**六年级第一学期趣味数学期末测试（A6001）**

学号 姓名

**一、填空题**

1．= （最后的结果用阶乘表示）

注：阶乘定义n!=n×（n-1）×（n-2）×…×2×1，0！=1

1．[答案](#A1)

2．已知10个由小到大的两两不同的正整数*a1，a2，…，a10*的和为2012，则*a5*的最大可能值是 331．

2．[答案](#A2)

3．\*\*把正整数1到2012这2012个正整数分组，使得每组内任意3个数的最大公因数为1，那么至少需要分成503 组．

3．[答案](#A3)

4．将12个完全相同的小球放入编号为1到4的四个盒子中，每个盒子中的小球不少于盒子的编号数，那么共有 10种不同的放法．

4．[答案](#A4)

5．如果*a*<*b*<*c*，*ac*<0且|*c*|<|*b|*<|*a*|，则|*x-a*|+|*x-b*|+|*x+c*|的最小值为 -（a+c） ．

5．[答案](#A5)

6．从1到1000这1000个正整数中，最多可以取出56个数使得取出的数中任意三个数之和能被18整除．

6．[答案](#A6)

7．一辆公共汽车从12:20出发，开始一次长达100千米的旅行，车上有一台电脑，它在下午13:00，14:00，15:00，16:00，17:00和18:00都说：“假如以后的平均速度和以前的平均速度相同，则还要1小时才能抵达目的地．”则在下午18:00时公共汽车走了 85千米．

7．[答案](#A7)

8．将既能被5整除又能被7整除的正整数从105起从小到大排成一行，一共排2000个数，则这2000个数之和被11除的余数为 5 ．

8．[答案](#A8)

9．将同时满足 ①能被3整除，②被5除余2，③被11除余4，这三个条件的所有的正整数按照从小到大的顺序排列，记为*a1，a2，a3*，…，如果*an-1*<2012<*an*，则n= 13．

9．[答案](#A9)

10．正整数按右图规律排列，问数345在第 20行，第 7列的方格内．

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 |  |  |  |
| 3 | 5 | 8 | 12 | 17 |  |  |  |  |
| 6 | 9 | 13 | 18 |  |  |  |  |  |
| 10 | 14 | 19 | 25 |  |  |  |  |  |
| 15 | 20 |  |  |  |  |  |  |  |

10．[答案](#A10)

11．\*\*从1，2，…，2012中，最多取出21 个数，使得取出来的数中的任意三个数里，都有一个数是另一个数的**倍数**．

11．[答案](#A11)

12．\*\*从1，2，…，1001这1001个正整数中取出*n*个数，使得这*n*个数中任意两个数的差**都不是素数**，则*n*的最大值为 251 ．

12．[答案](#A12)

**二、解答题**

13．小兔和小龟同时需从A地出发去森林公园，小兔每分钟向前跳36米，每跳3分钟就原地玩耍，第一次玩耍0.5分钟，第二次玩耍1分钟，…，第k次玩耍0.5k分钟；小龟途中不休息也不玩耍．已知小龟比小兔早到森林公园3分20秒．A地到森林公园有2640米，则小龟每分钟爬行多少米?

13．[答案](#A13)

14．求的正整数解（*a≤b≤c*）．

14．[答案](#A14)

15．如图，将3，5，7，11，13，17，19，23，29这九个数分别填入图中的九个○内，使得这三条边中每条边上的○中的数之和都相等，设这个相等的和为***m***，请求出***m***的最大值和最小值．

15．[答案](#A15)

16．求所有正整数*k*，使得*k*的各位数字的积等于*k*-211．

16．[答案](#A16)

17．\*\*2*n*×2*n*的表格中，每个格子填0或1，已知有3*n*个0，证明：可以删去*n*行，*n*列，使得剩下的全是1．

17．[答案](#A17)

## 18. 从1—100这100个自然数中最多取出几个自然数,使得任何两个自然数的差都不是3的倍数？

18．[答案](#A18)

19. 1—2001这2001个数中最多可取出多少个数,使得这些数中任意三个数的和都不能被7整除？

19．[答案](#A19)

## 20. 从1—2006的自然数中最多可以取出多少个数，使得任意两个数之差不是1、2或6？

20．[答案](#A20)

21. 从1到2010这2010个正整数中，最多可以取出61个数使得取出的数中任意三个数之和能被33整除．

21．[答案](#A21)

22. 设有2n×2n个正方形方格棋盘，在其中任意的3n个方格中各有一枚棋子．求证：可以选出n行和n列，使得3n枚棋子都在这n行和n列中．

22．[答案](#A22)

