完全平方数 2012-10-6

1. 任意平方数的末位数字只可能是0,1,4,5,6,9这样六种情况，反之不成立。当一个数的末位数是2,3,7,8时, 这个数肯定不是完全平方数；
2. 任意平方数被3除的余数是0或1。当被3除余2的数（形如3n+2）肯定不是完全平方数；
3. 任意平方数除以4，非负最小余数只可能为0（x为偶数）或1（x为奇数）。当被4除余2或3的数（形如4n+2，4n+3）一定不是完全平方数；
4. 任意平方数除以8，所得非负最小余数只可能为0, 4（当x为偶数），或1（当x为奇数）。当被8除余2,3,5,6,7的数一定不是完全平方数；
5. 完全平方数除以9的余数只可能是0,1,4,7。当被9除余2,3,5,6,8的数不是完全平方数；
6. 完全平方数的素因数的指数都是偶数，即一个完全平方数的因子必然是**奇数个（奇数个约数），**如62的因子有6、1和36，2和18，3和12，4和9，其中6称为**自补因子**，后面的2和18等都称为**互补因子，反之成立，即约数个数为奇数的自然数是完全平方数**；
7. 奇数的平方数的十位数字必定是偶数；
8. 若一个数的平方数的十位数字是奇数，那么这个数一定是偶数，且它的个位数字一定是6；反之成立；（个位数是6，十位数是偶数的整数一定不是完全平方数）
9. 在两个连续（或相邻）整数的平方数之间不存在完全平方数（若，则k一定不是整数）；
10. 若素数p整除完全平方数a2，则p能被a整除（若,则a不是完全平方数）；
11. 几个平方公式：
12. **设n是一个正整数,且1×2×3×…×n+3是一个完全平方数，求n的值。**
13. 从完全平方数的个位数来分析，我们知道，**当一个数的末位是2，3，7，8时，这个数肯定不是完全平方数，可以达到否定平方数的目的**。反之，当一个数的末位是0，1，4，5，6，9时，这个数也不一定是平方数。记1x2x3x…xn=n！（阶乘）

当n≥5时，n！的末位数为0，故n！+3的末位是3，故不是平方数；

当n=1, 1+3=4是平方数，n=2时，2+3不是平方数，n=3时，6+3=9是平方数，n=4时，24+3=27不是完全平方数。

故所求正整数n为1或3.

1. **正整数n，使得 n2+5n+13是一个完全平方数，求n的值。**
2. 完全平方数，除了用上述末位数来否定外，还可以用“夹逼法”来求解．即两个连续自然数的平方之间没有其它平方数。

∵，



∴要使得是完全平方数，只能是 =

解得：n=4，当n=4时，=72是完全平方数

1. **求的个位数字是多少？**
2. 完全平方数的个位数字有什么特点吗？我们知道 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10的平方数的个位分别为1,4,9,6，5,6,9,4,1,0，（平方数将已知连续自然数按照每连续10个数一组，可以得到12345678组，还有一组只有9个数，但是每组所有数的和的个位数都是5，故它们的和的个位数为12345679x5的个位数字5.

注：公式法 不难推出 ，采用整数裂项可以推导这个公式。求其个位数，模10就可以了。

1. **求证：三边长都是正整数的直角三角形必有一直角边能被4整除。**
2. 直接证明有点难度，一个数能被4整除，一定能被2整除，故我们从简单到复杂，先证明存在一条直角边，是偶数边。然后利用勾股定理，从分析平方数的特点入手，证明该偶数边也能被4整除。

设两直角边和斜边分别为a,b,c. 反证法入下：

若a，b都是奇数，则由性质（2）得到： 从而由余数的加法定理得到  ①

由勾股定理：及奇偶性质，得到c必定是偶数，还是由性质（2）得到  显然与①矛盾，从而a,b不能都是奇数，必定有一个偶数。

不妨设b是偶数2b1，若a是奇数，则c必为奇数，由性质（3）得到：

，即8|，，故2|，2是素数，

所以2|，4|2，即4|b。证毕。

1. **求证：当n为非负整数时，不是完全平方数。**
2. 证否定完全平方数，有很多种方法：（1）正约数个数是偶数，（2）十位数是奇数，（3）个位数不是0,1,4,5,6,9，而是2,3,7,8；（4）被8除的余数不是0，1，4.等等.

