**4．完全立方数及其他**

　　和完全平方数的定义类似，一个整数恰好是另一个整数的立方，我们称这个整数为完全立方数．例如27，1000等都是完全立方数．完全立方数也有许多重要性质，限于篇幅这里不再一一介绍．更一般地，如果一个整数恰好是另一个整数的n次方(n为自然数)，那么称这个数为n次方数．下面就列举几个这方面的例子．

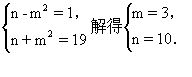
**例1**.设 *a*，*b*，*c*，*d*是正整数，满足*a*5=*b*4，*c*3=*d*2，且*c*-*a*=19，求*a*-*b*．(1985年美国数学邀请赛试题)

**解：**由*a*5=*b*4，*c*3=*d*2，注意到5与4互质，2与 3互质，可知存在两个正整数*m*及*n*，使

*a*=*m*4，*b*=*m*5，*c*=*n*2，*d*=*n*3．

　　于是 19=*c*-*a*=*n*2-*m*4=(*n*+*m*2)(*n*-*m*2)．

　　由于19是质数，n-m2＜n+m2，于是必有



　　d=n3=1000，b=m5=243．

　　∴d-b=1000-243=757．

**例2．**如果a＜b＜c＜d＜e是连续的正整数，b+c+d是完全平方数，a+b+c+d+e是完全立方数，那么c的最小值是多少？(1989年第7届美国数学邀请赛题)

**解** 因为b，c，d是连续的正整数，所以

b+c+d=3c，a+e=2c，

a+b+c+d+e=5c．

　　由于b+c+d是完全平方数，a+b+c+d+e是完全立方数，所以可设

3c=m2，①

5c=n3．②

　　由①，得3|m，故3|c．再由②得，3|n，所以33|c，且5|n．从而52|c，于是25×27|c．

　　因此，c的最小值为25×27=675．

**例3．**试找出最小的正整数n，使它的立方的末三位数字是888．(1988年美国数学邀请赛试题)

**解法1** 如果一个正整数的立方以8结尾，那么这个数本身必以2结尾．即它可以写成n=10k+2(k为非负整数)的形式，于是

n3=(10k+2)3=1000k3+600k2+120k+8，

　　其中120k这一项决定了n3的十位数字．

　　由于要求n3的十位数字是8，则 12k也应是以 8为个位，则k=4或9，因此，可设k=5m+ 4(m为非负整数)，

　　n3=[10(5m+4)+**2]**3

　　　=125000m3+315000m2+26460m+74088．

　　为使n3的百位数字是8，由于第一，三，四项的百位是0，所以必须使2646m的个位是3，最小的m=3．这时

k=5m+4=19，n=10k+2．

**解法2**由题意1000|n3-888，所以

　　1000|n3+112-1000，1000|n3+112．

　　∴n是偶数．设n=2k，则

　　1000|8k3+112，125|k3+14．

　　首先，必须5|k3+14，因此k的个位数字是6或1．当k的个位数字是6时，设k=10m+6，

　　k3+14=(10m+6)3+14

　　　　 =1000m3+1800m2+1080m+230

　　　　 =5(200m3+360m2+216m+46)．

　　200m3+360m2+216m+46的个位数字必须是5，它的个位数字由216m+46决定，m的个位应是4或9．

　　取最小的m=9时，

　　200m3+360m2+216m+46

　　=200m3+29160+1944+46

　　=200m3+31150，

　　能被25整除，此时k=10m+6=96，n=2k=192．

　　取m=4时，

　　200m3+360m2+216m+46

　　=200m3+5760+910，

　　不能被25整除．

　　当k的个位数字是1时，设k=16t+1，

　　k3+14=1000t3+300t2+30t+15

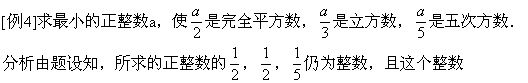
　　　　 =5(200t3+60t2+6t+3)．

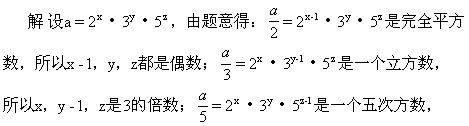
　　若 25|200t3+60t2+6t+3，则t的个位数是2或7．取最小的t=2，7进行验算：

