整除与余数问题 2012-9-15

知识点

一、带余除法：***若有a÷b=q…r，则a＝b×q＋r， 0≤r＜b， (r=0，→整除，约数，倍数)***

二、三大余数定理：余数的加法定理、乘法定理和同余定理

1. ***余数加法定理：若A mod c=r， B mod c=s， →(A+B) mod c=(r+s) mod c，特例nA mod c=nr mod c，例如：∵ 11 mod 9=2，∴11n mod 9=2n mod 9（n为正整数）***
2. ***余数乘法定理：若A mod c=r， B mod c=s， → AB mod c=rs mod c，特例 An mod c=rn mod c，例如：∵ 10 mod 9=1，∴10n mod 9=1n mod 9=1（n为正整数）***
3. ***同余定理：A mod c=r， B mod c=r， →(A-B) mod c=(r-r) mod c = 0， c|(A-B)，特例 任意正整数N，与其各位数字之和S，∵N mod 9=S mod 9，∴ 9|（N-S），如N=13579 mod 9=7，S=1+3+5+7+9=25 mod 9=7，故N-S=13579-25=13554 mod 9=0，即9|13554***
4. ***数的整除要求掌握：能2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13整除的数判断方法。***
5. ***推广到更一般的有：***
   1. ***一个数被2或5整除，与这个数的个位数字被2或5除，所得余数相同；***
   2. ***一个数被4或25整除，与这个数的末两位组成的数被4或25除，所得余数相同；***
   3. ***一个数被8或125整除，与这个数的末三位组成的数被8或125除，所得余数相同；***
   4. ***一个数被3或9整除，与这个数的各位数字和被3或9除，所得余数相同；***
   5. ***一个数被11整除，与这个数的奇数位数字和、偶数位数字和的差被11除，所得余数相同；***
6. **一个六位数能被23整除，末两位数有多少种情况？**

**解1：从最小的数开始**

108200÷23=4704……8

8+15=23，就没有余数了。108215，就是一解，不断加23.

108215+23=108238，108238+23=108261，108284

**解2：（杨逸飞）从最大的数开始**

也可以从108299÷23=4708……15，

108299-15=108284，不断减23，得到各种可能。

**解3: （徐得濠）将六位数拆成 108200+*ab***，∵108200 mod 23=8， 且23|（108200+*ab*），

∴ *ab* *mod* 23=（23-8）=15，故两位数*ab*可以为15+23*k*，*k*可以取0，1，2，3，共四种情况。

1. **能被11整除的最小九位数是多少？**

**解1：（刘思源等）**若某数可被11整除，则其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差为11的倍数，要这样的数最小，首位取1，十位取1，其余数位取0，即所求数为100000010。

**解2**：最大的八位数为99999999，除以11的余数为0，再加上11，就是最小的九位数：100000010.

**解3**：最小的九位数为100000000，而100000000 mod 11=1，要使100000000除以11，所得余数为0，则至少需要增加10，也可以得到。

1. **已知四位数*abcd*是11的倍数，且*b+c=a*，*bc*为两位完全平方数，求此四位数**

**解：（刘思源）***bc*为两位数，又是完全平方数，我们知道两位完全平方数有：

16， 25， 36， 49， 64， 81，∵*a=b+c*

∴分别对应*a*为7， 7， 9， 13， 10， 9，而*a*是1-9的数字，故49， 64可以舍去。

剩下来确定*d*：

∵716*d*， 725*d*，936*d*，981*d*是11的倍数，奇数位之和与偶数位之和的差是11的倍数，

∴（7+6）-（1+*d*）=12-*d* ≡0（mod 11）， 故 *d*=1， 7161是所求四位数；

同理7+5-2-*d*=10-*d*，0≤*d*≤9，不存在这样的*d*，使得10-*d*能被11整除；

9+6-3-*d*=12-*d* ≡0（mod 11），故*d*=1，9361是另一个解；

9+1-8-*d*=2-*d* ≡0（mod 11），故*d*=2，9812是一解。

故共有三个解：7161， 9361， 9812

注：这里明确了*bc*为两位完全平方数，故*b*≠0，否则还要考虑00，01，04，09这四种情况，否则还要加上这样3个四位数1012，4048，9097.

