**同余式与不定方程**

同余式和不定方程是数论中古老而富有魅力的内容.

**1.  同余式及其应用**

**定义**:设*a*、*b*、*m*为整数（*m*＞0），若*a*和*b*被*m*除得的余数相同，则称*a*和*b*对模*m*同余.记为或。

一切整数*n*可以按照某个自然数*m*作为除数的余数进行分类，即*n*=*pm*+*r*（*r*=0，1，…，*m*-1），恰好*m*个数类.于是同余的概念可理解为,若对*n*1、*n*2，有*n*1=*q*1*m*+*r*，*n*2=*q*2*m*+*r*，那么*n*1、*n*2对模*m*的同余，即它们用*m*除所得的余数相等.

利用整数的剩余类表示,可以证明同余式的下述简单性质:

(1)若,则*m*|(*b*-*a*).反过来,若*m*|(*b*-*a*),则;

(2)如果*a*=*km*+*b*(*k*为整数),则;

(3)每个整数恰与0,1,…，*m*-1，这*m*个整数中的某一个对模*m*同余；

(4)同余关系是一种等价关系：

①反身性；

②对称性，则，反之亦然.

③传递性，，则；

（5）如果，，则①； ②特别地

应用同余式的上述性质，可以解决许多有关整数的问题.

**例1（1898年匈牙利奥林匹克竞赛题）求使2*n*+1能被3整除的一切自然数*n*.**

解∵  ∴ 则

∴当*n*为奇数时，2*n*+1能被3整除； 当*n*为偶数时，2*n*+1不能被3整除.

**例2 求2999最后两位数码.**

解 考虑用100除2999所得的余数

∵ ∴

又 ∴

∴

∴2999的最后两位数字为88.

**例3  求证31980+41981能被5整除.**

证明  ∵

∴

∴ ∴

另解：费马小定理 34≡1(*mod*5), 1980=445\*4,

**2．不定方程**

不定方程的问题主要有两大类：**判断不定方程有无整数解或解的个数**；如果不定方程有整数解，采取正确的方法，**求出全部整数解**.

【类型一】二元一次不定方程：

如果*a*,*b*是互素的两个整数，*c*是整数，且方程 *ax*+*by*=*c* 有一组整数解（*x*0,*y*0）,则此方程的一切整数解可以表示为：*x*=*x*0-*bt*, *y*=*y*0+*at*, 其中*t*为整数，即*t*=0，±1, ±2，…。

(1) 不定方程解的判定

如果方程的两端对同一个模*m*(常数)不同余,显然,这个方程必无整数解.而方程如有解则解必为奇数、偶数两种，因而可以在奇偶性分析的基础上应用同余概念判定方程有无整数解.

**例4  证明方程2*x*2-5*y*2=7无整数解.**

证明  ∵2*x*2=5*y*2+7，由奇偶性判断，左边是偶数，显然右边的*y*为奇数.

① 若*x*为偶数，则

∵方程两边对同一整数8的余数不等， ∴*x*不能为偶数.

② 若*x*为奇数，则

（模8也可以判断，

∵方程两边对同一整数4（或8）的余数不等， ∴*x*不能为奇数.

则原方程无整数解.

说明:用整数的整除性来判定方程有无整数解,是我们解答这类问题的常用方法.

**例5 （第33届美国数学竞赛题）满足方程*x*2+*y*2=*x*3的正整数对（*x*，*y*）的个数是（   ）.**

**（*A*）0 （*B*）1 （*C*）2 （*D*）无限个 （*E*）上述结论都不对**

解: 由*x*2+*y*2=*x*3得*y*2=*x*2（*x*-1），所以只要*x*-1为自然数的平方，则方程必有正整数解.

令*x*-1=*k*2(*k*为自然数),则为方程的一组通解.由于自然数有无限多个,故满足方程的正整数对(*x*,*y*)有无限多个,应选(*D*).

说明:可用写出方程的一组通解的方法,判定方程有无数个解.

**(2) 不定方程的解法**

不定方程没有统一的解法,常用的特殊方法有:**配方法、因式（质因数）分解法、不等式法、奇偶分析法和余数分析法**.对方程进行适当的变形,并正确应用整数的性质是解不定方程的基本思路.

**例6 求不定方程3*x*+5*y*=19的整数解**

**解：形如*ax*+*by*=*c*的不定方程，先求出一组特解(*x*0,*y*0)，再得到通解**

**（*x*=*x*0+*bt*，*y*=*y*0-*at*，*t*为整数）。**

*X*=（19-5*y*）/3, 19 *mod* 3=1, 5 *mod* 3=2故*y*=2，*x*=3为一组特解，通解为

*X*=3+5*t*， *y*=2-3*t*， *t*为整数。

**例7 求方程的整数解.**

解(配方法)原方程配方得(*x*-2*y*)2+*y*2=132.