　　t=2时，200t3+60t2+6t+3=200t3+255不能被25整除；

　　t=7时，200t3+60t2+6t+3=200t3+2985也不能被25整除．

　　于是，所求的最小正整数n=192．

  
必同时含有因数2x，3y，5z(x≠0，y≠0，z≠0)，故可设a=2x·3y·5z．



　　所以x，y，z-1是5的倍数．由此，x既是3的倍数，又是5的倍数，最小公倍数是15，又需满足x-1是偶数的条件，故x=15．同理得y=10，x=6．

**例5．**设n∈N，n＞1，求证：2n-1不是任何整数的平方，也不是任何整数的立方．

**证明**若2n-1=k2(k∈N)，∵n＞1，∴k＞1，且k为奇数，令k=2t+1(t∈N)，则2n=(2t+1)2+1=2(2t2+2t+1)．这说明2n有一个大于1的奇约数2t2+2t+1，这是不可能的，∴2n-1不是完全平方数．

　　若2n-1=k3(k∈N)，则k＞1，且2n=k3+1=(k+1)(k2 -k+1)．∵k2-k+1=k(k-1)+1为一个大于1的奇数，它不可能是2n的约数，从而得出矛盾，故2n-1也不能是任何整数的立方．

**例6．**求证：存在无穷多个不能写成三个整数立方和形式的整数．

**分析**本题的理想证法是通过构造，即具体给出无穷多个不能表示为三个整数立方和的整数，为此，先设法找出能表示成三个整数立方和形式的一个必要条件．

**证明**任一整数都可写成3k或3±1的形式，∵(3k)3 =27k3，(3k±1)3=27k3±27k2+9k±1，故任意整数的立方可写成9m或9m±1http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25330.JPG式，这里-3≤r≤3．因此，形如9t±4的整数都不可能表示为三个整数的立方和．显然，形如9t±4(t∈Z)的整数有无穷多个，由此命题得证．

**例7．**求一个四位数，使它等于它的四个数码和的四次方，并证明此数是唯一的．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25331.JPG  
计算得，64=1296，74=2401，84=4096，94=6561，其中符合题意的只有2401一个．

**[例8]**求这样的自然数n，使n6由数码0，2，3，4，4，7，8，8，9组成．

**解** 显然，203447889≤n6≤988744320．为了便于估计，我们把n6http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25332.JPG

　　另一方面，因已知九个数码之和是3的倍数，故n6及n都是3的倍数．这样，n只有24，27，30三种可能．但306结尾有六个0，故30不合要求．经计算得246=191102976，276=387420489．故所求的自然数n=27．

**[例9]**已知x，y是互素的自然数，k是大于1的自然数．找出满足：3n=xk+yk的所有自然数n，并给出证明．(1996年第22届俄罗斯中学数学奥林匹克试题)

　　答 n=2．

**证明**设3n=xk+yk，其中x与y互素(不妨设x＞y)，k＞1，n是自然数．显然，x，y中的任何一个都不能被3整除．

　　如果k是偶数，则xk和yk被3除时余数都是1．这样，xk与yk的和除以3时余数是2，而不是3的整数次幂．于是，推出矛盾，所以k不是偶数．

　　如果k是奇数且k＞1，则

　　3n=(x+y)(xk-1-…+yk-1)．

　　这样x+y=3m， m≥1．以下证明：n≥2m．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25333.JPG

