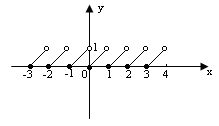
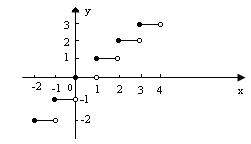
**有关高斯(取整)函数 [*x*] 和 {*x*}的计算与方程 A6002**

**一、高斯函数定义**

**用[*x*]表示不大于*x*的最大整数，定义*x*的小数部分 {*x*}=*x*-[*x*]**，故有

**[*x*]≤*x*＜[*x*]+1, 或者 *x*-1＜[*x*]≤*x***

我们称y=[*x*]为高斯函数（或*f*(*x*)=[*x*]取整函数，计算机里也称为地板函数*floor*(*x*),对应的有天花板函数*ceil*(*x*)）



*图1 f*(*x*)=[*x*] *图2 f*(*x*)={*x*}

**二、高斯函数性质**

1. 高斯函数*f*(*x*)=[*x*]是一个分段、不减（非单调）、无界函数，

满足 **if  *x1*≤*x2*then [*x1*]≤[*x2*] ；**

*f*(*x*)={*x*}是一个分段、不减（非单调）、有界、周期为1的函数

2. [*n+x*]=*n*+[*x*], 其中*n* ∈Z；

3. *x*-1＜[*x*]≤*x* <[*x*]+1 , [*x*]=*n*等价于 *n*≤*x*<*n*+1等价于 *n*≤[*x*]<*n*+1, 其中*n* ∈Z；

4. [*x*]+[*y*]≤[*x+y*]，对所有 *x*∈R，*y*∈R

证明：因为 {x},{y}都在[0, 1)之间，所以 {x}+{y}在[0,2)，

[x]+[y]=x-{x}+y-{y}=x+y-({x}+{y}) 为整数，

(1)当0≤{x}+{y}<1时，{x+y}={x}+{y}，所以 [x]+[y]=(x+y)-{x+y}=[x+y]

(2)当1≤{x}+{y}<2时，{x+y}={x}+{y}-1，所以[x]+[y]=(x+y)-{x+y}-1=[x+y]-1

所以 更精确的描述是 [*x+y*]=

5. [*x*][*y*]≤[*xy*], 其中 *x*，*y*都是非负数

证明：[x]=x-{x}, [y]=y-{y}, [x][y]=xy-x{y}-{x}y+{x}{y}

因为*x*，*y*都是非负数，故 x≥[x]>{x}≥0,

6. [-*x*]=

7. *x*是正实数，*n*是正整数，则在不超过*x*的正整数中，*n*的倍数共有个；

8. 设*p*为任一素数，在*n*！中含*p*的最高乘方次数记为*p*(*n*！)，则有：

。



证明：由于*p*是素数，所有*n*！中所含*p*的方次数等于*n*！的各个因数1,2，…，*n*所含*p*的方次数之总和。由性质7可知，在1,2，…，*n*中，有个*p*的倍数，有个*p2*的倍数，有个*p3*的倍数，，当*p m*≤*n*<*pm+1*时，，所以命题成立。

高斯函数是非常重要的数学概念。它的定义域是连续的，值域却是离散的，高斯函数关联着连续和离散两个方面，因而有其独特的性质和广泛的应用。

解决有关高斯函数的问题需要用到多种数学思想方法，其中较为常见的有分类讨论（例如对区间进行划分）、命题转换、数形结合、凑整、估值等等。

**三、例题**

1. 计算 [6]= , [3.5]= , []= , [-5]= , [-0.1]= , [-3.6]= ,

**2. 计算 的值.**

**（**[**答案**](#A2)**）**

**3. 已知 0<*a*<1, 且满足 [*a*+]+[*a*+]+…+[*a*+]=18, 试求 [10*a*]的值.**

**（**[**答案**](#A3)**）**

**4. 求满足25{*x*}+[*x*]=125的所有实数 *x* 的和.**

**（**[**答案**](#A4)**）**

**5. 已知2003<*x*<2004, 如果要求 [*x*]×{*x*}是正整数，求满足条件的所有实数*x*的和**

**（**[**答案**](#A5)**）**

**6. 求的值．**

**（**[**答案**](#A7)**）**

**7. 解方程**



**（**[**答案**](#A7)**）**

**8. 解方程**



**（**[**答案**](#A8)**）**

9. 某市电信局130手机与137、138、139手机有不同是收费方式。137、138、139手机的收费方式为：月租费50元，基本通话费0.40元/分钟，不足一分钟按一分钟计算。130手机的收费方式为：没有月租费，但是基本通话费为0.54元/分钟，不足一分钟也按一分钟计算。小明今购了一部手机，他每月通话的时间大约20小时，请帮他参考一下，选用哪种收费方式的手机网络合算？

