**奥数平面几何部分**

**——面积法之二(教师)**

**教学目标**

1﹒ 熟练掌握五大面积模型

2﹒ 掌握五大面积模型的各种变形

3﹒ 塞瓦定理

**知识点拨**

**例1** 如图，三角形*ABC*的面积是1，*E*是*AC*的中点，点*D*在*BC*上，且*BD：DC*=1:2，*AD*与*BE*交于点*F*．则四边形*DFEC*的面积等于 ．

**** 

例1 解 方法一：连接，根据燕尾定理，，，

设份，则份，份，份，如图所标

所以

方法二：连接，由题目条件可得到，

，所以，

，

而．所以则四边形**的面积等于．

**例2.** \*\*如右图，三角形*ABC*中，*AF:FB*=*BD:DC*=*CE:EA*=3:2，且三角形*ABC*的面积是95，则三角形*ABE*的面积为\_\_\_\_\_\_，三角形*AGE*的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_，三角形*GHI*的面积为\_\_\_\_\_\_．

 ****

例2 解：连接*AH*，*BI*，*CG* ，不妨设 *x=S∆AGE*，

由于*CE:EA*=3:2，所以*AE*=*AC*，故*S*∆*ABE*=*S∆ABC*=×95=38， *S*∆*BCE*=95-38=57；

同理：*S*∆*BCF*=38，*S∆ACF*=57；*S*∆*ACD*=38，*S∆ABD*=57；

根据等积模型，*S∆GCE*= *x*=1.5 *x*，*S∆ACG*=2.5 *x*

根据燕尾定理，*S∆ABG*：*S∆ACG*=*BD*:*DC*=3:2，*S∆BCG*：*S∆ABG*=*CE*:*EA*=3:2，所以

*S∆ABG* =1.5×2.5 *x*=3.75 *x*，*S∆BCG* =1.5×3.75 *x*=5.625 *x*，或

*S∆ABG*：*S∆ACG*：*S∆BCG*=6:4:9， 则 *S∆ABG*=×95=30，*S∆ACG*=×95=20*，S∆BCG*=×95=45；

那么*S∆AGE*=*S∆ACG*=×20=8，*S∆CGE*=20-8=12；

同理可证：

*S∆ABH*：*S∆BCH*：*S∆ACH*=4:6:9， 则 *S∆ABH*=20，*S∆BCH*=30，*S∆ACH*=45；

那么*S∆BFH*=*S∆ABH*=×20=8，*S∆AFH*=20-8=12；

*S∆BCI*：*S∆ACI*：*S∆ABI*=4:6:9， 则 *S∆BCI*=20，*S∆ACI*=30，*S∆ABI*=45；

那么*S∆DCI*=*S∆BCI*=×20=8，*S∆BDI*=12；

则

S∆AGH = S∆ABG – S∆ABH =30-20=10

S∆GHI = S∆AFC – S∆ACI – S∆AFH-S∆AGH =57-30-12-10=5

**例3** 如图，长方形中，，，三角形的面积为平方厘米，求长方形的面积．

** **

例3 解 连接，．

因为，，所以．

因为，，所以平方厘米，所以平方厘米．因为，所以长方形的面积是平方厘米．

**例4.** 如图，长方形被、分成四块，已知其中3块的面积分别为2、5、8平方厘米，那么余下的四边形的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_平方厘米．

 

例4 解 连接、．四边形为梯形，所以，又根据蝴蝶定理，，所以，所以(平方厘米)，(平方厘米)．那么长方形的面积为平方厘米，四边形的面积为(平方厘米)．

**例5.** 如图，平行四边形的对角线交于点，、、、的面积依次是2、4、4和6．求：⑴求的面积；⑵求的面积．



例5 解 ⑴根据题意可知，的面积为，那么和的面积都是，所以的面积为；

⑵由于的面积为8，的面积为6，所以的面积为，

根据蝴蝶定理，，所以，

那么．

**例6.** 已知是平行四边形，，三角形的面积为6平方厘米．则阴影部分的面积是 平方厘米．



例6 解 连接．

由于是平行四边形，，所以，

根据梯形蝴蝶定理，，所以(平方厘米)，(平方厘米)，又(平方厘米)，阴影部分面积为(平方厘米)．

【巩固】右图中是梯形，是平行四边形，已知三角形面积如图所示(单位：平方厘米)，阴影部分的面积是 平方厘米．

 

