二（多）元一次方程组(第1课时)

**【知识链接】**

一、 《**[孙子算经](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AD%99%E5%AD%90%E7%AE%97%E7%BB%8F" \o "孙子算经)**》下卷第31题即著名的“[**鸡兔同笼**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%B8%A1%E5%85%94%E5%90%8C%E7%AC%BC)”问题：

今有雉、兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问：雉、兔各几何？

答曰：雉二十三，兔一十二。

术曰：上置三十五头，下置九十四足。半其足，得四十七，以少减多，再命之，上三除下三，上五除下五，下有一除上一，下有二除上二，即得。

又术曰：上置头，下置足，半其足，以头除足，以足除头，即得。

代数解法就是：设有鸡*x*，兔*y*，因为1鸡1头2足，1兔1头4足，按照已知35头，94足列方程组如下：

以头为要素所列方程为 *x*+*y*=35

以足为要素所列方程为 2*x*+4*y*=94

二、最典型的二元一次方程组为

 写成矩阵形式为 

这里*a*1, *a*2, *b*1, *b*2, *c*1, *c*2为已知数，*a*1与 *b*1, *a*2与*b*2至少有一个不为零。

（1）当*a*1：*a*2≠*b*1：*b*2时，有唯一一组解；



（2）当*a*1：*a*2=*b*1：*b*2=*c*1：*c*2时，有无穷多组解；

（3）当*a*1：*a*2=*b*1：*b*2≠*c*1：*c*2时，无解。

三、应用题常规解题步骤

列二元一次方程组解应用题的一般步骤可概括为“**审、找、列、解、答**”五步，即：

（1）审：通过审题，把实际问题抽象成数学问题，分析已知数和未知数，并用字母表示其中的两个未知数；

（2）找：找出能够表示题意两个相等关系；

（3）列：根据这两个相等关系列出必需的代数式，从而列出方程组；

（4）解：解这个方程组，求出两个未知数的值；

（5）答：在对求出的方程的解做出是否合理判断的基础上，写出答案.

**【例题讲解】**

**例1** 已知关于*x*的方程 2*a*(3*x*+2)－1=(2*b*+1)*x*有无数多个解，求*a*与*b*的值。【*a=b*=1/4】

**例2** 已知关于*x*，*y*的方程组



分别求出当*a*为何值时，方程组有唯一一组解；无解；有无穷多组解。【*a≠2,－1;a=－1;a*=2】

**例3** 设*m*，*n*是给定的实数，已知关于*x*，*y*的方程组与有相同的解，求*m*，*n*的值。 【*m*=5, *n*=2】

**例4** 求方程组的解的组数。 【1组解, *x*=－3, *y*=9】

**例5** 已知*x*，*y*，*z*为实数，满足*x*+2*y*－5*z*=3，*x*－2*y*－*z*=－5，则*x*2+*y*2+*z*2的最小值为（ ）。

（*A*） （*B*）0 （*C*）5 （*D*） 【*D*】

二元一次方程组的应用(第2课时)

**例6** 小刘在马路上匀速行走，发现每隔6分钟从背后驶过一辆122路公交车，每隔3分钟从迎面驶来一辆122路公交车，假设每辆122路公交车行驶速度相同，而且122路公交车总站每隔固定时间发一辆车，那么发车间隔的时间是多少分钟？

([参考答案](#TA6))

**例7** 有四个正整数，其中任意三个数的算术平均数与第四个数的和，分别等于29,23,21,17，则这四个数中最大的一个是多少？

([参考答案](#TA7))

**例8** 某加工厂制作了甲、乙两种无盖长方体小盒，如图8－1，然后又利用边角料裁出了正方形硬纸片150张，长方形硬纸片300张，并且长方形的宽与长方形边长相等，如图8－2，再将这些硬纸片全部用于制作这种小盒，还可制成甲乙两种小盒各多少个？

 

乙

甲

图8－1 图8－2

([参考答案](#TA8))

**例9** 一个时钟有时针与分针，但钟面上没有数字，在早上*T*时刻，钟在镜子中的影像显示出早上*X*时刻，且*X*比*T*迟了5小时28分，问*T*是早上几时几分？

([参考答案](#TA9))