　　要证明n≥2m，只要证明x3+y3≥(x+y)2，即证明x2-xy+y2≥x+y．

　　由于x≥y+1，则x2-x=x(x-1)≥xy．

　　(x2-x-xy)+(y2-y)≥0．

　　不等式n≥2m得证．

　　由恒等式(x+y)3-(x3+y3)=3xy(x+y)推出：

32m-1-3n-m-1=xy，①

　　而2m-1≥1，且

n-m-1≥n-2m≥0． ②

　　因此，如果②中至少有一个不等号是严格不等号，那么①式中的左端可被3整除，但右端不能被3整除，推出矛盾．

　　如果n-m-1=n-2m=0，那么m=1，n=2，且32=23+13．故n=2．

**[例10]** 求k的最大值，使311可以表示为k个连续正整数之和．(1987年美国数学邀请赛试题)

**解** 假设311表示成连续正整数之和

　　311=(n+1)+(n+2)+…+(n+k)，①

　　其中n是非负整数，k是正整数．

　　我们求满足①式的k的最大值．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25334.JPG

　　2·311=k(2n+k+1)，

　　显然k＜2n+k+1．要使等式左边较小的因数k尽可能地大，又必须使n非负，则最大的可能是

　　k=2·35，2n+k+1=36．

　　此时k=121为非负整数，满足题目要求．

　　∴311=122+123+…+607，

　　所求的最大的k为2·35=486．

**[例11]**试求一个非1的数k，使k和k4可以分别表示为相邻的两个整数的平方和，并证明这样的k只有一个．(1980年北京市初中数学竞赛题)

　　为证明此题，我们先证明三个引理．

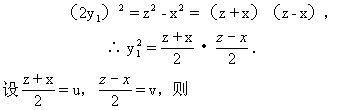
**引理1**不定方程

x2+y2=z2 ①

　　的适合条件x＞0，y＞0，z＞0，(x，y)=1且z|y的一切正整数解可以表示为

x=a2-b2，y=2ab，z=a2+b2， ②

　　其中a＞b＞0，(a，b)=1，并且a，b之中有一个为奇数，有一个为偶数．

**证明**∵(x，y)=1，由①式可判知x，y，z两两互质．又y是偶数，所以x，z必均为奇数．这时z+x，z-x均为偶数，所以http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25335.JPG  
　　

z=u+v， x=u-v．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25337.JPGv)=1知，u，v之中的每一个都必须是完全平方数．

　　令u=a2，v=b2，则有

　　z=u+v=a2+b2，x=u-v=a2-b2，

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25338.JPG

　　反过来，我们将

　　x=a2-b2，y=2ab，z=a2+b2

　　(a，b互质，a＞b＞0)

　　代入①，易知它是此不定方程在(x，y)=1，2|y情况下的一切正整数解．

**引理2**方程x2+y2=k4适合条件(x，y)=1，2|y的一切正整数解为

　　x=|r4+s4-6r2s2|，y=4rs(r2-s2)，k=r2+s2．其中r＞0，s＞0，(r，s)=1，r，s一奇一偶．

**证明** 由引理1知，x2+y2=(k2)2的一切正整数解可表示为

x=a2-b2， y=2ab， k2=a2+b2，③

　　其中(x，y)=1，2|y，a＞b＞0，(a，b)=1，a，b一奇一偶．

　　再对k2=m2+n2应用引理1，得

a=r2-s2，b=2rs，k=r2+s2，④

　　其中 r＞s＞0，(r，s)=1，r，s一奇一偶．

　　将④式中a，b的表达式代入③，并注意到可能对r，s的值有b＞a，因此

　　x=|a2-b2|=|r4+s4-6r2s2|，

　　y=4rs(r2-s2)，

　　k=r2+s2，

　　其中r＞s＞0，(r，s)=1，r，s一奇一偶．

**引理3**一个不等于1的正整数若能表为相邻的两个正整数的平方和，则表示方法是唯一的．

**证明**对一个不等于1的正整数k，假设存在不同的正整数a，b，都有

a2+(a+1)2=b2+(b+1)2=k2，

　　则 a2-b2=(b+1)2-(a+1)2，

　　即 (a+b)(a-b)=(a+b+2)(b-a)．

　　由于假设 a≠b，∴a-b=0，

　　∴ a+b=-(a+b+2)．

　　这就产生了一个正数与一个负数相等的矛盾．

　　因此，只能有a=b．引理3得证．

　　下面我们来证明原题：

　　由题意，k与k4均可表为相邻的两个整数的平方和，所以存在整数u，v，使得

k=(u+1)2+u2，k4=v2+(v+1)2．

　　显然k为不等于1的正整数，所以u，v也可限定为正整数．又(u+1，u)=1，(v+1，v)=1，所以可以对k4=v2+(v+1)2应用引理2．

　　(i)若v为偶数，则

v=4rs(r2-s2)，v+1=|r4+s4-6r2s2|，

k=r2+s2．(r＞s＞0，(r，s)=1)