**（**[**答案**](#A9)**）**

10. 设*P*(*n*)=; 其中*n*为正整数，*a*为正实数， (2012年新知杯第11题)

（1）若*P*(5)=5, 求*a*的取值范围；

（2）求证：*P*(*n*)>-1

（[答案](#A10)）

11. 判断是否为闰年的标准是: （1）年份能被4整除，不能被100整除; （2）年份若是100的整数倍的话，需被400整除，满足上述两个条件之一就是闰年，否则是平年. 你能根据这个要求写出判断闰年的计算公式吗？

练习 若实数使得，求。

([答案](#EA))

练习 把所以除以4余2或者3的正整数从小到大排成一行，*Sn*为前*n*个之和，求

= ; （2012年上海新知杯第8题）

（[答案](#E2A)）

**《高斯函数》参考答案**

2. 解 ∵（23,101）=1，∴当*n*=1,2,3，…，100时，都不是整数，即{}都不是零.

且 101-n=100,99，…，2,1，

又∵ =23

其中 0< < 2，且是整数，所以

=1

即 =23-1=22

令*n*=1,2,3，…，100，得到 2×（）=22×100

=22×50=1 100

**(注：本题采用了分组凑整的思想) （**[**返回**](#T2)**）**

3. 因为 0< *a*+< *a*+< …< *a*+< 2, 所以 [*a*+]，[*a*+]，…，[*a*+]取值为0或1，由题意知，其中有18个为1，肯定是最大的18个数，即

[*a*+]=[*a*+]=…=[*a*+]=0

[*a*+]=[*a*+]=…=[*a*+]=1

所以 0< *a*+< 1 ==》 -11< 30*a*< 19

1≤ *a*+< 2 ==》 18≤30*a*< 48

故 18≤ 30*a* < 19, 6≤ 10*a* < 6, 所以 [10*a*]=6

**（**[**返回**](#T3)**）**

4. 解：有题意得到

{*x*}=，而 0≤{*x*}<1，可得0≤<1

100<[*x*] ≤125,即 [*x*]=101,102，…，125，满足条件的实数*x*为

*x*=[*x*]+{*x*}=[*x*]+ =5+

它们的和为 25×5+（101+102+…+125）=125+×2 825=125+2 712=2 837

**（**[**返回**](#T4)**）**

5. 因为 2003<*x*<2004, 所以 [*x*] = 2003， 2003是质数，

因为 0<{*x*}<1, 所以 设 2003{x}=p，p是正整数，则 1≤p<2003

*x*=[*x*]+{*x*}=2003+{*x*}=2003+, p=1,2,3,……, 2002

其和为S=2003×2002+×（1+2+3+…+2002）=4 010 006+ 2005003÷2003

=4 010 006+1 001=4 011 007

**（**[**返回**](#T5)**）**

6. 解:同例2,5×7=35，（35,2011）=1,2011是素数，故（n，2011）=1， n=1,2,3，…,2010，

故≠0，

又2011-n=2010,2009，…，2,1 （n=1,2,3，…，2010）

所以≠0，

=35，



=35-

上式右边为整数，故左边也是整数，但是{a}在0和1之间，故左边在0和2之间，且都不为0，故只有等于1了，即=34，+=1

求和得到 =2010，故原式=2010÷2=1005

7. 解：令 ，则，代入原方程整理得：，由取整函数的定义有，解得：，则。

若，则；若，则。

注：本例中方程为型的，通常运用取整函数的定义和性质并结合换元法求解。

**（**[**返回**](#T7)**）**

8. 解：由取整函数的性质，得：，即，

当x在（-1,7）之间时，在（0,2）之间，即只能取0或1；

分情况讨论：

（1）当=0时，不难得到*x*在[-1,3）之间；

由题意得=0，得到 *x*在[1,3)之间，两个不等式的交集为[1,3）；

（2）当=1时，不难得到 *x*在[3,7）之间；

由=1，得到*x*在[3，5)之间，两个不等式的交集为[3,5)