**例10** 牛吃草问题：某牧场，草每天都匀速生长（每天增长的量相等），若在牧场上放牧24头牛，则6天吃完牧草；若放牧21头牛，则8天吃完牧草。设每头牛每天吃草的量都是相等的，问：（1）如果放牧16头牛，那么几天可以吃完牧草？（2）要使牧草永远吃不完，至多放牧几头牛？

([参考答案](#TA10))

**例11** 浓度问题：现有含糖15%的糖水20克，含糖40%的糖水15克，另有足够多的糖和水，要配制成含糖20%的糖水30克。

（1）试着设计多种配制方案；

（2）试着对你的各种方案作一评价，哪一种用糖最省？哪一种现有糖水的浪费最少？

([参考答案](#TA11))

**例12** 趣味题目：一列正在行进的队伍长100米，传令兵从队尾走到队首，又从队首走到队尾，这列队伍正好前进了100米，已知队伍的速度和传令兵的速度保持匀速不变，问传令兵共走了多少米？ [100(1+√2)]

([参考答案](#TA12))

**【回家作业】**

1. 关于*x*，*y*的方程组 和 具有相同的解，求*a*，*b*的值[*a*=2,*b*=3]

2. 已知关于*x*，*y*的方程组，问*a*为何值时，方程组有无数多组解？只有一组解？

[*a*=4; *a*≠0, *x*=0, *y*=2]

3. 对于任意的数*a*，*b*，关于*x*，*y*的二元一次方程(*a*－*b*)*x*－(*a*+*b*)*y*=*a*－*b*都有一组公共解，这组公开解为多少？ [*x*=1,*y*=0]

4. 解方程组  [*x*=1,*y*=2]

5. 若*a*，*b*，*c*，*d*，*e*满足方程组

 试着确定 3*d*+2*e*的值。

[*a*+*b*+*c*+*d*+*e*=31, 相减 不难得到 *d*=17，*e*=65，3*d*+2*e*=181]

6. 已知，*a*，*b*，*c*互不相等，求证：8*a*+9*b*+5*c*=0

([参考答案](#A6))

7. 汽车以每小时72千米的速度在公路上行驶，开向寂静的山谷，驾驶员按一声喇叭，4秒后听到回响，这时汽车离山谷多远？（声音的速度为340米/秒） [640*m*]

([参考答案](#A7))

8. 小钱问叔叔有多少岁，叔叔说“我像你这么大时，你才4岁；你到我这么大时，我就40岁了。”问小钱和叔叔今年各是多少岁？ [16,28]

([参考答案](#A8))

9. 一个自行车轮胎，若安装在前轮，则自行车行驶5000*km*后报废，若安装在后轮，则自行车行驶3000*km*后报废，行驶一定路程后可以交换前、后轮胎，如果交换前、后轮胎，要使一辆自行车的一对新轮胎同时报废，那么这辆车将能行驶多少千米？ [3750*km*]

([参考答案](#A9))

10. 五猴分桃：五只猴子平均分一堆桃子，不能恰好分完，天黑了，它们把桃子留在原地，各自找一块地方睡觉去，月亮出来了，其中一只猴子偷偷地跑出来，吃掉多余的一个桃子，剩下的桃子正好可以平均分成五份，它抱起自己应得的一份，回去睡觉了；过了一会儿，另一只猴子也偷偷跑出来，吃掉了一个桃子，剩下的桃子刚好能平均分成五份，它也抱走了自己的一份，回去继续睡觉；

（1）问原来的那一堆桃子至少应该是多少个？ [21]

（2）若第三、四、五只猴子，也和前面两只猴子一样，吃掉一个桃子，然后拿走自己的一份，问原来的桃子至少有多少个？最后至少剩下多少个桃子？ [3121，1020]

([参考答案](#A10))

11. 一旅游团50人到一宾馆住宿，宾馆的客房有三人间，二人间和单人间三种，其中三人间的每人每晚20元，二人间的每人每晚30元，单人间的每晚50元。

（1）若旅游团共住满了20间客房，问三种客房各住了几间？怎样住消费最低？[6种，*p*（15,0,5）=1150元]

（2）该旅游团中，若安排是夫妻的住二人间，单身的（成人）住三人间，小孩可以随父母住在一起，现已知有4对夫妻各带了1个小孩，单身的30人，其中男性17人，有2名单身神经衰弱患者要求住单人间，问这一行人共需要多少间客房？[20间]