1. **两个三位的和能被37整除，证明：六位数也能被37整除。**

**证明：（杨逸飞，刘思源）， **

又



而，







1. **已知一个七位自然数是99的倍数（其中是0到9中的某个数字），试求的值，简写出求解过程。**

**分析：要判断某数能否被一个合数整除，只须将这个合数分解成两个互质的约数的乘积，若这个整数能分别被这两个约数整除，则这个数能被这个合数整除。**

是99的倍数，而99，故分别是9和11的倍数，由被9，11数整除的数的特点而解此题。

解：，

是9的倍数，

即（为自然数） ，

。，或

或

，

即  故是11的倍数

又，即

 同奇偶，



 或 （不是数字0~9，不合题意，舍去）





1. **设*p*是质数，证明：满足*a*2=*pb*2的正整数*a*，*b*不存在。**

**证明：反证法**，

**证法1：**假定存在正整数*a*，*b*，使得 *a*2=*pb*2

∵*p*|右边，∴*p*|*a*2，且*p*是质数，故*p*|*a*，即存在*a*1，使得*a*=*pa*1， 代入原式，得到：

(*pa*1)2=*pb*2， 化简，得 *b*2=*pa*12，

同理可得 *p*|*b*，存在 *b*1，使得*b*=*pb*1，代入上式，得*a*12=*pb*12

显然，这个过程可以一直进行下去，即*a*=*pnan*，*b*=*pnbn*， *n*可以为无穷大，与*a*，*b*是给定的有限正整数矛盾。（到这一步，只有刘思源理解了，可以接受）

**证法2：（换思路）**假定存在正整数*a*，*b*，使得 *a*2=*pb*2

令*a*，*b*的最大公约数（*a*，*b*）=*d*，*a*=*a*1*d*， *b*=*b*1*d*， 则（*a*1， *b*1）=1，所以

****

所以 ， 由于*p*是质数，可知*p*|*a*1，即*a*1=*pa*2，则**，**

同理可得 *p*|*b*1， 即*a*1，*b*1都含有*p*这个因子，与（*a*1， *b*1）=1矛盾。

**证法3: 利用完全平方数个位数的特点，只能是0，1，4，5，6，9. 如果*p*=2，就是证明是无理数。**

**证法4：*p*=(*a*/*b*)2， *p*是正整数，所以*b*|*a*，不妨设*a*=*bk*，*k*为正整数，显然*k*≠1，否则*p*=1，1不是素数，故*k*>1， 从而*p*=*k*2，故*k*|*p*，这与*p*是素数矛盾。**

1. **求证：一个十进制数被9除所得的余数，等于它的各位数字被9除所得的余数。**

**证明：**设十进制数为，

∵10≡1（*mod* 9），故对任意正整数*k*≥1，有：10*k*≡1（*mod* 9）

因此：



即*N*被9除所得余数等于它的各位数字之和被9除所得的余数。

**注：（1）被9整除的充要条件就是各位数字之和能被9整除；**

**（2）弃九法就是依据这个结论的。**

1. **一位魔术师让观众写了一个六位数*a*，并将*a*的各位数字相加得到*b*，他让观众说出*a*-*b*中的5个数字，观众报出1，3，5，7，9， 魔术师便说出余下的那个数，问那个数是多少？**

**【解】**由于一个数*a*除以9所得的余数与这个数的各位数字和*b*除以9所得的余数相同，由同余定理得：9|（*a*-*b*）。

六位数*a*的各位数字之和在1（最小的六位数100000）和54（最大的六位数999999）之间，故*a*-*b*最多也只能是六位数，由题意给出了5个数（1，3，5，7，9），设余下的第6个数为*x*，则

9|（1+3+5+7+9+*x*）

9|（7+*x*）

∵ 0≤*x*≤9，∴*x*=2

**注：同样用了弃九法，与数字9相除所得余数关系，用模9来猜数字谜，用模9检验结果是否错误，可见模9的应用极其丰富。**

1. **若都是正整数，并且*p*>1， *q*>1， 求*pq*的值。**

【解】（1）如果*p*=*q*，则

不是整数，所以*p*≠*q*；

（2）不妨设*p*<*q*， 则



∵是正整数，∴=1， 即*q*=2*p*-1

从而，是正整数，且*p*>1，故*p*=3，

从而*q*=5，所以 *pq*=3×5=15

1. **将正整数*N*写在任意一个正整数的右边（例如：将2写在35的右边，得到352），如果得到的新数都能被*N*整除，那么*N*称为“魔术数”，问：在小于130的正整数中，有多少个魔术数？**

**【解】**设小于130的魔术数*N*，接在任意正整数*P*的右边，得到，显然*N*可以为1位数，2位数和3位数，以下分别讨论：

1. *N*为1位数，则=10*P*+*N*，*N*|(10*P*+*N*)， *N*|10*P* 对任意*P*成立，故*N*|10，所以*N*=1，2，5;
2. *N*为2位数，则=100*P*+*N*， *N*|(100*P*+*N*)， *N*|100*P* 对任意*P*成立，故*N*|100，且10≤*N*≤99， 100=22×52，所以*N*=10，20，25，50;
3. *N*为3位数，则=1000*P*+*N*， *N*|(1000*P*+*N*)， *N*|1000*P* 对任意*P*成立，故*N*|1000，且100≤*N*≤130， 100=23×53，所以*N*=100，125 ;

