**数论精选题（三）**

**1﹒**已知*x*1，*x*2，……，*x*10都是正整数，且*x*1+*x*2+……+*x*10=99，求*x*+*x*+……+*x*的最大值和最小值。

([答案](#A1))

**2﹒**求方程=*q*的素数解（[*x*]表示不超过*x*的最大整数）。

([答案](#A2))

**3﹒**在6×6方格表中，已经按某种方式填入了整数1,2,3，……，36. 证明：可以从方格表中删去一行和一列，使得表中剩下的25个数的和为偶数。

([答案](#A3))

**4﹒**已知*p*是一个三位数，且是素数，又*p*的百位数是*a*，十位数是*b*，个位数是*c*，证明： 关于*x*的方程*ax*2+*bx*+*c*=0无整数解。

([答案](#A4))

**\*5﹒**从1,2,3，……，2004中任选*k*个正整数，使所选的*k*个数中，一定可以找到能构成三角形边长的3个数（这里要求三角形三边长互不相等），问：满足条件的*k*的最小值是多少？

([答案](#A5))

**6﹒**已知*p*、*q*都是素数，且使得关于*x*的方程*x*2-(8*p*-10*q*)*x*+5*pq*=0至少有一个正整数根，求所有的素数对（*p*，*q*）。

([答案](#A6))

**7﹒**设*an*表示与（*n*是正整数）最接近的整数，求的值。

([答案](#A7))

**8﹒**设*x*1，*x*2，……，*xp*都是正整数，且*x*1<*x*2<……<*xp*，并且满足=2008，求*p*及*x*1，*x*2，……，*xp*的值。

([答案](#A8))

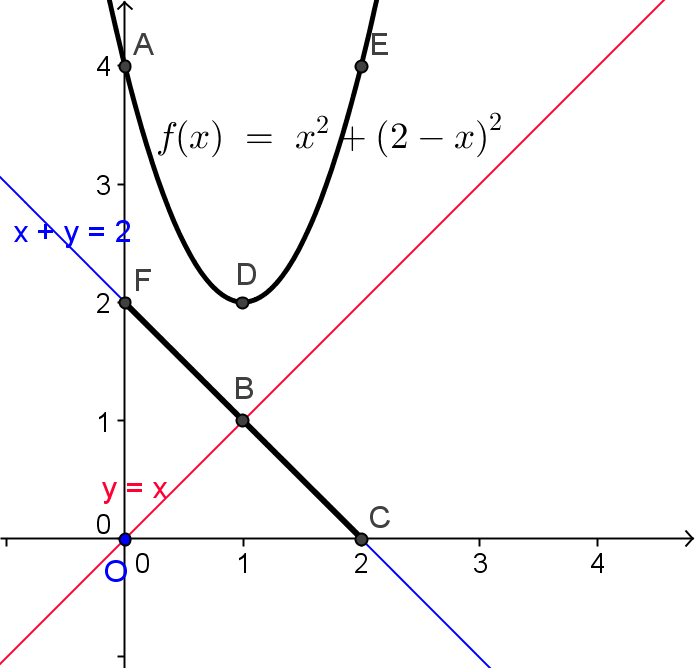
**9﹒**给定一个15位数，它的各位数字都是0和1，该数能被81整除，但不能被10整除，证明：不能删去它的某一个数字0，使所得的14位数能被81 整除。

([答案](#A9))

**10﹒** 试找出所有的正整数*n*，它的除了*n*之外的所有正约数的平方和等于2*n*+2.

([答案](#A10))