([参考答案](#A11))

《二元一次方程组》参考答案

**例6** （2008年全国初中数学竞赛题）解：设公交车的行驶速度为*x*米/分，人的行走速度为*y*米/分，同向行驶的相邻两车的间距为*s*米。

每隔6分钟从背后开过一辆车，则 6*x*－6*y*=*s*

每隔3分钟从迎面驶来一辆车，则 3*x*+3*y*=*s*

由此得到 *s*=4*x*， 所以 *s*/*x*=4

答：公交车从总站发车间隔的时间为4分钟。

([返回](#T6))

**例7** 解 设四个数分别为*x*，*y*，*z*，*w*，则由题设得到：



上述四个方程相加，得到：2（*x*+*y*+*z*+*w*）=90, *x*+*y*+*z*+*w*=45

将*x*+*y*+*z*=45－*w*代入第一个方程，得到：15+2*w*/3=29, *w*=14×3/2=21

将*x*+*y*+*w*=45－*z*代入第二个方程，得到：15+2*z*/3=23, *z*=8×3/2=12

将*x*+*z*+*w*=45－*y*代入第三个方程，得到：15+2*y*/3=21, *y*=6×3/2=9

将*y*+*z*+*w*=45－*x*代入第四个方程，得到：15+2*x*/3=17, *x*=2×3/2=3

所以，这四个数中，最大的一个是21.

([返回](#T7))

**例8** 解：甲种无盖纸盒需要长方形纸板4块，正方形纸板1块，乙种无盖纸盒需要长方形纸板3块，正方形纸板2块，故设甲种纸盒为*x*个，乙种纸盒可做*y*个，则有

4*x*+3*y*=300 （1）

*x*+2*y*=150 （2）

（1）+（2）得到：5（*x*+*y*）=450， *x*+*y*=90 （3）

（2）－（3）得到：*y*=150－90=60，代入（3）得到*x*=90－60=30

答：可做成甲、乙两种无盖纸盒各30个和60个。

([返回](#T8))

**例9** 解：镜面反射影像之间的对应关系如图所示：

左右颠倒，上下一致，有中心对称轴。

首先需要知道的是时针每小时顺时针走了30°，我们将两个时刻同时画在同一个圆上，这样，两时刻之间的关系，就转化为圆上两圆心角之间的关系。列出关于两个时刻时针所对应的角度*α*，*β*的方程组，解出*α*，*β*之后，再对应到时刻*T*与*X*。

由题设，两个时刻*X*与*T*相差为5小时28分，（*T*为早上时刻），设（从12点处出发顺时针方向计算）*X*时刻时针对应的角度为*α*，*T*时刻时针对应的角度为*β*，则在钟面上它们所对应的角度之差为

*α*－*β*=（5）×30°=164°

另外*α*+*β*=360°

联立解方程组，得到：*β*=(360°－164°)/2=98°，

对应时刻为 98/30=3, 即*T*为凌晨3小时16分钟。

答：*T*时刻为凌晨3时16分。

([返回](#T9))

**例10** 牛吃草问题解答：学会设未知数，草每天增长量*y*是不变的，每头牛每天的吃草量*x*也是定值，牧场原有草量*a*，16头牛*z*天吃完草量。

（1）根据题意，*x*>0, *y*>0, *z*>0, 且满足

*a*+6*y*=24×6*x* (1)

*a*+8*y*=21×8*x* (2)

*a*+*zy*=16×*zx* (3)

(2)－(1) 得到 *y*=12*x* (4)

(3)－(2) 得到 （*z*－8）*y*=8*x*(2*z*－21) (5)

将(4)代入(5) 得到 12*x*(*z*－8)=8*x*(2*z*－21)

3(*z*－8)=2(2*z*－21)

解得 *z*=18

（2）设放牧*w*头牛，牧草永远吃不完，则必须使*w*头牛每天吃的草量不大于草每天的增长量，即 *wx*≤*y* （6）

将（4）代入（6）得 *wx*≤12*x*，

因为 *x*>0, 所以 *w*≤12，所以最多可以放牧12头牛。

答：若放牧16头牛，18天可以吃完牧草；要使牧草永远吃不完，最多只能放牧12头牛。

([返回](#T10))