　　但由引理3，k表为相邻两个正整数的平方和的方式唯一，所以 r=u+1，s=u．由此

　　r=4(u+1)u[(u+1)2-u**2]**

　　 =8u3+12u2+4u， ⑤

　　r+1=|(u+1)4+u4-6(u+1)2u2|

　　　 =4u4+8u3-4u-1． ⑥

　　⑥—⑤，得 1=4u4-12u2-8u-1，

　　即

2u4-6u2-4u-1=0．⑦

　　易知方程⑦无整数解．

　　(ii)若v为奇数，则

　　v+1=4(u+1)u[**(u**+1)2-u**2]**

　　　 =8u3+12u2+4u， ⑧

　　v=|(u+1)4+u4-6(u+1)2u2|

　　 =|-4u4-8u3+4u+1|

　　 =4u4+8u3-4u-1． ⑨

　　 ⑧—⑨，得1=-4u4+12u2+8u+1，

　　 即 u4-3u2-2u=0，u(u-2)(u+1)2=0．

　　 ∵u为正整数，∴u=2，u+1=3．

v=119，v+1=120．

**∴**k=32+22=13，经验证134=1192+1202．

　　 因此只有唯一的解k=13满足要求．

**习题五**

　　1．选择题

　　(1)在整数0，1，2，3，4，5，6，7，8，9中，质数的个数为x，偶数的个数为y，完全平方数的个数为z，则x+y+z等于

　　(A) 14．(B) 13．(C) 12．(D) 11．(E) 10．

　　(1984年北京市初二数学竞赛题)

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681113.jpg

　　(A)无理数．(B)末位数字是1的正整数．

　　(C)首位数字是5的数．(D)以上答案都不对．

　　(1985年北京市高一数学竞赛题)

　　(3)下列哪一个数一定不是某个自然数的平方(其中n为自然数)

　　(A)3n2-3n+3．(B) 4n2+4n+4．(C)5n2-5n-5．

　　(D)7n2-7n+7．(E)11n2+11n-11．

(1984年天津市初中数学竞赛题)

　　(4)下列各数：4822416，5382234，6573251，3352879是完全平方数的个数是

　　(A) 1．(B) 2．(C) 3．(D) 4．

　　(5)一个整数的平方称为完全平方数．若x是一个完全平方数，那么它的下一个完全平方数是

　　(A)x+1．(B)x2+1．(C)x2+2x+1．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25339.JPG

(1979年第30届美国中学生数学竞赛题)

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25340.JPG组x和y的值是

　　(A)x=88209，y=90288．(B)=82098，y=89028．

　　(C)x=28098，y=89082．(D)x=90882，y=28809．

(1991年江苏省初中数学竞赛题)

　　(7)已知数x=http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681114.jpg，则

　　(A)x是完全平方数．(B)x-50是完全平方数．

　　(C)x-25是完全平方数．(D)x+50是完全平方数．

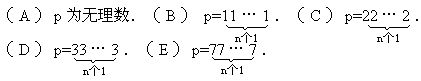
(第1届希望杯数学邀请赛初一试题)

　　(8)使得2n(n+1)(n+2)(n+3)+12可表成两个自然数的平方和的自然数n的个数是

　　(A) 0．(B) 1．

　　(C)有限的(但多于1)．(D)无限多的．

(1990年广州等五市初中数学联赛题)

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681115.jpg  
　　

(1983年重庆市初中数学竞赛题)

　　(10)一对四位数中，一个数的首末两个数字对调就是另一个数，那么两数和是四位数而且是完全平方数的这种数对有

　　(A) 4对．(B) 6对．(C) 8对．(D) 10对．

(1985年上海市高中数学竞赛题)

　　(11)三个连续自然数的平方和比它们的和的8倍还多2，则此三个自然数的平方和为

　　(A) 77．(B)149． (C)194．(D) 245．

(1991年第3届五羊杯初三数学竞赛题)

　　2．填空题

　　(1)设 a，b，c，d都是整数，且 m=a2+b2，n=c2+d2，则 mn也可以表示成两个整数的平方和，其形式是mn=\_\_\_\_．(1986年全国初中数学联赛题)

　　(2)已知1176a=b4，b为自然数，a的最小值是\_\_\_\_．(1982年上海市初中数学竞赛题)

　　(3)已知n为自然数，且9n2+5n+26的值是两个相邻自然数之积，则n=\_\_\_\_．(1985年上海市初中数学竞赛题)

　　(4)有四个数①921438；②76186；③750235；④2660161，其中只有\_\_\_\_是完全平方数．

　　(5)使得m2+m+7是完全平方数的所有整数m的积是\_\_\_\_．(1989年上海市初三数学竞赛题)

　　(6)使得n2-19n+91为完全平方数的自然数n的个数是\_\_\_\_．(1991年北京市初中数学竞赛题)

　　(7)自然数n减去52的差以及n加上37的和都是整数的平方，则n=\_\_\_\_．(1988年全国初中数学通讯赛题)

　　(8)若m是一个完全平方数，则比m大的最小完全平方数是\_\_\_\_．(1990年江苏省初中数学竞赛题)