**故小于130的魔术数共有9个，分别是1，2，5，10，20，25，50，100，125。**

**注：通过上述分类讨论，可以得到：*k*位魔术数一定是10*k*的约数。**

**综合结果如下：**

**1位魔术数为1，2，5；**

**2位魔术数为10，20，25，50；**

**3位魔术数为100，125，200，250，500；**

**3位或3位以上的魔术数，每种个数均为5.**

**注2：类破坏数，破坏数*N*放在任意自然数*P*的右边，使得（*N*+1）不能整除*PN*。**

1. **有多少个自然数除200，余数为8？**

【解】设*n*为满足题意的自然数，则存在一个数*p*，使得200=*np*+8 （*n*>8）

所以 *np*=192， 因此*n*应该是192的约数，原问题转化为求192的大于8的约数的个数。

因为 192 = 26×3，所以192的约数个数为（6+1）×（1+1）=14个。

另外*n*>8， 故小于8的约数：1，2，3，4，6，8不符合要求，故符合题意的自然数共有14-6=8个。

注：本题为余数问题的基础题型，需要学生明白一个重要知识点，就是把余数问题---即**“不整除问题”转化为整除问题**。**方法为用被除数减去余数，即得到一个除数的倍数；或者是用被除数加上一个“除数与余数的差”，也可以得到一个除数的倍数。**

1. **一个两位数除310，余数是37，求这样的两位数。**

【解】本题中310-37=273，说明273是所求余数的倍数，而273=3×7×13，所求的两位数约数还要满足比37大，符合条件的有39，91.

1. **求证：（1）8|（551999+17），（2）8|（32*n*+7），（3）17|（191000-1）**

解：利用将余数化±1方法。

（1）∵55≡（-1）（*mod* 8）∴551999≡（-1）1999≡-1（*mod* 8）

551999+17≡-1+17=16≡0（*mod* 8），即8|（551999+17）

（2）∵32=9≡1（*mod* 8），∴32*n*=（32）*n*=9*n*≡1*n*≡1（*mod* 8）

32*n*+7≡1+7=8≡0（*mod* 8），即 8|（32*n*+7）

（3）∵19≡2（*mod* 17），∴194≡24=16≡-1（*mod* 17）

191000-1=（194）250-1≡（-1）250-1=1-1=0 （*mod* 17），即17|（191000-1）

**注：也可以用二项展开公式：**

，这里 

1. **求最大的正整数*n*，使得31024-1能被2*n*整除。**

【解】利用了平方差公式 *a*2-*b*2=(*a*+*b*)(*a*-*b*)，1024=210

∵31024-1=(3512+1)(3256+1)(3128+1)…(3+1)(3-1) ①

对于正整数*k*，有

上述①右边有11个括号中，（3+1）是4的倍数，其它的10个括号都是2的倍数，但不是4的倍数，故*n*的最大值为12.

1. **求使2*n*-1为7的倍数的所有正整数*n***

【解】**利用将余数化±1的方法**。

∵23=8≡1（*mod* 7），所以可以对*n*按模3进行分类讨论：

1. 若*n*=3*k*，则2*n*-1=23*k*-1≡1*k*-1=0（*mod* 7）
2. 若*n*=3*k*+1，则2*n*-1=23*k*+1-1=2×23*k*-1≡2×1*k*-1=1（*mod* 7）
3. 若*n*=3*k*+2，则2*n*-1=23*k*+2-1≡4×1*k*-1=3（*mod* 7）

所以，当且仅当3|*n*时，7|2*n*-1

1. **已知一个四位数的各位数字之和与这个四位数相加等于1995，试求这个四位数。**

【解】设所求四位数为，由题意得



所以  ①

显然，此时必有*a*=1，否则左边必定大于2002

所以  ②

此时必有 *b*=9，

所以 11*c*+2*d*=85 ③

对于③式，若*c*=8或9，左边必定大于85，等式不成立，若*c*≤6， 则左边都小于85，所以只有*c*=7. 代入③，得*d*=4，

故所求四位数是1974

1. **一个自然数的首位数字是4，将其首位数字4移至末尾之后，它的大小降为原来的，求满足条件的最小正整数。**

**【解】**设原来的数为*N*=， 其中*A*=，（*A*是一个*n*位十进制数），首位4移到末尾后，得到数，同样 ，由题意得：



∴39*A*=4×（10*n*-4）=4×99…996 （*n*-1个9）

13*A*=4×33…332 （*n*-1个3）

∵（4，13）=1，13|33…332 ，不难得到33332是满足条件的最小值，从而*A*的最小值是4×33332÷13=10256.所以*N*的最小值就是410256.