* 1. 连接．由于与是平行的，所以也是梯形，那么．

根据蝴蝶定理，，故，

所以(平方厘米)．

【巩固】右图中是梯形，是平行四边形，已知三角形面积如图所示(单位：平方厘米)，阴影部分的面积是 平方厘米．



1. 连接．由于与是平行的，所以也是梯形，那么．

根据蝴蝶定理，，故，所以(平方厘米)．

另解：在平行四边形中，(平方厘米)，

所以(平方厘米)，

根据蝴蝶定理，阴影部分的面积为(平方厘米)．

**例7.** 四边形的对角线与交于点(如图所示)．如果三角形的面积等于三角形的面积的，且，，那么的长度是的长度的\_\_\_\_\_\_\_\_\_倍．

** **

例7 解 在本题中，四边形为任意四边形，对于这种”不良四边形”，无外乎两种处理方法：⑴利用已知条件，向已有模型靠拢，从而快速解决；⑵通过画辅助线来改造不良四边形．看到题目中给出条件，这可以向模型一蝴蝶定理靠拢，于是得出一种解法．又观察题目中给出的已知条件是面积的关系，转化为边的关系，可以得到第二种解法，但是第二种解法需要一个中介来改造这个”不良四边形”，于是可以作垂直于，垂直于，面积比转化为高之比．再应用结论：三角形高相同，则面积之比等于底边之比，得出结果．请老师注意比较两种解法，使学生体会到蝴蝶定理的优势，从而主观上愿意掌握并使用蝴蝶定理解决问题．

解法一：∵，∴，∴．

解法二：作于，于．

∵，∴，∴，

∴，∴，∴．

1. 如图，正方形面积为平方厘米，是边上的中点．求图中阴影部分的面积．

****

1. 因为是边上的中点，所以，根据梯形蝴蝶定理可以知道

，设份，则 份，所以正方形的面积为份，份，所以，所以平方厘米．

【巩固】在下图的正方形中，是边的中点，与相交于点，三角形的面积为1平方厘米，那么正方形面积是 平方厘米．



* 1. 连接，根据题意可知，根据蝴蝶定理得(平方厘米)，(平方厘米)，那么(平方厘米)．

1. 如图，是等腰直角三角形，是正方形，线段与相交于点．已知正方形的面积48，，则的面积是多少？

****

1. 由于是正方形，所以与平行，那么四边形是梯形．在梯形中，和的面积是相等的．而，所以的面积是面积的，那么的面积也是面积的．

由于是等腰直角三角形，如果过作的垂线，为垂足，那么是的中点，而且，可见和的面积都等于正方形面积的一半，所以的面积与正方形的面积相等，为48．

那么的面积为．

1. 下图中，四边形都是边长为1的正方形，、、、分别是，，，的中点，如果左图中阴影部分与右图中阴影部分的面积之比是最简分数，那么，的值等于 ．

 

1. 左、右两个图中的阴影部分都是不规则图形，不方便直接求面积，观察发现两个图中的空白部分面积都比较好求，所以可以先求出空白部分的面积，再求阴影部分的面积．

如下图所示，在左图中连接．设与的交点为．

左图中为长方形，可知的面积为长方形面积的，所以三角形的面积为．又左图中四个空白三角形的面积是相等的，所以左图中阴影部分的面积为．



如上图所示，在右图中连接、．设、的交点为．

可知∥且．那么三角形的面积为三角形面积的，所以三角形 的面积为，梯形的面积为．

在梯形中，由于，根据梯形蝴蝶定理，其四部分的面积比为：，所以三角形的面积为，那么四边形的面积为．而右图中四个空白四边形的面积是相等的，所以右图中阴影部分的面积为．

那么左图中阴影部分面积与右图中阴影部分面积之比为，即，

那么．

1. 如图， 中，，，互相平行，，

**则 ．**



1. 设份，根据面积比等于相似比的平方，

所以，，

因此份，份，

进而有份，份，所以

**【巩固】如图，平行，且，，，求的长．**



1. 由金字塔模型得，所以

**【巩固】如图， 中，，，，，互相平行，**

**，则**

** ．**

* 1. 设份，，因此份，进而有份，同理有份，份，份．

所以有



1. 如图，已知正方形的边长为，是边的中点，是边上的点，且，与相交于点，求



1. 方法一：连接，延长，两条线交于点，构造出两个沙漏，所以有，因此，根据题意有，再根据另一个沙漏有，所以．

方法二：连接，分别求，，根据蝴蝶定理，所以．

1. 如图所示，已知平行四边形的面积是1，、是、的中点， 交于，求的面积．

 

