

因此*S*正方形*ABCD*=（1+2+2）×2=10份，

，所以(平方厘米).

6. 如图，中，点是边的中点，点、是边的三等分点，若的面积为1，那么四边形的面积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

 

6. 解 由于点是边的中点，点、是边的三等分点，如果能求出、、三段的比，那么所分成的六小块的面积都可以求出来，其中当然也包括四边形的面积．

连接、．

根据燕尾定理，，而，所以，那么，即．

那么，．

另解：得出后，可得，

则．

7. 如右图，三角形**中，，且三角形的面积是，求角形** 的面积．

****

7. 解 连接*BG*，12份

根据燕尾定理，，

得(份)，(份)，则(份)，因此，

同理连接*AI*、*CH*得，，所以

三角形*ABC*的面积是，所以三角形*GHI*的面积是

8. 按照图中的样子，在一平行四边形纸片上割去了甲、乙两个直角三角形．已知甲三角形两条直角边分别为和，乙三角形两条直角边分别为和，求图中阴影部分的面积．

** **

8. 解 如右图，我们将三角形甲与乙进行平移，就会发现平行四边形面积等于平移后两个长方形面积之和．所以阴影部分面积为：

9. 如图所示，矩形的面积为36平方厘米，四边形的面积是3平方厘米，则阴影部分的面积是 平方厘米．



9. 解 因为三角形面积为矩形的面积的一半，即18平方厘米，三角形面积为矩形的面积的，即9平方厘米，又四边形的面积为3平方厘米，所以三角形与三角形的面积之和是平方厘米．

又三角形与三角形的面积之和是矩形的面积的一半，即18平方厘米，所以阴影部分面积为(平方厘米)．

10. 如图，已知，，与相交于点，则被分成的部分面积各占 面积的几分之几？

****

10. 解 连接，设份，则其他部分的面积如图所示，所以份，所以四部分按从小到大各占面积的

11. 如图，在中，延长至，使，延长至，使，是的中点，若的面积是，则的面积是多少？



11. 解 ∵在和中，与互补，

∴．

又，所以．

同理可得，．

所以

12. 如图，，，则



12. 解 根据燕尾定理有，，所以

13. 如图在中，，求的值．

****

13. 解 连接*BG*，设1份，根据燕尾定理，，得(份)，(份)，则(份)，因此，同理连接*AI*、*CH*得，，所以