**数论精选题（六） ——整数与整除**

**1﹒**设a、b为正整数，若a2+b2被ab整除，证明：a=b

([答案](#A1))

**2﹒**已知n为正整数，N=[n+1,n+2m,…,3n]是n+1,n+2,…,3n的最小公倍数，如果N可以表示成N=210×奇数，问：n的可能值有多少个？

([答案](#A2))

**3﹒**证明：如果自然数n大于4，并且不是素数，那么从1到n-1的连续n-1个自然数的积被n整除。

([答案](#A3))

**4﹒**（1）证明：没有一个形如2n（n为任意正整数）的数可以表示成两个或多个连续正整数之和。

（2）一个正整数，当且仅当它不是2的整数幂时，可以表示成至少两个连续正整数之和。

([答案](#A4))

**5﹒** 证明：对于任何正整数m，m(m+1)不是指数大于1的整数幂。

([答案](#A5))

**6﹒**证明：n（≥2）个互不相等的正整数的倒数的平方和不是整数。

([答案](#A6))

**7﹒**设n>2是自然数，a1<a2<…<ak是小于n并且与n互素的全部自然数，证明：a1，a2，…，ak中至少有一个素数。

([答案](#A7))

**8﹒**求所有的正整数n，使得-1是一个素数。

([答案](#A8))

**9﹒**设素数从小到大依次为p1，p2，p3，……，证明：当n≥2时，数pn+pn+1可以表示为3个大于1的正整数（可以相同）的乘积的形式。

([答案](#A9))

**10﹒** 求所有的正整数n，使得n=d(n)2, （这里 d(n)为n的正约数个数）

([答案](#A10))

11. 数列{an}的每一项都是正整数，a1≤a2≤a3≤…，且对任意正整数k，该数列中恰有k项等于k，求所有的正整数n，使得a1+a2+a3+…+an是素数。

([答案](#A9))

12. 设正整数n至少有4个不同的正约数，且0<d1<d2<d3<d4是n的最小的4个正约数，它们满足d12+d22+d32+d42=n，求所有这样的n。

([答案](#A9))

**《数论精选题六》参考答案**

1﹒证明：设(a,b)=d, 则 a=a1d，b=b1d，且(a1,b1)=1;

所以 a1b1d2|a12d2+b12d2

所以 a1b1|a12+b12 又(a1,b1)=1

所以 a1|a12+b12 ，即a1| b12 ， 又(a1,b1)=1，故(a1,b12)=1,

所以 a1|1，a1=1， 同理 b1=1，从而 a=b

证二： 设 a2+b2=kab，看成是关于a的一元二次方程，有正整数解，

故 判别式∆=（k2-4）b2, 故 k2-4是完全平方数，设k2-4=c2，（c为整数），(k+c)(k-c)=4

由于k+c与k-c同奇偶，故有

k+c=2

k-c=2

解得 k=2， c=0

从而 (a-b)2=0 , 所以 a=b

（[返回](#T1)）

2﹒解：由题意知n+1到3n中含有210=1024的奇数倍，不含211=2048的倍数。

所以 3n-(n+1)+1≤2047, n≤1023

设n+1≤1024k≤3n （k为奇数），

所以 1024k≤3069， 故k≤2，故k=1

所以 n+1≤1024≤3n≤2048

342≤n≤682，共682-342+1=341个。

（[返回](#T2)）

3﹒证明：设n=ab，（1<a, b<n）

若a≠b，则 a， b均在1~n-1中出现，所以 n=ab|

若a=b，则n=a2，因为 n>4, 所以 a>2, 2a<a2=n,

所以 a，2a在1~n-1中出现，2a2|，故n=a2|

（[返回](#T3)）

4﹒（1）若2n =k+(k+1)+(k+2)+…+(k+m) = (m+1)k+m(m+1)/2=(m+1)(2k+m)/2

所以 2n+1=（m+1）(2k+m)

（[返回](#T4)）

5.

（[返回](#T5)）

6﹒

（[返回](#T6)）

7﹒

（[返回](#T7)）

8﹒

（[返回](#T8)）

9﹒

（[返回](#T9)）

10﹒

（[返回](#T10)）