1. 解法一：由题意可得，、是、的中点，得，而，

所以，

并得、是的三等分点，所以，所以

，所以，；

又因为，所以．

解法二：延长交于，如右图，

可得，，从而可以确定的点的位置，

，，(鸟头定理)，

可得

1. 如图，为正方形，且，请问四边形的面积为多少？

 

1. (法)由，有，所以，又，所以

，所以，所以占的，

所以．

(法)如图，连结，则(，

而，所以，()．

而()，因为，

所以，则()，阴影部分面积等于

()．

1. 如右图，三角形**中，，，求．



1. 塞瓦定理: AF:FB=1÷[(BD:DC)\*(CE:EA)]=DC:BD\*(EA:CE)=27:16
2. 根据燕尾定理得



（都有的面积要统一，所以找最小公倍数）

所以

【点评】本题关键是把的面积统一，这种找最小公倍数的方法，在我们用比例解题中屡见不鲜，如果能掌握它的转化本质，我们就能达到解奥数题四两拨千斤的巨大力量！

**【巩固】如右图，三角形中，，，求.**



1. 塞瓦定理：AF：FB=DC：BD\*（EA：CE）=4：3\*（5：6）=20：18=10：9
2. 根据燕尾定理得



（都有的面积要统一，所以找最小公倍数）

所以

1. **如图，三角形的面积是，，**，三角形被分成部分，请写出这部分的面积各是多少?**

** **

1. 设*BG*与*AD*交于点*P*，*BG*与*AE*交于点*Q*，*BF*与*AD*交于点*M*，*BF*与*AE*交于点*N*．连接*CP*，*CQ*，*CM*，*CN*．

根据燕尾定理，，，设(份)，则(份)，所以

同理可得，，，而，所以，．

同理，，所以，，，

**【巩固】如图，的面积为**1**，点、是边的三等分点，点、是边的三等分点，那么四边形的面积是多少？**

 

1. 连接、、．

根据燕尾定理，，，

所以，那么，．

类似分析可得．

又，，可得．

那么，．

根据对称性，可知四边形的面积也为，那么四边形周围的图形的面积之和为，所以四边形的面积为．

1. **右图，中，是的中点，、、是边上的四等分点，与交于，与交于，已知的面积比四边形的面积大平方厘米，则的面积是多少平方厘米？**

****

1. 连接、．

根据燕尾定理，，，所以；

再根据燕尾定理，，所以，所以，那么，所以．

根据题意，有，可得(平方厘米)

1. **如图，面积为l的三角形*ABC*中，*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*分别是*AB*、*BC*、*CA* 的三等分点，求阴影部分面积.**

****

1. 三角形在开会，那么就好好利用三角形中最好用的比例和燕尾定理吧！

令*BI*与*CD*的交点为*M*，*AF*与*CD*的交点为*N*，*BI*与*AF*的交点为*P*，*BI*与*CE*的交点为*Q*，连接*AM*、*BN*、*CP*

⑴求：在中，根据燕尾定理，

设(份)，则(份)，(份)，(份)，

所以，所以，，

所以，

同理可得另外两个顶点的四边形面积也分别是面积的

⑵求：在中，根据燕尾定理，

所以，同理

在中，根据燕尾定理，

所以，所以

同理另外两个五边形面积是面积的，所以

1. **如图，面积为l的三角形*ABC*中，*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*分别是*AB*、*BC*、*CA* 的三等分点，求中心六边形面积.**

****

1. 设深黑色六个三角形的顶点分别为*N*、*R*、*P*、*S*、*M*、*Q*，连接*CR*

在中根据燕尾定理，，



所以，同理，

所以，同理

根据容斥原理，和上题结果

**课后练习（二）：**

**1.** 如图，长方形*ABCD*的面积是2平方厘米，*EC=2DE*，*G*是*BC*的中点，*F*是*DG*的中点．求阴影部分ECGF的面积?



1. 解：设*S∆DEF*=1份，则根据燕尾定理其他面积如图所示*S*阴影=*S∆BCD*=平方厘米.

