奇数和偶数（奇偶分析）A6005

**【内容提要】**

**1.** 奇数和偶数是在整数集合里定义的。模2的两个不同的同余类。

能被2整除的整数是偶数，如2，0,－2，不能被2整除的整数是奇数，如－1，1，3；

如果*n* 是整数，那么2*n*是偶数，2*n*－1或2*n*+1是奇数；

如果*n*是正整数，那么2*n*是正偶数，2*n*-1是正奇数。

2. 奇数、偶数是整数的一种分类。可表示为：

　　整数　　　　　　　或 整数集合

　这就是说，在整数集合中是偶数就不是奇数，不是偶数就是奇数，如果既不是偶数又不是奇数，那么它就不是整数。

3. 奇数偶数的运算性质：

　奇数±奇数＝偶数，奇数±偶数＝奇数，偶数±偶数＝偶数

　奇数×奇数＝奇数　奇数×偶数＝偶数，偶数×偶数＝偶数

　奇数的正整数次幂是奇数，偶数的正整数次幂是偶数，

　两个连续整数的和是奇数，积是偶数。

4. 性质

4．1 *m*+*n*是偶数的充要条件是*m*、*n*同奇偶；

*m*+*n*是奇数的充要条件是*m*、*n*一奇一偶.

推广：*m*+*n*与*m*－*n*同奇偶；

*a*+*b*+*c*，*a*+*b*-*c*，*a*-*b*+*c*，*b*+*c*-*a*，这4个数同奇偶（参见例6的证明）。

4．2若干整数的乘积是奇数当且仅当每一个乘数都是奇数；

整数*a*与*am*的奇偶性相同（*m*是正整数）

4．3奇数个奇数之和一定不等于0；

4．4 任一正整数*n*可表示为*n* = 2*k* ⋅*q*的形式，其中*k*为非负整数，*q*为正奇数.

**【例题】**

**例1** 求证：任意奇数的平方减去1是8的倍数.

（[答案](#A1)）

**例2** 已知：有*n*个整数的积等于*n*，它们的和等于0，求证：*n*是4的倍数.

（[答案](#A2)）

**例3** 设*x*1，*x*2，*x*3，…，*x*n (*n* >4) 为+1 或为 -1，并且 *x*1*x*2*x*3 *x*4+ *x*2*x*3 *x*4 *x*5+…+ *x*n *x*1*x*2*x*3=0

求证： n是4的倍数

（[答案](#A31)）

**例4** 己知：*a*, *b*, *c*都是奇数，求证：方程*ax*2+*bx*+*c*=0没有整数解。

（[答案](#A3)）

**例5**求方程*x*2－*y*2＝60的正整数解。

（[答案](#A4)）

**例6** 你能找到3个整数*a*, *b*, *c*, 使得关系式(*a*+*b*+*c*)(*a*-*b*+*c*)(*a*+*b*-*c*)(*b*+*c*-*a*)=3388成立吗？如果找得到，请举一例，如果找不到，请说明理由。

（[答案](#A5)）

**例7** 地上有四堆石子，石子数分别是1、9、15、31，如果每次从其中的三堆同时各取出1个，然后都放入第四堆中，那么，能否经过若干次操作，使得这四堆石子的个数都相同?（如果能，请说明具体操作，如果不能，则要说明理由）

（[答案](#A6)）

**例8**. 设1，2，3，…，9的任一排列为*a*1，*a*1，…，*a*9，求证：（*a*1-1）（*a*2-2）…（*a*9-9）是偶数。

**例9.** 设标有A,B，C,D,E,F,G记号的七盏灯顺次排成一行，每盏灯安装一个开关，现在A,C,E,G四盏灯开着，其余三盏灯是关着的，现从灯A开始，顺次拉动开关，即从A到G，再从A到G，…，这样拉动了2013次开关后，哪几盏灯是开着的？