**例11** 浓度问题解答：浓度=溶质/溶液×100%，两种不同浓度的溶液混合，满足

*m*×*p*%+*n*×*q*%=（*m*+*n*）×*r*%

溶液配制方案有：（1）只用糖和水；（2）不用含糖40%的糖水；（3）不用含糖15%的糖水；（4）两种糖水各用10克等。分别列出四种方案所对应的二元一次方程组。

（一）因为有两种不同含糖量的糖水和足够多的糖和水供配制之用，于是可以有下面四种方案：

①不用现有的糖水，只用糖和水。

设用糖*x*克，水*y*克，则

*x*+*y*=30 *x*=6

*x*=30×20% 解得 *y*=24

②将含糖15%的糖水20克全用上，但不用含糖40%的糖水。

设用糖*x*克，用水*y*克，则

20+*x*+*y*=30 *x*=3

20×15%+*x*=30×20% 解得 *y*=7

③将含糖40%的糖水15克全用上，但不用含糖15%的糖水。

由于含糖40%的糖水15克中有糖6克，而所要配制的含糖20%的糖水30克也有糖6克，数量相等，所以只要用含糖40%的糖水15克再加水15克即可。

④用两种糖水各10克。

设用糖*x*克，用水*y*克，则

10+10+*x*+*y*=30 *x*=0.5

10×15%+10×40%+*x*=30×20% 解得 *y*=0.5

（二）上述各种解法中，第③种方法用糖最省（不用糖）。

第②、④种方法与其他方法相比，现有糖水用得最多（浪费最少），有没有比现有糖水浪费更少的方法呢？理想的方法是30克糖水均由现有糖水构成，即不加糖和水。

设用含糖15%的糖水*x*克，含糖40%的糖水*y*克，则

*x*+*y*=30 *x*=24

15*x*%+40*y*%=30×20% 解得 *y*=6

但含糖15%的糖水总共才有20克(≤24克)， 故此解答不切实际，由于缺少的4克15%的糖水中的糖分可用40%的糖水补充，所以最省的方法应是只加水，不加糖。

设用现有糖水共*y*克，其中含糖15%的糖水*x*克，加水*a*克，则

15*x*%+（*y*－*x*）×40%=30×20%

*y*+*a*=30

整理得到 *y*=5*x*/8+15 (0≤*x*≤20), 当*x*=20时，*ymax*=27.5，此时*a*=30－*y*=2.5

即用15%的糖水20克，40%的糖水7.5克，加水2.5克，可使得现有糖水浪费最少。

([返回](#TA11))

**例12** 趣味传令兵问题：此问题可以分为两部分：（1）追及问题，传令兵从队尾到队首，这段时间内，设队伍行进了*s*，（2）相遇问题，传令兵折返，从队首往回走，再次回到队尾，这段时间内，队伍正好行进了100－*s*。

设传令兵速度为*x*，队伍行进速度为*y*， 则

追及过程中，时间相同， 即 *s*/*y* = (100+*s*)/*x* (1)

相遇过程中，时间也相同， 即 *s*/*x*=(100－*s*)/*y* (2)

(1)×(2) 得到 *s*2=（100+*s*）（100－*s*）， 解得 *s*=100/=50,

传令兵共行进了 100+2*s*=100+100=100（1+）米。

答：传令兵共行进了100（1+）米。

([返回](#T12))

【回家作业参考答案】

**6. 解** 设=*k*，故(*a*+*b*)=*k*(*a*－*b*), *b*+*c*=2*k*(*b*－*c*), *c*+*a*=3*k*(*c*－*a*), 由此可得

6(*a*+*b*)=6*k*(*a*－*b*), 3(*b*+*c*)=6*k*(*b*－*c*), 2(*c*+*a*)=6*k*(*c*－*a*), 以上三式相加，得到

6(*a*+*b*)+3(*b*+*c*)+2(*c*+*a*)=6*k*(*a*－*b*+*b*－*c*+*c*－*a*), 即 8*a*+9*b*+5*c*=0

([返回](#E6))

**7. 解** 设车离山谷*x*米，车的速度为72000米/小时=20米/秒，声音传输距离与车行驶距离之差等于2*x*，即 2*x*=（340－20）×4，故*x*=640米

([返回](#E7))