　　(9)三个连续自然数的平方和(填“是”或“不是”或“可能是”)\_\_\_\_某个自然数的平方．(第1届希望杯数学邀请赛初一试题)

　　(10)一个两位数xy减去互换数字位置后的两位数yx所得之差恰是某自然数的平方，这样的两位数共有\_\_\_\_个．(1990年武汉市初二数学竞赛题)

　　(11)有两个两位数，它们的差是56，它们的平方数的末两位数字相同，则这两个数分别是\_\_\_\_．(1991年长沙市初中数学竞赛题)

　　(12)若p为质数，且方程x2+px-444p=0的两根均为整数，则p=\_\_\_\_．(第38届美国中学生数学竞赛题)

　　(13)恰有35个连续自然数的算术平方根的整数部分相同，那么这个相同整数等于\_\_\_\_．(1990年全国初中数学联赛题)

　　(14)如果x2+x+2m是一个完全平方式，则m=\_\_\_\_．(1989年“五羊杯”初二数学竞赛题)

　　(15)小于1000的正整数中，是完全平方数且不是完全立方数的数有\_\_\_\_个．(1989年“五羊杯”初二数学竞赛题)

　　(16)设21x2+ax+21可分解为两个一次因式之积，且各因式的系数都是正整数，则满足条件的整数a共有\_\_\_\_个．(1990年江苏省初中数学竞赛题)

　　3．两个正整数的和比积小1000，并且其中一个是完全平方数，试求较大数与较小数之比．(1987年北京市初二数学竞赛题)

　　4．已知直角三角形的两直角边长分别为l厘米，m厘米，斜边长为n厘米，且l，m，n均为正整数，l为质数，求证：2(l+m+1)是完全平方数．(1985年上海市初中数学竞赛题)

　　5．试证：12345678987654321是完全平方数．

　　6．求证：当n是非负整数时，3n+2×17n不是完全平方数．(1991年英国数学奥林匹克试题)

　　7．求证：197615+2不是一个自然数的平方．(1976年基辅数学竞赛题)

　　8．按任意的次序把1，2，…，1976这1976个自然数写成一排，求证：所得到的数不是一个完全平方数．(1976年基辅数学竞赛题)

　　9．试证：和数http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681117.jpg+1是完全平方数．

　　10．求证：凡是大于4的完全平方数，都可以用两个自然数的平方差来表示．

　　11．求证：a(a+1)+1必是非完全平方数．

　　12．求证：二奇数的平方和不是完全平方数．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25341.JPG证：(a+b)，(a－c)和(b－c)都是完全平方数．(1989年天津市“新蕾杯”初二数学竞赛题)

　　14．试求出所有具有如下性质的两位数：它与将它的两位数字颠倒后所得的两位数的和是完全平方数．(第8届莫斯科数学奥林匹克试题)

　　15．设n是整数，如果n2的十位数字是7，那么n2的个位数字是多少？(1978年第10届加拿大数学竞赛题)

　　16．有若干名战士，恰好组成一个八列长方形队列，若在队列中再增加120人或从队列中减去120人后，都能组成一个正方形队列，问原长方形队列共有多少名战士？(1991年天津市初中数学竞赛题)

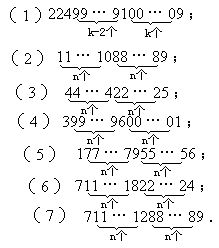
　　17．设有理数a，b满足等量关系式a5+b5＝2a2·b2，求证：1－ab是一个有理数的平方．(1990年安庆市初中数学竞赛题)

　　18．求证：http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681118.jpg．(1987年杭州市初中数学竞赛题)

　　19．http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681119.jpg

　　(1979年河南省中学数学竞赛题)

　　20．求证下列各数是完全平方数：



　　21．各位数字之和为(1)1983；(2)1984的完全平方数是否存在？(1983年基辅数学竞赛题)

　　22．求证：形如10n+2，10n+3，10n+7，10n+8的数都不是完全平方数．

　　23．试求有多少个四位数，它加上400后就成为一个自然数．

　　24．是否存在两个自然数a，b，使得a2+2b和b2+2a同时都是完全平方数．

　　25．试问数1111在什么进制中恰好表示一个平方数？

　　26．试求四位的完全平方数，它的千位数是其十位数加8，它的百位数是其个位数减4．

　　27．求出所有满足下列条件的两位数：它比用它的两个数码倒排后所得的数大一个完全平方数．

　　28．求证：相继三个自然数中的最大一数的立方不能等于另两个数的立方和．(1909年匈牙利数学奥林匹克试题)