**【练习】**

1. 选择题

①设*n*是正整数，那么*n*2+*n*-1的值是（　　）

（*A*）偶数 （*B*）奇数 （*C*）可能是奇数也可能是偶数

②求方程85*x*－324*y*=101的整数解，下列哪一个解是错误的？（　　）

　（*A*）（*B*）（*C*）（*D*）

1. 填空：

（1）被3，5，7都整除的最小正偶数是 ；

（2）被9和15整除的最小正奇数是 ，最大的三位数是 ；

（3）1＋2＋3＋…＋2001＋2002的和是奇数或偶数？答 ；

（4）正整数1234…20012002是奇位数或偶位数？答 ；

（5）能被11整除，那么*n*是正奇数或正偶数？答 ；

1. 任意三个整数中，必有两个的和是偶数，这是为什么？
2. 试说明方程2*x*+10*y*=77没有整数解的理由
3. 求证：两个连续奇数的平方差能被8整除
4. 试证明：任意两个奇数的平方和的一半是奇数
5. 求方程（2*x*－*y*－2）2＋（*x*+*y*+2）2=5的整数解
6. 方程19*x*+78*y*=8637的解是( )

(*A*) (*B*) (*C*) (*D*)

9. 十进制中，六位数能被33整除，求*a*,*b*的值

10. 有*n*个数*x*1，*x*2，*x*3， *x*4，…，*x*n，每个取值为+1或-1，如果*x*1*x*2+*x*2*x*3+ *x*3 *x*4+…+ *x*n*x*1=0，求证：*n*是4的倍数。

11. 桌上放着5只杯子，杯口全朝上，每次翻转4个杯子，问能否经过若干次这样的翻动，使全部的杯口都朝下？试说明理由。

**《奇数和偶数》例题参考答案**

**例1** 证明：设*k*为整数，那么2*k*－1是任意奇数，

（2*k*－1）2－1＝4*k*2－4*k*＋1－1＝4*k*(*k*－1)

∵*k*(*k*－1)是两个连续整数的积，必是偶数（一奇一偶） ∴4*k*(*k*－1)是8的倍数

即任意奇数的平方减去1是8的倍数

或者 4( *k*2-*k*), 而 *k*2与*k*同奇偶，其差一定是偶数。（*a*与*a*m同奇偶性质）

（[返回](#T1)）

**例2** 证明：设*n*个整数为*x*1, *x*2, *x*3, …, *xn* 根据题意得

如果*n*为正奇数，由方程（1）可知*x*1, *x*2, *x*3, …, *xn*都只能是奇数，而奇数个奇数的和必是奇数，这不适合方程（2）右边的0，所以*n*一定是偶数；

当*n*为正偶数时，方程（1）左边的*x*1, *x*2, *x*3, …, *xn*中，至少有一个是偶数，而要满足方程（2）右边的0，**左边的奇数必须是偶数个**，**偶数至少有2个**，两个偶数的乘积一定是4的倍数，所以*n*是4的倍数。

（[返回](#T2)）

**例3** 证明：设*x*1*x*2*x*3 *x*4，*x*2*x*3 *x*4 *x*5，…，*x*n *x*1*x*2*x*3中有*k*个+1，于是-1也有*k*个，故*n*=2k为偶数；

将*x*1*x*2*x*3 *x*4，*x*2*x*3 *x*4 *x*5，…，*x*n *x*1*x*2*x*3这2*k*个数相乘，得到：

（*x*1*x*2*x*3 *x*4 *x*5…*x*n）4=1k·（-1）k

即 （-1）k=1，k必定是偶数，从而*n*是4的倍数。

（[返回](#T31)）

**例4**证明：设方程的有整数解*x*，若它是奇数，这时方程左边的*ax*2，*bx*，*c*都是奇数，而右边0是偶数，故不能成立；

若方程的整数解*x*是偶数，那么*ax*2,*bx*,都是偶数，*c*是奇数，所以左边仍然是奇数，不可能等于0。

既然方程的解不可能是奇数，也不能是偶数，

∴方程*ax*2+*bx*+*c*=0没有整数解 (以上的证明方法是反证法)

（[返回](#T3)）

**例5**　解：(*x*+*y*)(*x*－*y*)=60，

60可分解为：1×60，2×30，3×20，4×15，5×12，6×10 共6组

右边为偶数，故左边两个因式(*x*+*y*)，(*x*－*y*)至少有一个是偶数

因此*x*, *y*必须是同奇数或同偶数，且*x*>*y*>0, 适合条件的只有两组（一下子剔除了不符合条件的方程组，简化了运算）

　　　