在勾股数中,最大的一个为13的只有一组即5,12,13,因此有8对整数的平方和等于132即(5,12),(12,5),(-5,-12),(-12,-5),(5,-12),(12,-5),(-5,12),(-12,5).故原方程组的解只能是下面的八个方程组的解

562084   562088562088562090

562092 562094 562096 562098

解得562100

562102  562104

**例8 \*(原民主德国1982年中学生竞赛题)已知两个“非零”自然数*b*和*c*及素数*a*满足方程*a*2+*b*2=*c*2.证明:这时有*a*＜*b*及*b*+1=*c*.**

证明（因式分解法）∵*a*2+*b*2=*c*2， ∴*a*2=（*c*-*b*）（*c*+*b*），

**又∵*a*为素数，∴*c*-*b*=1，且*c*+*b*=*a*2. 于是得*c*=*b*+1及3≤*a*2=*b*+*c*=2*b*+1＜3*b* (∵*b*≥1)，**

即,而*a*≥3,∴≤1，∴＜1.∴*a*＜*b*.

**例9（第35届美国中学数学竞赛题）满足联立方程 的正整数（*a*，*b*，*c*）的组数是（ ）.**

**（*A*）0  （*B*）1  （*C*）2  （*D*）3  （*E*）4**

解（质因数分解法）由方程*ac*+*bc*=23得 （*a*+*b*）*c*=23=1×23.

∵*a*，*b*，*c*为正整数，∴*c*=1且*a*+*b*=23.

将*c*=1和*a*=23-*b*代入方程*ab*+*bc*=44得

(23-*b*)*b*+*b*=44,即(*b*-2)(*b*-22)=0,

∴*b*1=2,*b*2=22.从而得*a*1=21,*a*2=1.故满足联立方程的正整数组(*a*,*b*,*c*)有两个,即(21,2,1)和(1,22,1),应选(*C*).

**例10求不定方程2(*x*+*y*)=*xy*+7的整数解.**

解 原不定方程可以化为（*x*-2）（*y*-2）=-3=-1×3

（*x*-2，*y*-2）共有四组解（-1,3）（1，-3）（-3,1）（3，-1）

分别解得（*x*,*y*）为（1,5）（3，-1）（-1,3）（5,1）

∴方程整数解为

562119

**例11 方程27*x*+81*y*=9999的整数解有几组（ ）。填数字**

解：化简为 3*x*+9*y*=1111=11×101，左边能被3整除，右边不能，故无整数解。

以下都是针对初二数学

**\*\*例11 求方程*x*+*y*=*x*2-*xy*+*y*2的整数解.**

解: （判别式方法，不等式法）方程有整数解，必须△=（*y*+1）2-4（*y*2-*y*）≥0，解得



满足这个不等式的整数只有*y*=0，1，2.

当*y*=0时，由原方程可得*x*=0或*x*=1；当*y*=1时，由原方程可得*x*=2或0；当*y*=2时，由原方程可得*x*=1或2.

所以方程有整数解

最后我们来看两个分式和根式不定方程的例子.

**\*\*例12 求满足方程且使*y*是最大的正整数解（*x*，*y*）.**

解：将原方程变形得，由此式可知，只有12-*x*是正的且最小时，*y*才能取大值.又12-*x*应是144的约数，所以，12-*x*=1，*x*=11，这时*y*=132.

故满足题设的方程的正整数解为（*x*，*y*）=（11，132）.

**\*\*例13（第35届美国中学生数学竞赛题）满足0＜*x*＜*y*及的不同的整数对（*x*，*y*）的个数是（   ）.**

**（*A*）0  （*B*）1  （*C*）3  （*D*）4  （*E*）7**

解法1根据题意知，0＜*x*＜1984，由

得 

当且仅当1984*x*是完全平方数时，*y*是整数.而1984=26·31，故当且仅当*x*具有31*t*2形式时，1984*x*是完全平方数.

∵*x*＜1984，∵1≤*t*≤7.当*t*=1，2，3时，得整数对分别为（31，1519）、（124，1116）和（279，775）. 当*t*＞3时*y*≤*x*不合题意，因此不同的整数对的个数是3，故应选（*C*）.

解法2 ∵1984=∴，由此可知：*x*必须具有31*t*2形式，*y*必须具有31*k*2形式，并且*t*+*k*=8（*t*，*k*均为正整数）.因为0＜*x*＜*y*，所以*t*＜*k*.当*t*=1，*k*=7时得（31，1519）；*t*=2，*k*=6时得（124，1116）；当*t*=3，*k*=5时得（279，775）.因此不同整数对的个数为3.

**\*\*例14  (第14届美国数学邀请赛题)不存在整数*x*,*y*，满足方程 ①**

证明 **反证法**，如果有整数*x*，*y*使方程①成立，

则

知17|(2*x*+3*y*)2+5.

设2*x*+3*y*=17*n*+*a*，其中*a*是0，±1，±2，±3，±4，±5，±6，±7，±8中的某个数，但是这时（2*x*+3*y*）2+5=（17*n*）2+34*na*+（*a*2+5）=*a*2+5（*mod*17），而*a*2+5被17整除得的余数分别是5，6，9，14，4，13，7，3，1，即在任何情况下（2*x*+3*y*）2+5都不能被17整除，这与它能被17整除矛盾.故不存在整数*x*，*y*使①成立.