23. 如果你手头上有*n*+1个整数，而这些整数是小于或等于2*n*，那么你一定会有一对数是互素的。你知道这是什么原因吗？

23．[答案](#A23)

24. *n*为自然数，且*n*与19434的乘积的各个数位上的数字中恰有4个0，求最小的*n*

24．[答案](#A24)

**A6001参考答案**

1．通项可以简化为 ，（n=2,3,4,…,99） ，故 （运用裂项方法）

原式==1-

[返回](#T1)

2．因为0<*a1*<*a2*<*…*<*a10* 且*a1+a2+…+a10*=2012，要使*a5*最大，必须*a1*=1，*a2*=2，*a3*=3，*a4*=4，故*a5+a6+…+a10*=2012-1-2-3-4=2002，又*a10* >*a9* >*a8*> *a7*>*a6≥a5*+1，故6*a5*+1+2+3+4+5≤2002，6*a5*≤1987，*a5*=最大为[1987/6]=331.

[返回](#T2)

3．解：初步设想，先将1006个偶数按由小到大的顺序分成两组，任意三个偶数都不能放在同一组，故最多只能分成1006/2=503组，再插入相邻的奇数，即（1,2,3,4），（5,6,7,8），……，（2009,2010,2011,2012）共503组。

这里隐含了 两个连续自然数必定互素，进而得到 四个连续自然数必定任意三个互素。**反证可得。**

[返回](#T3)

4．解：利用排列组合中的“**隔板法**”解决，先将1,2,3个球放入编号为2,3,4的盒子中，题目变成了 “6个球放入四个不同的盒子，且没有盒子是空的（即至少每个盒子里有一个球），问放法有多少？”。剩下12-1-2-3=6个球，并排放好，有5个空格，从中取3个空格放入隔板，故有=（5×4）÷2=10种不同的放法。

[返回](#T4)

5．由**绝对值的几何意义**可以求解，由条件可知 *a<b<-c<0<c*,当*x*=*b*时，|*x-a*|+|*x-b*|+|*x+c*|取最小值，为*b-a+*（*-b-c*）*=-a-c*

[返回](#T5)

6．解：设任意取出*a，b，c，d*，满足

18|（*a+b+c*），18|（*a+b+d*），故18|（*c-d*），即任意两个数模18余数相同（**同余逆定理**），

设 *a≡b≡c≡d≡r*（mod 18） 其中 0≤r<18

所以 *a+b+c*≡3*r*≡0（mod 18），故*r*=0，或*r*=6，或*r*=12

（1）当*r*=0时，任取的三个数都被18整除，它们是18,36，…,990,共有[1000/18]=55个18的倍数；

（2）当r=6时，任取的三个数模18，余数为6，它们是6,24，…，996，共有[（1000-6）/18]+1=56个；

（3）当r=12时，任取的三个数模18，余数都是12，它们是12,30，…，984，共有[(1000-12)/18]+1=55个；

（4）当余数分别为0,6,12时，尽管三数之和是18的倍数，但是不满足题目任意取三个数的要求，舍去。

故 最多可以取出56个数。

[返回](#T6)

7．解：设18:00时，走了*x*千米，则前面*x*千米所花时间为5+=小时，故其平均速度为：*x*，

由题意知 100-*x*=*x*，*x*=100÷=85 千米

[返回](#T7)

8．解：这2000个数由小到大分别是 35*k*，*k*=3,4,5，…，2002

求和得到 35×（3+4+5+…+2002）=35×1000×2005≡2×10×3≡5 (mod 11)

[返回](#T8)

9．由**中国剩余定理**求解得到：设该数的一个特解为*x=a+b*，

其中 *a*满足 *a*≡0(mod 3)，*a*≡0(mod 11)，*a*≡2(mod 5)，*a*的一个解为132；

*b*满足 *b*≡0(mod 3)，*b*≡0(mod 5)，*b*≡4(mod 11)，*b*的一个解为15；

故*x*=132+15=147为一个特解，通解为*an*= 147+[3,5,11]（*n*-1）=147+165（*n-*1）, *n*为正整数。

当*n*=13时，*a*12=1962<2012<*a*13=147+165(13-1)=2127

故 *n*=13

[返回](#T9)