解得　　　　

∴方程*x*2－*y*2＝60的正整数解是　

（[返回](#T4)）

**例6** 解：假设存在整数*a*、*b*、*c*，使得(*a*+*b*+*c*)(*a*-*b*+*c*)(*a*+*b*-*c*)(*b*+*c*-*a*)=3388成立。

因为3388是偶数，所以左边四个因式中至少有一个是偶数，不妨设*a*+*b*+*c*为偶数，则

*a*-*b*+*c*=(*a*+*b*+*c*)-2*b*为偶数， *a*+*b*-*c*=(*a*+*b*+*c*)-2*c*为偶数，*b*+*c*-*a*=(*a*+*b*+*c*)-2*a*为偶数。

所以(*a*+*b*+*c*)(*a*-*b*+*c*)(*a*+*b*-*c*)(*b*+*c*-*a*)能被16整除，

而3388=22×7×112不能被16整除，得出矛盾。

故不存在三个整数*a*，*b*，*c*，满足关系式(*a*+*b*+*c*)(*a*-*b*+*c*)(*a*+*b*-*c*)(*b*+*c*-*a*)=3388。（反证法）

另解：不难证明(*a*+*b*+*c*)，(*a*-*b*+*c*)，(*a*+*b*-*c*)，(*b*+*c*-*a*)这4个数同奇偶，（两两之和/差为偶数），右边为偶数，故必定都是偶数，也就是乘积能被24整除，而16不能整除3388，不成立。

如果将3388改为3888，则有解：3888=24×35，且(*a*+*b*+*c*)最大，故

(*a*+*b*+*c*)=2×32，(*a*-*b*+*c*)=(*a*+*b*-*c*)=(*b*+*c*-*a*)=2×3，不难得到 *a*=*b*=*c=6*

（[返回](#T5)）

**例7** 解 不可能。因为总数为1+9+15+31＝56

56/4＝14 ，14是一个偶数；而原来1、9、15、31都是奇数，取出1个或者放入3个也都是奇数，其奇偶性要变化，奇数加减若干次偶数后，结果一定还是奇数，不可能得到偶数（14个）。

另解：设原来的数为*a*i，经过*n*i次放入，*m*i次取出后，变为了14，即 *a*i+3*n*i-*m*i=14, i=1,2,3,4，

这里*n*i，*m*i都是非负整数，且满足

 同时满足

第一组相加得到 ，第二组相加得到：

组合得到 =0，故*n*i=*m*i=0 (i=1,2,3,4) 显然矛盾。

（[返回](#T6)）

**例8** 解：因为 （*a*1-1）+（*a*2-2）+…+（*a*9-9）=（*a*1+*a*2+*a*3+…+*a*9）-(1+2+3+…+9）=0

是偶数，即奇数个整数之和为0，所以（*a*1-1），（*a*2-2），…，（*a*9-9）中必有一个偶数，它们的乘积也必定是偶数，得证。

另解：1,2,3，…，9中只有2,4,6,8这4个偶数和5个奇数，所以5个*a*i中至少有一个是奇数（不妨设为*a*1，*a*3，*a*5，*a*7），（抽屉原理），于是（*a*1-1），（*a*3-3），（*a*5-5），（*a*7-7），（*a*9-9）中至少有一个是偶数，故其乘积也是偶数。

**例9.** 一盏灯的开关拉动奇数次后，灯的状态发生改变，即原来开着的变成了关着的，关的变成了开的。一盏灯的开关被拉动偶数次后，不改变状态。因此关键是计算各盏灯被拉动开关次数的奇偶性，由于 2013=7×287+4，

可知：A,B,C,D这四盏灯的开关各被拉动了288次，而E,F,G这三盏灯的开关各被拉动了287次，所以，A,B,C,D四盏灯不改变状态，E,F,G三盏灯改变状态，由于开始时，A,C,E,G四灯是开着的，因此，最后 A，C,F三盏灯开着。