**《数论精选题三》参考答案**

**1﹒预备知识: 当两个非负数 *a*, *b*之和为常数*c*时，求*a*2+*b*2的最值；**

**显然由均值不等式得到 *c*=*a+b*≥2，所以 0≤ *ab* ≤*c*2/4;**

**又 *a*2+*b*2=(*a*+*b*)2 -2*ab*=*c*2-2*ab*, 所以 当*a=b=c*/2时，(|*a-b*|=0), 原式有最小值 *c*2/2,**

**当|*a-b*|=*c*时，原式有最大值 *c*2. 图像如右图：**

解：因为将99分解为10个正整数的和，有有限组正整数解，（参见《隔板法求解正整数解》），所以这10个正整数的平方和一定有最大值和最小值。

不妨设1≤*x*1≤*x*2≤……≤*x*10 ，我们知道：当*a*，*b*都是正数时，且*a*+*b*为常数，有*ab*≤[（*a*+*b*）/2]2, 当且仅当*a*=*b*时（*a*与*b*相差的绝对值最小），*ab*取最大值，且*a*2+*b*2取最小值。另外，当*a*与*b*相差的绝对值最大时，它们的平方和*a*2+*b*2取最大值。

由上述分析可知：当*x*1=*x*2=……=*x*10时，取最小值，但是*xi*是正整数，故可取*x*1=9，*x*2=……=*x*10=10，这时平方和的最小值为81+900=981.

另外 若*x*1>1，因为*x*1+*x*2=(*x*1-1)+(*x*2+1), 且(*x*1-1)2+(*x*2+1)2=*x*12+*x*22+2(*x*2-*x*1+1)> *x*12+*x*22,

所以，当用*x*1-1，*x*2+1，*x*3，*x*4，……，*x*10来代替*x*1，*x*2，……，*x*10时，它们的和仍然是99，但是它们的平方和增加了。这与*x*1，*x*2，……，*x*10已使得这10个数的平方和取得最大值矛盾，故*x*1=1，同理，*xi*=1，*i*=1,2,3，……，9，于是*x*10=99-9=90，这时10个正整数的平方和将最大，且最大值为9+8100=8109；

【另外一种求最小值方法】假定*x*1，*x*2，……，*x*10满足*x*1+*x*2+……+*x*10=99，且使得它们的平方和取得最小值，不妨设1≤*x*1≤*x*2≤……≤*x*10，

若存在*xi*，*xj* （1≤*i*<*j*≤10）,使得*xj*-*xi*≥2，因为

(*xj*-1)2+( *xi*+1)2-( *xj*2+*xi*2)=2(*xi* - *xj*)+2≤-2<0,

所以 当用*xi*+1和*xj*-1代替*xi* 和 *xj*，其它条件不变，它们的和仍然是99，但是它们的平方和减少了，这与*xi*使得它们的平方和取得最小值矛盾。

于是，当*xi*使得它们的平方和取得最小值时，*xi*中任意两个数的差的绝对值不超过1，从而，这10个数只能为1个9,9个10，故它们的平方和的最小值为92+9×102=981。

注：这是一个多变量函数的最值问题，带一个约束条件。 或者说是离散量的最值问题。采用了逐步调整法。

**逐步调整法：**在确定最大值或最小值存在的前提下，先通过逐步调整变量之间的关系来找出取到最值所需满足的必要条件，然后再求得最大值或最小值的方法。利用逐步调整法需要注意的是：必须在最大值或最小值存在的前提下，调整才有意义。 （[返回](#T1)）

**2﹒**解：考虑到分母的最小公倍数为6，故根据模6的同余类来进行分类讨论。

（1）当*p*为6*k*，6*k*±2=2(3*k*±1)时，其中*k*为正整数，*p*都不是素数，忽略；

（2）当*p*=6*k*+1时，[*p*/2]+[*p*/3]+[*p*/6]=3*k*+2*k*+*k*=6*k*=*q*, *q*不是素数，忽略；

（3）当*p*=6*k*-1时，[*p*/2]+[*p*/3]+[*p*/6]=(3*k*-1)+(2*k*-1)+(*k*-1)=6*k*-3=3(2*k*-1)=*q*, 当2*k*-1=1，即*k*=1时，*q*=3，*p*=5，都是素数，满足条件；