**2.**如图，四边形被两条对角线分成4个三角形，其中三个三角形的面积已知，求：⑴三角形*BGC*的面积；⑵*AG：GC*=？

2. 解 ⑴根据蝴蝶定理，*S∆BGC*×1=2×3，那么*S∆BGC* =6；

⑵根据蝴蝶定理，*AG：GC*=（1+2）：（3+6）=3:9=1:3．

**3.** 如图，三角形*ABC*中，*AF:FB=BD:DC=CE:EA*=3:2，且三角形*GHI*的面积是1，求三角形*ABC*的面积．



3. 解：连接*BG*，*S∆AGC* =6份，以G为中心，分∆ABC为三块∆ABG，∆BCG和∆CAG，根据燕尾定理，

S∆CAG ：S∆BCG =AF：FB=3:2=6:4，

S∆CAG ：S∆ABG =CD：DB=2:3=6:9， ∴S∆CAG：S∆BCG：S∆ABG=6:4:9

这样可以求得 S∆CAG= S∆ABC = S∆ABC ， S∆BCG= S∆ABC ， S∆ABG= S∆ABC

同理连接AI、CH得

S∆ABH= S∆ABC ，S∆BCI= S∆ABC ，

所以S∆HGI=（1-×3） S∆ABC = S∆ABC ，S∆ABC=19 S∆HGI

∵三角形*GHI*的面积是1，所以三角形*ABC*的面积是19

4. 如图， ∆*ABC*中*BD=2DA，CE=2EB，AF=2FC*，求∆*ABC*与阴影三角形面积之比．

 

4. 解 如图，连接*AI*．

根据燕尾定理，，，

所以，，那么，．

同理可知和的面积也都等于面积的，所以阴影三角形的面积等于面积的，所以的面积是阴影三角形面积的7倍．

**5.** 如图，在∆*ABC*中，，求的值．



5. 解 连接BG，设1份，根据燕尾定理，，得(份)，(份)，则(份)，因此，同理连接AI、CH得，，所以

【点评】如果任意一个三角形各边被分成的比是相同的，那么在同样的位置上的图形，虽然形状千变万化，但面积是相等的，这在这讲里面很多题目都是用“同理得到”的，即再重复一次解题思路，因此我们有对称法作辅助线.

**6.** 已知*∆DEF*的面积为7平方厘米，*BE=EC*，*AD=2DB*，*CF=3FA*，求*∆ABC*的面积．

****

6. 解 鸟头定理

*S∆BDE：S∆ABC =*(*BD×BE*)：（*BA×BC*）=（1×1）：（2×3）=1:6=4:24

*S∆CEF*：*S∆ABC =*（*CE*×*CF*）：（*CB×CA*）=（1×3）：（2×4）=3:8=9:24

*S∆ADF*：*S∆ABC =*（*AD×AF*）：（*AB×AC*）=（2×1）：（3×4）=1:6=4:24

设*S∆ABC =24*份，则 *S∆BDE=4*份，*S∆CEF*=9份，*S∆ADF*=4份，*S∆DEF*=24-4-4-9=7份，恰好是7平方厘米，所以*S∆ABC =24*平方厘米

**7.** 如图，四边形*EFGH*的面积是66平方米，*EA=AB，CB=BF，DC=CG，HD=DA*，求四边形*ABCD*的面积．

 

7. 解 连接*BD*和*AC*．由共角鸟头定理得

*S∆CDB：S∆CGF =*(*CD×CB*)：（*CF×CG*）=（1×1）：（2×1）=1:2

*S∆DCA：S∆DHG =*(*DA×DC*)：（*DG×DH*）=（1×1）：（2×1）=1:2

*S∆ABD：S∆AHE =*(*AD×AB*)：（*AH×AE*）=（1×1）：（2×1）=1:2

*S∆BAD：S∆BFE =*(*BA×BD*)：（*BE×BF*）=（1×1）：（2×1）=1:2

即*S∆CGF =2 S∆CDB S∆DHG =2 S∆DCA S∆AHE =2S∆ABD S∆BFE =2 S∆BAD*

所以 *S∆CGF + S∆AHE =2*（*S∆CDB* + *S∆ABD*）= 2 *SABCD*

*S∆DHG + S∆BFE =2*（*S∆DCA + S∆BAD*）= 2 *SABCD*

故*SEFGH*= *S∆CGF + S∆AHE+S∆DHG + S∆BFE +SABCD*=5 *SABCD*

所以 *SABCD* = *SEFGH*÷5=66÷5=13.2平方米

8. 正方形*ABCD*的面积是120平方厘米，*E*是*AB*的中点，*F*是*BC*的中点，求四边形*BGHF*的面积

 