　　29．求出一切这样的二位数，在它的前面写上与它相邻的连续整数后，得到的四位数是一个完全平方数．

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25342.JPG

　　31．设n是自然数，求证：n2+n+2不能被15整除．

　　32．设x，y，z都是整数，且满足x2+y2＝z2，求证：xy能被6整除．

　　33．求证：没有整数x和y满足x2－3y2＝1997．

　　34．是否有正整数m，n，满足m2+1987＝n2？

　　35．是否有正整数m，n，满足m2+1986＝n2？

　　36．是否有正整数m，n，满足m2+1988＝n2？

　　37．给定a，怎样求b，使a2+b2是一个完全平方数？

　　38．求证：四个连续的自然数的乘积不能表示成整数平方的形式．(1926年匈牙利数学奥林匹克试题)

　　39．假设a1，a2，a3，a4，a5和b是满足关系式http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25343.JPG(1931年匈牙利数学奥林匹克试题)

　　40．求证：方程a2+b2－8c＝6无整数解．(1969年第1届加拿大数学竞赛题)

　　41．用数码1，2，3，4，5，6各十个，随意排成一个六十位数N，求证：N不是完全平方数．

　　42．给出数列1，3，5，7，…，2k－1，…

　　(1)计算此数列的第991项；

　　(2)求证：19×104+a990，1919×104+a990，…，http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/t1681120.jpg×104+a990，…都不是完全平方数．

(1981年河南省高中数学竞赛题)

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25344.JPG

　　45．求所有的自然n，使得Sn＝9+17+25+…+(8n+1)是一个完全平方数．

　　46．如果f(x)＝x2+x，求证：方程4f(a)＝f(b)没有正整数a和b的解．(1977年加拿大第9届数学竞赛题)

　　47．试证n(n≥2)个互不相等的正整数的倒数的平方和不能是整数．(1982年上海市高中数学竞赛题)

http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25345.JPG

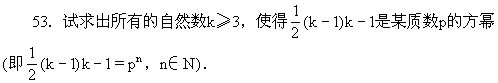
(1989年安庆市初中数学竞赛题)

　　49．求出所有满足S1－S2＝1989的完全平方数S1，S2．(1989年第30届IMO备选题)

　　50．如果n为大于1的整数，且3n+1正是一个完全平方数，求证：n+1是三个正整数的完全平方数之和．

　　51．求所求的正整数n，使得n3－18n2+115n－391是一个正整数的立方．

　　52．设n是正整数，求证：2n+1和3n+1都是完全平方数的充要条件是n+1同时为两个相继的完全平方数之和以及一个完全平方数和其相邻完全平方数2倍之和．(1994年澳大利亚数学奥林匹克试题)



(1991年安徽省数学奥林匹克学校招生试题)

　　54．令｛x｝＝x－［**x］**．(1)找出一个实数x，满足｛x｝http://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25347.JPG年全国初中数学联赛题)

　　55．试求两个不同的自然数，它们的算术平均数A和几何平均数G都是两位数，其中A，G中一个可由另一个交换个位和十位数字得到．(1993年浙江省初中数学竞赛题)

　　56．若x和y都是自然数，试证：x2+y+1和y2+4x+3的值不能同时都是完全平方数．(1992年北京市初二数学竞赛题)

　　57．设k1＜k2＜…是正整数，且没有两个是相邻的，又对于m＝1，2，3，…，Sm＝k1+k2+…+km．求证：对每一个正整数n，区间［Sn，Sn+1)中至少含有一个完全平方数．(1996年上海市高中数学竞赛题)

　　58．k为正整数，求证存在无限多个形如n·2k－7的平方数，这里n是正整数．(第36届IMO预选题)

　　59．在黑板上按以下规则写了若干个数：第一个数是1，其后的每一个数都等于已写数的个数加上这些已写数的平方和．求证：在黑板上不可能出现除1以外的完全平方数．(第26届独联体数学奥林匹克试题)

　　60．对任何整数n≥0，令S(n)＝n－m2，其中m是满足m2≤nhttp://edustar.library.nenu.edu.cn:8080/RESOURCE/CZ/CZSX/SXBL/SXTS1054/_OLE25348.JPG问对于哪些正整数A，这个数列最终为常数？(1991年第52届普特南数学竞赛题)