**8. 解** 年龄差不变，设小钱现在*x*岁，叔叔现在*y*岁，则有

*小钱 叔叔*

*今年* *x* *y* 由于年龄差不变，所以有 *x*－4=*y*－*x*

*小钱* 4 *x* *y*－4=40－*x*

*叔叔* *y* 40 解得 *x*=16，*y*=28

([返回](#E8))

**9. 解** 假设前轮每千米损耗为1/5000, 后轮每千米损耗为1/3000, 设前、后两轮胎交换之前各行驶了*x*千米和*y*千米，则有

*x*/5000+*y*/3000=1 （1）

*x*/3000+*y*/5000=1 （2）

联立解方程组，（1）×15000+（2）×15000，得到：

8（*x*+*y*）=2×15000

*x*+*y*=3750 **km**

（另解 （1）+（2） 得到 （*x*+*y*）（1/3000+1/5000）=2, *x*+*y*=2/(1/3000+1/5000) ）

答：两轮胎同时报废，行驶路程为3750千米。

([返回](#E9))

**10. 解** （1）设原来的桃子共有*x*个，第一只猴子吃掉一个后，抱回的桃子为*y*个，第二只猴子吃掉一个后，抱回的桃子为*z*个，则可得到方程组

*x*－1=5*y* （1）

5*y*－*y*－1=5*z* （2）

显然这里的*x*，*y*，*z*都是正整数，消去未知数*y*，可得

4*x*－4=25*z*+5， 4（*x*－1）=5（5*z*+1），所以 4|（5*z*+1），*z*最小可取3，这时*x*=21.

【当然，也可以通过*x*=6*z*+（*z*+9）/4, 得到，4|（*z*+9），4|（*z*+1）, 得到*z*最小也是取3，

这是不定方程有最小解的题目】

（2）设最初有桃子*n*，第一只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下；

第二只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下；

第三只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下；

第四只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下；

第五只猴子偷吃一个，拿掉自己的一份后，剩下；

最后剩下的桃子为 =,

最后剩下的桃子为正整数，故 *n*+4最小是55=3125，即*n*最小为3121，剩下45－4=1020个，

答：仅分两次，原来一堆桃子至少21个；分五次时，原来一堆桃子至少3121个，至少剩下1020个桃子。

([返回](#E10))

**11. 解** （1）设三人间，二人间，单间分别住了*x*, *y*, *z*间，根据题意，得到

*x*+*y*+*z*=20 （1）

3*x*+2*y*+*z*=50 （2）

以*z*为参数，将*z*看成已知数，求解*x*和*y*，得到

（2）－（1）×2， 得到 *x*=*z*+10

将*x*代入（1）， 得到 *y*=10－2*z*=2（5－*z*）

因为 0≤*y*≤20， 所以 0≤*z*≤5，而且*x*，*y*，*z*都是整数，由此得到：*z*可取0,1,2,3,4,5；

故 （*x*，*y*，*z*）可能是（10,10,0）（11,8,1）（12,6,2）（13,4,3）（14,2,4）（15,0,5）

住宿费用计算公式为*f*=20×3*x*+30×2*x*+50*z*=60*x*+60*y*+50*z*=60（*x*+*y*）+50*z*=1200－10*z*，此时对应的住宿费分别为（1200,1190,1180,1170,1160,1150），费用最低是1150元，当15间三人房和5间单人房时，费用最低。

（2）设夫妻所住房间为*x*间，男单身住*y*间（三人间），女单身住*z*间（三人间），用[*m*]表示不超过*m*的最大整数。

由题意，要考虑两名患者的性别，分三种情况：

第一，若两名患者均为男性，则有

*y*=（17－2）/3+2=7

*z*=[(30－17)/3]+1=5

(单身女共30－17=13人，住4个三人间剩1人，需要增加1单间)

第二，若两名患者为一男一女，则有

*y*=[(17－1)/3]+1+1=7

*z*=(30－17－1)/3+1=5

第三，若两名患者都是女性，则有

*y*=[17/3]+1=6

*z*=[(30－17－2)/3]+1+2=6

由上可知，无论哪种情况，*y*+*z*=12，而夫妻用房*x*=(50－30－4)/2=8, 所以这一行人共需用房*x*+*y*+*z*=20间。

答：第一问中，住满20间房，有6种可能，其中15间三人房和5间单人房情况下，费用最低；第二问的最佳答案是这一行人需要20间房。

([返回](#E11))