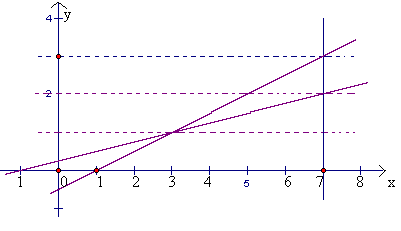
由此可得：等式成立的*x*为[1,5)之间。

或者另解如下

令，在同一坐标系中画出二者的图象：

分析两者在区间内的图象，

显然，当时， 



而，方程不成立；

当时， ；

当时， ；

当 时，  而，方程不成立。

综上所述，原方程的解是：。

注：本例为型方程。首先由，求出的取值区间。但此条件为原方程成立的充分但不必要条件，故还须利用和的图象进行分析才能得到正确结果。

**（**[**返回**](#T8)**）**

9. 先需要分别建立两种手机网络通话费y与通话时间*x*之间的函数关系式，再根据每月的通话时间，比较两种函数值的大小来决定。

*x*=20(小时)=1200（分钟）

130手机通话费用y与通话时间*x*（分钟）之间的函数关系为：



y=0.54×[1200]=648

137、138、139手机通话费用y与通话时间*x*（分钟）之间的函数关系为：



Y=0.40×[1200]+50=530

所以小明应该选择137、138、139收费方式的网络更合算。

**（**[**返回**](#T9)**）**

**10. 解：（1）**由题意知：5≤<6, 5≤<7, 因为 为正整数，而[5,7)之间只有两个正整数5和6，故 5≤<7， 25≤*a*<35

(2)令*a=kn+b，k*∈N，0≤*b<n*

求差法， P(*n*)-+1=+1≥+1>

=(*n*+*k*+1-2)=()2≥0

所以 P(*n*)>-1 证毕！（[返回](#T10)）

**练习1 若实数使得，求。**

练习 解：因为*r*< *r*+< *r*+< *r*+<……< *r*+<*r*+1

所以[ *r*]≤ [ *r*+]≤[ *r*+]≤[ *r*+]≤……≤[ *r*+]<[*r*+1]<[*r*]+1

可见 73个介于两个连续自然数之间的正整数之和为546，且 546 ÷73=7……35

故 546=35×8+（73-35）×7

即 前面38个正整数为7，后面35个正整数为8，

即 7 ≤[ *r*+]<8, 7 ≤[ *r*+]<8, 🡸🡺 7 ≤ *r*+<8, 7 ≤ *r*+<8 （1）

8 ≤[ *r*+]<9, 8 ≤[ *r*+]<9, 🡸🡺8 ≤ *r*+<9, 8 ≤ *r*+<9 （2）

解不等式组（1） 6≤ *r*<7 (3)

解不等式组（2） 7≤ *r*<8 (4)

联立（3）和（4）得到7≤ *r*<7， 所以 743≤100 *r*<744， 即 [100*r*]=743（[返回](#E)）

**练习2 把所以除以4余2或者3的正整数从小到大排成一行，*Sn*为前*n*个之和，求**

= ; （2012年上海新知杯第8题）

解：设模4余2或3的正整数序列为*a*i, (i=1,2,3,…)，其中

*a*1=2，*a*2=3，*a*3=6，*a*4=7，*a*5=10，*a*6=11，……，

*Sn*= *a*1+ *a*2+ *a*3+……+ *a*n>1+3+5+…+(2*n*-1)=*n*2 ； (即将原来序列的偶数都减1)

另外 *Sn*= *a*1+ *a*2+ *a*3+……+ *a*n<2+4+6+…+2*n*= *n* (*n*+1)< (*n*+1)2； (即将原来序列的奇数都加1)

所以 *n*<  < *n*+1, 从而 =*n*；

所以 =1+2+3+…+2 012=1 006×2 013=2 025 078

（[返回](#E2)）