10．解：记录第i行，第j列的数为A[i,j]，考察数串。

我们不妨将数重新排列如下

1

3 2

6 5 4

10 9 8 7

……

发现：每行所包含的数的个数是等差数列 1,2,3，……，故第*n*行之前所包含的数的个数有1+2+3+…+*n*=*n*(*n*+1)/2≤345，而345在25×26/2 与26×27/2之间，故第25列的最左边的数是25×26/2=325, 所以第26列最右边的第一个数是325+1=326，且326+19=345，即326所在位置的列数减去19，行数增加19，就是345所在位置，也就是345在第1+19=20行，26-19=7列。

[返回](#T10)

11．解：考察构造。设最多取*n*个数，分别为 1≤*a*1<*a*2<*a*3<…<*a*n≤2012, 且满足

*a*i=*k*i*a*j (i<j, *k*i为不小于2的正整数)

要达到最多的*n*，不妨设*a*1=1，*a*2=2 *a*1， *a*3=2 *a*2，…，*a*n=2 *a*n-1=2n-1 *a*1

因为 210=1024<2012<211=2048，所以 2n-1≤2012<211, *n*<12, *n*最大取11.

故这11个数构成集合A={1,2,4,8，…，210}

上述只是做到了任意两个数都是倍数关系，

另外，如果再加入 3,21×3，22×3，23×3，…，29×3，这10个数任意两个也有倍数关系，它们构成集合B={3,6,12，…，29×3}，

A，B合起来共21个数，可以保证任意三个数中，必有2个是倍数关系。故至多可取21个数。

【所取3个数要么都是A，要么都是B，要么2个A和1个B，要么2个B和1个A】

[返回](#T11)

12．解：因为最小的合数是4，故从任意两个数的差不是素数（即是合数或1），得到：可以取

1,5,9，……，1001，（共251个数），这251个数中任取两个，差（大的减去小的）都是4的倍数。

[返回](#T12)

13．龟兔赛跑，因为距离已知，只要求出小龟的爬行时间，就可以计算速度，然而已知小龟比小兔早到3分20秒，故只要计算出小兔所花时间，就可以了。

小兔每分钟跳36米，2640米需要 2640÷36=73分钟；

分成 73分钟可以分成24个3分钟，故小兔休息玩耍的时间为：

0.5×（1+2+3+…+24）=150分

故小兔共耗时 73+150=223分

小龟爬行时间为 223-3=220分，速度为每分钟 2640÷220=12米。

[返回](#T13)

14．解：利用不等式范围求正整数解。显然a≠1，即a≥2，且2≤ *a*≤*b*≤*c*, 从而 ，

所以 1=，故2≤*a*≤3,

（1）当*a*=2时，，*b*≤4，解得(*a,b,c*)=(2,4,4),或（2,3,6）

（2）当*a*=3时，，*b*≤3，解得(*a,b,c*)=(3,3,3)

[返回](#T14)

15．解：设三个角上的数字是*a，b，c*，则

3*m*=3+5+7+…+29+（*a+b+c*）=127+（*a+b+c*）

所以 （*a+b+c*）≡2（mod 3）

当 （*a+b+c*）=19+23+29=71时，m取最大值，为（127+71）÷3=66

当 （*a+b+c*）=3+7+13=23时，m取最小值，为（127+23）÷3=50

19 3

17 5 13 5

7 13 17 29

23 3 11 29 7 11 19 13

[返回](#T15)

16．解：因为*k*为正整数，所以*k*的各位数字之积为正整数，即*k*-211是正整数, 故 8|*k*，不妨设*k*=8*a*，

（1）显然*k*是偶数，含有偶数2这个因子，故*k*的各位数字之积也是偶数，所以*a*必定是奇数；

25*a*-211=（8*a*）的各位数字之积，且8*a*不含有数字0。

（2）25*a*>211，所以 *a*>8 ；

（3）如果 8*a*是两位数，即10≤8*a*≤99，则 （8*a*）的各位数字之积≤9×9=81，

∴25*a*≤211+99，*a*≤12

综上（1）（2）（3）所述， *a*只能取9和11时，满足条件，即*k*=72 和 88时，7×2=25×9-211=14，8×8=25×11=64，经演算正确。

（4）如果8*a*是三位数，即100≤8*a*≤999，（13≤*a*≤124）则 313-211≤25*a*-211≤387-211，

102≤（8*a*）的各位数字之积≤176，

∴211≤25*a*≤211+729，9≤*a*≤37，

综合起来就是 13≤*a*≤37，

[返回](#T16)

17．解：利用打土豪的方法（谁含0多，就先打掉谁）。方法如下：

（1）先删除含0最多的n行，剩下n行中必定含0少于n个（抽屉原理：3n个0放在2n个抽屉里）

（2）再删除含0的列，显然含0的列不多于n，删除这些含0的列，就得到剩下的全部是1.