（4）当*p*=6*k*+3时，[*p*/2]+[*p*/3]+[*p*/6]=(3*k*+1)+(2*k*+1)+*k*=6*k*+2=2(3*k*+1)=*q*, 当3*k*+1=1，即*k*=0时，*q*=2，*p*=3，都是素数，满足条件；

综上所述，（*p*，*q*）=（3,2）和（5,3）为所求的两组素数解。

注：通过观察已知条件，将*p*按照 mod 6来进行分类讨论，是关键。 （[返回](#T2)）

**3﹒**证明：将第 *i* 行的和记作*αi*, 第 *j* 列的和记作*βj*, 并将第 *i* 行与第 *j* 列相交处的方格中的数记作 *xij*. 由于方格表中所有数的和 ( 记作 *A*) 为偶数 , 所以 , 当且仅当 *αi* + *βj* - *xij* 为偶数时 , 可以删去第 *i* 行与第 *j*列 , 得到所要求的 25 个数.

(1) 若 *α* 1 ,*α* 2 , …,*α* 6 及 *β* 1 ,*β* 2 , …,*β* 6 都为偶数 ,则任取一个偶数 *xij*, 都有*α* *i* +*β* *j* - *xij*为偶数.

(2) 若 *α* 1 ,*α* 2 , …,*α* 6 及 *β* 1 ,*β* 2 , …,*β* 6 中有奇数，不妨设为*βj*. 由(*α* *i* +*β* *j* - *xij*)= +6*β* *j-*=*A*+5*βj*为奇数, 故存在一个 *i* ( 1 ≤*i* ≤ 6) , 使得 *α* *i* +*β* *j* - *xij*为偶数.

注：分类讨论的依据是*αi* ， *βj*是奇数还是偶数， （[返回](#T3)）

**4﹒**证明：反证法，设有整数解*x*0，则有*ax*02+*bx*0+*c*=0，因为*p*为素数，*c*为*p*的个位数，故*c*只可能是1,3,7,9；又*a*是首位，所以*a*∈[1,9],为非零数字，且大于零；故*bx*0= -(*ax*02 +*c*)<0, 所以*x*0<0， （1）

且*b*为非零数字，且大于零，即*b*∈[1,9]； （2）

又 *c*=*p*-100*a*-10*b*；代入方程，消去*c*得到：

*ax*02+*bx*0+*p*-100*a*-10*b*=0, *p*=(10-*x*0)(10*a*+*ax*0+*b*),

且*c*= -(*ax*02+*bx*0)= -*x*0(*ax*0+*b*)∈[1,9], 故 1≤-*x*0≤9， （3）

所以 11≤10-*x*0≤19, 10*a*+*ax*0+*b*>1都为整数，这与*p*为素数矛盾。 （[返回](#T4)）

**5.** 解: 构成三角形的条件，**两短边之和大于长边**，现在列出临界的不能构成三角形的数列，以求得不满足构成三角形最大*k*值(这个临界数列也就是两短边和等于第三边，只要存在一个数破坏这个临界数列，那么就可以构成三角形了) ；

**1 ，2， 3， 5， 8，...，*Fk*-2+*Fk*-1，其中*Fk*＝*Fk*－2+*Fk*－1，*k*≥3，*k*∈*N***

其实这是一个去掉了首项的*Fibonacci*（斐波那契）数列，*Fibonacci*数列第*n*项的计算公式，实际上是无理数的幂次方组成的，

根据*Fibonacci*数列公式，第18项的值大于2004.

（1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597, 2584, 4181, 6765, 1096,…. 这个数列满足任意三数*a*<*b*<*c*时，都有*a*+*b*≤*c*）,**特别指出**：[0](http://zh.wikipedia.org/wiki/0)不是第一项，而是第零项。

在我们这里也就是第17项，当*k*取17的时候，即如果我们在其中任意插入一个数，就足以有三个数*a*<*b*<*c*,使得 *a*+*b*>*c*, 那么定能存在三个数构成三角形!故*k*最小为17.