已知数比较复杂，故采用后两种方法相对简单些。

证1：

∴分奇数和偶数来分别讨论，当n=2k时，

，即末位只可能是3或7；

当n=2k+1时，



即末位只可能是7或3，

所以，n为非负整数时，**不是完全平方数。**

**证2：当n为偶数时，，当n为奇数时，，且**

**17≡1（mod8），故 **

**从而 当n为偶数时， ，**

**当n为奇数时，**

**都不是1，与性质（3）不符，故原命题成立。**

1. 满足的整数对的组数是（ ）

A 0. B 1. C 2. D 3

1. 本题初看似乎可以化成(x-2y)(x+2y)=1x2011=(-1)x(-2011), 构成4对方程组，解这些方程组，就可以得到结果。这是2011年北京市初二数学竞赛题。

但是如果仔细分析等式两边的特点，可以发现，右边是一个素数2011，左边是两个完全平方数的差，利用完全平方数的余数来判断，应该可以达到事半功倍的效果。

因为：

所以 ，与右边2011模4为3不相等，故方程不可能有整数解。

1. **从**1**到**2008**的所有自然数中，乘以**72**后是完全平方数的数共有多少个？**
2. 完全平方数，其所有质因数必定成对出现．

而，所以满足条件的数必为某个完全平方数的2倍，2008/2=1004, 312=961<1004<1024=322

由于，所以、、……、都满足题意，即所求的满足条件的数共有31个．

1. **一个整数减去**100**是一个平方数，减去**63**也是一个平方数，问这个数是多少？**
2. 设这个数减去为，减去为，则，

可知，且，所以，，这样这个数为．

（其他三个解（A，B）=（1,37），（-37，-1），（-1，-37），分别为（19，-18），（-19，-18），（-19,18），结果代入上式，是一样的）

1. **能否找到这么一个整数，它加上**24**，和减去**30**所得的两个数都是完全平方数？**
2. 假设能找到，设这两个完全平方数分别为、，那么这两个完全平方数的差为

，由于和的奇偶性质相同，所以不是4的倍数，就是奇数，不可能是像54这样是偶数但不是4的倍数．所以不可能等于两个平方数的差，那么题中所说的数是找不到的．

1. **有**5**个连续自然数，它们的和为一个平方数，中间三数的和为立方数，则这五个数中最小数的最小值为 ．**
2. 考查平方数和立方数的知识点，同时涉及到数量较少的连续自然数问题，设未知数的时候有技巧：一般是设中间的数，这样前后的数关于中间的数是对称的．

设中间数是x，则它们的和为， 中间三数的和为．是平方数，设，则，是立方数，所以至少含有3和5的质因数各2个， 即至少是225，中间的数至少是1125，那么这五个数中最小数的最小值为1123．

【例10】如果一个完全平方数的8进制的表达式是,其中a≠0,那么c=？

【解析】我们知道完全平方数x2除以8的余数只有三种：当x为偶数时，为0或4，当x为奇数时，为1.

而，它除以8的余数与c除以8同余。故c只可能是0,1或4。

（1）c=0，则，显然不是完全平方数，因为为奇数。

（2）c=4，则，如果是完全平方数，则也是完全平方数，但是它模8为7，（或者模4为3），都不满足是完全平方数的特点，矛盾。故不成立。

（3）c=1，则有可能是完全平方数，如a=1，b=3，就是一个完全平方数。

故c=1

**《完全平方数作业练习题》**

**1. 某校2001年的学生人数是个完全平方数。该校2002年的学生人数比上一年多101人，这个数字也是完全平方数。该校2002年学生人数是多少？**

解： m2-n2=101, (m-n)(m+n)=1x101, m=51,n=50, m2=2601

**2. 设n为正整数，且n<300, n2+(n+1)2是一个完全平方数，求n。**

【解析】两个连续自然数的平方和为完全平方数，勾股数，勾三股四弦五，n=3，是满足条件的解。

另外n=20, 20^2+21^2=29^2，n=119，也满足，119^2+120^2=(13^2)^2。

**3.已知n为正整数,且47+4n+41998为一个完全平方数求n的值.为什么?**

解：凑平方，，所以 2n-1=7+1998，n=1003

**4. 一个数的完全平方有35个约数,求该数的约数个数是多少?**

【解析】 35=1x35=5x7, 设这个数是n，则n2=a34, 或者 =a4b6，故n=a17, 或a2b3 ，n有约数为17+1=18 或（2+1）（3+1）=12个。