8. 解 欲求四边形*BGHF*的面积须求出∆*EBG*和∆*CHF*的面积．

由题意可得到：*EG:GC=EB:CD*=1:2，所以可得：*S∆BCE*=3 *S∆EBG*

将*AB、DF*延长交于*M*点，可得：

*BM=DC，MF=FD，BF=FC*

而*EH:HC=EM:CD*=(0.5*AB+AB*):*CD*=3:2，

由共角鸟头定理：

*S∆CFH*：*S∆BCE*=（*CH*×*CF*）：（*CE*×*CB*）=（2×1）：（5×2）=1:5

∴*S∆BCE*=5 *S∆CFH*

而*S∆BCE*=0.5 *S∆ABC*=0.5×0.5*SABCD*=30，

**∴** *S∆EBG*=30÷3=10，*S∆CFH*=30÷5=6，

*SBGHF*=*S∆EBC*-*S∆EBG*-*S∆CFH*=30-10-6=14 cm2**．**

本题也可以用**蝴蝶定理**来做，连接*EF*，确定*H*的位置(也就是*FH：HD*)，同样也能解出．

1. **如图，已知，，，，则 ．**

 

* 1. 将三角形绕点和点分别顺时针和逆时针旋转，构成三角形和，再连接，显然，，，所以是正方形．三角形和三角形关于正方形的中心中心对称，在中心对称图形中有如下等量关系：

；；．

所以．

1. **如图，正方形的面积是平方厘米，是的中点，是的中点，四边形 的面积是\_\_\_\_\_平方厘米．**

 

1. 连接，根据沙漏模型得，设份，根据燕尾定理份，份，因此份，，所以(平方厘米).
2. **如图，中，点是边的中点，点、是边的三等分点，若的面积为1，那么四边形的面积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．**

 

1. 由于点是边的中点，点、是边的三等分点，如果能求出、、三段的比，那么所分成的六小块的面积都可以求出来，其中当然也包括四边形的面积．

连接、．

根据燕尾定理，，而，所以，那么，即．

那么，．

另解：得出后，可得，

则．

1. **如右图，三角形**中，，且三角形的面积是，求角形** 的面积．**

****

1. 连接*BG*，12份

根据燕尾定理，，

得(份)，(份)，则(份)，因此，

同理连接*AI*、*CH*得，，所以

三角形*ABC*的面积是，所以三角形*GHI*的面积是

**月测备选**

1. **按照图中的样子，在一平行四边形纸片上割去了甲、乙两个直角三角形．已知甲三角形两条直角边分别为和，乙三角形两条直角边分别为和，求图中阴影部分的面积．**

** **

* 1. 如右图，我们将三角形甲与乙进行平移，就会发现平行四边形面积等于平移后两个长方形面积之和．所以阴影部分面积为：

1. **如图所示，矩形的面积为**36**平方厘米，四边形的面积是**3**平方厘米，则阴影部分的面积是 平方厘米．**



1. 因为三角形面积为矩形的面积的一半，即18平方厘米，三角形面积为矩形的面积的，即9平方厘米，又四边形的面积为3平方厘米，所以三角形与三角形的面积之和是平方厘米．

又三角形与三角形的面积之和是矩形的面积的一半，即18平方厘米，所以阴影部分面积为(平方厘米)．

1. **如图，已知，，与相交于点，则被分成的部分面积各占 面积的几分之几？**

****

1. 连接，设份，则其他部分的面积如图所示，所以份，所以四部分按从小到大各占面积的
2. **如图，在中，延长至，使，延长至，使，是的中点，若的面积是，则的面积是多少？**



* 1. ∵在和中，与互补，

∴．

又，所以．

同理可得，．

所以

1. **如图，，，则**



1. 根据燕尾定理有，，所以
2. **如图在中，，求的值．**

****

1. 连接*BG*，设1份，根据燕尾定理，，得(份)，(份)，则(份)，因此，同理连接*AI*、*CH*得，，

所以