[返回](#T17)

18. 解:同余类，除以3的余数只有0,1,2这三类，由抽屉原理，任取4个数，必有两个数同余，由同余定理，必有之差是3的倍数，故最多取出3个自然数，才能保证任意两个之差不是3的倍数。

[返回](#T18)

19.解：巧妙构造分组，2001 mod 7有7种情况，

按被7除的余数分组：

余1的个数：1到1996共286个，余2的个数：2到1997共286个  
余3的个数：3到1998共286个，余4的个数：4到1999共286个  
余5的个数：5到2000共286个，余6的个数：6到2001共286个  
余0的个数：7到1995共285个，  
除余0的那组外，每组内任取3个数，其和都不能被7整除。  
  
再考虑不同的组混合。  
余1+余2 ，可以，572个；余1+余4 ，可以，572个  
余1+余6 ，可以，572个；余2+余4 ，可以，572个  
余2+余5 ，可以，571个；余3+余4 ，可以，572个  
余3+余5 ，可以，571个；余3+余6 ，可以，572个  
2组的不可能超过572个。3组的不可能。

因此取余1、余2的2组共572个数，及加入余0组的2个数，共574个数，可以保证任意三个数之和都不能被7整除。

[19返回](#T19)

20. 解 如果任意两个数之差不是1、2或4,将用5除,分为5类.   
将123.....，2006的数分为7类:   
A表示能被7整除 的数，共有286个；B表示能被7除余1的数，共有287个.   
C表示能被7除余2的数,共有287个；D表示能被7除余3的数,共有287个.   
E表示能被7除余4的数,共有287个；F表示能被7除余5的数,共有286个.   
G表示能被7除余6的数,共有286个；

要使任意两个数之差不是1，不能同时在A和B，B和C，C和D，D和E，E和F，F和G类中随便选取，

要使任意两个数之差不是2也不能同时在A和C，B和D，C和E，D和F，E和G类中随便选取，

要使任意两个数之差不是6，也不能同时在A和G类中随便选取，取同一类中的所有数是允许的。

综上所述，被7除余数差1，差2和差6的类中的数不能同时随便选取，但可以同时选取被7除余数差3，差4和差5的类中的数，如既可以同时选取A和D类，也可同时选取A和E类，但选了D类的数就不能随便选取E类的数了，这7类数中只能同时选取两类，为了使取的数最多，可选B与E类2\*287=574，如果选A类与D类（取连续7个数字的第三个和第七个数字），要再加上1。

[20返回](#T20)

21．同理转化为任取 *a，b，*满足 33|（*a-b*），故 *a*≡*b*≡*c*≡*r* (mod 33)，故 3r|33, r=0或11，分情况讨论，即可得解。同例6.

[21返回](#T21)

22. 解 利用整体换元法，假设出各行棋子数，得出P1+P2+Pn≥2n，分析得出Pn+1+P2n≥n+1，得出与已知矛盾，从而证明n行和n列包含了全部3n枚棋子．

证明：设各行的棋子数分别P1，P2，Pn，Pn+1，P2n．且P1≥P2≥Pn≥Pn+1≥P2n．  
由题设P1+P2+Pn+Pn+1+P2n=3n，①  
选取含棋子数为P1，P2，Pn，的这n行，则P1+P2+Pn≥2n，  
否则，若P1+P2+Pn≤2n-1，②  
则P1，P2，Pn中至少有一个不大于1，  
由①，②得Pn+1+P2n≥n+1，  
从而Pn+1P2n中至少有一个大于1，这与所设矛盾．  
选出的这n行已含有不少于2n枚棋子，再选出n列使其包含其余的棋子（不多于n枚），  
这样选取的n行和n列包含了全部3n枚棋子．

此题主要考查了抽屉原理的证明思路，从题设出发进行分析得出与题设出现矛盾，从而得出原命题的正确性．

[22返回](#T22)

23. 解：构造法，取*n*个盒子，在第一个盒子我们放1和2，在第二个盒子我们放3和4，第三个盒子是放5和6，依此类推直到第*n*个盒子放2*n*-1和2*n*这两个数。

现在我们在*n*个盒子里随意抽出*n*＋1个数。我们马上看到一定有一个盒子是被抽空的。因此在这*n*+1个数中曾有两个数是连续数，**很明显的：两个连续自然数是互素的**。因此这问题就解决了！

[23返回](#T23)

24. 电脑编程解决或Excel 中计算。53\*19434=1030002， 19434=2\*3\*41\*79

[24返回](#T24)