**5. 从1到1997的所有自然数中,乘以90后是完全平方数的数共有多少个？**

【解析】 90=32x2x5，需要乘以2x5才能成为最小的完全平方数，即900，90x10m2，m为正整数，

又10m2小于1997，所以 1≤m2≤199<152，故m可取1,2，…,14 ，共有14个这样的数。

**6. 求证：11,111,1111，……这串数中没有完全平方数（1972年基辅数学竞赛题）。**

证明：直接利用完全平方数的性质：完全平方数的末尾是奇数，则十位数必定是偶数，而这里给出的数的十位数都是1，是奇数，所以没有完全平方数。

反证法：完全平方数m2的末尾为1，则原数m的个位只能是1或9。

设原数m2由n个1组成的，则9m2+1=10n，

若m是偶数，则左边为奇数，右边是偶数，矛盾；

若m是奇数，??

**7. 是否存在由2011个同样数字组成的平方数?如果存在,请举例说明;如果不存在,请说明理由。**

【解析】不存在。∵A=aaaa.....=a×1111....，a可取1，2,3，…，9，而1111....这样的数不是完全平方数（∵奇数的平方数的十位数字必定是偶数），且2011个1不是偶数（也不是4，6，8的倍数），也不是3的倍数（也不是9的倍数），也不是5的倍数，也不是7的倍数。

[∵ 1111…. 1≡2011≡1（mod 3），1111…1≡2011≡4（mod 9）

∴A各位数字之和为2011a，故A≡2011a≡a（mod 3）A ≡2011a≡4a（mod 9）]

**8. 14,144,1444,14444,……中有几个完全平方数？**

【解析】14=2×7，144=12×12，1444=4\*361=38×38，14444=4×3611，144444=4×36111....

∵个位数字为1的平方数，十位数字必须为偶数。∴所以n只能取2，3两个数

**9. 一个数的完全平方有39个约数，求该数的约数个数是多少？**

39=1x39=3x13， n2=a38 or a2b12, n=a19 or ab6, 故n的约数有19+1=20个 或 （1+1）（1+6）=14个。

**10. 各位数字的平方和等于9的数共有\_\_\_\_\_个。**

【解析】 3、30、300....2210、22100、2021......这样的数有无穷多个。（含若干个0）

111111111、221、212、122、3、211111、121111、112111、111211、111121、111112这些不含0的数有11个。

**11. 各位数字互不相同且各位数字的平方和等于49的四位数共有\_\_\_\_\_\_\_个。**

【解析】49＝6^2+3^2+2^2+0^2

千位数可取6、3、2三种。共有3×3！＝18种。例如6023、6032、6203、6230、6302、6320等。

**12. 求证：四个连续的整数的积加上1，等于一个奇数的平方（1954年基辅数学竞赛题）。**

证明：设四个连续整数为 n-1,n,n+1,n+2, 则 (n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n2+n)(n2+n-2)+1=(n2+n)2-2(n2+n)+1 =(n2+n-1)2=[n(n+1)-1]2

因为两个连续自然数的乘积为偶数，所以 n(n+1)-1为奇数。得证。

**13. 用300个2和若干个0组成的整数有没有可能是完全平方数？**

　　解：设由300个2和若干个0组成的数为A，则其数字和为600

　　3|600 ∴3|A

此数有3的因数，假设是完全平方数，则必有9|A。

但600 mod 9=6，9不整除600，∴矛盾。故不可能有完全平方数。

**14. 试求一个四位数，它是一个完全平方数，并且它的前两位数字相同，后两位数字也相同（1999小学数学世界邀请赛试题）。**

　　解：设此数为 aabb，则：aabb=a0b\*11

此数为完全平方，则必须是11的倍数。因此11|a + b，而a, b为0,1,2,3,4,5,6,7,8，9，（a≠0）

故共有（2,9),(3,8),(4,7),(5,6）等8组可能（颠倒次序也成立）。

经直接验算，可知此数为7744=88\*88

**15. 试证数列49,4489,444889，的每一项都是完全平方数。**

解：49=(6+1)2, 4489=(66+1)2, 444889=(666+1)2, 444…44888…89=(66…66+1)2