注：从问题的反面来考虑问题，最多可以选多少数，以这些数中任意三个数都不可能构成三角形为出发点来求解。 （[返回](#T5)）

**6﹒解：**设一元二次方程两根分别为*x*1，*x*2，由韦达定理（一元二次方程有关根与系数的关系）得到：

*x*1+*x*2 = 8*p*-10*q* （1）

*x*1*x*2 = 5*pq* （2）

由题意知：至少有一个正整数根，不妨设为*x*1，则*x*1可能是1,5，*p*，*q*，5*p*，5*q*，*pq*，5*pq*, （5*pq*的约数），此时对应的*x*2为5*pq*，*pq*，5*q*，5*p*，*q*，*p*，5，1；故*x*1+*x*2可能为1+5*pq*，5+*pq*，*p*+5*q*，*q*+5*p*，

由（1）式得知：右边是偶数，则*x*1和*x*2同奇偶；将上述*x*1+*x*2代入（1）得到：

（*a*）1+5*pq*=8*p*-10*q*，因为*q*≥2，所以 1+5*pq*≥1+10*p*，故8*p*-10*q*≥1+10*p*，-10*q*≥1+2*p*，而1+2*p*≥5，不等式不可能成立；

（*b*）5+*pq*=8*p*-10*q*，即5(1+2*q*)=*p*(8-*q*), 经检验 *p*=1+2*q*，5=8-*q*，即*q*=3，*p*=7是一组素数解；

（*c*）*p*+5*q*=8*p*-10*q*，即7*p*=15*q*，无素数解；

（*d*）*q*+5*p*=8*p*-10*q*，即3*p*=11*q*，故*p*=11，*q*=3是另一组素数解。

注：从约数种类枚举分析，考虑了*p*、*q*为素数，不可再分解。 （[返回](#T6)）

**7﹒解:** 设*an*=*k* (=*round*()), 这里*n*是正整数，*k*也是正整数，由题意知

|-*k*|< ，解这个不等式得到 (*k*-)2<*n*<(*k*+)2, 所以 *k*2-*k*+1/4与*k*2+*k*+1/4之间有2*k*个正整数。即集合*A*={ *ai*|*i*=1,2,3，……，2006}中有2个1,4个2,6个3，8个4，……，88个44,26个45. （当*k*=45时， (45-1/2)2=1980+1/4, 故 1980<*n*≤2006, 这中间有26个正整数），故原式=2×+4×+6×+……+88×+26×=2×44+=88，

注：关键是注意取整函数的定义，得到区间中的整数个数。 （[返回](#T7)）

**8﹒解：**首先我们知道 211=2048，故2008=2048-40=211-32-8=211-25-23，也就是

=23(28-22-1), 所以 *x*1=3，代入化简得到

22+=28-2(=21+22+23+……+27)，故一一对应可以得到

*x*2=3+1=4，*x*3=3+3=6,*x*4=7，*x*5=8，*x*6=9，*x*7=10，即*p*=7。 （[返回](#T8)）

**9﹒证明:** 因为81=92，所以这个15位数必定是9的倍数，根据弃九法可知，必定有9个1，和6个0，设这个15位数为 =*A*，9|*A*，81|*A*，记*B*=，*B*最多8个1，至少1个1，所以 10-*A*=9，

若上式左边是81的倍数，又81|*A*，则左边是81的倍数，从而右边*B*是9的倍数，这与*B*最多包含8个1或最少包含1个1矛盾，故不是81的倍数。注：构造法是关键，分拆原数为两部分。 （[返回](#T9)）

**10﹒解：**显然当*n*=*p*为素数时，其除*n*之外的正约数就是1, 且12≠2*p*+2，首先*n*不为素数，

设*n*=*ab*，（*a*>1，*b*>1，且为素数），由题意知：

1+*a*2+*b*2=2*ab*+2，即(*a*-*b*)2=1，|*a*-*b*|=1，由于*a*，*b*为素数，所以(*a*, *b*)=(2,3) 或 (3,2),

所以 *n*=*ab*=6 （[返回](#T10)）